

Schriftliche Abiturprüfung

Mathematik

Hinweise und Beispiele zu den
zentralen schriftlichen Prüfungsaufgaben

Teil 3: Stochastik



Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung

Impressum

Herausgeber:

Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung
Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung
Hamburger Straße 31, 22083 Hamburg

Referat: Mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Unterricht
Referatsleitung: Werner Renz
Fachreferent Mathematik: Winfried Euba

Redaktion: Waltraut Barthel, Gymnasium Tonndorf
Manfred Dabelstein, Wirtschaftsgymnasium Harburg (H 10)
Dr. Janina Fehrmann, Hansa-Gymnasium Bergedorf
Stefan Gottuk, Gymnasium Hamm
Jochen W. Griesse, Wirtschaftsgymnasium Harburg (H 10)
Ulrike Gutschner, Gelehrtenschule des Johanneums
Dr. Klaus Henning, Christianeum
Thea Hufschmidt, Sophie-Barat-Schule
Reinhard Janz, Technisches Gymnasium (G 16)
Gerd Johanning, Wirtschaftsgymnasium (H 2)
Dr. Ulrich Kotzott, Gymnasium Willhöden
Dr. Wolfgang Löding, Li-Q
Antje Loose, Charlotte-Paulsen-Gymnasium
Ursula Mersiowsky, Gymnasium Oberalster
Gerd Muhra, Gesamtschule Mümmelmannsberg
Kerstin Ottenberg, Gymnasium Kirchdorf/Wilhelmsburg
Renate Otter, Peter-Petersen-Schule
Annelies Paulitsch, Li-A und Gymnasium Osdorf
Helmut Springstein, Li-F und Gymnasium Othmarschen
Monika Thomas-Tschirschnitz, Hansa-Kolleg
Dieter Stahl, Alexander-von-Humboldt-Gymnasium
Karl-Heinz Wischnewski, Technisches Gymnasium (G 17)

Alle Rechte vorbehalten.

Internet: <http://www.mint-hamburg.de/abitur/>

4. überarbeitete Auflage

Hamburg 2008

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	4
1 Regelungen für die schriftliche Abiturprüfung	5
2 Anforderungsbereiche	5
3 Liste der Operatoren	7
4 Aufgabenbeispiele.....	10
4.1 Grundkurs, Themenbereiche G2 und G5	11
4.2 Leistungskurs, Themenbereiche L2 und L5	24
5 Lösungen	40
5.1 Lösungen - Grundkursaufgaben	40
5.2 Lösungen - Leistungskursaufgaben.....	69
6 Anhang: Tabellen	101

Vorwort

Sehr geehrte Kolleginnen und Kollegen,

mit der zum August 2003 in Kraft tretenden *Ausbildungs- und Prüfungsordnung zum Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife* (APOAH) wurden zentrale Elemente in der schriftlichen Abiturprüfung eingeführt.

Die Abituraufgaben beziehen sich im Fach Mathematik auf Schwerpunkte, die den Schulen jeweils am Ende der Vorstufe für das Abitur dieses Jahrgangs von der Behörde für Bildung und Sport in einer eigenen Verwaltungsvorschrift zur Kenntnis gegeben werden.

In der Ihnen hier vorgelegten ergänzenden Handreichung, die die entsprechende Verwaltungsvorschrift ausführt, werden Ihnen Beispiele gezeigt, wie die Aufgaben für die schriftlichen Abiturprüfungen ab dem Jahre 2007 formuliert werden.

Die Aufgabenbeispiele entsprechen in den meisten Fällen den Ihnen bekannten Hamburger *Richtlinie für die Aufgabenstellung und Bewertung der Leistungen in der Abiturprüfung*. Die Arbeitsgruppe, die die Handreichung erstellte, hatte den Auftrag, Aufgabenbeispiele auf der Grundlage des neuen Rahmenplans Mathematik für die gymnasiale Oberstufe 2004 zu formulieren.

Die Aufgaben enthalten verbindlich definierte Arbeitsaufträge („Operatoren“); in den Erwartungshorizonten werden die Kriterien und die Anforderungen u. a. für eine „gute“ und für eine „ausreichende“ Leistung beschrieben. Beides dient dem Ziel, mehr Verbindlichkeit und Vergleichbarkeit zu schaffen.

Hinzu kommt, dass die *Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung* (EPA) für alle Prüfungsfächer derzeit überarbeitet werden. Für Mathematik liegen sie bereits vor. Wenn alle neuen EPA als KMK-Beschlüsse vorliegen, wird die oben genannte Hamburger Richtlinie überarbeitet und den jeweiligen EPA angepasst werden. Erst dann wird es für die Aufgabenarten und die Anforderungen vermutlich Veränderungen geben.

In der Hoffnung, dass die vorliegende Handreichung hilfreich für Sie und Ihre Unterrichtsarbeit ist, wünsche ich Ihnen und Ihren Schülerinnen und Schülern eine erfolgreiche Vorbereitung auf das Abitur.

Den Mitgliedern der Arbeitsgruppe, die diese Handreichung erstellte, möchte ich sehr herzlich für die geleistete intensive und zeitaufwendige Arbeit danken.

Werner Renz

1 Regelungen für die schriftliche Abiturprüfung

Die Fachlehrerin, der Fachlehrer

- erhält **sechs** Aufgaben – **I.1, I.2** (Themenbereiche G/L 1 und G/L 4) und **II.1, II.2** (Schwerpunkt Analytische Geometrie) und **III.1, III.2** (Schwerpunkt Stochastik),
- wählt aus genau zwei Bereichen **I und II** oder **I und III** genau **zwei** Aufgaben aus.

Die Abiturientin, der Abiturient

- erhält **die beiden** Aufgaben und bearbeitet diese,
- vermerkt auf der Reinschrift, welche Aufgabe sie/er bearbeitet hat,
- ist verpflichtet, die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben vor Bearbeitungsbeginn zu überprüfen (Anzahl der Blätter, Anlagen usw.).

Bearbeitungszeit: Grundkurs: **240** Minuten

Leistungskurs: **300** Minuten

Eine Vorbereitungs-, Lese- und Auswahlzeit von maximal 30 Minuten kann der Arbeitszeit vorgeschaltet werden. In dieser Zeit darf noch nicht mit der Lösung der Aufgaben begonnen werden.

Hilfsmittel: Taschenrechner (nicht programmierbar und nicht grafikfähig),
Formelsammlung, Rechtschreiblexikon

Die in den zentralen schriftlichen Abituraufgaben verwendeten **Operatoren** (Arbeitsaufträge) werden im Anhang genannt und erläutert.

Grundlage der schriftlichen Abiturprüfung ist der geltende Rahmenplan in der Fassung von 2004. **Der inhaltliche Rahmen für die schriftliche Abiturprüfung wird durch die Hinweise und Beispiele zu den zentralen schriftlichen Prüfungsaufgaben festgelegt und konkretisiert.** Die wechselnden curricularen Vorgaben, Konkretisierungen und Schwerpunktsetzungen werden den Schulen jeweils im zweiten Semester der Vorstufe bekannt gegeben. Für die schriftliche Abiturprüfung können sie dem Heft *Schriftliche Abiturprüfung - Regelungen für die zentralen schriftlichen Prüfungsaufgaben* entnommen werden.

2 Anforderungsbereiche

Die Anforderungen in der Abiturprüfung unterscheiden sich nach der Art, der Komplexität und dem Grad der Selbstständigkeit der geforderten Leistung; sie verlangen unterschiedliche Arbeitsweisen. Zur Erhöhung der Transparenz und Vergleichbarkeit lassen sich drei Anforderungsbereiche beschreiben, ohne dass in der Praxis der Aufgabenstellung die drei Anforderungsbereiche immer scharf voneinander getrennt werden können. Daher ergeben sich bei der Zuordnung der Teilaufgaben zu Anforderungsbereichen Überschneidungen.

Die zentralen Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung ermöglichen Leistungen in den folgenden drei Anforderungsbereichen mit einem Schwerpunkt im Anforderungsbereich II:

Anforderungsbereich I

Der Anforderungsbereich I umfasst die Wiedergabe von Sachverhalten und Kenntnissen im gelernten Zusammenhang sowie die Beschreibung und Anwendung geübter Arbeitstechniken und Verfahrensweisen in einem wiederholenden Zusammenhang.

Im Fach Mathematik kann zum Anforderungsbereich I gehören:

- Bereitstellen von Definitionen, Sätzen und einfachen Beweisen
- Beschreiben eines einfachen Sachverhalts, eines bekannten Verfahrens oder eines standardisierten Lösungsweges
- Anfertigen von Skizzen auf eine aus dem Unterricht bekannte Weise; Skizzieren der Graphen von Grundfunktionen
- Ausführen von geübten Algorithmen wie z.B. Ableiten und Integrieren in einfachen Fällen, Lösen von einfachen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen nach eingeübten Verfahren
- Verwenden des Rechners als Werkzeug z.B. zum Zeichnen eines geeigneten Ausschnitts des Graphen einer Funktion, beim Lösen von Gleichungssystemen, beim Berechnen von Ableitungen und von Integralen
- Bestimmen der Extremwerte einer Funktion in Fällen, in denen das eingeübte Verfahren unmittelbar zum Ziel führt
- Feststellen der Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden oder Ebenen mit Hilfe eines durch Übung vertrauten Verfahrens
- Bestimmen von Geraden- und Ebenengleichungen bei Vorgabe einfacher und gewohnter Bedingungen
- Darstellen statistischer Daten und Ermitteln statistischer Kenngrößen in einfachen Fällen
- Bestimmen und Berechnen von Wahrscheinlichkeiten in einfachen, vom Unterricht her vertrauten Zusammenhängen

Anforderungsbereich II

Der Anforderungsbereich II umfasst das selbstständige Auswählen, Anordnen, Verarbeiten und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Übung bekannten Zusammenhang und das selbstständige Übertragen und Anwenden des Gelernten auf vergleichbare neue Zusammenhänge und Sachverhalte.

Im Fach Mathematik kann zum Anforderungsbereich II gehören:

- Veranschaulichen und Beschreiben von Zusammenhängen bei bekannten Sachverhalten mit Hilfe von Bildern, Texten und Symbolen
- Dokumentieren eines Lösungsweges in sachgerechter mathematischer Form
- Verfassen eines mathematischen Kurzaufsatzes in bekannten Zusammenhängen
- Ausführen von Beweisen, deren Beweisstruktur aus dem Unterricht bekannt ist
- Anwenden von zentralen Begriffen in Beispielen, die in ihrer Struktur einfach sind
- Interpretieren charakteristischer Eigenschaften einer Funktion anhand ihres Graphen
- Übersetzen eines Schaubildes in einen Funktionsterm oder eines Funktionsterms in eine Skizze
- Anpassen von Funktionen an vorgegebene Bedingungen, wenn ähnliche Vorgehensweisen aus dem Unterricht bekannt sind
- Durchführen vollständiger Fallunterscheidungen in überschaubaren Situationen
- gezieltes Verwenden des Rechners bei der Lösung komplexerer Probleme
- Übersetzen einer Ausgangssituation in ein geeignetes mathematisches Modell (z.B. Koordinatensystem, Funktionsterm, Gleichungssystem, Wahrscheinlichkeitsverteilung), wenn ähnliche Modellierungen aus dem Unterricht bekannt sind

- sachgerechtes und begründetes Argumentieren bei der Darstellung eines Modellansatzes oder bei der Auswahl eines Lösungsweges
- verständiges Anwenden der Beziehung zwischen Änderungsrate und Gesamtänderung in bekannten Situationen
- analytisches Beschreiben von geometrischen Objekten, wobei die sie bestimmenden Parameter erst aus anderen Bedingungen erschlossen werden müssen
- Vergleichen und Bewerten verschiedener Lösungsansätze in einem durch Übung bekannten Zusammenhang
- Analysieren und Modellieren stochastischer Prozesse in aus dem Unterricht bekannter Weise
- Durchführen eines aus dem Unterricht bekannten Verfahrens der beurteilenden Statistik
- Beschaffen, Strukturieren, Auswählen und Auswerten von Informationen zu einer überschaubaren Problemstellung in einer im Unterricht vorbereiteten Vorgehensweise
- Präsentieren von Arbeitsergebnissen in übersichtlicher, gut strukturierter Form

Anforderungsbereich III

Der Anforderungsbereich III umfasst das zielgerichtete Verarbeiten komplexer Sachverhalte mit dem Ziel, zu selbstständigen Lösungen, Gestaltungen oder Deutungen, Folgerungen, Begründungen und Wertungen zu gelangen. Dabei wählen die Schülerinnen und Schüler aus den gelernten Arbeitstechniken und Verfahren die zur Bewältigung der Aufgabe geeigneten selbstständig aus, wenden sie in einer neuen Problemstellung an und beurteilen das eigene Vorgehen kritisch.

Im Fach Mathematik kann zum Anforderungsbereich III gehören:

- kreatives Übersetzen einer komplexeren Ausgangssituation in ein geeignetes mathematisches Modell, ohne dass dies in vergleichbaren Zusammenhängen geübt wurde
- planvolles, begründetes Nutzen und Bewerten von Informationen bei komplexeren oder offeneren Problemstellungen
- Auffinden eines Lösungsansatzes für Probleme, bei denen Kenntnisse aus verschiedenen Teilgebieten der Mathematik verbunden werden müssen, ohne dass dies in vergleichbaren Zusammenhängen geübt wurde
- Überprüfen und Bewerten der Vorgehensweise sowie Interpretieren und Beurteilen der Ergebnisse z.B. bei einer Modellierung oder beim Umgang mit Informationen
- Anwenden zentraler Begriffe und Vorgehensweisen in komplexeren Zusammenhängen
- Verallgemeinern eines Sachverhalts, der nur von Beispielen her bekannt ist
- Ausführen eines Beweises, zu dem eigenständige Beweisgedanken erforderlich sind

3 Liste der Operatoren

Mehr noch als bei dezentralen Aufgaben, die immer im Kontext gemeinsamer Erfahrungen der Lehrkräfte und Schüler mit vorherigen Klausuren stehen, müssen zentrale Prüfungsaufgaben für die Abiturientinnen und Abiturienten eindeutig hinsichtlich des Arbeitsauftrages und der erwarteten Leistung formuliert sein. Die in den zentralen schriftlichen Abituraufgaben verwendeten Operatoren (Arbeitsaufträge) werden in der folgenden Tabelle definiert und inhaltlich gefüllt. Entsprechende Formulierungen in den Klausuren der Studienstufe sind ein wichtiger Teil der Vorbereitung der Schülerinnen und Schüler auf das Abitur.

Neben Definitionen und Beispielen enthält die Tabelle auch Zuordnungen zu den Anforderungsbereichen I, II und III (vgl. die *Richtlinie für die Aufgabenstellung und Bewertung der Leistungen in der Abiturprüfung*), wobei die konkrete Zuordnung auch vom Kontext der Aufgabenstellung abhängen kann und eine scharfe Trennung der Anforderungsbereiche nicht immer möglich ist.

Operatoren	Definitionen	Beispiele
Angeben, nennen I	Ohne nähere Erläuterungen und Begründungen, ohne Lösungsweg aufzählen	Geben Sie drei Punkte an, die in der Ebene liegen. Nennen Sie drei weitere Beispiele zu ...
Anwenden I – II	Einen bekannten Sachverhalt oder eine Handlungsanweisung, Formel, Vorschrift auf Elemente ihres jeweiligen Definitionsbereichs anwenden.	Wenden Sie das in Matrix L gegebene Populationsmodell auch auf den Bestand B an. Wenden Sie die Funktionsgleichung auch auf die gegebenen Zahlen an.
Begründen II–III	Einen angegebenen Sachverhalt auf Gesetzmäßigkeiten bzw. kausale Zusammenhänge zurückführen. Hierbei sind Regeln und mathematische Beziehungen zu nutzen.	Begründen Sie, dass die Funktion nicht mehr als drei Wendestellen aufweisen kann. Begründen Sie die Zurückweisung der Hypothese.
Berechnen I	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses.
Beschreiben I–II	Sachverhalt oder Verfahren in Textform unter Verwendung der Fachsprache in vollständigen Sätzen darstellen (hier sind auch Einschränkungen möglich: „Beschreiben Sie in Stichworten“)	Beschreiben Sie den Bereich möglicher Ergebnisse. Beschreiben Sie, wie Sie dieses Problem lösen wollen, und führen Sie danach Ihre Lösung durch.
Bestätigen I–II	Eine Aussage oder einen Sachverhalt durch Anwendung einfacher Mittel (rechnerischer wie argumentativer) sichern. Der Anspruch liegt deswegen unterhalb von „Zeigen“ oder „Beweisen“.	Bestätigen Sie, dass die gegebene Funktion eine Stammfunktion zur Ursprungsfunktion ist. Bestätigen Sie die Parallelität der beiden Ebenen. Bestätigen Sie, dass in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit unter 0,1 liegt.
Bestimmen, ermitteln II–III	Einen Lösungsweg darstellen und das Ergebnis formulieren (die Wahl der Mittel kann unter Umständen eingeschränkt sein)	Ermitteln Sie grafisch den Schnittpunkt. Bestimmen Sie aus diesen Werten die Koordinaten der beiden Punkte.
Beurteilen III	Zu einem Sachverhalt ein selbstständiges Urteil unter Verwendung von Fachwissen und Fachmethoden formulieren	Beurteilen Sie, welche der beiden vorgeschlagenen modellierenden Funktionen das ursprüngliche Problem besser darstellt.
Beweisen, widerlegen III	Beweisführung im mathematischen Sinne unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischer Schlüsse und Äquivalenzumformungen, ggf. unter Verwendung von Gegenbeispielen	Beweisen Sie, dass die Gerade auf sich selbst abgebildet wird.
Entscheiden II	Bei Alternativen sich begründet und eindeutig auf eine Möglichkeit festlegen	Entscheiden Sie, für welchen der beiden Beobachter der Aufschlagpunkt näher ist. Entscheiden Sie, welche der Ihnen bekannten Verteilungen auf die Problemstellung passt.

Operatoren	Definitionen	Beispiele
Ergänzen, vervollständigen I	Tabellen, Ausdrücke oder Aussagen nach bereits vorliegenden Kriterien, Formeln oder Mustern füllen.	Ergänzen Sie die Tabelle der Funktionswerte. Vervollständigen Sie die Zeichnung mit den in der Aufgabestellung gegebenen Punkten.
Erstellen I	Einen Sachverhalt in übersichtlicher, meist fachlich üblicher oder vorgegebener Form darstellen	Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Funktion.
Herleiten II	Die Entstehung oder Ableitung eines gegebenen oder beschriebenen Sachverhalts oder einer Gleichung aus anderen oder aus allgemeineren Sachverhalten darstellen	Leiten Sie die gegebene Formel für die Stammfunktion her.
(Re-) Interpretieren II–III	Die Ergebnisse einer mathematischen Überlegung rückübersetzen auf das ursprüngliche Problem	Interpretieren Sie: Was bedeutet Ihre Lösung für die ursprüngliche Frage?
Skizzieren I–II	Die wesentlichen Eigenschaften eines Objektes grafisch darstellen (auch Freihandskizze möglich)	Skizzieren Sie die gegenseitige Lage der drei Körper.
Untersuchen II	Sachverhalte nach bestimmten, fachlich üblichen bzw. sinnvollen Kriterien darstellen	Untersuchen Sie die Funktion ... Untersuchen Sie, ob die Verbindungskurve ohne Knick in die Gerade einmündet.
Vergleichen II–III	Nach vorgegebenen oder selbst gewählten Gesichtspunkten Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede ermitteln und darstellen	Vergleichen Sie die beiden Vorschläge ... nach der von den Kurven eingeschlossenen Fläche.
Zeichnen, graphisch darstellen I–II	Eine hinreichend exakte grafische Darstellung anfertigen	Zeichnen Sie den Graphen der Funktion. Stellen Sie die Punkte und Geraden im Koordinatensystem mit den gegebenen Achsen dar.
Zeigen, nachweisen II–III	Eine Aussage, einen Sachverhalt nach gültigen Schlussregeln, Berechnungen, Herleitungen oder logischen Begründungen bestätigen	Zeigen Sie, dass das betrachtete Viereck ein Drachenviereck ist.
Zuordnen I–II	Ohne tiefer gehende Erläuterung eine Verbindung zwischen zwei Listen herstellen	Ordnen Sie die Graphen den gegebenen Gleichungen zu.

4 Aufgabenbeispiele

Die folgenden Aufgaben sind Beispiele für zentrale schriftliche Abiturprüfungen im Fach Mathematik zu den oben genannten curricularen Vorgaben, Konkretisierungen und Schwerpunktsetzungen.

Außer der Aufgabenstellung enthalten die Beispiele den Erwartungshorizont, Hinweise zu den Operatoren mit Bezug zu den drei Anforderungsbereichen und Bewertungshinweise:

Für die Bewertung der Gesamtleistung der schriftlichen Abiturprüfung gilt die folgende Zuordnungstabelle:

Erreichte Gesamtpunktzahl	Erreichte Gesamtleistung in Prozent	Bewertung in Punkten
≥ 190 BWE	≥ 95 %	15
≥ 180 BWE	≥ 90 %	14
≥ 170 BWE	≥ 85 %	13
≥ 160 BWE	≥ 80 %	12
≥ 150 BWE	≥ 75 %	11
≥ 140 BWE	≥ 70 %	10
≥ 130 BWE	≥ 65 %	9
≥ 120 BWE	≥ 60 %	8
≥ 110 BWE	≥ 55 %	7
≥ 100 BWE	≥ 50 %	6
≥ 90 BWE	≥ 45 %	5
≥ 80 BWE	≥ 40 %	4
≥ 66 BWE	≥ 33 %	3
≥ 52 BWE	≥ 26 %	2
≥ 38 BWE	≥ 19 %	1
< 38 BWE	< 19 %	0

Bewertungskriterien für die Noten „gut“ und „ausreichend“

Die Note „gut“ (11 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss die Prüfungsleistung in ihrer Gliederung, in der Gedankenführung, in der Anwendung fachmethodischer Verfahren sowie in der fachsprachlichen Artikulation den Anforderungen voll entsprechen. Ein mit „gut“ beurteiltes Prüfungsergebnis setzt voraus, dass neben Leistungen in den Anforderungsbereichen I und II auch Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht wurden.

Die Note „ausreichend“ (5 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss mindestens eine Teilaufgabe, die Anforderungen im Bereich II aufweist, vollständig und weitgehend richtig bearbeitet worden sein.

4.1 Grundkurs

Aufgabe 1 Batterien

Die Aufgabe entspricht verändert einer Aufgabe aus dem Abitur 1999/2000 aus Sachsen.

Ein Betrieb stellt Batterien für grafikfähige Taschenrechner her. Der Ausschussanteil beträgt 2 %. Die einzelnen Ausschussstücke treten stochastisch unabhängig voneinander auf.

- a) Margret kauft 4 Batterien.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei dieser Batterien Ausschuss sind.
Margret behauptet, die Wahrscheinlichkeit, dass alle vier Batterien Ausschuss sind, sei kleiner als die Wahrscheinlichkeit, im Lotto „6 aus 49“ sechs richtige Zahlen zu tippen.
Rechnen Sie nach, ob Margrets Behauptung richtig ist.
- b) Batterien werden für den Versand an Einzelhändler in Kartons zu je 100 Stück verpackt.
Berechnen Sie die durchschnittliche Anzahl von Ausschussstücken in einem Karton und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Durchschnittszahl nicht überschritten wird.
Begründen Sie, warum Sie hier die Binomialverteilung benutzen müssen und die Normalverteilung als Näherung nicht geeignet ist.
- c) Nach Angaben des Betriebes ist die Lebensdauer der Batterien normalverteilt mit einem Erwartungswert von 300 Betriebsstunden und einer Standardabweichung von 15 Betriebsstunden.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine für Prüfungszwecke zufällig der laufenden Produktion entnommene Batterie mindestens 250 Betriebsstunden erreicht.
Beurteilen Sie, ob eine entsprechende Garantie der Firma sinnvoll erscheint.
- d) Die Herstellung einer Batterie kostet 1 €. Um wirtschaftlich zu arbeiten, muss der Betrieb je Batterie einen Reingewinn von mindestens 0,10 € erzielen. Um konkurrenzfähig zu bleiben, sollte der Abgabepreis einer Batterie maximal 1,32 € betragen.
Der Reingewinn wird dadurch gemindert, dass der Betrieb sich verpflichtet hat, Ausschussstücke zurückzunehmen und durch extra geprüfte, funktionierende Batterien zu ersetzen. Die Kosten für diesen Umtausch und die zusätzliche Prüfung betragen 3 € je defekter Batterie.
Ermitteln Sie, ob unter diesen Bedingungen eine wirtschaftliche Produktion möglich ist.

Aufgabe 2 Fahrstrecke

Die Aufgabenteile a) und c) basieren auf einer Examensaufgabe von Wiskunde B (2003-II).

Ein Transportunternehmen bringt jeden Tag frisch die berühmten Limburger Fladenkuchen von Limburg nach Twente und fährt dabei immer dieselbe Strecke. Die dafür nötige Zeit ist normalverteilt mit einem Mittelwert von zweieinhalb Stunden und einer Standardabweichung von einer Viertelstunde. Die Kuchen müssen spätestens um halb neun abgeliefert sein.

Einerseits möchte der Chef der Firma die Lohnkosten des Fahrers beschränken, indem er ihn nicht zu früh abfahren lässt. Andererseits kann der Chef es sich nicht erlauben, an mehr als 5 % der Tage die Kuchen verspätet anzuliefern.

a) Berechnen Sie die Uhrzeit, bei welcher der Fahrer losfahren muss.

b) In dieser Teilaufgabe betrachten Sie ein 2. Modell, um die Fahrzeit zu ermitteln:

Die Fahrzeit wird mit einem Random Walk (Zufallspfad) simuliert:

Dazu gebe es auf der Strecke von Limburg nach Twente 100 Stellen, an denen durch verschiedene Umstände, die ausschließlich mit dieser Stelle zusammenhängen, der Fahrer entweder 30 s zusätzlich braucht oder aber 30 s an Zeit einspart im Vergleich zur üblichen Zeit von zweieinhalb Stunden. Diese beiden Möglichkeiten seien gleichwahrscheinlich.

Bestimmen Sie für ein von Ihnen erdachtes Beispiel die Fahrzeit mit diesem Modell.

Beschreiben Sie ein Beispiel für die ersten 10 Stellen und zeichnen Sie den zugehörigen Graphen des Zufallspfades.

Vergleichen Sie die beiden Modelle aus den Aufgabenteilen a) und b).

c) Auf seinen täglichen Fahrten ist dem Fahrer aufgefallen, dass viele Autofahrer auf den Strecken mit einer Geschwindigkeitsbegrenzung auf 120 km/h viel zu schnell fahren. Darum ist er auch nicht verwundert über das Ergebnis einer Kontrolle, dass 13 % der Autofahrer schneller als 137 km/h fahren.

(Diese Kontrolle wurde mit vielen Fahrzeugen unter gleichen Verkehrsbedingungen durchgeführt. Fahrzeuge, die schneller als 137 km/h gefahren sind, wurden auf den nächsten Parkplatz geleitet und angehalten.)

Setzen Sie voraus, dass die gefahrene Geschwindigkeit normalverteilt ist mit einem Mittelwert von 126 km/h, und bestimmen Sie unter dieser Annahme, wie viel Prozent der Autofahrer sich dann an die vorgeschriebene Geschwindigkeit halten, also nicht schneller als 120 km/h fahren.

d) Beschreiben Sie, wie sich die Wahl der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung auswirkt, und interpretieren Sie die mathematischen Auswirkungen im Kontext der Aufgabenteile a) und c).

Aufgabe 3 Billigflüge

Wovon leben Billigfluggesellschaften?

Hamburg – New York hin und zurück 300 € !

Für diesen Flug kann eine Agentur z.B. 35 Plätze anbieten. Diese sind immer kurz nach dem Erscheinen im Internet ausgebucht und bezahlt.

Allerdings werden vor Abflug im Mittel ca. 20 % der gebuchten Reservierungen kurzfristig abgesagt (storniert). Verwenden Sie für Ihre Lösungen den exakten Wert 20 %. Da es sich um ein Sonderangebot handelt, bekommen die Kunden bei Stornierung kein Geld zurück. Die Agentur aber kann all diese Plätze leicht als „Last-Minute-Angebote“ für 250 € zum zweiten Mal verkaufen.

Für die Agentur ist deshalb die Anzahl der Kunden von großem Interesse, die pro Flugtermin stornieren. Es soll dazu angenommen werden, dass pro Termin die mögliche Anzahl von Stornierungen binomialverteilt ist.

- a) Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass für den nächsten Flugtermin bei dieser Agentur
- genau 7 Plätze (durch Rechnung)
 - höchstens 5 Plätze (Sie können die Tabelle in der Anlage verwenden)
 - mindestens 6 Plätze
- storniert werden.
- b) Begründen Sie, dass der Erwartungswert für die Einnahmen der Agentur wegen der wieder verkauften stornierten Plätze 12.250 € anstatt 10.500 € beträgt.

Die Stornierungen mit Doppeleinnahmen sind für die Agentur attraktiv, und sie lässt deshalb 40 Buchungen zu, also 5 Buchungen mehr als Plätze verfügbar sind. Diese 40 Angebote sind auch immer sofort ausgebucht und bezahlt. Wenn allerdings mehr als 35 gebuchte Kunden die Reise tatsächlich antreten wollen – im so genannten **Überbuchungsfall** –, muss die Agentur für die überzähligen Kunden dann sehr kurzfristig teure Ersatzplätze beschaffen. Insgesamt entstehen dem Reisebüro für jeden überzähligen Kunden zusätzliche Ausgaben von 400 €.

- c) Bestimmen Sie, wie die Agentur einen Reisetrip mit 40 ursprünglich verkauften Plätzen abrechnet (Einnahmen minus zusätzliche Ausgaben),
- wenn nur 30 regulär gebuchte Personen zum Abreisetermin erschienen sind, also noch 5 „Last-Minute-Tickets“ verkauft wurden
 - wenn alle 40 Bucher zum Abreisetermin erschienen sind.
- d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
- alle 40 regulären Kunden erscheinen zum Abreisetermin, keiner storniert (durch Rechnung)
 - es kommt zum Überbuchungsfall (Sie können die Tabelle in der Anlage verwenden).
- e) Die Agentur möchte überprüfen, ob sich das Geschäft mit den Überbuchungen eigentlich lohnt. Dazu berechnet sie den Erwartungswert der Abrechnung (Einnahmen minus zusätzliche Ausgaben) und erhält als Ergebnis 12.733 €.
- Nennen Sie die Größen, die die Agentur dabei berücksichtigt hat und beschreiben Sie, wie diese Berechnung prinzipiell erfolgen kann. Interpretieren Sie dann dieses Ergebnis der Agentur.

Aufgabe 4 Gefälschter Würfel

Ein Würfel sieht äußerlich genau so aus wie ein normaler Spielwürfel, steht aber im Verdacht, in der Weise gefälscht zu sein, dass die Sechs mit größerer Wahrscheinlichkeit als $\frac{1}{6}$ geworfen wird.

- Anna, Bernd und Claudia kommen zu diesem Verdacht, weil sie bei 12 Würfeln mit diesem Würfel viermal eine Sechs geworfen haben.
Berechnen Sie deshalb zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass bei 12 Würfeln mit einem fairen (ungefälschten) Würfel
 - genau viermal eine Sechs geworfen wird.
 - mehr als drei Sechsen geworfen werden.
- Anna möchte den Fälschungsverdacht mit einem Hypothesentest auf der Basis der Ergebnisse von 50 Würfeln belegen.
Erläutern Sie, wie so ein Test konzipiert werden kann, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art kleiner als 5 % sein soll?
- Das Versuchsergebnis für den Test aus b) ergab 13 Sechsen. Anna kann also in ihrer Logik kein signifikantes Ergebnis vorlegen und nicht behaupten, dass der Würfel gefälscht ist. Bernd sagt, dass sei auch ganz klar, denn selbst, wenn die Wahrscheinlichkeit für die Sechs z.B. 25 % sei, dann sei die Wahrscheinlichkeit „13 oder weniger Sechsen zu werfen“ dennoch ziemlich hoch.
Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit.
Erläutern Sie, was Bernd damit vor dem Hintergrund von Annas Testlogik bemerkt hat und was man in einem zweiten Testversuch prinzipiell tun kann, um seinen Einwand zu entkräften.
- Claudia hat in ihrer Ausbildung gelernt, dass man auch mit Hilfe des Satzes von Bayes der Frage, ob der Würfel gefälscht sei, zu Leibe rücken kann. Sie beginnt ihre Argumentation wie folgt:

“Ich schließe anhand des Vorversuchs aus, dass die wahre Wahrscheinlichkeit p für die Sechs kleiner als $\frac{1}{6}$ ist und ich schließe auch aus – vgl. a), dass sie gleich Eins ist. Dann muss sie in folgendem Bereich liegen $\frac{1}{6} \leq p < 1$. Vereinfachend lasse ich nur folgende vier Näherungswerte für p zu:

$$p = \frac{1}{6}, p = \frac{1}{4}, p = \frac{1}{2}, p = \frac{3}{4}.$$

Da ich wenig über diesen Würfel weiß und neutral herangehen möchte, nehme ich vor dem Versuch für diese vier Fälle gleiche Wahrscheinlichkeiten an.“

Welche Verteilung für die vier Fälle wird Claudia im Anschluss an die aus den in c) beobachteten 13 Sechsen bei 50 Würfeln berechnen?

Interpretieren Sie das Ergebnis in Bezug auf die Frage, ob der Würfel gefälscht ist.

Aufgabe 5 Mikrochips

Herkunft der Aufgabe: Zentralabitur Bayern 2001, Grundkurs.

Der Konzern „Electronix“ stellt Mikrochips in Massenproduktion her. Jeder hergestellte Chip ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % fehlerhaft.

- a) Entscheiden Sie, mit welchem mathematischen Modell sich das Ziehen einer Stichprobe von 100 Chips beschreiben lässt?

Verwenden Sie das Modell aus a) für die weiteren Aufgabenteile.

- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 100 Chips genau 20 fehlerhaft sind.
- c) Bestimmen Sie das kleinstmögliche Intervall mit dem Mittelpunkt 20, in dem bei insgesamt 100 Chips die Anzahl der fehlerhaften Chips mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 85 % liegt.
- d) Bestimmen Sie, wie viele Chips der Produktion mindestens entnommen werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % wenigstens ein fehlerhafter dabei ist.

Zur Aussonderung fehlerhafter Chips wird ein Prüfgerät eingesetzt, von dem Folgendes bekannt ist: Unter allen geprüften Chips beträgt der Anteil der Chips, die einwandfrei sind und dennoch ausgesondert werden, 3 %. Insgesamt werden 83 % aller Chips nicht ausgesondert.

- e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Chip fehlerhaft ist und ausgesondert wird. Ermitteln Sie den Anteil der fehlerhaften Chips, der demnach ausgesondert wird.

Der Konzern beauftragt ein Expertenteam mit Maßnahmen zur Qualitätsverbesserung. Falls der Anteil der fehlerhaften Chips deutlich gesenkt werden kann, wird dem Team eine großzügige Prämie gezahlt. Nach Abschluss der Verbesserungsmaßnahmen wird der Produktion eine Stichprobe von 100 Chips entnommen.

Eine erste Überlegung der Konzernleitung sieht vor, dass die Prämie gezahlt wird, wenn sich unter diesen 100 Chips höchstens 11 fehlerhafte befinden.

- f) Geben Sie an, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Team dann die Prämie erhält, obwohl keine Qualitätsverbesserung eingetreten ist.
- g) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der dann dem Team die Prämie verweigert wird, obwohl der Anteil der fehlerhaften Chips auf 10 % gesunken ist.
- h) Beurteilen Sie die Entscheidungsregel.

Aufgabe 6 Glasschüsseln

In einer Glasmanufaktur werden Glasschüsseln teilmaschinell hergestellt. Die Schüsseln werden in fünf Arbeitsgängen gefertigt, die unabhängig voneinander erfolgen. Erfahrungsgemäß wird in den einzelnen Arbeitsgängen unabhängig voneinander die erwünschte Qualität (I. Wahl) mit folgenden Wahrscheinlichkeiten **nicht** erreicht:

Arbeitsgang 1	Arbeitsgang 2	Arbeitsgang 3	Arbeitsgang 4	Arbeitsgang 5
0,08	0,05	0,02	0,04	0,03

- a) Zeigen Sie, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $p \approx 0,20$ eine fertige Schüssel **nicht** „I. Wahl“ ist.
- b) Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Glasschüsseln, die nicht I. Wahl sind, in einer Produktionsserie vom Umfang n .
Begründen Sie, dass man X als binomialverteilt ansehen kann, und geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X , ihren Erwartungswert, ihre Varianz und Standardabweichung als Funktion von n an.
- c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 15 hergestellten Schüsseln höchstens 3 nicht I. Wahl sind. Beurteilen Sie, ob Ihr Ergebnis stimmen kann.
- d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 100 gefertigten Schüsseln 30 oder mehr nicht I. Wahl sind. Schätzen Sie zunächst diese Wahrscheinlichkeit ab unter Verwendung des Erwartungswertes und der Standardabweichung der Zufallsvariablen X (vgl. b)).
Berechnen Sie anschließend diese Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Anlage.
- e) Bevor die Schüsseln in die Geschäfte verschickt werden, findet eine Qualitätskontrolle statt. Auf Bändern laufen die gefertigten Schüsseln an Kontrollpunkten vorbei. Man kann davon ausgehen, dass alle Schüsseln mit groben Mängeln aussortiert werden.
Kleinere Mängel, die dazu führen, dass man eine Schüssel nur als II. Wahl verkaufen kann, werden jedoch erfahrungsgemäß insgesamt bei 3 % aller fehlerhaften Schüsseln übersehen, andererseits werden 1 % der Schüsseln beanstandet, die noch den Anforderungen der I. Wahl entsprechen. (Kleine Abweichungen sind bei Glas kaum zu vermeiden und werden von den Kunden auch akzeptiert.)
Es werden nur Schüsseln an die Geschäfte verschickt, die nach der Qualitätskontrolle für I. Wahl gehalten werden. Die aussortierten Schüsseln II. Wahl werden auf dem Gelände der Manufaktur zu günstigen Preisen verkauft.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schüssel, die verschickt wird, den Qualitätsanforderungen für die I. Wahl nicht genügt.
- f) Da der Preisdruck aus dem Ausland hoch ist, kalkuliert die Glasmanufaktur bei einer Glasschüssel als Gewinn nur einen Aufschlag von 4 % auf ihre Herstellungskosten H . Wird eine solche Glasschüssel in einem Geschäft zu Recht als „nur II. Wahl“ eingestuft, gewährt der Vertreter der Glasmanufaktur dem Geschäft einen Nachlass von 25 % auf deren Einkaufspreis.
Bestimmen Sie den Prozentsatz an gerechtfertigten Reklamationen, von dem an die Manufaktur Verluste macht. Beurteilen Sie das Ergebnis.

Aufgabe 7 Flaschenabfüllautomat

Der Abfüllautomat einer Getränkefirma weist eine gewisse Streuung hinsichtlich der abgefüllten Menge von „Sprudelfix“ auf. Viele Messungen haben gezeigt, dass die Füllhöhe in 5 % aller Fälle so niedrig ausfällt (Flaschentyp 0), dass der Kunde meinen könnte, eine Mindermenge zu kaufen, obwohl sichergestellt ist, dass immer mindestens die angegebene Menge abgefüllt ist.

Flaschen mit zufrieden stellender Abfüllhöhe werden „Flaschentyp 1“ genannt.

- a) Bestimmen Sie ein beim Abpacken der Flaschen in 12er-Kästen zugrunde gelegtes stochastisches Modell, wenn das Abpacken als Zufallsexperiment aufgefasst wird.
- b) Ein Kunde behauptet im Getränkemarkt, dass in seiner Kiste „schon wieder“ 3 Flaschen mit einer geringeren Füllhöhe waren. Beurteilen Sie die Glaubwürdigkeit dieses Kunden, indem Sie die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall berechnen.
- c) Aufgrund der Rückmeldung des Getränkemarktes will die Geschäftsleitung der Getränkefirma wissen, wie sich die Flaschentypen 0 und 1 in einem Kasten verteilen. Es soll auf die Anschaffung eines neuen Abfüllautomaten verzichtet werden, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kasten höchstens eine Flasche des Typs 0 aufweist, mindestens 95 % beträgt. Ermitteln Sie, ob die Getränkefirma einen neuen Abfüllautomaten kaufen muss.

Die Herstellerfirma des Abfüllautomaten behauptet, dass eine neue Abfüllanlage nur in höchstens 2 % aller Fälle Flaschen des Typs 0 erzeugt und gibt 20 % Preisnachlass, wenn dies nicht zutrifft. Es wird folgendes Testverfahren vereinbart: 100 zufällig ausgewählte Flaschen werden untersucht. Befinden sich darunter höchstens 4 Flaschen des Typs 0, so gilt die Behauptung als bestätigt.

- d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Herstellerfirma bei dieser Entscheidungsregel irrtümlicherweise den Preisnachlass gewähren muss, obwohl die 2 %-Behauptung zutrifft.
- e) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit unter Beibehaltung dieser Entscheidungsregel, dass es nicht entdeckt wird, falls die Wahrscheinlichkeit für Flaschentyp 0 auch bei dieser neuen Anlage immer noch bei 5 % liegt.
- f) Die Wahrscheinlichkeit, dass bei dem 12er-Kasten und dem 5 %-Abfüllautomat keine Flasche vom Typ 0 im Kasten ist, beträgt ca. 54 %. Da der Umsatz von „Sprudelfix“ steigt, plant die Getränkefirma, größere Kästen einzusetzen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fall „keine Flasche vom Typ 0 in einem 20er-Kasten“ bei dem 2 %-Abfüllautomat. Bestimmen Sie die maximale Kastengröße, wenn für den Fall „keine Flasche vom Typ 0 in dem Kasten“ der Prozentsatz von 54 % bei dem 2 %-Abfüllautomaten nicht unterschritten werden soll. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 8 Urnentest

Drei Urnen enthalten jeweils 6 Kugeln.

- In der Urne 1 sind fünf rote Kugeln und eine schwarze Kugel
- in der Urne 2 sind vier rote und zwei schwarze Kugeln
- in der Urne 3 sind drei rote und drei schwarze Kugeln

a) Betrachten Sie zunächst nur die Urne 1.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beim 10-maligen Ziehen mit Zurücklegen

- genau viermal eine schwarze Kugel gezogen wird.
- mehr als vier schwarze Kugeln gezogen werden.

Es wird zufällig eine Urne ausgewählt. Nun soll mit Hilfe von Ziehungen einer Kugel aus dieser Urne und dem anschließenden Zurücklegen herausgefunden werden, um welche Urne es sich handelt.

b) Zuerst wird die Methode des zweiseitigen Hypothesentests angewendet.

Bestimmen Sie für jede Urne einzeln die Ablehnungsbereiche auf dem 5 % Signifikanzniveau, wenn man von 10 Ziehungen ausgeht.

c) Beim Ziehen von 10 Kugeln hat man 3 schwarze und 7 rote Kugeln gezogen.

Begründen Sie mithilfe des im Aufgabenteil b) benutzten Tests, welche Urne vorgelegen haben könnte.

d) Beim Ziehen von 10 Kugeln (wieder mit Zurücklegen) sind insgesamt wieder 3 schwarze und 7 rote Kugeln gezogen worden. Die erste Kugel war rot, die zweite schwarz.

Erläutern Sie an diesem Beispiel das Zusammenspiel von a-priori- und a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten.

Bestimmen Sie die a priori und a-posteriori Wahrscheinlichkeiten für die ersten beiden Ziehungen.

e) Nach 10-maligem Ziehen mit Zurücklegen erhält man die folgenden a posteriori-Wahrscheinlichkeiten:

Zug	Kugelart	Urne 1	Urne 2	Urne 2
1	rot	41,7 %	33,3 %	25,0 %
2	schwarz	22,7 %	36,3 %	40,9 %
3	schwarz	10,4 %	33,3 %	56,3 %
4	rot	14,7 %	37,6 %	47,6 %
5	rot	20,0 %	41,0 %	38,9 %
6	rot	26,3 %	43,1 %	30,7 %
7	rot	33,2 %	43,5 %	23,2 %
8	schwarz	17,5 %	45,8 %	36,7 %
9	rot	23,0 %	48,1 %	28,9 %
10	rot	29,1 %	48,9 %	22,0 %

Untersuchen Sie nun die Entscheidungsmöglichkeiten, die man aufgrund dieser Tabelle hat. Interpretieren sie den Unterschied zum Aufgabenteil c).

Aufgabe 9 Doping

Bei internationalen Sportwettkämpfen winkt den Siegern bekanntlich nicht nur die Ehre, sondern z. T. auch das große Geld in Form von Werbeverträgen. Es ist daher nicht verwunderlich, dass ehrgeizige Sportler und ihre Trainer mitunter zu unerlaubten Mitteln greifen, um sich Vorteile gegenüber den Konkurrenten zu verschaffen.

Um möglichst faire Bedingungen zu gewährleisten, werden deshalb unmittelbar nach wichtigen Wettkämpfen, aber auch während der Trainingszeit, Kontrollen nach genau festgelegten Regeln durchgeführt. Die Sportler geben einen Becher Urin ab, der in zwei Teilen, einer so genannten A-Probe und einer B-Probe, versiegelt und gekennzeichnet wird.

Während die internationalen Sportverbände an möglichst aussagekräftigen Dopingtests interessiert sind, arbeiten gewisse Labore an der Entwicklung neuer Dopingwirkstoffe, deren Verabreichung bei den Kontrollen möglichst nicht im Urin festgestellt werden kann.

Gehen Sie in den Aufgabenteilen a) und d) davon aus, dass bei einem Sportwettkampf von 2200 Teilnehmern, die eine Urinprobe abgeben müssen, 55 mit einem speziellen Wirkstoff gedopt sind.

Es werden alle 2200 A-Proben kontrolliert. Für den Test gelte:

- Ist ein Sportler mit diesem Wirkstoff gedopt, so zeigt der Test dies mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_e = 80\%$ an. Man spricht dann von einem **positiven** Befund und bezeichnet p_e auch als Sensitivität des Tests.
- Hat ein Sportler sich korrekt verhalten, so bestätigt dies der Test mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_a = 95\%$. p_a heißt auch Spezifität des Tests.

Liegt ein positiver Befund der A-Probe vor, wird die B-Probe analysiert.

Nehmen Sie an, dass für nicht gedopte Personen die Ergebnisse von mehrfachen Dopingtests stochastisch unabhängig sind und dass dies ebenso für gedopte Personen gilt, dass also Fehler nur beim Testen und nicht durch irgendwelche besonderen Eigenschaften der Personen auftreten.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass über eine zufällig ausgewählte Person nach der A-Probe ein falsches Urteil abgegeben wird.
- Begründen Sie, weshalb die Wahrscheinlichkeit, dass ein nach der A-Probe des Dopings bezichtigter Sportler zu Unrecht verdächtigt wird, so erschreckend groß ist.
- Weisen Sie nach, dass ein Sportler, bei dem beide Tests positiv waren (also auf Doping hinwiesen) mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 13 % dennoch nicht gedopt war.
- Da die Ergebnisse des Tests für Sportler, die sich an die Regeln halten, unzumutbar sind, muss der Test verbessert werden. Dazu soll zunächst untersucht werden, wie sich die Wahrscheinlichkeiten aus b) und c) dann verändern, wenn sich p_a bzw. p_e verändern:
Ermitteln Sie zunächst eine Wertetabelle für die Wahrscheinlichkeiten, dass ein nichtgedopter Sportler nach der A-Probe bzw. nach der B-Probe positiv getestet wird, wenn sich
 - p_e von 80 % bis 100 % in 5 %-Schritten ändert und $p_a = 0,95$ unverändert bleibt.
 - p_a in 1 %-Schritten von 95 % auf 100 % erhöht und $p_e = 0,8$ unverändert bleibt.

Interpretieren Sie diese Tabellen.

Ermitteln Sie weiterhin für die beiden Wertetabellen nach der B-Probe entsprechende Funktions-
terme $f(p_e)$ bzw. $g(p_a)$, mit denen sich beliebige Werte ausrechnen lassen.

Aufgabe 10: Alkoholsünder

In einer bestimmten Stadt an einer bestimmten Stelle führt die Polizei in regelmäßigen Abständen in der Nacht von Sonnabend auf Sonntag zwischen 1 Uhr und 4 Uhr Verkehrskontrollen durch. Dabei muss der Fahrer „in die Röhre pusten, um festzustellen, ob der Alkoholgehalt im Blut im gesetzlich erlaubten Rahmen liegt oder nicht. Aus mehrjähriger Erfahrung weiß die Polizei, dass ungefähr 10 % der Fahrer um diese Zeit an dieser Stelle die „Promillegrenze“ überschreiten. Wir nennen diese Personen hier kurz „Alkoholsünder“. Es soll angenommen werden, dass die Anzahl der Alkoholsünder in den Verkehrskontrollen einer Binomialverteilung genügt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Nacht bei 20 Kontrollen

- genau zwei Alkoholsünder ermittelt werden
- nicht mehr als zwei Alkoholsünder ermittelt werden
- mindestens drei Alkoholsünder ermittelt werden
- der erste ermittelte Alkoholsünder im letzten oder vorletzten kontrollierten Auto sitzt
- genau zwei Alkoholsünder ermittelt werden und diese beiden auch noch in zwei aufeinander folgenden Kontrollen erfasst werden.

b) Um die Quote der Alkoholsünder zu senken, werden probeweise Warnschilder der Verkehrswacht aufgestellt. Nach einigen Wochen soll nun an Hand einer Messung von 100 Autofahrern ermittelt werden, ob diese Maßnahme auf dem 5 % Niveau ($\alpha \leq \alpha_0 = 5\%$) zu einer signifikanten Senkung der bisherigen Quote der Alkoholsünder geführt hat (Nullhypothese: $p \geq 10\%$).

Sie können zur Berechnung die Tabelle in der Anlage verwenden.

- Begründen Sie, dass man genau dann auf dem 5 % Niveau von einer signifikanten Senkung der Alkoholsünderquote sprechen sollte, wenn höchstens 4 Alkoholsünder ermittelt werden.
- Falls durch die Warnschilder die Alkoholsünderquote tatsächlich auf 5 % gesenkt worden wäre, wie groß wäre dann bei dem Test die Wahrscheinlichkeit β für den Fehler 2. Art ? Berechnen Sie den Wert und interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Es wird nun angenommen, dass bei dem Test aus b) unter den 100 Autofahrern nur 3 Alkoholsünder ermittelt werden. Es liegt also ein signifikantes Ergebnis vor und eine Bürgerinitiative tritt deshalb dafür ein, auf vielen weiteren Straßenabschnitten die Schilder aufzustellen. Darauf argumentieren einige Haushaltspolitiker, dass dies wegen der hohen Kosten erst zu vertreten wäre, wenn die Alkoholsünderquote dadurch von 10 % auf unter 5 % gesenkt würde. Beurteilen Sie das Testergebnis im Hinblick auf diesen Anspruch.

d) Beurteilen Sie die oben gemachte Annahme, dass die Anzahl der Alkoholsünder in den Verkehrskontrollen binomialverteilt ist.

Aufgabe 11: Krankenhaus

Bei Krankenhauspatienten werden in der Regel eine Vielzahl von medizinischen Parametern (z. B. Blutdruck, Leberwerte, ...) gemessen, besonders auch zum Zeitpunkt ihrer Entlassung.

Es wird für die gesamte Aufgabe angenommen, dass sowohl für verschiedene Patienten als auch für verschiedene Parameter die Messergebnisse stochastisch unabhängig sind.

- a) Bei einem speziellen Leberwert erwartet man, dass der Testwert bei 70 % der Patienten bei der Entlassung aus dem Krankenhaus zufrieden stellend ist, d. h., dass der Gesundheitszustand dieser 70 % bezogen auf den Leberwert als gut bezeichnet werden kann.

In einer Woche werden aus der inneren Abteilung 50 Patienten entlassen und auch auf diesen Leberwert getestet.

- Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der entlassenen Patienten mit einem guten Gesundheitszustand (bezogen auf den Leberwert).
 - Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass genau 35 der entlassenen Patienten einen guten Gesundheitszustand (bezogen auf den Leberwert) haben.
 - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 45 der entlassenen Patienten einen guten Gesundheitszustand (bezogen auf den Leberwert) haben.
 - Bestimmen Sie die Mindestanzahl der mit einem guten Gesundheitszustand (bezogen auf den Leberwert) entlassenen Patienten, damit das Ergebnis als signifikant besser als erwartet angesehen werden kann. Benutzen Sie das Signifikanzniveau 5 %.
- Begründen Sie, dass dann die tatsächliche Irrtumswahrscheinlichkeit ca. 4 % beträgt.

- b) Ein Krankenhaus in A-Stadt hat erhebliche Auslastungsprobleme. Daher beschließt der Chefarzt, das Image des Hauses aufzupolieren und einen Hypothesentest durchzuführen. Dazu lässt er insgesamt 10 medizinische Parameter jeweils auf dem Signifikanzniveau 5 % testen. Bei der Auswertung stellt sich heraus, dass nur der Blutdruck signifikant besser als erwartet ist. Wenige Tage später findet sich in der Lokalpresse die folgende Überschrift: „Krankenhauspatienten aus A-Stadt haben deutliche bessere Blutdruckwerte“.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei den 10 medizinischen Parametern, die ja als unabhängig angesehen werden sollen, zufällig mindestens einer signifikant besser als erwartet ausfällt, obwohl dies bei keiner der 10 Testreihen begründet ist.

Fassen Sie dazu die Folge der Testreihen als Bernoullikette auf. Gehen Sie vereinfachend aus von der Unabhängigkeit der 10 Parameter und bei jeder Testreihe von genau 4 % für den Fehler 1. Art.

- c) Den Chefarzt des Krankenhauses von B-Stadt ärgert die Pressemitteilung, und er hofft, sein Krankenhaus ebenfalls als besonders gut darstellen zu können. Dazu soll an seinem Krankenhaus ebenfalls eine entsprechende Protokollierung von Messergebnissen medizinischer Parameter durchgeführt werden. Wie viele unabhängige Parameter muss er testen lassen, damit ohne das Vorliegen von Besonderheiten die Wahrscheinlichkeit größer als 0,6 ist, dass auch er mindestens einen Parameter findet, der signifikant nach oben von den erwarteten Werten abweicht? Begründen Sie Ihre Antwort.
- d) Begründen Sie, dass das Vorgehen der Chefärzte unter stochastischen Gesichtspunkten sehr problematisch ist.

Aufgabe 12: Thermoschalter

Der Konzern „Thermosicherheit“ stellt Thermoschalter in Massenproduktion her. Jeder Thermoschalter ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % fehlerhaft. Der Fehler besteht darin, dass der Thermoschalter erst bei einer zu hohen Temperatur auslöst, also die Stromzufuhr zu spät unterbricht.

Es wird eine Stichprobe von 50 Schaltern aus der laufenden Produktion entnommen.

Dabei soll angenommen werden, dass die Anzahl der fehlerhaften Schalter in der Stichprobe binomialverteilt ist ($n = 50, p = 0,1$).

- a) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl fehlerhafter Schalter in der Stichprobe.
Berechnen Sie (ohne Tafelwerk) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 50 Schaltern genau 5 fehlerhaft sind.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 50 Schaltern höchstens 5 fehlerhaft sind.
- b) Nennen Sie Gründe, warum man annehmen kann, dass die Anzahl der fehlerhaften Schalter in der Stichprobe binomialverteilt ist ($n = 50, p = 0,1$).

Die Firma „Maschinenfix“ ist Kunde des Konzerns „Thermosicherheit“. Sie stellt Maschinen her, die sie vor Überhitzung schützen möchte. In jede dieser Maschinen baut sie 2 Thermoschalter in Reihe ein, d. h. die Stromzufuhr wird genau dann von dieser Thermosicherung rechtzeitig unterbrochen, wenn einer der Schalter oder auch beide zugleich fehlerfrei auslösen.

- c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer neu gebauten Maschine der Firma „Maschinenfix“ im Falle einer Überhitzung die Stromzufuhr rechtzeitig unterbrochen wird.
- d) Bei jeder neu gebauten Maschine ist die Thermosicherung ja mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % defekt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei hundert neu gebauten Maschinen in mindestens einer Maschine die Thermosicherung defekt ist.
- e) Der Konzern „Thermosicherheit“ möchte die Qualität der Schalterproduktion erhöhen. Dazu wird ein Team beauftragt, entsprechende Maßnahmen zu ergreifen. Falls der Anteil der fehlerhaften Schalter deutlich gesenkt werden kann, soll das Team eine großzügige Prämie erhalten. Zur Überprüfung der Qualitätsverbesserung wird eine Stichprobe vom Umfang 50 der neuen Produktion entnommen. Wenn sich unter diesen 50 Schaltern höchstens 3 fehlerhafte befinden, soll das Team die Prämie erhalten.
- Nehmen Sie an, dass überhaupt keine Qualitätsverbesserung eingetreten ist und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Team die Prämie erhält.
 - Nehmen Sie andererseits an, dass eine große Qualitätsverbesserung eingetreten ist und der Anteil der fehlerhaften Schalter auf 5 % gesunken ist und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dem Team die Prämie verweigert wird.

Die Firma „Maschinenfix“ produziert die Maschinen mit den eingebauten Thermoschaltern in großer Stückzahl. Überhitzungen ihrer Maschinen treten leider häufiger auf. Die Thermoschalter lassen sich auch nicht vorher testen. Überhitzungen der Maschinen, die nicht durch die Thermoschalter verhindert werden, führen zu Maschinenschäden und sind sehr teuer.

- f) Begründen Sie, dass auch eine bessere Produktionsqualität des Konzerns „Thermosicherheit“ mit nur 5 % fehlerhaften Schaltern die Probleme der Firma „Maschinenfix“ nicht lösen kann.
Geben Sie begründet eine bessere Möglichkeit an, den Schutz vor einem Maschinenschaden durch Überhitzung zu erhöhen.

Aufgabe 13: Welche Urne ist das?

Betrachten Sie zwei Urnen.

Die Urne U_1 enthält 6 schwarze und 4 weiße Kugeln.

Die Urne U_2 enthält 3 schwarze und 7 weiße Kugeln.

In den folgenden Aufgabenteilen werden immer einzelne Kugeln **mit Zurücklegen** gezogen.

- a) Aus der Urne U_1 soll 10-mal mit Zurücklegen gezogen werden.

Berechnen Sie (ohne Tafelwerk) die Wahrscheinlichkeit, dass

- nur schwarze Kugeln gezogen werden
- genau 5 schwarze Kugeln gezogen werden
- höchstens 2 schwarze Kugeln gezogen werden
- mindestens 3 schwarze Kugeln gezogen werden.

Es muss bei jeder Rechnung nicht nur das Ergebnis, sondern auch der Rechenweg erkennbar sein.

- b) Betrachten Sie nun folgendes Stufenexperiment:

Mithilfe eines Münzwurfs wird eine der beiden äußerlich nicht unterscheidbaren Urnen ausgewählt.

Anschließend wird 10-mal mit Zurücklegen aus dieser Urne gezogen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

- genau 5 schwarze Kugeln gezogen werden
- höchstens 2 schwarze Kugeln gezogen werden
- mindestens 3 schwarze Kugeln gezogen werden.

Jetzt wird Ihnen folgendes Spiel angeboten: Der Spielanbieter wählt mithilfe eines Münzwurfs eine der beiden äußerlich nicht unterscheidbaren Urnen aus. Sie dürfen dann zu Testzwecken 10-mal mit Zurücklegen eine Kugel aus dieser Urne ziehen.

Anschließend müssen Sie sich entscheiden, ob Sie für einen Spieleinsatz von 70 € an dem Spiel teilnehmen. Wenn Sie teilnehmen, erhalten Sie eine Auszahlung von 15 € für jede schwarze Kugel, die sich in der ausgewählten Urne befindet.

- c) Natürlich lohnt sich nur die Urne U_1 . Wenn Sie wüssten, dass die Urne U_2 ausgewählt wurde, würden Sie wohl nicht spielen. Viele schwarze Kugeln beim Testen sprechen für U_1 .

Ein Statistiker berät Sie: Er schlägt vor, nur dann zu spielen, wenn mehr als 5 schwarze Kugeln gezogen werden.

- Nehmen Sie an, dass die Urne U_2 vorliegt, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie dennoch den Rat bekommen zu spielen.
- Nehmen Sie andererseits an, dass die Urne U_1 vorliegt, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie dennoch den Rat bekommen nicht zu spielen.
- Interpretieren Sie die beiden Ergebnisse vor dem Hintergrund der Methode des „Testens von Hypothesen“.

- d) Nachdem Sie 10-mal gezogen haben, stellen Sie fest, dass genau 5 Kugeln schwarz waren.

Nach dem Rat des Statistikers sollten Sie nun die Finger von der Urne lassen.

Aber irgendwie reizt es Sie doch, auf das Spiel einzugehen. Sie beschließen deshalb, die (durch das Versuchsergebnis bedingte) Wahrscheinlichkeit dafür auszurechnen, dass die angebotene Urne doch die Urne U_1 ist.

Zeigen Sie, dass diese Wahrscheinlichkeit ungefähr 66 % beträgt.

- e) Bei einer Entscheidung für das Spiel würden Sie also – bei genau 5 gezogenen schwarzen Kugeln – mit 66 % Wahrscheinlichkeit 90 € einnehmen. Führen Sie diesen Gedanken zu Ende und berechnen Sie dazu den (durch das Testergebnis bedingten) Erwartungswert Ihrer Spieleinnahmen. Begründen Sie dann eine Entscheidung für oder gegen die Teilnahme am Spiel.

4.2 Leistungskurs

Aufgabe 1 Flughafen

Am Hamburger Flughafen wird für weitere Umbauplanungen das Gepäck bezüglich des Zielflughafens und des Gewichtes statistisch erfasst.

- a) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gepäckstück den Zielflughafen Frankfurt hat, sei p . Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei zufällig herausgegriffenen Gepäckstücken mindestens eines nicht den Zielflughafen Frankfurt hat, ist 90 %.

Berechnen Sie p .

- b) Das Handgepäck wird wie folgt kontrolliert:

Bei Kontrolle 1 wird das Gepäck mit einem Spezialgerät durchleuchtet. Nur wenn dieser Vorgang kein eindeutiges Ergebnis liefert, wird er ein zweites Mal durchgeführt (Kontrolle 2). Liegt dann immer noch kein eindeutiges Ergebnis vor, wird das Gepäckstück geöffnet und durch einen Mitarbeiter geprüft (Kontrolle 3). Kontrolle 1 und Kontrolle 2 dauern je 10 Sekunden, Kontrolle 3 dauert 5 Minuten. Zwischen zwei Kontrollvorgängen bei einem Gepäckstück vergehen 30 Sekunden.

Kontrolle 1 liefert zu 90 % ein eindeutiges Ergebnis, Kontrolle 2 zu 60 %.

Ermitteln Sie die durchschnittlich für die Gepäckkontrolle eines Handgepäckstückes benötigte Zeit.

- c) Bei den aufgegebenen Gepäckstücken wird das Gewicht x kg als Realisierung einer Zufallsvariablen X bestimmt. Aus langer Erfahrung kennt man den Mittelwert von 15 kg und die Standardabweichung von 6,45 kg.

Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig herausgegriffenes Gepäckstück ein Gewicht von mindestens 14 kg und höchstens 16 kg hat, wenn man von einer Normalverteilung ausgeht?

- d) Ein Statistiker hält an einem Tag ganz genau alle Gewichte der aufgegebenen Gepäckstücke fest. Bei der graphischen Darstellung sieht er, dass die Wahrscheinlichkeitsfunktion (Dichtefunktion) f der Gewichtsverteilung eher einem Trapez als einer Glockenkurve entspricht:

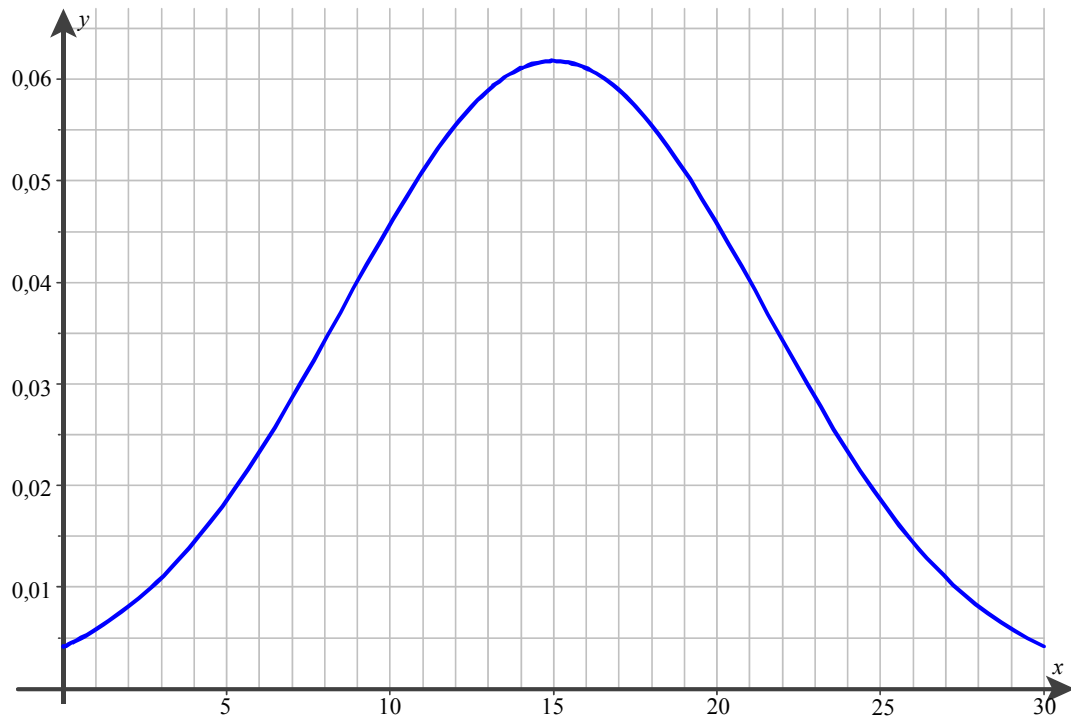
$$f : x \rightarrow \begin{cases} 0,005x & \text{für } 0 \leq x < 10 \\ 0,05 & \text{für } 10 \leq x < 20 \\ 0,005 \cdot (30 - x) & \text{für } 20 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beschreiben Sie, warum f tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellt.

- e) Bestimmen Sie den Erwartungswert dieser Verteilung.

Fortsetzung nächste Seite →

- f) Auch bei dieser Verteilung ist die Standardabweichung 6,45 kg, Lösen Sie die Aufgabe c) für diese Verteilung und begründen Sie mit Blick auf die Normalverteilung, warum das Ergebnis jetzt kleiner als das in c) erhaltene ist.
Sie können dazu nachstehende Abbildung verwenden, welche die Wahrscheinlichkeitsfunktion zur Normalverteilung aus Teil c) zwischen 0 und 30 zeigt.



Aufgabe 2 Fahrtstrecke

Die Aufgabenteile a) und c) basieren auf einer Examensaufgabe von Wiskunde B (2003-II).

Ein Transportunternehmen bringt jeden Tag frisch die berühmten Limburger Fladenkuchen von Limburg nach Twente und fährt dabei immer dieselbe Strecke. Die dafür nötige Zeit ist normalverteilt mit einem Mittelwert von zweieinhalb Stunden und einer Standardabweichung von einer viertel Stunde. Die Torten müssen spätestens um halb neun abgeliefert sein.

Einerseits möchte der Chef der Firma die Lohnkosten des Fahrers beschränken, indem er ihn nicht zu früh abfahren lässt. Andererseits kann der Chef es sich nicht erlauben, an mehr als 5 % der Tage die Torten verspätet anzuliefern.

- a) Berechnen Sie die Uhrzeit, bei welcher der Fahrer losfahren muss.
- b) Diese Teilaufgabe betrachtet ein weiteres Modell für die Fahrtdauer aus Teil a). Stellen Sie sich vor, dass die Strecke von Limburg nach Twente in 100 vergleichbare Bereiche aufgeteilt ist. Jeder der Bereiche wird
- ◆ mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % in 75 Sekunden durchfahren
 - ◆ mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % in 90 Sekunden durchfahren
 - ◆ mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % in 105 Sekunden durchfahren.

Die Gründe für die jeweils gefahrene Zeit liegen allein im jeweiligen Teilstück begründet.

Ermitteln Sie mit Hilfe einer Zufallsziffern-Tabelle in Ihrer Formelsammlung eine simulierte Fahrzeit in Sekunden nach den ersten 10 Bereichen.

Bestimmen Sie damit ein Simulationsmodell für die gesamte Strecke.

- c) Auf seinen täglichen Fahrten ist dem Fahrer aufgefallen, dass viele Autofahrer auf den Strecken mit einer Geschwindigkeitsbegrenzung auf 120 km/h viel zu schnell fahren. Darum ist er auch nicht verwundert, dass eine Kontrolle ergibt, dass 13 % der Autofahrer schneller als 137 km/h fährt.
- (Diese Kontrolle wurde mit vielen Fahrzeugen unter gleichen Verkehrsbedingungen durchgeführt. Fahrzeuge, die schneller als 137 km/h gefahren sind, wurden auf den nächsten Parkplatz gleitet und angehalten.)*

Setzen Sie voraus, dass die gefahrene Geschwindigkeit normalverteilt ist mit einem Mittelwert von 126 km/h, und bestimmen Sie unter dieser Annahme, wie viel Prozent der Autofahrer sich dann an die vorgeschriebene Geschwindigkeit halten, also nicht schneller als 120 km/h fahren.

Die folgenden Aufgabenteile beleuchten eher theoretische Aspekte der Stochastik, es geht dabei aber auch um Bezüge zu den Aufgabenteilen a) und c).

- d) Beschreiben Sie, wie sich die Wahl der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung auswirkt, und interpretieren Sie die mathematischen Auswirkungen im Kontext der Aufgabenteile a) und c).
- e) Beschreiben Sie den Inhalt des Zentralen Grenzwertsatzes und seine Bedeutung für die Modellierung.

Aufgabe 3 Motorenhersteller

Ein Motorenhersteller verbaut in seinen Motoren Kolben von einem Zulieferer. Er benötigt 1 000 dieser Kolben für einen Produktionstag.

Brauchbar sind für ihn Kolben mit einem Durchmesser zwischen 88,4 und 89,4 (Angaben in Millimeter). Werden diese Richtmaße nicht eingehalten, so ist es möglich Kolben mit einem um höchstens 0,4 größeren Durchmesser nachzuarbeiten. Die Kosten für die Nacharbeit betragen 80 €. Ist die Abweichung größer, so gilt der betreffende Kolben als Ausschuss.

Nehmen Sie an, dass die Maße der gelieferten Kolben normalverteilt sind. Eine Stichprobe hat ergeben, dass der Mittelwert 88,90 und die Standardabweichung 0,57 beträgt. Der Preis beträgt bei dieser Fertigungsgenauigkeit 60 € für einen einzelnen Kolben (inkl. Verpackung). Für den Transport müssen pro Lieferung unabhängig von der Zahl der gelieferten Kolben insgesamt 130 € angesetzt werden.

- a) Ermitteln Sie, wie viele von 1 000 Kolben einer Lieferung auf Anhieb brauchbar sind?
- b) Berechnen Sie die Bestellmenge, damit wenigstens 1 000 Kolben in der Lieferung enthalten sind, die mit und ohne Nacharbeit verbaut werden können?
- c) Untersuchen Sie, ob die Nacharbeit der Kolben lohnt.
- d) Diese Teilaufgabe soll die möglichen Berechnungen in Teilaufgabe e) etwas vereinfachen:
 - Zeigen Sie, dass zwischen der Liefermenge n aus Teilaufgabe b) und der Standardabweichung σ folgender Zusammenhang gilt:
$$n(\sigma) = \frac{1000}{\Phi\left(\frac{0,9}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{0,5}{\sigma}\right) - 1}.$$
 - Bestimmen Sie eine analoge Beziehung zwischen der Wahrscheinlichkeit, dass ein Kolben ohne Nachbearbeitung brauchbar ist, und der Standardabweichung.
- e) Eine Verringerung der Standardabweichung führt zu einer Erhöhung der Fertigungsgenauigkeit, jedoch steigt dabei auch der Preis: eine Verringerung von σ um 0,1 hat jeweils eine Preissteigerung von 10 % zur Folge.
Interessant ist jetzt die Frage, ob der Weg der Erhöhung der Fertigungsqualität der Kolben hinsichtlich einer Kostensenkung lohnt und wenn ja, in welchen Grenzen.
Ermitteln Sie zur Untersuchung dieser Frage ein mögliches Verfahren.

Aufgabe 4 Buchungsrisiken

Das Reisebüro „KONTAKTE“ vermittelt Pauschalreisen für Alleinreisende in das Hotel „CLUB FROHSINN“. In der Hauptsaison steht dem Reisebüro ein Kontingent von 100 Plätzen zu, die immer ausgebucht sind. Erfahrungsgemäß werden kurz vor Reisebeginn 5 % der gebuchten Plätze abgesagt.

- a) Beschreiben Sie, unter welchen Umständen es sinnvoll ist, die Anzahl X der in der Hauptsaison kurzfristig absagenden Reisekunden als binomialverteilt anzunehmen? Diskutieren Sie diese Frage auch für den Fall, dass das Reisebüro Plätze für Gruppen und Familien anbietet.

Im Weiteren soll angenommen werden, dass die in a) genannte Zufallsgröße X binomialverteilt ist.

- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der Hauptsaison für einen bestimmten Termin
- genau 5 Reisegäste,
 - mindestens 3 Reisegäste,
 - höchstens 4 Reisegäste,
 - 3 oder 4 Reisegäste kurzfristig absagen?

Das Reisebüro lässt Überbuchungen zu. In der Hauptsaison nimmt es pro Reise 102 Buchungen an und geht das Risiko ein, dass es bei zu wenigen Absagen großen Ärger gibt.

- c) Ermitteln Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass mindestens ein Reisegast seine gebuchte und auch wirklich gewünschte Reise nicht antreten kann?
- d) Nehmen Sie an, dass alle buchenden und nicht absagenden Kunden jeweils 200 € Gewinn einbringen, dass aber Kunden, welche die gebuchte Reise antreten wollen und nicht können, für das Reisebüro einen Verlust von 1 200 € bedeuten.
Welche Gewinnerwartung hat das Reisebüro pro Reiseternin in der Hauptsaison an der Vermittlung von Plätzen im „CLUB FROHSINN“?
Beurteilen Sie, ob es sich für das Reisebüro lohnt, Überbuchungen zuzulassen?
- e) Begründen Sie, dass das Reisebüro pro Reiseternin in der Hauptsaison 103 Buchungen zulassen sollte, wenn die Gewinnerwartung maximal sein soll.

Wird die Tabelle zur Binomialverteilung im Anhang verwendet, dann sollte dargestellt werden, wie die abgelesenen Werte prinzipiell zu berechnen sind.

Aufgabe 5 Bogenschießen

Dieter ist von seinen Fähigkeiten als Bogenschütze sehr überzeugt. Er prahlt herum, dass er nur ganz selten mehr als 1 dm neben den Mittelpunkt der Zielscheibe trifft. Sein Freund Herbert – auch ein Mathematiker – meint, er solle doch mal eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (Wahrscheinlichkeitsdichte) für die Entfernung x der Einschüsse zum Mittelpunkt bei seinen Bogenschüssen angeben.

Dieter behauptet: Nehmen wir die 1 dm als eine Längeneinheit, so treffe ich in einem Abstandsintervall von 0 bis 1 Längeneinheiten mit konstanter Wahrscheinlichkeit, für die Einschüsse mit einem größeren Abstand x vom Mittelpunkt der Schießscheibe nimmt die Wahrscheinlichkeit mit x^{-4} bezogen auf den Abstand x ab.

- a) Vergleichen Sie die Funktion g mit den gemachten Angaben und bestimmen Sie a so, dass g wirklich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung beschreibt (g wird dann auch Dichtefunktion genannt).

$$g : x \rightarrow \begin{cases} a & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ a \cdot x^{-4} & \text{für } 1 < x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Streuung für den Abstand der Einschüsse vom Mittelpunkt der Zielscheibe.
- c) Nachdem dies nun alles berechnet ist, fordert Herbert Dieter auf, seine Bogenkünste zu zeigen. Sie verabreden, dass Herbert ihn nur auslacht, wenn Dieter mindestens 2 Längeneinheiten daneben schießt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis unter den von Dieter gemachten Angaben.
- d) Die beiden haben verabredet, dass Dieter zum Beweis seiner Künste 4-mal schießt.
Bestimmen Sie unter den von Dieter gemachten Angaben die Wahrscheinlichkeit, dass Herbert keinen Anlass zum Lachen bekommt.
- e) Dieter schießt nun viermal mit dem Ergebnis, dass der Pfeil dreimal derart weit weg vom Mittelpunkt der Scheibe landet, dass Herbert sich jedes Mal vor Lachen ausschüttet.
Beurteilen Sie unter Beachtung dieser Schießleistung die von Dieter gemachten Angaben.

Aufgabe 6 Blutspenden

Zentrale schriftliche Abiturprüfung, Hamburg 2005

Jeder Mensch hat Blut einer bestimmten Blutgruppe. Die folgende Tabelle zeigt die Häufigkeit des Auftretens von drei Blutgruppen in einer Bevölkerung:

Blutgruppe	AB rh–	B Rh+	A Rh+
Anteil	$\frac{1}{100}$	$\frac{11}{100}$	$\frac{1}{3}$

a) Es werde eine feste Anzahl von zufällig herausgegriffenen Blutspendern betrachtet.

- Unter welchen Umständen ist es sinnvoll, die Anzahl X der Personen unter den Blutspendern, die eine bestimmte Blutgruppe haben, als binomialverteilt anzunehmen?
- Beschreiben Sie eine Situation, in der die Voraussetzungen einer Binomialverteilung nicht erfüllt sind.

Im Folgenden soll angenommen werden, dass die in a) genannten Zufallsgrößen X tatsächlich binomialverteilt ist.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter

- 100 Blutspendern genau 11 Blutspender mit der Blutgruppe B Rh+ sind,
- 100 Blutspendern höchstens einer mit der Blutgruppe AB rh– ist,
- 50 Blutspendern mindestens 15 Blutspender mit der Blutgruppe A Rh+ sind,
- 2500 Blutspendern mindestens 800 Blutspender und höchstens 900 Blutspender mit der Blutgruppe A Rh+ sind.

c) Berechnen Sie, wie viele Spender man mindestens benötigt, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens einen Spender mit der Blutgruppe AB rh– zu finden.

Man kann davon ausgehen, dass in Deutschland ein Anteil von 1 ‰ unter den möglichen Blutspendern mit Präcortol-Retroviren infiziert ist.

Jede Blutspende wird auf die Präcortol-Retroviren getestet. Der dafür verwendete Test erkennt eine vorhandene Infektion mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 %. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % zeigt der Test eine Infektion auch bei nicht infiziertem Blut an.

- d) Blutspender werden nach der Spende üblicherweise über den Ausgang des Tests informiert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem zufällig ausgewählten Spender das Testergebnis fehlerhaft ist.
- e) Bei einer Person weist der Test auf eine Infektion hin. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person dennoch nicht infiziert ist. Interpretieren Sie diesen Wert.
- f) Die Testentwickler wollen den Test verbessern im Hinblick auf das erstaunliche Resultat von e). Da bisher der Test bei 2 % der nicht infizierten Personen dennoch auf eine Infektion hinweist, versuchen sie, diesen Prozentsatz zu senken. Ermitteln Sie den Wert, auf den er gesenkt werden müsste, damit die in e) bestimmte Wahrscheinlichkeit immerhin bei 50 % liegt.

Aufgabe 7 HIV-Test

Erschienen und diskutiert in der Zeitschrift *Stochastik in der Schule*, Bd.21 (2001), Heft 1, S.8 ff. in einem Aufsatz von Achim Quermann, von der AEG bearbeitet und verändert.

Man geht davon aus, dass in der BRD von den ca. 40 Millionen sexuell aktiven Personen im Alter von 18 Jahren bis 60 Jahren etwa 50 000 mit HIV infiziert sind.

- a) In einem Labor werden Blutproben auf das HIV-Virus untersucht. Die Proben entstammen einer repräsentativen, sehr großen Stichprobe.
Unterstellen Sie, dass es einen 100 % sicheren Test zum Nachweis einer HIV-Infektion gibt. Ein **positives** Testergebnis bezeichnet eine HIV-Infektion.
Berechnen Sie die nötige Anzahl von Proben, um mit mindestens 99 %-iger Wahrscheinlichkeit wenigstens ein positives Testergebnis zu erhalten?
- b) Für einen tatsächlich vorhandenen Test gilt Folgendes:
- Eine infizierte Person wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,8 % positiv getestet.
 - Eine nicht infizierte Person wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % negativ getestet.
- Rechnen Sie nach, dass eine als positiv getestete Person nur mit ca. 11 % Wahrscheinlichkeit tatsächlich infiziert ist.
- c) Lösen sie den Aufgabenteil a) erneut. Legen Sie dabei den in b) beschriebenen Test zu Grunde. Beurteilen Sie den deutlichen Unterschied zwischen den Ergebnissen.
- d) „Der Test aus Aufgabenteil b) hat kaum eine diagnostische Aussagekraft.“ Interpretieren Sie diese Aussage, indem Sie die a-priori- und a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten für einen Infizierten vergleichen.
- e) Erläutern Sie, welche Schlussfolgerungen eine Person für sich ziehen kann, die positiv getestet worden ist. Berücksichtigen Sie dabei auch den persönlichen Lebenswandel der Person.
- f) Ein neues Medikament lindert angeblich den Krankheitsverlauf bei mindestens 40 % der Aids-Erkrankten, d.h. er wird positiv beeinflusst. Die Behandlung von 100 Aids-Patienten soll als Nachweis dienen.
Bestimmen Sie eine Entscheidungsregel für einen stochastischen Signifikanztest auf dem 5 %-Niveau, mit dem versucht werden kann, diese Behauptung zu untermauern.
Bestimmen Sie für „wahre Werte der Linderungsquote“ des Medikaments den Fehler 2. Art für die gefundene Entscheidungsregel. Legen Sie dazu im Bereich von 40 % bis 60 % in 10 %-Schritten eine Wertetabelle für die Linderungsquoten mit den zugehörigen Fehlern 2. Art an. Interpretieren Sie diese Tabelle.
Benutzen Sie dabei die Integral-Näherungsformel von De Moivre/Laplace.
- g) Welche Entscheidungsregel für die Untersuchung in f) werden Zweifler an der Wirksamkeit des Medikaments festlegen? Begründen Sie Ihre Antwort.
Benutzen Sie auch hier die Integral-Näherungsformel von De Moivre/Laplace.

Aufgabe 8 Kugelschreiberproduktion

Zentrale schriftliche Abiturprüfung, Hamburg 2005

Eine Firma stellt Kugelschreiber her, die die Abnehmer als Werbegeschenke für ihre Kunden nutzen. Bei der Produktion treten zwei voneinander unabhängige Fehler auf: defekte Mechanik (3 %) und defekte Mine (2 %).

- a) Ein Kugelschreiber wird zufällig der laufenden Produktion entnommen.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Kugelschreiber sowohl eine defekte Mechanik als auch eine defekte Mine hat.
 - Zeigen Sie, dass der Kugelschreiber mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % fehlerfrei ist.
 - Ein Qualitätsprüfer prüft zehn zufällig der Produktion entnommene Kugelschreiber. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Kugelschreiber fehlerhaft ist.
 - Aus langer beruflicher Erfahrung meint der Qualitätsprüfer, dass er mindestens 100 Kugelschreiber prüfen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % auch mindestens einen defekten Kugelschreiber zu finden.
Beurteilen Sie die Aussage des Qualitätsprüfers.

- b) Die Kugelschreiber werden zu je 50 Stück in Schachteln verpackt.
- Bestimmen Sie die durchschnittliche Anzahl defekter Kugelschreiber in einer Schachtel.
 - Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Durchschnittszahl nicht überschritten wird.

An einen Abnehmer liefert die Herstellerfirma Sendungen zu je 20 Schachteln.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Sendung genau 50 defekte Kugelschreiber enthält.
 - Interpretieren Sie Ihr Ergebnis unter Berücksichtigung der Bemerkung eines „stochastischen Laien“, dass die berechnete Wahrscheinlichkeit ihm sehr niedrig vorkommt (unter 10 %).
- c) Die Herstellungskosten eines Kugelschreibers betragen 0,30 €. Der Herstellerbetrieb strebt einen Reingewinn von 10 % an. Die Abgabe der Kugelschreiber erfolgt für 0,40 €. Allerdings wird der Reingewinn dadurch verringert, dass sich der Betrieb den Abnehmern gegenüber verpflichtet hat, defekte Kugelschreiber zurück zu nehmen und durch extra geprüfte zu ersetzen. Pro Ersatz entsteht 1 € an zusätzlichen Kosten.

Beurteilen Sie, ob unter diesen Bedingungen der angestrebte Gewinn voraussichtlich erwirtschaftet werden kann.

- d) Ein Großabnehmer dieses Herstellerbetriebes erhält ein Angebot eines Konkurrenten. Dieser beziffert den Anteil fehlerfreier Kugelschreiber in seiner Produktion auf mindestens 98 %. Da es sehr ärgerlich ist, defekte Werbegeschenke zu verteilen, beschließt der Großabnehmer mit einem Signifikanztest auf dem 5 % Niveau, das Angebot des Konkurrenten zu prüfen, indem eine Probe-lieferung von 50 Kugelschreibern auf Fehlerfreiheit untersucht wird. Bei der Frage, wie das Ergebnis nach Durchführung des Tests auszuwerten sei, kommt es zu einem Streit zwischen zwei Mitgliedern der Geschäftsleitung:
- A hat hohes Vertrauen in das Angebot des Konkurrenten und meint, man solle es nur ablehnen, wenn signifikant deutlich wird, dass das Versprechen des Konkurrenten nicht stimmt.
 - B hält den Konkurrenten für unsolide und schlägt vor, das Angebot nur anzunehmen, wenn signifikant deutlich wird, dass der Konkurrent wirklich besser ist als die alte Lieferfirma.

Beurteilen Sie, bei welchen Prüfergebnissen A und bei welchen Prüfergebnissen B den Hersteller wechseln würde.

Aufgabe 9 Modegeschäfte

Die Aufgabenteile a) und c) basieren auf Station 15 in „Lernen an Stationen, Matrizenrechnung“ (www.learn-line.nrw.de/angebote/selma/foyer/projekte/dinslakenproj3/).

In der Innenstadt sind drei Modegeschäfte mit ähnlichem Angebot: *BlueBlack*, *Goldie X* und *JeansHouse*. Die Geschäftsführerin von *BlueBlack* gibt eine Untersuchung über die Kundenwanderung zwischen diesen drei Geschäften in Auftrag.

Das beauftragte Institut macht eine Umfrage, die ergibt:

- 60 % der Kunden von *BlueBlack*, die dort innerhalb eines Monats eingekauft haben, kaufen dort auch im Folgemonat, während 25 % zu *Goldie X* und 15 % zum *JeansHouse* abwandern.
- *Goldie X* bleiben 55 % der Kunden im Folgemonat treu, 20 % wandern jedoch zu *BlueBlack* ab und 25 % zum *JeansHouse*.
- Das *JeansHouse* schafft es, sogar 70 % seiner Kunden an sich zu binden, verliert aber jeweils 15 % an *BlueBlack* und *Goldie X*.

Im untersuchten Monat kauften bei *BlueBlack* 2 700 Personen, bei *Goldie X* 2 000 und im *JeansHouse* 3 200.

a) Stellen Sie die Kundenwanderung in einer Tabelle oder mit einem Graphen dar.

Die Geschäftsführerin interessiert die in diesem Modell zu erwartende Kundenverteilung in den nächsten 6 Monaten, um über geeignete Werbemaßnahmen entscheiden zu können.

b) Berechnen Sie die zu erwartende Kundenverteilung nach 1 Monat. Geben Sie zwei Berechnungsmöglichkeiten für die zu erwartende Verteilung nach 2 Monaten.
Ermitteln Sie, welche Auswirkungen auf die Berechnung und die Kundenzahlen hat die Annahme, dass das oben beschriebene Modell in den nachfolgenden 6 Monaten weiter gelten soll.
Hinweis: Das Ergebnis nach 2 Monaten ist [2423, 2337, 3140] (in der Reihenfolge *B*, *G*, *J*), nach 6 Monaten [2372, 2371, 3157], jeweils auf ganze Zahlen gerundet.

c) Zeigen Sie unter der Annahme, das Modell von a) gelte weiterhin, dass die Kundenbewegung zum Stillstand kommt und bestimmen Sie die dann gegebene Anzahl von Kunden in den drei Geschäften.
Interpretieren Sie die Ergebnisse aus der Sicht der Geschäftsführerin von *BlueBlack*.

d) Mit der Werbekampagne von *BlueBlack* gelingt der Geschäftsführerin ein Cup, da es nach folgendem System als Prämie ein ausgefallenes Kleidungsstück von *Carotti* gibt:
Bei jedem Kauf darf die Kundin bzw. der Kunde aus einer großen, gut gefüllten Schale für je 50 € Umsatz einen kleinen Umschlag ziehen, der ein Puzzle-Teil enthält (bei einem Einkauf zu 120 € zum Beispiel darf man dann 2-mal einen Umschlag ziehen). Es gibt 5 verschiedene Puzzle-Teile, die zusammengelegt ein Rechteck ergeben und die Prämie!

Wie viele Umschläge man sammeln muss, bis ein Puzzle fertig ist, hängt vom Zufall ab. Die Anzahl der Umschläge kann also als Zufallsvariable aufgefasst werden.

Ermitteln Sie den Erwartungswert der nötigen Umschläge, und interpretieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf die Frage, wie „teuer“ das ausgefallene Kleidungsstück von *Carotti*, für einen Kunden denn nun eigentlich ist.

Aufgabe 10 Gepäckaufgabe

Zentrale schriftliche Abiturprüfung, Hamburg 2005

Auf einem bestimmten Flughafen geben die Passagiere an den Schaltern Gepäck auf. Die Gepäckstücke bekommen jeweils einen Anhänger mit einem Strichcode auf Papieraufklebern, der den Zielflughafen angibt. Alle an den verschiedenen Schaltern aufgegebenen Gepäckstücke laufen über viele Förderbänder und schließlich zum Code-Lesegerät, durch das dann die Stücke einzeln auf die richtigen Flugzeuge verteilt werden sollen. Auf dem Weg zum Lesegerät werden aber einige Anhänger verknickt oder verschmutzt, so dass dann diese Gepäckstücke vom Lesegerät nicht der richtigen Maschine zum Zielflughafen zugewiesen werden. Der Anteil der fehlgeleiteten Gepäckstücke hat sich über lange Zeit im Mittel als stabil gezeigt und beträgt ca. 3,5 %.

Rechnen Sie in dieser Aufgabe mit exakt 3,5 % .

a) Begründen Sie, warum man die Zufallsgröße X , die die Anzahl der vom Code-Lesegerät fehlgeleiteten Gepäckstücke zählt, als binomialverteilt annehmen kann.

b) Für eine Fokker F27 werden 45 Gepäckstücke aufgegeben.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

- Alle 45 Gepäckstücke finden durch das Lesegerät ihre richtige Maschine.
- Genau 2 der 45 Gepäckstücke werden fehlgeleitet.
- Höchstens 4 der 45 Gepäckstücke werden fehlgeleitet.
- Es werden mehr als 4 der 45 Gepäckstücke fehlgeleitet.

c) Die Flughafengesellschaft rechnet mit Kosten von 70 € pro fehlgeleitetem Gepäckstück.

Um ihre Gesamtkosten in diesem Bereich zu vermindern, werden die Anhänger verbessert. Dadurch werden nur noch 0,5 % der Gepäckstücke vom Code-Leser fehlgeleitet. 3 % der Gepäckstücke werden als unleserlich ausgesondert. Diese ausgesonderten Stücke werden dann von einem Angestellten weiter bearbeitet. Dieser kann 80 % der ausgesonderten Stücke richtig zuordnen. Die restlichen Stücke bleiben am Startflughafen und werden erst auf Suchantrag zugestellt.

Eine Prüfung durch den Angestellten kostet 10 €, eine Zustellung nach Suchantrag insgesamt 100 €.

Berechnen Sie die dadurch erreichte Minderung der erwarteten Kosten pro Koffer.

Fortsetzung nächste Seite →

- d) Ein fehlgeleitetes Gepäckstück, das innerhalb eines Monats nicht wieder auffindbar ist, nennen wir "Verlustkoffer". Im Mittel sind 0,02 % aller Gepäckstücke Verlustkoffer.

Monatlich fliegen von dem Flughafen im Schnitt 8 000 Passagiere mit ca. 12 000 aufgegebenen Gepäckstücken nach Boston.

Die folgenden Fragen beziehen sich nur auf diese Flugstrecke.

Bei großem n und kleinem p ist die Poisson-Verteilung eine gute Näherung für die Binomial-Verteilung. Dabei ist $P(Z = k) \approx \frac{1}{e^\mu} \cdot \frac{\mu^k}{k!}$, wobei in dieser Aufgabe Z die Anzahl der Verlustkoffer unter den innerhalb eines Jahres aufgegebenen Koffern beschreibt.

Verwenden Sie, wo möglich, die anliegende Tabelle.

- Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert $\mu = 28,8$ gilt, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den in einem Jahr aufgegebenen Gepäckstücken tatsächlich genau 29 Verlustkoffer auftreten.
- Da für jeden Verlustkoffer Entschädigungszahlungen in (mittlerer) Höhe von 400 € geleistet werden müssen, möchte sich die Flughafengesellschaft gegen hohe Entschädigungssummen versichern. Um die Versicherungsprämie gering zu halten, wird die Entschädigungssumme eines Jahres nur dann versichert, wenn Sie 12 000 € übersteigt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Fall eintritt?
- Bei einem Gesamtschaden im Jahr von über 12 000 € zahlt die Versicherungsgesellschaft den Betrag, der 12 000 € übersteigt. Mit welchem Betrag an Schadenszahlung pro Jahr muss die Versicherungsgesellschaft im Durchschnitt rechnen?

Anlage zur Aufgabe „Gepäckaufgabe“:**Daten zur Poisson-Verteilung**

$$\mu = 28,8$$

k	$e^{-\mu} \cdot \sum_{i=0}^k \frac{\mu^i}{i!}$	$e^{-\mu} \cdot \sum_{i=0}^k i \cdot \frac{\mu^i}{i!}$
23	0,1615	3,3776
24	0,2146	4,6518
25	0,2758	6,1809
26	0,3435	7,9424
27	0,4158	9,8936
28	0,4901	11,9748
29	0,5639	14,1156
30	0,6348	16,2415
31	0,7006	18,2824
k 32	0,7599	20,1785
33	0,8116	21,8850
34	0,8554	23,3743
35	0,8915	24,6358
36	0,9203	25,6738
37	0,9427	26,5043
38	0,9597	27,1507
39	0,9723	27,6405
40	0,9813	28,0023
41	0,9877	28,2628
42	0,9921	28,4458

Aufgabe 11 Wahlen

Zentrale schriftliche Abiturprüfung, Hamburg 2005

Eine Großstadt hat 523 740 wahlberechtigte Einwohner.

- a) Nach der letzten Stadtratswahl wurde die Wahlbeteiligung analysiert. Dabei wurde die wahlberechtigte Bevölkerung in drei Gruppen eingeteilt:

Gruppe I: 157 122 Wahlberechtigte, die jünger als 35 Jahre sind,

Gruppe II: 235 683 Wahlberechtigte im Alter von 35 Jahren bis 65 Jahren,

Gruppe III: 130 935 Wahlberechtigte, die älter als 65 Jahre sind.

Die Wahlbeteiligung betrug 87 % in der Gruppe I, 82 % in Gruppe II und 65 % in Gruppe III. Bestimmen Sie die Wahlbeteiligung insgesamt.

- b) Ermitteln Sie Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei einer zufälligen Auswahl von 100 Personen aus dem Personenkreis der über 65-jährigen mehr als 30 und weniger als 40 Personen findet, die nicht an der Wahl teilgenommen haben.
(Sie können eine Binomialverteilung annehmen, weil die Zahl 100 sehr klein gegenüber der Gesamtzahl in dieser Gruppe ist.)
- c) Bei der bevorstehenden Wahl erhofft sich die Partei G die absolute Mehrheit. Um nicht unnötig einen teuren Wahlkampf zu führen, beschließt sie, ihre Chancen durch eine repräsentative Umfrage untersuchen zu lassen. Falls man aufgrund des Ergebnisses einen Stimmenanteil von mehr als 55 % aller Wahlberechtigten erwarten kann, will sich die Partei einen aufwändigen Wahlkampf sparen.

Ein Amateurstatistiker erläutert den Parteistrategen:

„Wir befragen repräsentativ 200 wahlberechtigte Personen. Die Hypothese, dass Sie einen Stimmenanteil von höchstens 55 % erwarten können, wird mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 % erst dann abgelehnt, wenn sich unter den 200 Befragten mindestens 123 für Sie entscheiden, anderenfalls empfehle ich weitere Wahlkampfmaßnahmen.“

- Zeigen Sie, dass die Zahl von 123 Personen korrekt bestimmt ist.
 - Bestimmen Sie unter der Annahme, dass die Partei G zu diesem Zeitpunkt einen Stimmenanteil von 60 % bekäme, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dennoch ein aufwändiger Wahlkampf geführt wird. Interpretieren Sie dieses Ergebnis.
- d) In Deutschland gilt für Bundes- und Landtagswahlen die 5-Prozent-Klausel. Die Partei Q erhofft den Einzug in den Landtag. Sie geht von höchstens 80 % Wahlbeteiligung aus, braucht also nur 4 % der Stimmen aller Wahlberechtigten. Um ihre Chancen einschätzen zu können, beauftragt sie deshalb ein Wahlforschungsinstitut.

Eine typische repräsentative Umfrage eines Wahlforschungsinstitutes umfasst 1 100 wahlberechtigte Personen.

Die Partei Q erhält vom Wahlforschungsinstitut das Ergebnis mitgeteilt, dass 5,4 % der befragten Personen die Partei Q wählen und auch zur Wahl gehen würden.

Ermitteln Sie: Kann die Partei Q aufgrund dieser Umfrage mit 95-prozentiger Sicherheit damit rechnen, ins Parlament einzuziehen?

Aufgabe 12 Qualitätskontrolle

Ein Unternehmen stellt Mikrochips in Massenproduktion auf zwei verschiedenen Produktionsanlagen her: 25 % der auf Anlage A produzierten Mikrochips sind mangelhaft, auf Anlage B sind es 50 %.

(Bei großen Stückzahlen können auftretende Qualitätsschwankungen vernachlässigt werden.)

Anlage A produziert gegenüber Anlage B etwa die vierfache Menge pro Tag.

Die Mikrochips werden jeweils zu mehreren tausend Stück in Kisten verpackt und entsprechend mit dem Prädikat „von Anlage A“ bzw. „von Anlage B“ versehen. Die Kisten werden zu unterschiedlichen Preisen verkauft.

In der Versandstelle werden versehentlich nicht gekennzeichnete Kisten aussortiert und nachträglich beschriftet, auch wenn die Herkunft des Inhalts nicht eindeutig ist.

Eine Kiste, die fälschlicherweise mit dem Prädikat „von Anlage A“ verkauft wird, kann eine Schadenersatzforderung von 9 000 € nach sich ziehen.

Wird die Kiste irrtümlich mit dem Prädikat „von Anlage B“ verkauft, entsteht ein Verlust von 1 000 €.

- a) Welche Kosten entstehen langfristig pro Kiste, wenn nicht gekennzeichnete Kisten
 - (1) grundsätzlich mit der Aufschrift „von Anlage A“
 - (2) grundsätzlich mit der Aufschrift „von Anlage B“ verkauft werden?Berechnen Sie, welche dieser beiden Strategien vorzuziehen ist?
- b) Um die Kosten zu senken, wurde ein *Bayesianer* (Statistiker) hinzugezogen. Er nahm eine Stichprobe von 20 Artikeln aus der Kiste und stellte fest, dass 15 Stück in Ordnung waren. Ermitteln Sie, welche a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten er den beiden Ereignissen
 - „Die kritische Kiste stammt von Maschine A“
 - „Die kritische Kiste stammt von Maschine B“zugeordnet, und wie er sich dann entschieden hat.
- c) Begründen Sie, dass der Statistiker bei seiner Entscheidung ins Grübeln käme, falls bei einer Überprüfung einer solchen Kiste die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Die kritische Kiste stammt von Maschine B“ genau $\frac{1}{10}$ wäre.
- d) Ermitteln Sie aus dem Ergebnis von c) ein Entscheidungsverfahren, das angibt, für welche Realisierungen der Prüfgröße $X =$ „Anzahl der Artikel, die bei 20 Ziehungen in Ordnung sind“ die Firma die Kiste mit der Aufschrift „von Anlage A“ verkaufen sollte.
(Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Bayes-Formel für $P(B | X = k)$ gerade den in c) betrachteten Wert geliefert hätte und lösen Sie nach k auf).
- e) Ein anderer Statistiker entwickelt einen Hypothesentest mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 1 \%$, wobei er als Irrtum 1. Art denjenigen wählt, der die gravierendere Konsequenz nach sich zieht. Welches Entscheidungsverfahren schlägt der neue Statistiker vor? Begründen Sie Ihren Vorschlag.
- f) Beurteilen Sie die unterschiedlichen Ergebnisse von d) und e).

Aufgabe 13 Amoral

Hinweis: Mit „Patienten“ sind im Folgenden stets „mit Amoral behandelte Patienten“ gemeint.

Laut Angabe des Arzneimittelherstellers treten nach der Einnahme von „Amoral“ in 6 % aller Fälle unerwünschte Nebenwirkungen auf.

- a) Unter welchen Umständen ist es sinnvoll, die Anzahl X der Patienten, bei denen Nebenwirkungen auftreten, als binomialverteilt anzunehmen?

Beschreiben Sie Situationen, in denen die Voraussetzungen für eine Binomialverteilung nicht erfüllt sind.

Im Folgenden soll angenommen werden, dass die in a) genannte Zufallsgröße X tatsächlich binomialverteilt ist.

- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 50 Patienten höchstens bei einem diese Nebenwirkungen auftreten.
- c) In einer Gruppe von zufällig ausgewählten Patienten behaupten alle, dass bei ihnen keinerlei Nebenwirkungen aufgetreten seien.
Berechnen Sie, bei welcher Gruppengröße die Wahrscheinlichkeit, dass wirklich keiner an Nebenwirkungen leidet, unter 1 % sinkt.
- d) In einer internistischen Gemeinschaftspraxis wollen die Ärzte Fälle mit Nebenwirkungen genauer beobachten. Sie rechnen damit, dass sie innerhalb eines halben Jahres 200 Patienten „Amoral“ verschreiben werden und gehen davon aus, dass das Medikament dann auch eingenommen wird.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei mindestens 10 Patienten Nebenwirkungen auftreten werden?

Ein anderer Hersteller bringt ein Medikament mit der gleichen Wirksamkeit auf den Markt, das nicht nur preiswerter ist, sondern zudem nach seinen Angaben besser verträglich: Nur in höchstens 4 % aller Fälle sollen Nebenwirkungen auftreten.

- e) Im Zuge der Bemühungen um Kostensenkungen muss entschieden werden, ob Ärzten empfohlen werden soll, nicht mehr „Amoral“, sondern das neue Medikament zu verschreiben. Vorher soll das neue Medikament an 500 Patienten getestet werden.

Geben Sie eine ausführlich begründete Entscheidungshilfe: Bei bis zu wie vielen Fällen von Nebenwirkungen in dieser Gruppe soll das neue Medikament empfohlen werden?

5 Lösungen

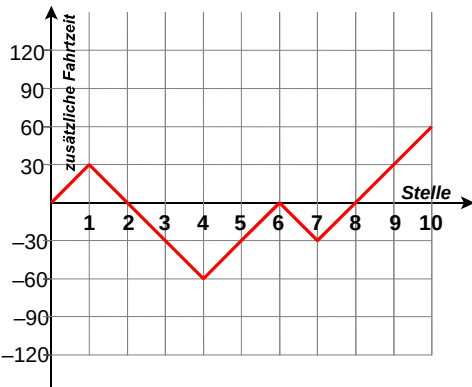
5.1 Lösungen - Grundkursaufgaben

Aufgabe 1 Batterien

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	X beschreibe die Anzahl der Ausschussstücke unter den 4 gekauften Batterien. Da diese der großen Menge zufällig entnommen wurden, ist X binomialverteilt mit $n = 4$ und $p = 0,02$. $P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot 0,02^2 \cdot 0,98^2 = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ und } P(X = 4) = 0,02^4 = 1,6 \cdot 10^{-7}$ Damit ist Margrets Behauptung falsch, da die Wahrscheinlichkeit beim Lotto $p = \frac{1}{\binom{49}{6}} = 7,151 \cdot 10^{-8} \text{ und damit geringer ist.}$	10	10	
b)	Y beschreibe die Anzahl der Ausschussstücke in einem Karton. Da die Verpackung der Batterien ungeprüft und zufällig erfolgt, kann man Y als binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0,02$ annehmen. Dann entspricht der Erwartungswert genau dem durchschnittlichen Ausschuss von 2 Batterien. Die Wahrscheinlichkeit, dass dieser nicht überschritten wird, lässt sich durch $P(Y \leq 2)$ beschreiben: $P(Y \leq 2) = 0,98^{100} + \binom{100}{1} \cdot 0,02^1 \cdot 0,98^{99} + \binom{100}{2} \cdot 0,02^2 \cdot 0,98^{98} = 0,6767.$ <i>Ablesen aus einer Tabelle der Binomialverteilung ist ebenso möglich.</i> Nicht geeignet ist hingegen die näherungsweise Berechnung über die Normalverteilung, da das Ereignis selten ist und damit die Varianz nicht größer ist als 9: $V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 100 \cdot 0,02 \cdot 0,98 < 2$	10	20	5
c)	Z beschreibe die Lebensdauer einer Batterie in Stunden. Die Aufgabenstellung gibt vor, dass es sich um eine normalverteilte Zufallsvariable handelt. Die Normalverteilung dient hier also nicht als Näherung, sondern beschreibt eine stetige Zufallsvariable. $P(Z \geq 250) = 1 - \Phi\left(\frac{250 - 300}{15}\right) = 1 - \Phi(-3,333) \approx 0,9996$ Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 99,96 %. <i>Abschätzen dieses Wertes ist auch mit der 3σ-Regel denkbar.</i> Also stellt eine derartige Garantie ein recht geringes Risiko dar.		20	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	<i>Hier kann mit sehr unterschiedlichen Stückzahlen argumentiert werden.</i> Man erwartet in einem Karton zu 100 Stück 2 Ausschussstücke. Also muss man 6 € zu den 100 € Produktionskosten addieren, um auf die durchschnittlichen Kosten pro Karton zu kommen. Andererseits ist ein Abgabepreis bis zu 132 € möglich, so dass der durchschnittliche Reingewinn bis zu 26 € betragen kann. Da sich dieser Durchschnittswert bei einer großen Produktion einstellen wird, ist also eine wirtschaftliche Produktion möglich.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 2 Fahrtstrecke

Lösungsskizze		Zuordnung, Bewertung																																
		I	II	III																														
a)	Nach dem Aufgabentext ist $\mu = 2,5$ und $\sigma = 0,25$. Gesucht ist die Zeit t für die Fahrt, die in 95 % der Fälle ausreicht: $P(t \leq X) \geq 0,95 \Rightarrow \Phi(1,65) = \Phi\left(\frac{t-2,5}{0,25}\right) \Rightarrow t-2,5 = 1,65 \cdot 0,25 = 0,4125$ also $t = 2,9125$. Das sind auf Minuten gerundet 2 Stunden und 55 Minuten. Der Fahrer muss also um 5.35 Uhr losfahren. <i>Lösung auch mit σ-Regeln möglich:</i> Im Intervall $[\mu-1,64\sigma ; \mu+1,64\sigma]$ liegen 90 % aller Zeiten, aus Symmetriegründen liegen dann 5 % der größten Zeiten oberhalb von $\mu+1,64\sigma \Rightarrow$ $\mu+1,64\sigma = 2,5+0,41 = 2,91$. Das ist auf Minuten gerundet dasselbe Ergebnis wie oben.	20																																
b)	<u>Beispiel</u> Von den 100 Stellen werden an 30 Stellen jeweils 30 s eingespart, an den restlichen 70 Stellen 30 s zusätzlich benötigt: Einsparung: 900 s, zusätzlich: 2100 s. Insgesamt müssen also 1200 s = 20 min zusätzlich aufgebracht werden, die simulierte Fahrtzeit ist 2 Stunden und 50 Minuten. <u>Zufallspfad für die ersten 10 Stellen:</u> <table><tr><td>1. Stelle:</td><td>Zeitverlust,</td><td>↓</td></tr><tr><td>2. Stelle:</td><td>Zeitgewinn,</td><td>↑</td></tr><tr><td>3. Stelle:</td><td>Zeitgewinn,</td><td>↑</td></tr><tr><td>4. Stelle:</td><td>Zeitgewinn,</td><td>↑</td></tr><tr><td>5. Stelle:</td><td>Zeitverlust,</td><td>↓</td></tr><tr><td>6. Stelle:</td><td>Zeitverlust,</td><td>↓</td></tr><tr><td>7. Stelle:</td><td>Zeitgewinn,</td><td>↑</td></tr><tr><td>8. Stelle:</td><td>Zeitverlust,</td><td>↓</td></tr><tr><td>9. Stelle:</td><td>Zeitverlust,</td><td>↓</td></tr><tr><td>10. Stelle:</td><td>Zeitverlust,</td><td>↓</td></tr></table>  also $4 \cdot (-30) + 6 \cdot 30 = 60$ und damit 60 Sekunden zusätzliche Fahrtzeit. <u>Vergleich der Modelle:</u> Der Random Walk simuliert eine einzelne Fahrt, es ist interessieren dabei nicht allein das Endergebnis, sondern auch die Details (der Pfad). Um „globale“ Aussagen zu erhalten – etwa einen Mittelwert – müssen viele Simulationen durchgeführt werden. Das Modell aus Teilaufgabe a) basiert auf einer Vorstellung über die Gesamtheit der Daten (hier Fahrtzeiten), die mit vielen Random Walks, deren Details z. B. auch auf Erfahrungen beruhen, simuliert worden sein könnten.	1. Stelle:	Zeitverlust,	↓	2. Stelle:	Zeitgewinn,	↑	3. Stelle:	Zeitgewinn,	↑	4. Stelle:	Zeitgewinn,	↑	5. Stelle:	Zeitverlust,	↓	6. Stelle:	Zeitverlust,	↓	7. Stelle:	Zeitgewinn,	↑	8. Stelle:	Zeitverlust,	↓	9. Stelle:	Zeitverlust,	↓	10. Stelle:	Zeitverlust,	↓		15	15
1. Stelle:	Zeitverlust,	↓																																
2. Stelle:	Zeitgewinn,	↑																																
3. Stelle:	Zeitgewinn,	↑																																
4. Stelle:	Zeitgewinn,	↑																																
5. Stelle:	Zeitverlust,	↓																																
6. Stelle:	Zeitverlust,	↓																																
7. Stelle:	Zeitgewinn,	↑																																
8. Stelle:	Zeitverlust,	↓																																
9. Stelle:	Zeitverlust,	↓																																
10. Stelle:	Zeitverlust,	↓																																

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	<u>Berechnung der Standardabweichung für diesen Fall:</u> $\mu = 126$ ist gegeben. $P(X \leq 137) = 1 - 0,13 = 0,87 \Rightarrow \Phi(1,13) = \Phi\left(\frac{137-126}{\sigma}\right) \Rightarrow \sigma \approx \frac{11}{1,13} \approx 9,75$. <u>Berechnung der Prozentzahl der „korrekten“ Autofahrer:</u> $P(X \leq 120) = \Phi\left(\frac{120-126}{9,75}\right) \approx \Phi(0,6154) \approx 0,29$. Es halten sich ca. 29 % der Autofahrer an die Vorschriften (und fahren nicht zu schnell).		25	
d)	<u>Kurve:</u> Änderung von μ verschiebt Kurve in x-Richtung: μ vergrößern $\Rightarrow$ Verschiebung nach rechts, μ verkleinern $\Rightarrow$ Verschiebung nach links Änderung von σ verändert Höhe und Weite der Kurve: σ vergrößern $\Rightarrow$ Kurve wird flacher und läuft weiter σ verkleinern $\Rightarrow$ Kurve wird steiler und liegt näher an der y-Achse (Siehe σ-Regeln, Flächenmaß bleibt unverändert) <u>Kontext von Aufgabenteil a)</u> Verschiebung des Mittelwertes verändert die nötige Abfahrtszeit: μ verkleinern bedeutet entsprechende kürzere (mittlere) Fahrzeit, also kann der LKW entsprechend später losfahren. μ vergrößern bedeutet analog früheres Losfahren des LKW. σ verkleinern heißt weniger Zeitzugabe, σ vergrößern heißt mehr Zeitzugabe (bezogen auf gegebenes μ) <u>Kontext von Aufgabenteil b)</u> μ verkleinern bedeutet, dass in dem Modell dann weniger Autofahrer 137 km/h überschreiten. μ vergrößern bedeutet analog, dass dann mehr Autofahrer 137 km/h überschreiten (so lange μ nicht wesentlich größer als 137 km/h ist, was der Sachkontext ausschließt). σ verkleinern heißt (bezogen auf gegebenes μ), dass dann weniger Autofahrer 137 km/h überschreiten können, σ vergrößern: umgekehrt. Ändern von μ und σ bedeutete entsprechende Kombinationen.	5	10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 3 Billigflüge

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Es sei X die Anzahl der stornierten Flüge (für einen bestimmten Flugtermin). X ist nach Annahme binomialverteilt mit $n = 35$ und $p = 0,2$ $P(X = 7) = \binom{35}{7} \cdot 0,2^7 \cdot 0,8^{28} \approx 16,6 \%$ $P(X \leq 5) = \sum_{k=0}^5 \binom{35}{k} \cdot 0,2^k \cdot 0,8^{(35-k)} \approx 27,21 \%$ $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx 72,79 \%$	20		
b)	Die Agentur hat von den regulären Buchern feste Einnahmen in Höhe von $35 \cdot 300 \text{ €} = 10\,500 \text{ €}$. Die Anzahl der Stornierungen hat den Erwartungswert der entsprechenden Binomialverteilung, also $35 \cdot 0,2 = 7$. Für jede solche Person kann nach Voraussetzung ein Last-Minute-Angebot für 250 € verkauft werden. Also entstehen zusätzliche erwartete Einnahmen von 1750 €. (Hier kann mit der Linearität des Erwartungswertes oder auch „naiv“ argumentiert werden). Insgesamt kann die Agentur also 12 250 € pro Reiseternin erwarten.		20	
c)	Im ersten Falle hat die Agentur $40 \cdot 300 \text{ €} = 12\,000 \text{ €}$ Einnahmen von den regulären Buchern und $5 \cdot 250 \text{ €} = 1\,250 \text{ €}$ von den Last-Minute-Buchern, also insgesamt 13 250 €. Im zweiten Falle hat die Agentur 12 000 € Einnahmen von den regulären Buchern, keine Last-Minute-Einnahmen und zusätzliche Kosten wegen der 5 Überbuchungen von $5 \cdot 400 \text{ €} = 2\,000 \text{ €}$, also eine Bilanz von nur 10 000 €.	10	10	
d)	Mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1 - 0,2)^{40} = 0,8^{40} \approx 0,013 \%$ kommen alle. Es kommt zu Überbuchungen, wenn entweder 0 oder 1 ... oder 4 Kunden stornieren ($X < 5$). Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten entnimmt man der gegebenen Tabelle für die Binomialverteilung für $n = 40$. Aufsummierung ergibt: $P \approx 0,07591 \approx 7,6 \%$ Mit 7,6 %-iger Wahrscheinlichkeit kommt es zum Überbuchungsfall.		20	5
e)	Es sind folgende Beträge zu berücksichtigen: - Die festen Einnahmen von 40 Buchern zu je 300 € - In den Fällen ohne Überbuchung ($X \geq 5$) zusätzliche Einnahmen von $X - 5$ Last-Minute-Kunden zu je 250 €. Da diese Fälle nicht sicher, sondern mit den Wahrscheinlichkeiten der $B(40; 0,2; X)$-Binomialverteilung auftreten,			

Lösungsskizze		Zuordnung, Bewertung																		
		I	II	III																
	ist hier der entsprechende Erwartungswert auszurechnen. - Im Überbuchungsfall ($X < 5$) zusätzliche Ausgaben von $5 - X$ überzähligen Kunden zu je 400 €. Da auch diese Fälle nicht sicher, sondern mit den Wahrscheinlichkeiten der $B(40 ; 0,2 ; X)$-Binomialverteilung auftreten, ist auch hier der entsprechende Erwartungswert auszurechnen. Gegenüber dem Wert von b) ist der Wert 12 733 € eine Steigerung der Bilanz-erwartung von knapp 500 €, die Überbuchungsmethode lohnt sich also aus der Sicht der Agentur. <i>Zu Übungszwecken im Unterricht lohnt es, die nachfolgende gesamte Rechnung wirklich durchzuführen, die zu den erwarteten Einnahmen von 12 733 € führt: Einnahmen von $40 \cdot 300 \text{ €} = 12\,000 \text{ €}$ stehen fest.</i> <i>Bei X Stornierungen können $(X - 5)$ Last-Minute-Flüge verkauft werden. Da X binomialverteilt ist, hätten diese Verkaufseinnahmen über alle k einen Erwartungswert von $250 \cdot (40 \cdot 0,2 - 5) \text{ €} = 750 \text{ €}$, allerdings schlagen in den Überbuchungsfällen ($X < 5$ also $k = 0, \dots, 4$) ja keine „negativen Last-Minute-Einnahmen“ zu Buche, diese müssen also gegengerechnet werden mit</i> $250 \text{ €} \cdot \sum_{k=0}^4 (5 - k) \cdot \binom{40}{k} \cdot 0,2^k \cdot 0,8^{40-k} \approx 28,49 \text{ €} .$ <i>Andererseits entstehen bei X Stornierungen in den Überbuchungsfällen ($X < 5$ also $k = 0, \dots, 4$) Zusatzkosten in Höhe von $(5 - k) \cdot 400 \text{ €}$.</i> <i>Da X binomialverteilt ist, beträgt der Erwartungswert der Zusatzkosten:</i> $E(Z) = 400 \text{ €} \cdot \sum_{k=0}^4 (5 - k) \cdot \binom{40}{k} \cdot 0,2^k \cdot 0,8^{40-k} \approx 45,57 \text{ €} .$ <i>Die letzten beiden Terme können auch zusammengefasst werden zu Kosten (negativen Einnahmen) von</i> $150 \text{ €} \cdot \sum_{k=0}^4 (5 - k) \cdot \binom{40}{k} \cdot 0,2^k \cdot 0,8^{40-k} \approx 17,08 \text{ €} .$ <i>Also gilt für den Erwartungswert der Bilanz:</i> $E \approx 12\,000 \text{ €} + 750 \text{ €} - 17,08 \text{ €} \approx 12\,733 \text{ €} .$ <i>Im Unterricht kann man – am besten mit Rechnereinsatz – auch noch weiter gehen und danach fragen, für welchen Wert z von zusätzlich zu 35 angebotenen Tickets der Erwartungswert $e(z)$ der Einnahmen maximal ist:</i> $e(z) = (35 + z) \cdot 300 + ((35 + z) \cdot 0,2 - z) \cdot 250 - \left(\sum_{k=0}^{z-1} B(35 + z, 0,2, k) \cdot (z - k) \right) \cdot 150$ <i>Dies kann über eine Wertetabelle geschehen, hier ein Auszug:</i> <table><tr><th>z</th><th>$e(z)$ [€]</th></tr><tr><td>0</td><td>12 250</td></tr><tr><td>...</td><td>...</td></tr><tr><td>5</td><td>12 733</td></tr></table><table><tr><th>z</th><th>$e(z)$ [€]</th></tr><tr><td>11</td><td>13 016</td></tr><tr><td>12</td><td>13 020</td></tr><tr><td>13</td><td>13 015</td></tr></table>	z	$e(z)$ [€]	0	12 250	...	...	5	12 733	z	$e(z)$ [€]	11	13 016	12	13 020	13	13 015			15
z	$e(z)$ [€]																			
0	12 250																			
...	...																			
5	12 733																			
z	$e(z)$ [€]																			
11	13 016																			
12	13 020																			
13	13 015																			

	Lösungsskizze					Zuordnung, Bewertung		
						I	II	III
	...	...		...	...			
	Man erkennt, dass das Maximum bei $z = 12$ liegt, dass die Agentur also stets 47 Buchungen im Erstverkauf zulassen sollte. Das ist ein erstaunlich hoher Wert, der nur deshalb zustande kommt, weil die relativ selten auftretenden erhöhten Kosten von nur 400 € pro überbuchter Person den sicheren Einnahmen von 300 € pro zusätzlicher Person gegenüberstehen. Der Sachverhalt ändert sich, wenn die erhöhten Kosten pro Überbuchung drastisch steigen (Europäisches Gerichtsurteil), z.B. auf 2 000 €. Dann etwa liegt das Maximum bei $z = 2$.							
	Insgesamt 100 BWE					30	50	20

Aufgabe 4 Gefälschter Würfel

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	$P(\text{„genau 4 Sechsen bei 12 Würfeln“}) = \binom{12}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 8,9\% .$ $P(\text{„mehr als 3 Sechsen bei 12 Würfeln“}) = 1 - \sum_{k=0}^3 \binom{12}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{12-k} \approx 12,5\% .$	20		
b)	p sei die wahre Wahrscheinlichkeit für eine Sechsen bei dem suspekten Würfel Es wird die Nullhypothese: $H_0 : p \leq \frac{1}{6}$ einseitig getestet gegen die Alternativhypothese: $H_1 : p > \frac{1}{6}$ Der Tabelle entnimmt man: $1 - \sum_{k=0}^{13} \binom{50}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{50-k} \approx 3,1\% ,$ aber: $1 - \sum_{k=0}^{12} \binom{50}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{50-k} \approx 6,2\%$ Wenn man also H_0 genau dann ablehnt, wenn bei 50 Würfeln mehr als 13 Sechsen fallen, dann gilt für die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art: $\alpha_0 \leq 3,1\% .$ Anna wird also diesen Test vorschlagen.	10	20	
c)	Falls $p = 25\%$ gilt: $P(\text{„13 oder weniger Sechsen zu werfen“}) = \sum_{k=0}^{13} \binom{50}{k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{50-k} \approx 64\% .$ Dieser Wert ist sehr hoch, er beschreibt die zu $p = 25\%$ gehörende Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art. Sie gibt hier an, wie wahrscheinlich es ist, bei Annas Test, den mit $p = 25\%$, gefälschten Würfel nicht zu „entdecken“, d.h. kein signifikantes Ergebnis zu bekommen, obwohl der Würfel deutlich gefälscht ist. Je weniger der Würfel gefälscht ist (d.h. je kleiner p), desto größer ist diese Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art. Durch Vergrößerung der Anzahl der Würfe kann man bei vorgegebener Obergrenze für die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art die Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art senken, der Test wird „trennschärfer“.	5	20	10
d)	Da die Anfangsverteilung für die möglichen Werte p_i als Gleichverteilung angenommen wird, vereinfacht sich die Rechnung mit Hilfe des Satzes von Bayes in folgender Weise: $P(p = p_i X = 13) = \frac{p_i^{13} \cdot (1 - p_i)^{37}}{\sum_{j=1}^4 p_j^{13} \cdot (1 - p_j)^{37}}$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung																	
		I	II	III															
	So erhält man die folgende Tabelle: <table border="1"> <tr> <td>Mögliche Werte für p_i</td><td>$p = \frac{1}{6}$</td><td>$p = \frac{1}{4}$</td><td>$p = \frac{1}{2}$</td><td>$p = \frac{3}{4}$</td></tr> <tr> <td>Anfangsverteilung für die p_i</td><td>25 %</td><td>25 %</td><td>25 %</td><td>25 %</td></tr> <tr> <td>Verteilung für die p_i nach Versuchsdurchführung</td><td>20 %</td><td>80 %</td><td>sehr klein</td><td>sehr klein</td></tr> </table> Die Verteilung in der letzten Zeile lässt aus Sicht von Claudia folgende Interpretation zu: Der Würfel ist entweder fair oder nur schwach gefälscht. Es spricht viermal mehr dafür, dass er schwach gefälscht ist als dass er fair ist. Darauf könnte man wetten. Der Vorversuch aus a) könnte natürlich auch dahingehend interpretiert werden, dass Claudia den Wert für $p = \frac{1}{6}$ in der Anfangsverteilung kleiner hätte wählen können, dann würde sich diese Interpretation noch deutlicher abzeichnen. Claudia kommt zu wesentlich klareren Ergebnissen als Anna und Bernd.	Mögliche Werte für p_i	$p = \frac{1}{6}$	$p = \frac{1}{4}$	$p = \frac{1}{2}$	$p = \frac{3}{4}$	Anfangsverteilung für die p_i	25 %	25 %	25 %	25 %	Verteilung für die p_i nach Versuchsdurchführung	20 %	80 %	sehr klein	sehr klein			
Mögliche Werte für p_i	$p = \frac{1}{6}$	$p = \frac{1}{4}$	$p = \frac{1}{2}$	$p = \frac{3}{4}$															
Anfangsverteilung für die p_i	25 %	25 %	25 %	25 %															
Verteilung für die p_i nach Versuchsdurchführung	20 %	80 %	sehr klein	sehr klein															
	Insgesamt 100 BWE	35	45	20															

Aufgabe 5 Mikrochips

Lösungsskizze		Zuordnung, Bewertung																		
		I	II	III																
a)	Da bei den Chips nur die Ergebnisse „fehlerhaft“ und „fehlerfrei“ unterschieden werden, kann die Herstellung eines Chips als Bernoulli-Experiment angesehen werden. Jeder Chip ist nach Aufgabenstellung mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % fehlerhaft. Soll mit einer binomialverteilten Zufallsgröße gerechnet werden, muss von einer Unabhängigkeit im Produktionsprozess ausgegangen werden. Außerdem muss auf die „Massenproduktion“ verwiesen werden, bei der auch ein Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit bei jedem Zug nur unwesentlich verändert.		15																	
b)	Da die Prüflinge die Tabellen zur Verfügung haben, können sie $P(X=20)$ „direkt“ als $B(100; 0,2; 20) = \binom{100}{20} \cdot 0,2^k \cdot 0,8^{n-k} \approx 0,099$ berechnen oder $P(X=20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 19) \approx 0,5595 - 0,4602 = 0,0993$.	5																		
c)	Es gilt: $P(14 \leq X \leq 26) = P(X \leq 26) - P(X \leq 13) \approx 0,9442 - 0,0469 = 0,8973$, sowie $P(15 \leq X \leq 25) = P(X \leq 25) - P(X \leq 14) \approx 0,9125 - 0,0804 = 0,8321$. Damit ist $[14; 26]$ das kleinstmögliche Intervall mit der geforderten Eigenschaft.		15																	
d)	Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n , für die gilt: $1 - 0,8^n > 0,99 \Leftrightarrow 0,8^n < 0,01 \Leftrightarrow n > \frac{\lg 0,01}{\lg 0,8}$, also $n = 21$.		15																	
e)	Es gilt: $P(F)=0,2$, $P(\bar{F})=0,8$, $P(\bar{F} \cap A)=0,03$, $P(\bar{A}) = 0,83$. Zu bestimmen ist zunächst $P(F \cap A)$. Dies kann beispielsweise mithilfe einer Vierfeldertafel geschehen. Trägt man die Voraussetzungen in eine Tabelle ein, so ergibt sich: <table><tr><td></td><td>Ausgesondert</td><td>Nicht ausgesondert</td><td></td></tr><tr><td>Fehlerhaft</td><td>0,14</td><td>0,06</td><td>0,2</td></tr><tr><td>Fehlerfrei</td><td>0,03</td><td>0,77</td><td>0,8</td></tr><tr><td></td><td>0,17</td><td>0,83</td><td>1</td></tr></table> Mithin ist $P(F \cap A) = 0,14$. Also ist der Anteil der ausgesonderten Chips in Bezug auf die fehlerhaften Chips $\frac{0,14}{0,2} = \frac{7}{10} = 0,7$. Von den fehlerhaften Chips werden also 70 % ausgesondert.		Ausgesondert	Nicht ausgesondert		Fehlerhaft	0,14	0,06	0,2	Fehlerfrei	0,03	0,77	0,8		0,17	0,83	1			
	Ausgesondert	Nicht ausgesondert																		
Fehlerhaft	0,14	0,06	0,2																	
Fehlerfrei	0,03	0,77	0,8																	
	0,17	0,83	1																	
f)	Es gilt immer noch: $p = 0,2$. Die Tabelle ergibt: $P(X \leq 11) \approx 0,013 = 1,3 \%$.	5	10																	
g)	Für $p = 0,1$ erhält man: $P(X \leq 11) \approx 0,703 = 70,3 \%$. Also wird die Prämie mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 29,7 % zu Unrecht verweigert.		10																	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
h)	Es gibt verschiedene Möglichkeiten. Z. B.: Die Wahrscheinlichkeit, zu Unrecht die Prämie zahlen zu müssen, ist erfreulich niedrig. Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 30 % erhält das Team jedoch zu Unrecht die Prämie nicht, wenn der Anteil der fehlerhaften Chips auf 10 % gesenkt wurde. Bei Senkung auf 15 % – was ja auch eine deutliche Senkung bedeutete – wäre diese Irrtumswahrscheinlichkeit noch viel größer, nämlich ca. 84 %. Der Konzern würde den Betrag dann zwar sparen, vielleicht aber fähige Mitarbeiter verlieren. Dies gilt es gegeneinander abzuwägen.			20
	Insgesamt 100 BWE	15	65	20

Aufgabe 6 Glasschüsseln

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Es bietet sich an, zunächst die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis $\bar{F}$: „Die Glasschüssel ist fehlerfrei, also I. Wahl.“ zu berechnen. Nach Voraussetzung erfolgen die Arbeitsgänge unabhängig voneinander, daher gilt: $P(\bar{F}) = 0,92 \cdot 0,95 \cdot 0,98 \cdot 0,96 \cdot 0,97 \approx 0,80$ $P(F) = 1 - P(\bar{F}) \approx 0,20.$		10	
b)	Werden bei den fertigen Schüsseln nur die Ergebnisse „nicht I. Wahl“ und „I. Wahl“ unterschieden, kann die Herstellung einer Glasschüssel als Bernoulli-Experiment angesehen werden. Da die Schüsseln nach Voraussetzung unabhängig voneinander mit der gleichen Wahrscheinlichkeit nicht I. Wahl sind, kann die Produktion einer Serie von Gläsern als Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0,2$ modelliert werden. Da die Zufallsvariable X die Anzahl der Treffer in dieser Bernoulli-Kette zählt, ist X n-$0,2$-binomialverteilt, und es gilt: $P(X=k) = B(n; 0,2; k) = \binom{n}{k} \cdot 0,2^k \cdot 0,8^{n-k}$ $E(X) = \mu = n \cdot p = 0,2n, \quad V(X) = n \cdot p \cdot q = 0,16n,$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{0,16n} = 0,4\sqrt{n}.$	5	10	
c)	$P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^3 B(15; 0,2; k) = \sum_{k=0}^3 \binom{15}{k} \cdot 0,2^k \cdot 0,8^{15-k}$ $= 0,8^{15} + 15 \cdot 0,2 \cdot 0,8^{14} + 105 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{13} + 455 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^{12}$ $\approx 0,648$ Es gilt: $E(X) = 3$. Also liegt in dieser Verteilung die größte Einzelwahrscheinlichkeit bei $k = 3$ vor. Wegen $p = 0,2$ ist das zugehörige Histogramm zudem asymmetrisch mit einer größeren Wahrscheinlichkeit für $k = 2$ als für $k = 4$, usw. Also muss $P(X \leq 3)$ deutlich größer als $0,5$ sein.	10	5	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Hier gilt: $\mu = 20$, $\sigma = 4 > 3$. Nach Moivre/Laplace lässt sich mit Hilfe des Tafelwerks die gesuchte Wahrscheinlichkeit daher z.B. abschätzen durch: $P(X \geq 30) < 0,5 \cdot (1 - P(\mu - 2,2\sigma \leq X \leq \mu + 2,2\sigma))$ $\approx 0,5 \cdot (1 - 0,972) = 0,014.$ Zur Berechnung wählt man den Ansatz $P(X \geq 30) = 1 - P(X \leq 29) = 1 - \sum_{k=0}^{29} B(100; 0,2; k)$ und erhält mit Hilfe der Anlage: $1 - \sum_{k=0}^{29} B(100; 0,2; k) \approx 1 - 0,989 = 0,011 = 1,1 \, \%.$	5	5	10
e)	Mit den Bezeichnungen F: „Die Fehler im Glas rechtfertigen die Qualitätsbezeichnung „I. Wahl“ nicht.“ und V: „Die Schüssel durchläuft ohne Beanstandungen die Kontrolle und wird verschickt.“ gilt: $P(F) = 0,2, \quad P(\bar{F}) = 0,8, \quad P(V/F) = 0,03, \quad P(\bar{V}/\bar{F}) = 0,01.$ Gefragt ist nach $P(F/V)$. Diese Wahrscheinlichkeit kann mit Hilfe des Satzes von Bayes, durch geeignete Umformungen des Ansatzes $P(F/V) = \frac{P(F \cap V)}{P(V)}$, mit Hilfe eines kleinen Baumdiagramms oder einer Vierfeldertafel bestimmt werden. $P(F/V) = \frac{0,2 \cdot 0,03}{0,2 \cdot 0,03 + 0,8 \cdot 0,99} \approx 0,0075.$		20	
f)	Die Manufaktur nimmt für eine nicht reklamierte Schüssel $1,04 \cdot H$ ein, bei einer gerechtfertigten Reklamation nur $1,04 \cdot H \cdot 0,75$. Wenn p der mittlere Anteil an von den Geschäften reklamierten Schüsseln ist, nimmt die Manufaktur im Mittel pro Schüssel also $[1,04 \cdot (1 - p) + 1,04 \cdot 0,75 \cdot p] \cdot H$ ein. Der Gewinn ist Null, wenn die eckige Klammer Eins ist. Die Lösung der zugehörigen Gleichung ergibt: $p \approx 15,4 \, \%$. Die Manufaktur gerät also erst dann mit der Produktion der Glasschüsseln in die Verlustzone, wenn die Wahrscheinlichkeit p, dass der Kunde eine Schüssel berechtigt als „nur II. Wahl“ reklamiert, größer als $15,4 \, \%$ ist. Vergleicht man diesen Wert mit dem Ergebnis aus e), so besteht unter den gegebenen Bedingungen keinerlei Gefahr, da $p < 1 \, \%$.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	55	25

Aufgabe 7 Flaschenabfüllautomat

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Das Auffüllen eines 12er-Kastens lässt sich als Bernoulliexperiment (<i>Treffer</i> = <i>Flaschentyp 0</i> ; <i>kein Treffer</i> = <i>Flaschentyp 1</i>) der Kettenlänge $n = 12$ beschreiben. Wenn man voraussetzt, dass das variierende Füllverhalten der Maschine stochastisch unabhängig erfolgt, so kann man die Zufallsvariable X , die die Anzahl der Ausschussflaschen in einem 12er-Kasten zählt, als binomialverteilt ansehen. Die Wahrscheinlichkeit (<i>Treffer</i> wahrscheinlichkeit) für den Flaschentyp 0 beträgt entsprechend der relativen Häufigkeit $p = 0,05$.		10	
b)	Mithilfe der Tabelle oder der entsprechenden Formel erhält man: $P(X = 3) = \binom{12}{3} \cdot 0,05^3 \cdot 0,95^9 = 0,0173.$ Die Wahrscheinlichkeit ist mit 1,73 % so gering, dass die Aussage des Kunden durchaus skeptisch bewertet werden darf.	10	5	
c)	$P(X \leq 1) = \binom{12}{1} \cdot 0,05^1 \cdot 0,95^{11} + \binom{12}{0} \cdot 0,95^{12} = 0,8817$ Die Wahrscheinlichkeit beträgt also nur etwa 88 %; ein neuer Abfüllautomat ist also nötig!	15		
d)	Es handelt sich hier um einen einseitigen Hypothesentest mit einer Stichprobenlänge von $n=100$, einer Nullhypothese H_0 von $p=0,02$ für Flaschen des <i>Typs 0</i> einer binomialverteilten Zufallsgröße X (Anzahl der Ausschussflaschen). Die Gegenhypothese lautet $H_1: p > 0,05$. Die Entscheidungsregel lautet: Annahmebereich für H_0 : $A = \{0; 1; \dots; 4\}$; Ablehnungsbereich für H_0 : $\bar{A} = \{5; 6; \dots; 100\}$ Annahme: H_0 sei wahr, gesucht ist die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art. Aus der Tabelle im Anhang folgt: $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \approx 0,0508$, also ca. 5 %. In etwa 5 % aller Fälle wird man irrtümlich einen Preisnachlass gewähren.		10	10
e)	Es wird angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten vom Flaschentyp 0 immer noch bei $p = 0,05$ liegt. Wieder aus der Tabelle im Anhang kann man ablesen: $P(X \leq 4) \approx 0,4360$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 43 % wird nicht entdeckt, dass sich die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Flaschentyps 0 nicht geändert hat und nach wie vor bei $p = 0,05$ liegt.		10	10

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Flaschentyps 0 in einem 20er-Kasten beträgt: $P(X=0) = \binom{20}{0} \cdot 0,02^0 \cdot 0,98^{20} \approx 0,66760\dots, \text{ also ca. } 67 \, \%.$ Gesucht ist die maximale Anzahl der Flaschen n mit $P(X=0) \geq 0,54$: $0,98^n \geq 0,54$ $n \leq \frac{\ln 0,54}{\ln 0,98}$ $n \leq 30,500\dots$ Der Kasten darf also maximal eine Größe von 30 Flaschen haben. Kästen mit einer derartigen Größe sind ungewöhnlich. Solche Kisten müssten auch transportiert werden. Hier sollte überlegt werden, ob der Einsatz einer ungewöhnlichen Kiste lohnt, denn es ist nicht geklärt, warum der Umsatz steigt. Vielleicht kann der Umsatz auch gesteigert werden, wenn noch weniger Flaschen von Typ 0 vorkommen.		20	
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Aufgabe 8 Urnentest

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Beim 10-fachen Ziehen mit Zurücklegen aus der Urne 1 ist die Anzahl der schwarzen Kugeln X binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = \frac{1}{6}$. Mithilfe der Formel $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ oder des Tafelwerks erhält man $P(X = 4) = B\left(10; \frac{1}{6}; 4\right) = 0,0543$ Die Wahrscheinlichkeit, beim 10-maligen Ziehen ohne Zurücklegen aus der Urne 1 genau 4 schwarze Kugeln zu ziehen, beträgt etwa 5,4 %. Entsprechend erhält man: $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) \approx 1 - 0,9845 = 0,0155.$ Die Wahrscheinlichkeit, beim 10-maligen Ziehen ohne Zurücklegen aus der Urne 1 mehr als 4 schwarze Kugeln zu ziehen, beträgt etwa 1,6 %.	20		
b)	Es ist der Ablehnungsbereich entsprechend der Formel $P(X \leq K_1) \leq \frac{\alpha}{2}$ und $P(X \geq K_2) \leq \frac{\alpha}{2}$ zu bestimmen. Als Hilfsmittel wird die Tafel genommen. • Urne 1: $p = \frac{1}{6}$ für das Ziehen einer schwarzen Kugel. Wegen $P(X \leq 0) = 0,1615$ und $P(X \geq 3) = 1 - 0,9298 = 0,0702$ und $P(X \geq 4) = 1 - 0,9872 = 0,0128$ ist der Ablehnungsbereich $\{4; 5; \dots; 10\}$. • Urne 2: $p = \frac{1}{3}$ für das Ziehen einer schwarzen Kugel. Wegen $P(X \leq 0) = 0,0173$ und $P(X \leq 1) = 0,1040$ sowie $P(X \geq 6) = 1 - 0,9234 = 0,0766$ und $P(X \geq 7) = 1 - 0,9803 = 0,0197$ ist der Ablehnungsbereich $\{0; 7; 8; 9; 10\}$ • Urne 3: $p = \frac{1}{2}$ für das Ziehen einer schwarzen Kugel. Wegen $P(X \leq 1) = 0,0107$ und $P(X \leq 2) = 0,0547$ sowie $P(X \geq 8) = 1 - 0,9453 = 0,0547$ und $P(X \geq 9) = 1 - 0,9893 = 0,0107$ ist der Ablehnungsbereich $\{0; 1; 9; 10\}$		30	
c)	Das Ereignis „3 schwarze Kugeln zu ziehen“ liegt nicht im Ablehnungsbereich aller drei Urnen. Also kann man sich mithilfe dieses Hypothesentests gegen keine der drei Urnen entscheiden. Und auch nicht für eine der drei Urnen.		10	

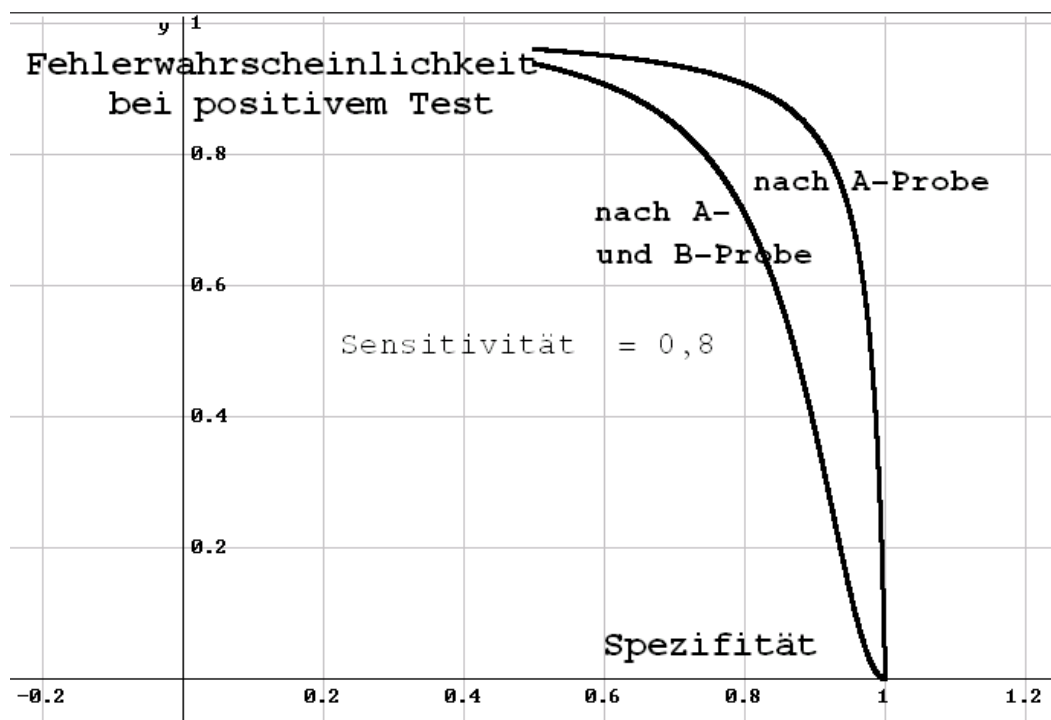
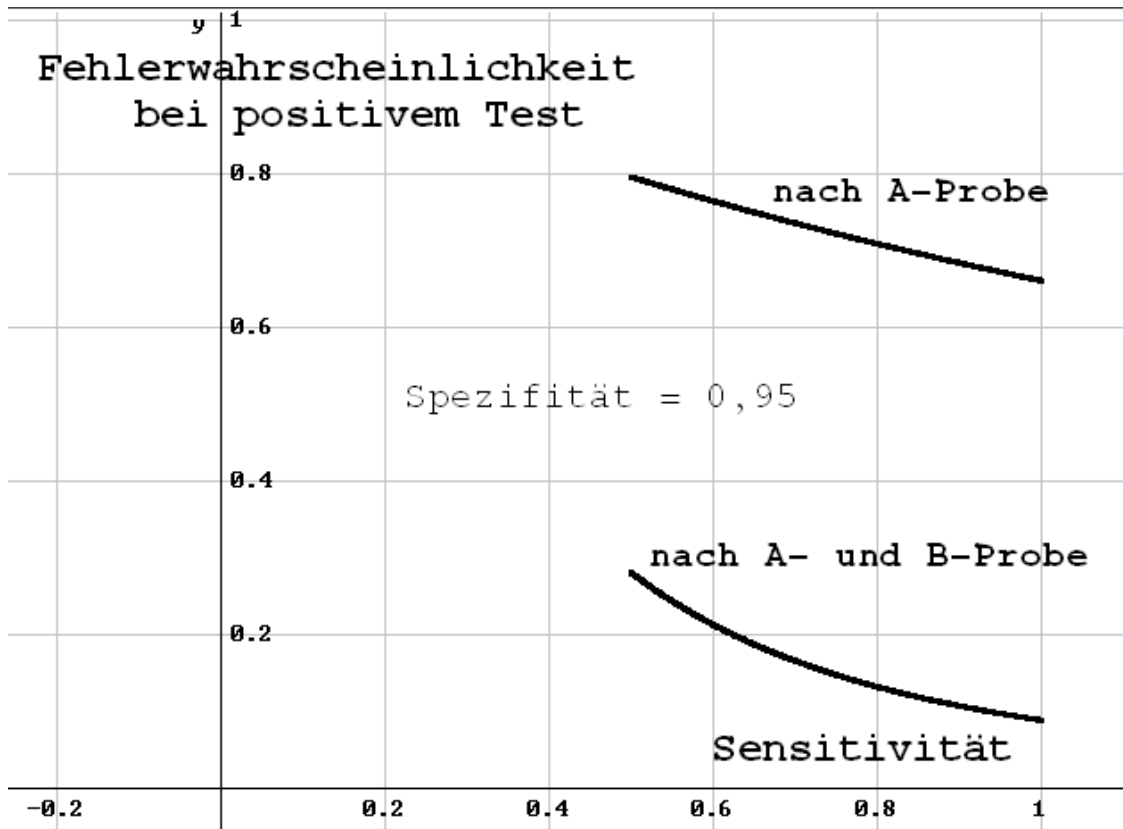
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Vor dem ersten Zug weiß man nicht, welche Urne gewählt wurde. Am Anfang ordnet man also jeder Urne die a-priori-Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{3}$ zu. Nun zieht man eine Kugel und erhält ein Indiz, das meist verschieden stark für eine Alternative (hier Urne) spricht. Daraufhin erhält man geänderte Wahrscheinlichkeiten dafür, welche Alternative (Urne) vorgelegen haben könnte, die a-posteriori Wahrscheinlichkeit. Zieht man ein zweites Mal, so werden die a-posteriori Wahrscheinlichkeiten als neue a-priori Wahrscheinlichkeiten genommen, die durch ein neues Indiz wieder zu neuen a-posteriori Wahrscheinlichkeiten verändert werden, usw. Nun wird der vorliegende Fall betrachtet: Man nimmt an, dass die Urnen zufällig ausgewählt wurden. Die a-priori Wahrscheinlichkeiten sind also jeweils $\frac{1}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu ziehen ist bei der ersten Urne $\frac{5}{6}$, bei der zweiten Urne $\frac{2}{3}$ und bei der dritten Urne $\frac{1}{2}$. Die Pfade zum Indiz rote Kugel haben also die folgenden Wahrscheinlichkeiten: Urne 1: $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$, Urne 2: $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ Urne 3: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ Die totale Wahrscheinlichkeit (Summe vom Indiz rote Kugel beim ersten Zug) ist damit $\frac{5}{18} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$. Als a-posteriori Wahrscheinlichkeiten für die jeweiligen Urnen im ersten Zug erhält man nun nach dem Satz von Bayes die Anteile der Wahrscheinlichkeiten der Alternativen an der der Gesamtwahrscheinlichkeit für das Indiz. Urne 1: $\frac{5}{18} : \frac{2}{3} = \frac{5}{12} \approx 41,7\%$ Urne 2: $\frac{2}{9} : \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \approx 33,3\%$ Urne 3: $\frac{1}{6} : \frac{2}{3} = \frac{1}{4} = 25,0\%$ Die a-posteriori Wahrscheinlichkeit werden nun für den zweiten Zug die neuen a-priori Wahrscheinlichkeiten und mit den entsprechenden Rechnungen erhält man nun die (neuen) a-priori Wahrscheinlichkeiten für die schwarze Kugel: Urne 1: $41,7\% \cdot \frac{1}{6} \approx 6,95\%$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Urne 2: $33,3\% \cdot \frac{1}{3} \approx 11,1\%$ Urne 3: $25,0\% \cdot \frac{1}{2} = 12,5\%$ Als Gesamtwahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel im zweiten Zug erhält man nun $6,95\% + 11,1\% + 12,5\% = 30,55\%$. Die neuen a-posteriori Wahrscheinlichkeiten erhält man nun folgendermaßen: Urne 1: $6,95\% : 30,55\% \approx 22,7\%$, Urne 2: $11,1\% : 30,55\% \approx 36,3\%$ und Urne 3: $12,5\% : 30,55\% \approx 40,9\%$.		30	
e)	Die Indizien sprechen hier für die Urne 2, da die a posteriori Wahrscheinlichkeit für diese Urne mit $48,9\%$ gegenüber $29,1\%$ bzw. $22,0\%$ deutlich höher sind. Das Verfahren aus den Aufgabenteilen d) und e) berücksichtigt Vorwissen. Das Verfahren aus dem Aufgabenteil c) ist „vorsichtiger“. Es wird sich nur dann gegen eine Hypothese ausgesprochen, wenn das Versuchsergebnis sehr stark vom Erwartungswert der Hypothese abweicht. Zudem ist das vorgegebene Signifikanzniveau ist ziemlich willkürlich.			10
	Insgesamt 100 BWE	20	70	10

Aufgabe 9 Doping

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Ein falsches Urteil wird abgegeben, wenn ein gedopter Sportler nach dem Test als nicht gedopt gilt oder wenn ein nicht gedopter Sportler des Dopings bezichtigt wird. Es bezeichne: • D das Ereignis, dass der betreffende Sportler gedopt ist. • T das Ereignis, dass seine Dopingprobe positiv ausfällt. Gegeben sind: • $P(D) = \frac{55}{2200} = 0,025$ (a-priori-Wahrscheinlichkeit) • $p_e = P(T/D) = 0,8$ • $p_a = P(\bar{T}/\bar{D}) = 0,95$ Gefragt ist nach: $P(\bar{T} \cap D) + P(T \cap \bar{D}) = P(\bar{T}/D) \cdot P(D) + P(T/\bar{D}) \cdot P(\bar{D})$ $= 0,2 \cdot 0,025 + 0,05 \cdot 0,975$ $= 0,05375$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 5,4 % wird also über eine zufällig ausgewählte Person ein falsches Urteil abgegeben.	20		
b)	Zu bestimmen ist $P(\bar{D}/T)$. Mithilfe eines Baumdiagramms, einer Vierfeldertafel oder der Formel von Bayes erhält man $P(\bar{D}/T) = \frac{P(T/\bar{D}) \cdot P(\bar{D})}{P(T)} = \frac{P(T/\bar{D}) \cdot P(\bar{D})}{P(T/D) \cdot P(D) + P(T/\bar{D}) \cdot P(\bar{D})}$ $= \frac{0,05 \cdot 0,975}{0,8 \cdot 0,025 + 0,05 \cdot 0,975} \approx 0,709$ Die Wahrscheinlichkeit, dass ein des Dopings beschuldigter Sportler nicht gedopt war beträgt also ca. 71 %. An dem Nenner des Bruches ist gut zu erkennen, dass unter den des Dopings Bezichtigten der überwiegende Teil aus Sportlern bestehen wird, die nicht mit diesem Wirkstoff gedopt sind. Wegen des großen Anteils nicht gedopter Sportler ergeben sich aus dem Testfehler von 5 % so viele Fehlurteile.		20	
c)	Die B-Probe wird nur dann untersucht, wenn ein positiver Befund der A-Probe vorliegt. Damit hat sich für den erneuten Testdurchlauf die a-priori-Wahrscheinlichkeit $P(D)$ auf 0,291 erhöht. Wie in Aufgabenteil b) ergibt sich dann: $P(\bar{D}/P_0) = \frac{0,05 \cdot 0,709}{0,8 \cdot 0,291 + 0,05 \cdot 0,709} \approx 0,132 \approx 13\%.$		15	

Lösungsskizze		Zuordnung, Bewertung																																									
		I	II	III																																							
d)	Mit der Bayes-Formel ergeben sich analog zu a) und c) auf 3 Nachkommastellen gerundet die folgenden Tabellen: 1) Konstant ist $p_a = P(\bar{T} / \bar{D}) = 0,95$ <table><tr><td>p_e</td><td>0,80</td><td>0,85</td><td>0,90</td><td>0,95</td><td>1,00</td></tr><tr><td>$P(\bar{D} / T)$ nach A-Probe</td><td>0,709</td><td>0,696</td><td>0,684</td><td>0,672</td><td>0,0661</td></tr><tr><td>$f(p_e) = P(\bar{D} / T)$ nach B-Probe</td><td>0,132</td><td>0,119</td><td>0,107</td><td>0,097</td><td>0,089</td></tr></table> 2) Konstant ist $p_e = P(T / D) = 0,8$ <table><tr><td>p_a</td><td>0,95</td><td>0,96</td><td>0,97</td><td>0,98</td><td>0,99</td><td>1,00</td></tr><tr><td>$P(\bar{D} / T)$ nach A-Probe</td><td>0,709</td><td>0,661</td><td>0,594</td><td>0,494</td><td>0,328</td><td>0</td></tr><tr><td>$g(p_a) = P(\bar{D} / T)$ nach B-Probe</td><td>0,132</td><td>0,089</td><td>0,052</td><td>0,024</td><td>0,006</td><td>0</td></tr></table> So wünschenswert es auch ist, „schwarze Schafe“ mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit des Dopings zu überführen, so müssen dennoch in erster Linie ungedopte Sportler vor ungerechtfertigten Anschuldigungen geschützt werden. Die Tabellen zeigen, dass dazu die im Vergleich schon große Spezifität p_a von 95 % noch weiter angehoben werden muss. Eine Erhöhung der Spezifität um einen Prozentpunkt bewirkt hier mehr als eine Erhöhung der Sensitivität p_e um fünf Prozentpunkte. Die gewünschten Funktionen findet man entsprechend b) und c) mit der Bayes-Formel entweder iterativ oder wegen der Unabhängigkeit von A- und B-Probe auch direkt: $f(p_e) = \frac{39}{400 \cdot p_e^2 + 39} \qquad g(p_a) = \frac{975(p_a - 1)^2}{975 \cdot p_a^2 - 1950 \cdot p_a + 991}$ <u>Bemerkung:</u> Der hier beschriebene Zusammenhang lässt sich natürlich noch besser verdeutlichen, wenn man die beiden Funktionen f und g grafisch darstellt, das kann in einer Abiturklausur ohne Computereinsatz natürlich nicht geschehen, wohl aber zur Vorbereitung im Unterricht (z .B. mit Hilfe von DERIVE, EXCEL oder irgend-einem geeigneten Funktionenplotter – siehe Anhang).	p_e	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	$P(\bar{D} / T)$ nach A-Probe	0,709	0,696	0,684	0,672	0,0661	$f(p_e) = P(\bar{D} / T)$ nach B-Probe	0,132	0,119	0,107	0,097	0,089	p_a	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	1,00	$P(\bar{D} / T)$ nach A-Probe	0,709	0,661	0,594	0,494	0,328	0	$g(p_a) = P(\bar{D} / T)$ nach B-Probe	0,132	0,089	0,052	0,024	0,006	0			
p_e	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00																																						
$P(\bar{D} / T)$ nach A-Probe	0,709	0,696	0,684	0,672	0,0661																																						
$f(p_e) = P(\bar{D} / T)$ nach B-Probe	0,132	0,119	0,107	0,097	0,089																																						
p_a	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	1,00																																					
$P(\bar{D} / T)$ nach A-Probe	0,709	0,661	0,594	0,494	0,328	0																																					
$g(p_a) = P(\bar{D} / T)$ nach B-Probe	0,132	0,089	0,052	0,024	0,006	0																																					
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20																																							



Aufgabe 10: Alkoholsünder

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	- $P(\text{„genau 2 Alkoholsünder“}) = \binom{20}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^{18} \approx 28,5\%$. - $P(\text{„nicht mehr als 2 Alkoholsünder“}) = \sum_{k=0}^2 \binom{20}{k} \cdot 0,1^k \cdot 0,9^{20-k} \approx 67,7\%$. - $P(\text{„mindestens 3 Alkoholsünder“}) \approx 1 - 67,7\% = 32,3\%$. - $P(\text{„der erste Alkoholsünder sitzt im letzten oder vorletzten kontrollierten Auto“}) = (0,9^{18} + 0,9^{19}) \cdot 0,1 \approx 2,9\%$ oder auch $P(\text{„der erste Alkoholsünder sitzt im letzten oder vorletzten kontrollierten Auto“}) = 0,9^{18} \cdot 0,1^2 + 0,9^{18} \cdot 0,1 \cdot 0,9 + 0,9^{19} \cdot 0,1 \approx 2,9\%$. - $P(\text{„genau zwei Alkoholsünder aufeinander folgend“}) = 19 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^{18} \approx 2,9\%$.	15	20	
b)	Die berechneten Wahrscheinlichkeiten können der Tabelle entnommen werden. <u>Bestimmung des Ablehnungsbereichs:</u> Es gilt: $\sum_{k=0}^4 \binom{100}{k} \cdot 0,1^k \cdot 0,9^{100-k} \approx 2,37\%$, aber $\sum_{k=0}^5 \binom{100}{k} \cdot 0,1^k \cdot 0,9^{100-k} \approx 5,76\%$ Also sollte die Nullhypothese $H_0: p \geq 0,1$ verworfen werden, wenn weniger als 5 Alkoholsünder ermittelt werden. <u>Bestimmung des Fehlers 2. Art:</u> $\beta = 1 - \sum_{k=0}^4 \binom{100}{k} \cdot (0,05)^k \cdot (0,95)^{100-k} \approx 56,4\%$ Dieser Wert ist sehr hoch. Selbst wenn die Alkoholsünderquote deutlich gesenkt würde, ist die Wahrscheinlichkeit groß, dass der Test dies nicht „entdeckt“.	10	30	
c)	Da $3 < 4$, spricht das Ergebnis signifikant für eine Senkung der Alkoholsünderquote. Wenn die Haushaltspolitiker <u>der Maßnahme grundsätzlich negativ</u> gegenüberstehen, könnten sie eine Begründung dafür verlangen, dass die Quote unter 5 % liegt, um der Maßnahme zuzustimmen, also verlangen, dass die Nullhypothese $H_0: p \geq 0,05$ mit Signifikanz verworfen werden kann. Dann wäre der Ablehnungsbereich $k \leq 1$. Es gilt nämlich $\sum_{k=0}^1 \binom{100}{k} \cdot 0,05^k \cdot 0,95^{100-k} \approx 3,71\%$, aber $\sum_{k=0}^2 \binom{100}{k} \cdot 0,05^k \cdot 0,95^{100-k} \approx 11,83\%$. Vor diesem Hintergrund ist das Ergebnis nicht signifikant, sie würden die Maßnahme ablehnen.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Wenn sie <u>der Maßnahme dagegen grundsätzlich positiv</u> gegenüberstehen, würden sie sich nur absichern und die Maßnahme nur dann ablehnen, wenn die Nullhypothese $H_0 : p \leq 0,05$ signifikant abgelehnt werden muss. Dann wäre der Ablehnungsbereich $k \geq 10$. Es gilt nämlich $1 - \sum_{k=0}^9 \binom{100}{k} \cdot 0,05^k \cdot 0,95^{100-k} \approx 1 - 97,18\% \approx 2,8\%, \text{ aber}$ $1 - \sum_{k=0}^8 \binom{100}{k} \cdot 0,05^k \cdot 0,95^{100-k} \approx 1 - 93,69\% \approx 6,3\%.$ So gesehen liegt keine Signifikanz vor. Sie können damit nicht begründen, dass die Alkoholsünderquote über 5 % liegt und würden die Maßnahme billigen. <i>Diese ausführliche Lösung wird nicht erwartet. Um die volle Punktzahl dieses Aufgabenteils zu erreichen, wird mindestens einer der beiden Testvorschläge erwartet und die darauf basierende Interpretation des Testergebnisses von drei ermittelten Alkoholsündern.</i>			15
d)	Es geht um die Frage der stochastischen Unabhängigkeit des „Trinkverhaltens“ der einzelnen Fahrer. Diese ist z.B. dann nicht gegeben, wenn einige die Kontrollstelle entdecken bzw. davon erfahren haben, wenn „Gruppen“ fahren (z.B. eine Hochzeitsgesellschaft) oder wenn z. B. in der Sylvester- oder Rosenmontagnacht gemessen wird. <i>Es wird von den Schülerinnen und Schülern eine „ergebnisoffene“ zusammenhängende Darstellung erwartet.</i>			10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 11: Krankenhaus

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Wir betrachten die Folge der 50 Leberwertmessungen mit den möglichen Ergebnissen „zufrieden stellend“ oder „nicht zufrieden stellend“ als Bernoullikette. Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der entlassenen Patienten mit guten Leberwerten. - Bei einer Wahrscheinlichkeit von 70 % und einem Stichprobenumfang von 50 erwartet man $n \cdot p = 35$ Patienten, denen es gut geht. - Mithilfe der Formel $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ oder der Tafel berechnet man die Wahrscheinlichkeit $P(X = 35) \approx 0,1223 \approx 12,2\%$. - Aus der Tafel liest man die Wahrscheinlichkeit $P(X > 45) \approx 0,0002 = 0,02\%$ ab. - Für diesen einseitigen Test gibt es verschiedene Ansätze: (1) Für die Varianz von X gilt: $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 50 \cdot 0,7 \cdot 0,3 = 10,5$. Da $V(X)$ größer ist als 9, kann hier mit der 1,64-σ-Umgebung um μ argumentiert werden. $\mu + 1,64\sigma = 35 + 1,64\sqrt{10,5} \approx 40,3$ Wenn also mindestens 41 Patienten einen zufrieden stellenden Leberwert haben, so ist das Ergebnis signifikant besser als zu erwarten war. (2) Aus der Tabelle der summierten Binomialverteilung für $n = 50$ in der Formelsammlung entnimmt man, dass die Wahrscheinlichkeit, dass 41 oder mehr Patienten einen guten Leberwert haben, 0,0402 beträgt, für 40 oder mehr Patienten aber schon größer als 0,05 ist. Auch hier erhält man das Ergebnis aus (1). Wie groß die tatsächliche Irrtumswahrscheinlichkeit ist, ergibt sich unmittelbar aus (2), nämlich ca. 4,02 %.	30	10	
b)	Jede der 10 Testreihen liefert mit der Wahrscheinlichkeit 0,04 ein signifikantes Ergebnis, obwohl keine Besonderheit vorliegt. Also weisen 10 Reihen mindestens ein signifikantes Ergebnis mit der Wahrscheinlichkeit $1 - 0,96^{10} \approx 34\%$ auf. Wenn kein Parameter wirklich besser ist, beträgt bei dieser Vorgehensweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ergebnis signifikant gut ist, dennoch immerhin ca. 34 %.		20	
c)	Der Ansatz ist wie in Teil b). Man erhält die Gleichung $1 - 0,96^n > 0,6$. Durch Probieren oder Logarithmieren erhält man $n > 22$ bzw. $n > 22,45$. Der Chefarzt muss also 23 Parameter testen lassen, um mit 60%iger Wahrscheinlichkeit ebenfalls eine Erfolgsmeldung zu haben.		10	10

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Die Irrtumswahrscheinlichkeit wird für den Test eines einzelnen Parameters festgelegt und die Ergebnisse der Parametertests, die keine Abweichung vom Durchschnitt darstellen, werden nicht veröffentlicht. Damit ließe sich bei genügend vielen Parametern immer irgendein ungewöhnlicher Zusammenhang nachweisen oder jede Institution in irgendeiner Beziehung als besonders gut darstellen.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

Aufgabe 12: Thermoschalter

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	X beschreibe die Anzahl der fehlerhaften Thermoschalter. Für den <u>Erwartungswert</u> $E(X)$ gilt: $E(X) = n \cdot p = 5$. Die <u>Wahrscheinlichkeit für genau 5 fehlerhafte Schalter</u> beträgt $P = \binom{50}{5} \cdot 0,1^5 \cdot 0,9^{45} \approx 18,49\%.$ Die Rechnung kann über den entsprechenden Term der Binomialverteilung mit dem Taschenrechner erfolgen. Aus dem Tafelwerk liest man ab, dass die Wahrscheinlichkeit für <u>höchstens 5 fehlerhafte Schalter</u> $P(X \leq 5)$ ungefähr 61,61 % beträgt.	20	5	
b)	Da es sich um eine Massenproduktion geht, kann man so rechnen, als ob es sich um ein Ziehen mit Zurücklegen handeln würde. Das Auftreten von Fehlern im Produktionsprozess wird wegen regelmäßiger Wartung als zufällig angenommen. Dadurch ist die Annahme der Unabhängigkeit im Produktionsprozess gerechtfertigt.			10
c)	Das Gegenereignis zu dem betrachteten Ereignis ist, dass beide Schalter versagen. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $0,1^2 = 0,01$. Also ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Stromzufuhr unterbrochen wird, $1 - 0,1^2 = 0,99 = 99\%$. Alternativer Lösungsweg: $P(\text{„Die Stromzufuhr wird unterbrochen“}) = 0,1 \cdot 0,9 + 0,9 \cdot 0,1 + 0,9 \cdot 0,9 = 0,99$	5	10	
d)	Die Wahrscheinlichkeit, dass es bei 100 Maschinen zu mindestens einer Überhitzung kommt, berechnet man durch $1 - 0,99^{100} \approx 1 - 0,3660 = 63,4\%$.		15	
e)	Ist keine Qualitätsverbesserung eingetreten, so gilt: $p = 0,1$. Man liest wie in Teil b) die Wahrscheinlichkeit für höchstens 3 fehlerhafte Schalter ab: 0,2503. Also erhält das Team die Prämie mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 25 % zu Unrecht. Ist die Qualität so verbessert worden, dass $p = 0,05$ gilt, ergibt sich als die Wahrscheinlichkeit für höchstens 3 fehlerhafte Schalter: 0,7604. Wenn mehr als 3 fehlerhafte Schalter in der Stichprobe auftreten, so erhält das Team die Prämie zu Unrecht nicht. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist also $1 - 0,7604 \approx 24\%$.		20	
f)	Wenn man z.B. mit 100 Maschinen wie in Teil d) rechnet, erhält man $1 - (1 - 0,05^2)^{100} = 1 - 0,9975^{100} \approx 1 - 0,778 \approx 22\%$. Dieser Wert ist ziemlich hoch und kann von der Firma „Maschinenfix“ unter den genannten Bedingungen nicht akzeptiert werden. Der Schutz wird deutlich erhöht, wenn die Firma in ihre Maschinen 3 oder sogar 4 Schalter in Reihe einbaut. ($1 - 0,1^3 = 0,999$; $1 - 0,05^3 = 0,999875$; ...). Bereits für 3 Schalter gilt mit der alten Qualität: $1 - (1 - 0,1^3)^{100} = 1 - 0,999^{100} \approx 0,0952$,			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	analog für die neue Qualität: 0,0124. Ein Maschinenschaden würde dann im Mittel sehr viel seltener auftreten.			15
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 13: Welche Urne ist das?

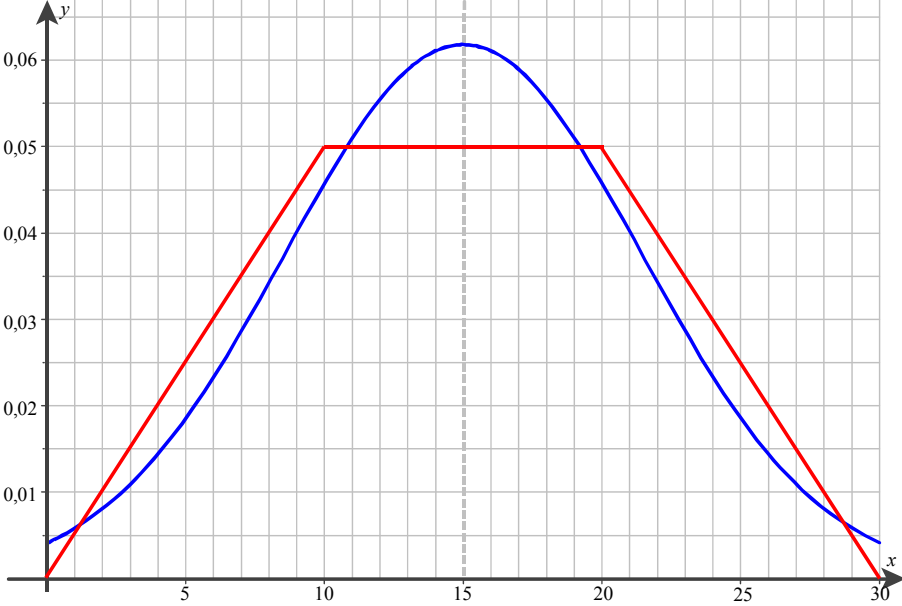
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Beim 10-fachen Ziehen mit Zurücklegen aus der Urne 1 ist die Anzahl der schwarzen Kugeln $(10 - \frac{6}{10})$ -binomialverteilt. - $P(\text{„alle Kugeln schwarz“}) = p^{10} = 0,6^{10} \approx 0,60\%$ - $P(\text{„5 schwarze Kugeln“}) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^5 \approx 20,07\%$ - $P(\text{„höchstens 2 schwarze Kugeln aus } U_1\text{“}) =$ $\left(\frac{4}{10}\right)^{10} + 10 \cdot \frac{6}{10} \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^9 + \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^8 \approx 1,23\%$ - $P(\text{„mindestens 3 schwarze Kugeln aus } U_1\text{“}) \approx 1 - 1,23\% = 98,77\%$	20	5	
b)	Man betrachtet die ganze Situation als Stufenexperiment und wendet die Pfadregeln an: Auf der ersten Stufe wird eine Urne mit der Münze ausgewürfelt: $P(U_1) = P(U_2) = \frac{1}{2}$ und dann wird aus dieser Urne mit Zurücklegen 10-mal gezogen. Wegen der Gleichverteilung der beiden Möglichkeiten auf der ersten Stufe, muss man die Wahrscheinlichkeiten der betrachteten Ereignisse für beide Urnen berechnen, und dann jeweils arithmetisch mitteln. Für U_1 ist die Rechnung schon in a) erfolgt, für U_2 kann diese analog zu a) oder schneller mit Hilfe des Tafelwerks ($p = 0,3$) erfolgen: - $P(\text{„5 schwarze Kugeln aus } U_2\text{“}) \approx 10,29\%$ - $P(\text{„höchstens 2 schwarze Kugeln aus } U_2\text{“}) \approx 0,0282 + 0,1211 + 0,2335 \approx 38,28\%$ - $P(\text{„mindestens 3 schwarze Kugeln aus } U_2\text{“}) \approx 1 - 38,28\% = 61,72\%$ Es ergeben sich daraus folgende Mittelwerte: - $P(\text{„5 schwarze Kugeln“}) \approx 15,18\%$ - $P(\text{„höchstens 2 schwarze Kugeln“}) \approx 19,76\%$ - $P(\text{„mindestens 3 schwarze Kugeln“}) \approx 80,24\%$	5	20	
c)	- Dem Tafelwerk entnimmt man: $P_1 = \sum_{k=6}^{10} \binom{10}{k} \cdot (0,3)^k \cdot (0,7)^{10-k} \approx 4,73\%$ - Dem Tafelwerk entnimmt man: $P_2 = \sum_{k=0}^5 \binom{10}{k} \cdot 0,6^k \cdot 0,4^{(10-k)} \approx 36,69\%$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	- Hier wird also auf dem 5 %-Signifikanzniveau die Hypothese H_1: Es handelt sich um die Urne U_1 gegen die Nullhypothese H_0: Es handelt sich um die Urne U_2 getestet. P_1 entspricht der Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art, P_2 entspricht der Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art. Die Entscheidungsregel ist sehr „vorsichtig“.		20	5
d)	Da die Anfangsverteilung für die beiden möglichen Urnen als Gleichverteilung (Münzwurf) angenommen wird, vereinfacht sich die Rechnung z.B. mit Hilfe des Satzes von Bayes in folgender Weise: $P(U = U_1 K = 5) = \frac{B(10; 0,6; 5)}{B(10; 0,6; 5) + B(10; 0,3; 5)} = \frac{0,6^5 \cdot 0,4^5}{0,6^5 \cdot 0,4^5 + 0,3^5 \cdot 0,7^5} \approx 66,1\%$		5	10
e)	Wir fassen den „Wert“ der Urne als Zufallsvariable W auf: $W(U_1) = 6 \cdot 15 \text{ €} = 90 \text{ €} \quad W(U_2) = 3 \cdot 15 \text{ €} = 45 \text{ €}$ Mit $P(U_1) = 0,66$ und $P(U_2) = 0,34$ erhalten wir: $E(W) = 0,66 \cdot 90 \text{ €} + 0,34 \cdot 45 \text{ €} = 74,7 \text{ €}$. Die „Werterwartung“ ist also größer als der Kaufpreis von 70 €. Wenn man die „Werterwartung“ im Vergleich zum Kaufpreis als Entscheidungskriterium wählt, dann sollte man sich nach dem Testergebnis $K = 5$ auf das Spiel einlassen.		5	5
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

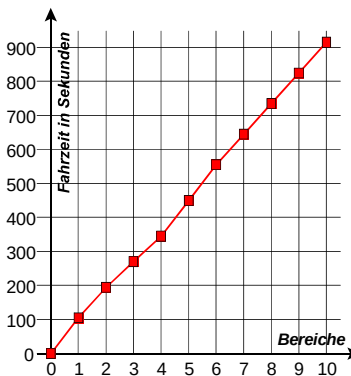
5.2 Lösungen - Leistungskursaufgaben

Aufgabe 1 Flughafen

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung										
		I	II	III								
a)	Die gegebenen Größen führen auf die Gleichung $1 - p^2 = 0,90$ und damit $p = 0,3162$. 31,6 % aller Gepäckstücke am Hamburger Flughafen haben den Zielflughafen Frankfurt.	15										
b)	Für die Lösung empfiehlt sich ein Baumdiagramm (E bedeute, dass die Kontrolle eindeutig sein, nE das Gegenteil): Kontrolle 1 Kontrolle 2 Kontrolle 3 <table><tr><th>Wahrscheinlichkeit</th><th>Zeit</th></tr><tr><td>0,9</td><td>10 s</td></tr><tr><td>0,06</td><td>50 s</td></tr><tr><td>0,04</td><td>380 s</td></tr></table> Hieraus ergibt sich ein Erwartungswert von 27,2 Sekunden, die also durchschnittlich für die Kontrolle eines Handgepäckstückes zu veranschlagen sind.	Wahrscheinlichkeit	Zeit	0,9	10 s	0,06	50 s	0,04	380 s		20	5
Wahrscheinlichkeit	Zeit											
0,9	10 s											
0,06	50 s											
0,04	380 s											
c)	Für die Normalverteilung einer stetigen Größe gilt: $P(14 \leq X \leq 16) = \Phi\left(\frac{16-15}{6,45}\right) - \Phi\left(\frac{14-15}{6,45}\right) = 2 \cdot \Phi(0,155) - 1 \approx 12,3\%.$ Also hat ein zufällig herausgegriffenes Gepäckstück ein Gewicht von mindestens 14 kg und höchstens 16 kg mit einer Wahrscheinlichkeit von 12,3 %.		15									
d)	Die Funktionswerte von f sind alle nichtnegativ. Es bleibt die Normierung zu überprüfen: Eine (umständliche) Möglichkeit wäre hier die Integration. Eine andere Möglichkeit ist die elementargeometrische Berechnung des Flächeninhalts zwischen dem Graphen von f und der x-Achse: Die Trapezfläche hat den Inhalt 1, also handelt es sich um eine Dichte einer Verteilungsfunktion.	5	15									
e)	Aus Symmetriegründen erkennt man sofort, dass der gesuchte Erwartungswert 15 kg ist. <i>Auch die weniger elegante direkte Berechnung des Erwartungswerts ist erlaubt.</i>		10									
f)	Das Rechteck, dessen Flächeninhalt der gesuchten Wahrscheinlichkeit entspricht, hat die Breite 2 und die Höhe 0,05. Also hat in diesem Modell ein zufällig herausgegriffenes Gepäckstück ein Gewicht von mindestens 14 kg und höchstens 16 kg mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 %.											

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Diese geringere Wahrscheinlichkeit erklärt sich durch die größeren Werte (größere Dichte) der Normalverteilung in der Nähe des Mittelwertes 15, wie der Vergleich der beiden Wahrscheinlichkeitsfunktionen zeigt:			
				15
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 2 Fahrtstrecke

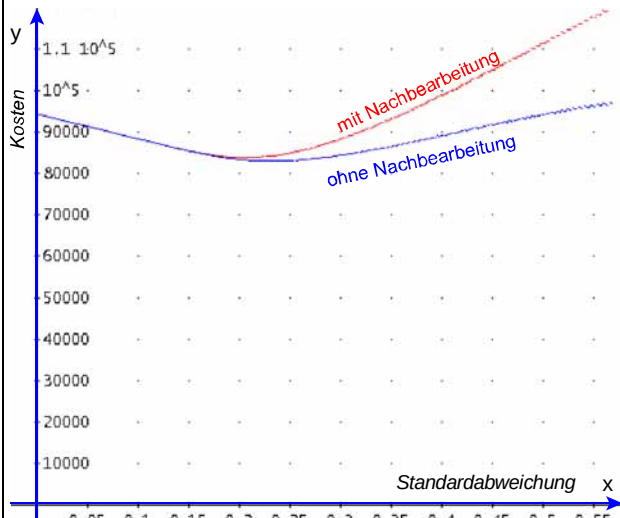
Lösungsskizze		Zuordnung, Bewertung																																			
		I	II	III																																	
a)	Nach dem Aufgabentext ist $\mu = 2,5$ und $\sigma = 0,25$. Gesucht ist die Zeit t für die Fahrt, die in 95 % der Fälle ausreicht: $P(t \leq X) \geq 0,95 \Rightarrow \Phi(1,65) = \Phi\left(\frac{t-2,5}{0,25}\right) \Rightarrow t-2,5 = 1,65 \cdot 0,25 = 0,4125$ also $t = 2,9125$. Das sind auf Minuten gerundet 2 Stunden und 55 Minuten. Der Fahrer muss also um 5.35 Uhr losfahren. <i>Lösung auch mit σ-Regeln möglich:</i> Im Intervall $[\mu-1,64\sigma ; \mu+1,64\sigma]$ liegen 90 % aller Zeiten, aus Symmetriegründen liegen dann 5 % der größten Zeiten oberhalb von $\mu+1,64\sigma \Rightarrow \mu+1,64\sigma = 2,5+0,41 = 2,91$. Das ist auf Minuten gerundet dasselbe Ergebnis wie oben.	15																																			
b)	<u>Zuordnung der Fahrzeit t zur Zufallszahl z:</u> $t = 75$ für $0 \leq z < 0,2$, $t = 90$ für $0,2 \leq z < 0,8$ und $t = 105$ für $0,8 \leq z < 1$. <i>Es gibt weitere Zuordnungsmöglichkeiten.</i> <u>Simulation der Fahrt:</u> <table><thead><tr><th>Bereich</th><th>Zufallszahl</th><th>Fahrzeit (Sekunden)</th></tr></thead><tbody><tr><td>1</td><td>0,83962</td><td>+ 105</td></tr><tr><td>2</td><td>0,35849</td><td>+ 90</td></tr><tr><td>3</td><td>0,08903</td><td>+ 75</td></tr><tr><td>4</td><td>0,05793</td><td>+ 75</td></tr><tr><td>5</td><td>0,96942</td><td>+ 105</td></tr><tr><td>6</td><td>0,95658</td><td>+ 105</td></tr><tr><td>7</td><td>0,46987</td><td>+ 90</td></tr><tr><td>8</td><td>0,27525</td><td>+ 90</td></tr><tr><td>9</td><td>0,65613</td><td>+ 90</td></tr><tr><td>10</td><td>0,52743</td><td>+ 90</td></tr></tbody></table> Die Fahrzeit für diese Simulation beträgt 915 s. <i>(Zufallszahlen: Zeile 5 aus Cornelsen, das große Tafelwerk, S. 51)</i> <i>Die jeweilige Aufsummierung der Zeiten ist nicht zwingend, Grafik wird nicht erwartet.</i> <u>Beschreibung des Gesamtmodells:</u> Das Modell basiert auf unabhängigen Zufallsgrößen, die identisch verteilt sind. Sie können in der oben beschriebenen Weise die drei Werte 75, 90 und 105 annehmen. Sie werden zur Ermittlung der Fahrzeit aufaddiert: Fahrt in ersten 10 Bereichen: $F_1 = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$ (s.o.), Gesamtfahrt: $F_{\text{gesamt}} = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$. Die obige Grafik macht deutlich, dass man dieses Modell als Zufallspfad deuten kann, also als Random Walk.	Bereich	Zufallszahl	Fahrzeit (Sekunden)	1	0,83962	+ 105	2	0,35849	+ 90	3	0,08903	+ 75	4	0,05793	+ 75	5	0,96942	+ 105	6	0,95658	+ 105	7	0,46987	+ 90	8	0,27525	+ 90	9	0,65613	+ 90	10	0,52743	+ 90		15	10
Bereich	Zufallszahl	Fahrzeit (Sekunden)																																			
1	0,83962	+ 105																																			
2	0,35849	+ 90																																			
3	0,08903	+ 75																																			
4	0,05793	+ 75																																			
5	0,96942	+ 105																																			
6	0,95658	+ 105																																			
7	0,46987	+ 90																																			
8	0,27525	+ 90																																			
9	0,65613	+ 90																																			
10	0,52743	+ 90																																			
c)	<u>Berechnung der Standardabweichung für diesen Fall:</u> $\mu = 126$ ist gegeben. $P(X \leq 137) = 1 - 0,13 = 0,87 \Rightarrow \Phi(1,13) = \Phi\left(\frac{137-126}{\sigma}\right) \Rightarrow \sigma \approx \frac{11}{1,13} \approx 9,75.$																																				

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<u>Berechnung der Prozentzahl der „korrekten“ Autofahrer:</u> $P(X \leq 120) = \Phi\left(\frac{120 - 126}{9,75}\right) \approx \Phi(0,6154) \approx 0,29.$ Es halten sich ca. 29 % der Autofahrer an die Vorschriften (und fahren nicht zu schnell).		20	
d)	<u>Kurve:</u> Änderung von μ verschiebt Kurve in x -Richtung: μ vergrößern $\Rightarrow$ Verschiebung nach rechts, μ verkleinern $\Rightarrow$ Verschiebung nach links Änderung von σ verändert Höhe und Weite der Kurve: σ vergrößern $\Rightarrow$ Kurve wird flacher und läuft weiter σ verkleinern $\Rightarrow$ Kurve wird steiler und liegt näher an der y -Achse <i>(Siehe σ-Regeln, Flächenmaß bleibt unverändert)</i> <u>Kontext von Aufgabenteil a)</u> Verschiebung des Mittelwertes verändert die nötige Abfahrtszeit: μ verkleinern bedeutet entsprechende kürzere (mittlere) Fahrzeit, also kann der LKW entsprechend später losfahren. μ vergrößern bedeutet analog früheres Losfahren des LKW. σ verkleinern heißt weniger Zeitzugabe, σ vergrößern heißt mehr Zeitzugabe (bezogen auf gegebenes μ) <u>Kontext von Aufgabenteil c)</u> μ verkleinern bedeutet, dass in dem Modell dann weniger Autofahrer 137 km/h überschreiten. μ vergrößern bedeutet analog, dass dann mehr Autofahrer 137 km/h überschreiten (so lange μ nicht wesentlich größer als 137 km/h ist, was der Sachkontext ausschließt). σ verkleinern heißt (bezogen auf gegebenes μ), dass dann weniger Autofahrer 137 km/h überschreiten können, σ vergrößern: umgekehrt. Ändern von μ und σ bedeutete entsprechende Kombinationen.	5	10	10
e)	<u>Zentraler Grenzwertsatz</u> X_i seien (identisch verteilte und) unabhängige Zufallsgrößen. Dann nähert sich die Verteilung der Zufallsgröße $X = X_1 + \dots + X_n$ für wachsendes n einer Normalverteilung.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<i>Der Zentrale Grenzwertsatz kann salopp auch so formuliert werden: Eine Variable, die vielen kleinen, voneinander unabhängigen Zufallswirkungen unterliegt, ist normalverteilt (nach mathe online).</i> <i>Es gibt natürlich noch viele weitere Formulierungsmöglichkeiten.</i> <u>Bedeutung</u> <i>Die „saloppe“ Formulierung enthält bereits die Bedeutung.</i> Der Satz rechtfertigt für viele Untersuchungen die Annahme der Normalverteilung, z.B. bei Teil a). <i>Siehe dazu auch b): Eine Simulation mit einer Tabellenkalkulation zeigt dann näherungsweise Normalverteilung.</i>		15	
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 3 Motorenhersteller

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Zufallsgröße Kolbendurchmesser ist normalverteilt mit dem Mittelwert $\mu = 88,90$ und der Streuung $\sigma = 0,57$. In folgendem Intervall soll der Kolbendurchmesser sich bewegen: $[88,4; 89,4]$. Die Anzahl der ohne Nacharbeit brauchbaren Kolben beträgt: $n_{oN} = P(88,4 \leq d_{\text{Kolben}} \leq 89,4) \cdot 1\,000 = P([88,4; 89,4]) \cdot 1\,000$ $= \left(\Phi\left(\frac{89,4 - 88,9}{0,57}\right) - \Phi\left(\frac{88,4 - 88,9}{0,57}\right) \right) \cdot 1\,000 = 621$ Werte mit Tafelwerk berechnet.		15	
b)	Der Anteil der ohne und mit Nacharbeit brauchbaren Kolben ergibt sich zu: $P(88,4 \leq d_{\text{Kolben}} \leq (89,4 + 0,4)) = P([88,4; 89,8])$ $= \left(\Phi\left(\frac{89,8 - 88,9}{0,57}\right) - \Phi\left(\frac{88,4 - 88,9}{0,57}\right) \right) = 0,7535$ Zwischen der Liefermenge und der ohne und mit Nacharbeit brauchbaren Kolben besteht der Zusammenhang $n_{\text{Liefer}} \cdot P([88,4; 89,8]) = n_{o/mN}$. Daraus folgt die Liefermenge: $n_{\text{Liefer}} = \frac{n_{o/mN}}{P([88,4; 89,8])} = \frac{1000}{0,7535} = 1\,327$.	15		
c)	Die Gesamtkosten für die Kolben ergeben sich aus dem Preis, den Kosten für die Nacharbeit und den Transportkosten: $K_{\text{ges}} = K_P + K_N + K_T$ $= n_{\text{Liefer}} \cdot k_P + n_{mN} \cdot k_N + K_T$ <u>1. Fall: ohne Nacharbeit</u> $n_{\text{Liefer}} = \frac{1\,000}{P([88,4; 89,4])} = 1\,610$ $K_{\text{ges}} = 1\,610 \cdot 60 + 0 \cdot 80 + 130 = 96\,730$ <u>2. Fall: mit Nacharbeit</u> Es müssen 1 327 Kolben bestellt bzw. geliefert werden (vgl. b). Davon sind 1000 im langfristigen Mittel brauchbar (ebenfalls nach b)). 62,1 % von den 1 327 Kolben sind im langfristigen Mittel gleich in Ordnung, müssen also nicht nachbearbeitet werden, das sind 824 Kolben. Also müssen 176 Kolben im langfristigen Mittel nachbearbeitet werden. Die erwarteten Kosten betragen also: $K_{\text{ges}} = 1327 \cdot 60 + 176 \cdot 80 + 130 = 93830$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Die Nacharbeit lohnt sich also, die Ersparnis beträgt im langfristigen Mittel 2 900 € . <i>Lösungsalternative (umständlicher):</i> Man verwendet noch einmal die Normalverteilung und berechnet den erwarteten Anteil der nachzubearbeitenden Kolben durch $P(89,4 < d_{\text{Kolben}} \leq 89,8)$ und kann daraus die erwarteten Nachbearbeitungskosten ausrechnen.		30	
d)	$n(\sigma) = \frac{1\,000}{\Phi\left(\frac{89,8 - 88,9}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{88,4 - 88,9}{\sigma}\right)} = \frac{1\,000}{\Phi\left(\frac{0,9}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-0,5}{\sigma}\right)}$ $= \frac{1\,000}{\Phi\left(\frac{0,9}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{0,5}{\sigma}\right)\right)} = \frac{1\,000}{\Phi\left(\frac{0,9}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{0,5}{\sigma}\right) - 1}$ Die gesuchte Wahrscheinlichkeit heiße o. Dann ist analog $o(\sigma) = \Phi\left(\frac{0,5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-0,5}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{0,5}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{0,5}{\sigma}\right)\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{0,5}{\sigma}\right) - 1$		20	
e)	Erwartet wird eine verbale oder formelmäßige Beschreibung zur Kostenberechnung in Abhängigkeit von der Standardabweichung σ, und zwar für beide in c) behandelten Fälle. Eine Berechnung wird nicht erwartet, wäre aber grundsätzlich mit den Beziehungen aus d) möglich. Die Gesamtkosten verändern sich in folgender Weise in Abhängigkeit von der Standardabweichung, die im Folgenden als Variable x heißen soll: Kosten mit Nachbearbeitung (bei stetiger Preisentwicklung der Herstellungskosten): $K_1(x) = n(x) \cdot 60 \cdot (1 + 0,57 - x) + n(x) \cdot (1 - o(x)) \cdot 80 + 130$, Kosten ohne Nachbearbeitung $K_2(x) = \frac{1\,000}{o(x)} \cdot 60 \cdot (1 + 0,57 - x) + 130$. Nun kann z.B. mit Hilfe einer Wertetabelle und der Graphen von K_1 und K_2 geklärt werden, ob die Kosten mit sinkender Standardabweichung ebenfalls sinken und wie lange diese Tendenz anhält. Und es lässt sich so auch klären, ob die Kosten bei „ohne Nacharbeiten“ günstiger bleiben oder nicht. Der Graph zeigt jeweils ein Sinken der Kosten bis zu etwa $\sigma = 0,2$ und die zu erwartende Gleichheit bei beiden Modellen mit fast 100%iger Qualität. Es wäre auch eine stückweise definierte Preisfunktion für die Herstellungskosten möglich. 			20
	Insgesamt 100 BWE	15	65	20

Aufgabe 4 Buchungsrisiken

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Es geht um die Frage der stochastischen Unabhängigkeit der einzelnen Absagen, die z.B. dann nicht gegeben ist, wenn durch Unwetter am Urlaubsort, durch eine ökonomische Krise oder durch eine Katastrophe in der Luftfahrt das Absageverhalten bestimmt wird; sie gilt auch dann nicht, wenn Familien oder Gruppen reisen, weil "menschliche Beziehungen" hier auch stochastische Abhängigkeiten verursachen. <i>Es wird von den Schülerinnen und Schülern eine „ergebnisoffene“, zusammenhängende Darstellung erwartet.</i>	10	10	
b)	Dieser Aufgabenteil kann mit der oberen Zeile der anliegenden Tabelle leicht gelöst werden. Erwartet wird eine Erläuterung des Vorgehens. Die Ergebnisse: - $P(\text{„genau 5 Absagen“}) = \binom{100}{5} \cdot 0,05^5 \cdot 0,95^{95} \approx 18 \text{ \%}$. - $P(\text{„mindestens 3 Absagen“}) = \sum_{k=3}^{100} \binom{100}{k} \cdot 0,05^k \cdot 0,95^{100-k} \approx 88,2 \text{ \%}$. - $P(\text{„höchstens 4 Absagen“}) = \sum_{k=0}^4 \binom{100}{k} \cdot 0,05^k \cdot 0,95^{100-k} \approx 43,6 \text{ \%}$. - $P(\text{„3 oder 4 Absagen“}) = \binom{100}{3} \cdot 0,05^3 \cdot 0,95^{97} + \binom{100}{4} \cdot 0,05^4 \cdot 0,95^{96} \approx 31,8 \text{ \%}$.	15	5	
c)	Da in der Hauptsaison – wie dargestellt – die Nachfrage sehr groß ist, kann immer angenommen werden, dass die angebotenen Plätze auch gebucht werden. Die Absagen können wir unter den gleichen Annahmen wie in a) als $B_{n;0,5}$-verteilt ansehen, wobei n die Anzahl der angebotenen und damit auch gebuchten Plätze bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit, dass für $n = 102$ weniger als 2 Kunden absagen, ergibt sich als Summe der ersten 2 Zahlen in der Zeile für $n = 102$ aus der anliegenden Tabelle: $P \approx 3,4 \text{ \%}$.		15	
d)	Für den Erwartungswert der Stornokosten gilt: $E(\text{"Verlust"}) = 1200 \cdot \sum_{k=101}^{102} (k-100) \cdot \binom{102}{k} \cdot 0,95^k \cdot 0,05^{(102-k)} \text{ €}$ $\approx 47,25 \text{ €}.$ Für den Erwartungswert der im Sinne des Hinweises fiktiven Einnahmen gilt: $E(\text{"Einnahmen"}) = 200 \cdot 102 \cdot 0,95 \text{ €} = 19\,380 \text{ €}.$ Denn die Anzahl der Buchenden wird als $B_{n;0,95}$-binomialverteilt angenommen. Die Gewinnerwartung beträgt also $19\,380 \text{ €} - 47,25 \text{ €} \approx 19\,333 \text{ €}.$ Ohne Überbuchung wäre die Gewinnerwartung $200 \cdot 100 \cdot 0,95 \text{ €} = 19\,000 \text{ €}.$ Das Überbuchen lohnt sich also für das Reisebüro.		10	10

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung										
		I	II	III								
e)	Wir betrachten die Rechnung von d) als Funktion der angebotenen Plätze n $E(n) = 200 \cdot n \cdot 0,95 - 1200 \cdot \sum_{k=101}^n (k - 100) \cdot \binom{n}{k} \cdot 0,95^k \cdot 0,05^{(n-k)} \text{ [€]}.$ Wir erhalten (mit Hilfe des Anhangs) folgende Wertetabelle: <table><tr><td>n</td><td>102</td><td>103</td><td>104</td></tr><tr><td>$E(n)$</td><td>19 333</td><td>19 397</td><td>19 316</td></tr></table> Aus dieser geht hervor, dass das Optimum bei $n = 103$ liegt.	n	102	103	104	$E(n)$	19 333	19 397	19 316			
n	102	103	104									
$E(n)$	19 333	19 397	19 316									
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20								

Aufgabe 5 Bogenschießen

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Funktion ist auf dem angegebenen Intervall konstant und verhält sich für größere x wie gefordert. a muss größer als 0 sein, damit g nichtnegativ ist; die Größe von a wird durch die Normierung bestimmt: $\int_0^{\infty} g(x) dx = [ax]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}ax^{-3}\right]_1^{\infty} = a + \frac{1}{3}a = \frac{4}{3}a = 1$. Also muss $a = 0,75$ gelten.	5	15	
b)	Bei gegebener Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion g berechnen sich Erwartungswert und Streuung wie folgt: $E(X) = \int_0^{\infty} xg(x) dx$ $= \int_0^1 ax dx + \int_1^{\infty} ax^{-3} dx$ $= \left[\frac{1}{2}ax^2\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{2}ax^{-2}\right]_1^{\infty}$ $= a = 0,75.$ und $\sigma^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ $= \int_0^1 ax^2 dx + \int_1^{\infty} ax^{-2} dx - 0,75^2$ $= \left[\frac{1}{3}ax^3\right]_0^1 + \left[-ax^{-1}\right]_1^{\infty} - 0,75^2$ $= \frac{4}{3}a - 0,75^2 = 0,4375.$ also $\sigma(X) = \sqrt{0,4375} \approx 0,6614$		30	
c)	Die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet sich ebenfalls als Integral: $\int_2^{\infty} g(x) dx = \left[-\frac{1}{3}ax^{-3}\right]_2^{\infty} = \frac{1}{24}a = \frac{1}{32}$ Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schuss zufällig mehr als 2 Längeneinheiten daneben geht, beträgt also gut 3 %.	15		
d)	Aus Aufgabe c) ersieht man, dass Herbert bei jedem Schuss mit der Wahrscheinlichkeit $1 - 0,03125 = 0,96875$ nichts zu lachen hat. Bei allen 4 Schüssen hat Herbert mit der Wahrscheinlichkeit $0,96875^4 = 0,88$ keinen Anlass zu lachen, wenn man die Schüsse als unabhängig ansieht, was sicherlich berechtigt ist.		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Die einzelnen Schüsse werden als Teil eines Bernoulli-Experiments angesehen und die Wahrscheinlichkeit für ein solch extremes Ergebnis berechnet: $\binom{4}{3} \left(\frac{1}{32}\right)^3 \left(\frac{31}{32}\right) + \left(\frac{1}{32}\right)^4 \approx 0,00012.$ Da dieser Wert sehr klein ist, erscheinen Dieters Angaben recht unglaublich. (Der 2. Summand spielt hier keine Rolle und könnte auch weggelassen werden.)			20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 6 Blutspenden

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Interessiert man sich nur für eine der Blutgruppen und ob ein Mensch diese Blutgruppe hat oder nicht (z. B. bei einer Bluttransfusion), so liegt ein Bernoulli-Experiment vor. Geht man zudem von einer großen Grundgesamtheit aus und wenig Personen, die zu einem Blutspendetermin erscheinen, kann die Tatsache, dass „nicht zurückgelegt wird“ (dass niemand mehrfach nacheinander Blut spenden darf), vernachlässigt werden. Bestehen zwischen den Blutgruppen der Spender keine Abhängigkeiten, so sind alle Voraussetzungen für eine Bernoulli-Kette erfüllt, X ist binomialverteilt. Die Blutgruppe eines Menschen ist durch die Blutgruppen seiner Vorfahren bestimmt. Kommen Familienangehörige gemeinsam zum Blutspenden, so liegt keine Unabhängigkeit vor, also auch keine Binomialverteilung.		15	
b)	Die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer in einer Bernoulli-Kette der Länge n beträgt: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $n = 100, p = 0,11$: $P(X = 11) = \binom{100}{11} \cdot 0,11^{11} \cdot 0,89^{89} \approx 0,127.$ $n = 100, p = 0,01$: $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,99^{100} + 100 \cdot 0,01 \cdot 0,99^{99} \approx 0,736.$ $n = 50, p = \frac{1}{3}$. Hierfür liegen Tabellen mit den kumulierten Werten vor: $P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 14) \approx 1 - 0,2612 \approx 0,739.$ $n = 2500, p = \frac{1}{3}$: Da $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{2500 \cdot 0,3 \cdot 0,6} = \sqrt{555,5} > 3$, kann die Binomialverteilung durch die Normalverteilung approximiert und die integrale Näherungsformel angewendet werden. $ \begin{aligned} P(800 \leq X \leq 900) &\approx \Phi\left(\frac{900,5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{799,5 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{900,5 - 833,3}{\sqrt{555,5}}\right) - \Phi\left(\frac{799,5 - 833,3}{\sqrt{555,5}}\right) \\ &\approx \Phi(2,85) - \Phi(-1,44) = \Phi(2,85) - (1 - \Phi(1,44)) \approx 0,9978 - 0,0749 \approx 0,923. \end{aligned} $ <i>In einigen Büchern wie auch in der genehmigten Tafel wird die Formel von Moivre-Laplace ohne die Korrektur mit 0,5 angegeben. Entsprechende Rechnungen sind natürlich auch als richtig anzusehen.</i>	15	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	Aus der Überlegung, dass „kein Spender“ das Gegenereignis von „mindestens ein Spender“ ist, ergibt sich der Ansatz: Gesucht ist das kleinste n, so dass gilt: $1 - 0,99^n > 0,99$. Aufgelöst nach n erhält man: $n > \frac{\lg 0,01}{\lg 0,99}$ und somit $n = 459$.		10	
d)	Es bezeichne - K das Ereignis, dass die betreffende Person infiziert ist, - P_0 das Ereignis, dass der Test bei der betreffenden Person eine Infektion anzeigt. Gegeben sind: - $P(K) = 0,001$ (a-priori-Wahrscheinlichkeit) - $P(P_0 / K) = 0,99$ - $P(P_0 / \bar{K}) = 0,02$ Das Testergebnis ist fehlerhaft, wenn eine vorhandene Infektion nicht angezeigt wird oder wenn eine Infektion angezeigt wird, obwohl das Blut nicht infiziert ist. Mit Hilfe eines Baumdiagramms oder durch folgende Rechnung erhält man: $P(F) = P(\bar{P}_0 \cap K) + P(P_0 \cap \bar{K}) = P(K) \cdot P(\bar{P}_0 / K) + P(\bar{K}) \cdot P(P_0 / \bar{K})$ $= 0,001 \cdot 0,01 + 0,999 \cdot 0,02 \approx 0,020$ Nur in ca. 2 % aller Fälle ist das Testergebnis fehlerhaft.	10	10	
e)	Gesucht ist $P(\bar{K} / P_0) = \frac{P(\bar{K}) \cdot P(P_0 / \bar{K})}{P(P_0)}$. Für den Nenner gilt: $P(P_0) = P(\bar{K}) \cdot P(P_0 / \bar{K}) + P(K) \cdot P(P_0 / K) = 0,999 \cdot 0,02 + 0,001 \cdot 0,99 = 0,02097$ $P(\bar{K} / P_0) = \frac{0,999 \cdot 0,02}{0,02097} \approx 0,953$ <i>Dieses Ergebnis erscheint auf den ersten Blick sehr erstaunlich: trotz eines positiven Testergebnisses ist für eine Person die Wahrscheinlichkeit, dass sie nicht infiziert, ist noch über 95 %. Das liegt daran, dass der Anteil der nicht mit diesen Viren infizierten Personen in der Bevölkerung so groß ist, dass 2 % von dieser Personengruppe der nicht Infizierten bei weitem mehr sind als der Anteil von 99 % der richtig diagnostizierten Kranken.</i>		10	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	Für diesen Wert x müsste nach e) gelten: $\frac{0,999 \cdot x}{0,999 \cdot x + 0,001 \cdot 0,99} = 0,5 \Leftrightarrow 0,999x = 0,000495 + 0,4995x$ $\Leftrightarrow 0,4995x = 0,000495$ $\Leftrightarrow x \approx 9,91 \cdot 10^{-4}$ Der Wert müsste noch unter 1 ‰ liegen.			15
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Aufgabe 7 HIV-Test

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Wegen der großen Zahl der Grundgesamtheit kann die wiederholte Untersuchung von Blutproben als Bernoulli-Kette angesehen werden mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{5 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^7} = 0,125\%$. Die Wahrscheinlichkeit für „keinen Erfolg“ beträgt dann $(1 - p)^n$. Wir lösen die Gleichung $(1 - p)^n = 1\%$ $n = \frac{-2 \cdot \log 10}{\log 0,99875} \approx 3681,8.$ Also müssen mindestens 3682 Blutproben untersucht werden.	10		
b)	Dies ist die „klassische“ Anwendung der Bayes-Formel: Es bezeichne: - K das Ereignis, dass die betreffende Person infiziert ist, - P_o das Ereignis, dass die betreffende Person ein positives Testergebnis hat. Gegeben sind: - $P(K) = 0,125\%$ (a-priori-Wahrscheinlichkeit) - $P(P_o K) = 99,8\%$ - $P(P_o \bar{K}) = 1\%$ Gesucht: $P(K P_o)$. $P(K P_o) = \frac{P(K) \cdot P(P_o K)}{P(K) \cdot P(P_o K) + P(\bar{K}) \cdot P(P_o \bar{K})} \quad (\text{Bayes-Formel})$ $\approx 11,1\%$	15		
c)	Ein positives Testergebnis kommt entweder durch einen Infizierten zustande oder durch einen Gesunden. Die 1. Pfadregel ergibt für den ersten Fall: $p_1 = P(K) \cdot P(P_o K) = 0,125\% \cdot 99,8\% \approx 0,1248\%$ und für den zweiten Fall: $p_2 = P(\bar{K}) \cdot P(P_o \bar{K}) = 99,875\% \cdot 1\% \approx 1\%.$ Die Wahrscheinlichkeit für ein positives Testergebnis ergibt sich als Summe von p_1 und p_2. $P(P_o) =: p_3 = p_1 + p_2 \approx 1,12\% \quad (\text{Satz über die totale Wahrscheinlichkeit}).$ Wegen des sehr großen Anteils nicht infizierter Personen in der Stichprobe ergeben sich aus dem kleinen Testfehler von 1 % (dass eine nicht infizierte Person positiv getestet wird) viele Fehldiagnosen dieser Art. p_1 entspricht ungefähr dem Wert p aus Aufgabe a), aber p_2 ist ungefähr 8-mal größer als p_1. Man erhält viel mehr „Positive“ durch Fehldiagnosen. Mit dem Wert von p_3 rechnen wir nun genauso wie in a): $n = \frac{-2 \cdot \log 10}{\log 0,9888} \approx 408,9$ Also müssen nur mindestens 409 Blutproben untersucht werden.		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung								
		I	II	III						
d)	Ausgehend von der a-priori-Wahrscheinlichkeit von nur 0,125 % für einen infizierten Patienten ist diese durch den positiven Test auf die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit von 11,1 % gestiegen, also ungefähr um den Faktor 90. <i>Aber, wenn vorher keinerlei Verdacht bestand, ist die diagnostische Qualität in der Tat gering, weil – wie in c) beschrieben – wegen der geringen a-priori-Wahrscheinlichkeit für Aids, die Quote der fälschlich Positiven so sehr ins Gewicht fällt.</i>		10							
e)	Hier sind die Überlegungen anders: Da die Übertragungswege für Aids gut bekannt sind und die betreffende Person ihr Vorleben individuell in der Regel gut einschätzen kann, muss sie hier mit einer individuellen subjektiven a-priori-Wahrscheinlichkeit in die Bayes-Formel gehen. Wenn sie z.B. jahrelang sexuell enthalten gelebt hat und keinen Blutaus-tausch hatte, wird sie diese als Null annehmen und die a-posteriori-Wahr-scheinlichkeit bleibt dann auch Null. Sie braucht nicht beunruhigt zu sein. Wenn die Person aber „riskant“ gelebt hat, kann die a-priori-Wahrscheinlich-keit p, die sie nur schätzen kann, für sie erheblich höher als 0,125 % sein. Zum Beispiel: bei $p = 5\%$ ergibt sich dann schon eine a-posteriori-Wahr-scheinlichkeit für eine Infektion von 84 % mit einem hohen traurigen diagnostischen Wert.			10						
f)	Mit Y werde die Anzahl der Personen in der Stichprobe bezeichnet, bei denen eine lindernde Wirkung erkennbar sein wird. Wir nehmen an, dass Y 100-p-binomialverteilt ist mit unbekanntem p. Wir betrachten die Nullhypothese $H_0 : p < 40\%$ mit der Gegenhypothese $H_1 : p \geq 40\%$. Wir werden die Nullhypothese ablehnen bei hinreichend großen Realisierungen von Y. Sagen wir, dass H_0 abgelehnt wird, falls gilt: $Y > k$. Für den Fehler $\alpha(k)$ 1. Art gilt dann: $\alpha(k) \leq 1 - \sum_{i=0}^k B(100; 0,4; i)$. Wegen $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = \sqrt{24} > 3$ können wir die obige Summe approximieren durch $\Phi(\frac{k + 0,5 - 40}{\sqrt{24}})$. Mit Hilfe einer Tabelle der Gaußschen Integralfunktion oder durch Probieren mit dem Taschenrechner erhalten wir: <table><tr><td>k</td><td>47</td><td>48</td></tr><tr><td>$\alpha(k) \leq$</td><td>6,3 %</td><td>4,1 %</td></tr></table> Man sollte also die Nullhypothese ablehnen, falls gilt: $Y > 48$. Für den Fehler $\beta(p)$ gilt dann: $\beta(p) = \sum_{i=0}^{48} B(100; p; i)$. Wie oben nähern wir die Funktionswerte an und erhalten:	k	47	48	$\alpha(k) \leq$	6,3 %	4,1 %			
k	47	48								
$\alpha(k) \leq$	6,3 %	4,1 %								

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung										
		I	II	III								
	<table><tr><td>p</td><td>40 %</td><td>50 %</td><td>60 %</td></tr><tr><td>$\beta(p)$</td><td>96 %</td><td>38 %</td><td>1 %</td></tr></table> Wenn es stimmt, dass das Medikament in beschriebener Weise wirkt, aber p nicht deutlich über 50 % liegt, wird es deswegen dennoch mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht zur gewünschten Ablehnung der Nullhypothese kommen. Der Test ist nicht trennscharf. Dies wäre durch eine Erhöhung des Stichprobenumfanges zu verbessern.	p	40 %	50 %	60 %	$\beta(p)$	96 %	38 %	1 %		20	10
p	40 %	50 %	60 %									
$\beta(p)$	96 %	38 %	1 %									
g)	Die Zweifler werden versuchen, ein signifikantes Ergebnis zur Ablehnung der Nullhypothese $H_0 : p \geq 40\%$ zu bekommen. Dies wird bei hinreichend kleinen Realisierungen von Y geschehen. Sagen wir, falls $Y \leq m$. Für den Fehler $\alpha(m)$ 1. Art gilt dann: $\alpha(m) \leq \sum_{i=0}^m B(100; 0,4; i)$. Mit den gleichen Methoden wie in f) erhalten wir: <table><tr><td>m</td><td>31</td><td>32</td></tr><tr><td>$\alpha(m) \leq$</td><td>4,1 %</td><td>6,3 %</td></tr></table> Man sollte also die Nullhypothese ablehnen und der Behauptung der Medikamentenwirksamkeit misstrauen, falls gilt: $Y \leq 31$. (Dieser Test ist übrigens natürlich genau so wenig trennscharf wie der in f), d.h. bei Werten für p zwischen 20 % und 40 % werden die Zweifler mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht zu einem signifikanten Ergebnis kommen.)	m	31	32	$\alpha(m) \leq$	4,1 %	6,3 %		5	5		
m	31	32										
$\alpha(m) \leq$	4,1 %	6,3 %										
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25								

Aufgabe 8 Kugelschreiberproduktion

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	• <u>Ereignis A: Sowohl die Mechanik als auch die Mine sind defekt.</u> Es bezeichne: K: defekte Mechanik E: defekte Mine Nach Voraussetzung gilt: $P(K) = 0,03$, $P(E) = 0,02$ Unmittelbar aus der Definition der Unabhängigkeit oder mit Hilfe eines Baumdiagramms folgt: $P(A) = P(K \cap E) = P(K) \cdot P(E) = 0,0006 = 0,06\%$. • <u>Ereignis B: Der Kugelschreiber ist fehlerfrei.</u> $P(B) = P(\bar{K} \cap \bar{E}) = P(\bar{K}) \cdot P(\bar{E}) = 0,97 \cdot 0,98 = 0,9506 \approx 95\%$. • <u>Mindestens ein Kugelschreiber ist defekt:</u> Es beschreibe X die Anzahl der fehlerhaften Kugelschreiber. Die Prüfung von n Kugelschreibern kann als Bernoulli-Kette der Länge n angesehen werden. Es handelt sich offensichtlich um eine Massenproduktion, die Fehler treten nach Aufgabenstellung unabhängig voneinander auf, so dass von einer konstanten Trefferwahrscheinlichkeit von $p = 0,05$ ausgegangen werden kann. Die Zufallsvariable X ist demnach binomialverteilt. Hier gilt: $n = 10$, $p = 0,05$. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^{10} = 1 - 0,5987 \approx 0,4013 \approx 40,1\%$ <i>Das Ergebnis kann auch mithilfe der Tafel bestimmt werden.</i> Ist $n = 10$, so ist in der Stichprobe mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 40 % mindestens ein fehlerhafter Kugelschreiber enthalten. • <u>Im Folgenden ist n zu bestimmen.</u> Es soll gelten: $P(X \geq 1) \geq 0,99$. Aus $P(X \geq 1) \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0,99 \Leftrightarrow 0,95^n \leq 0,01 \Leftrightarrow n \geq \frac{-2}{\lg 0,95}$ folgt: $n \geq 90$ Auch mit systematischem Probieren lässt sich n aus der Bedingung $0,95^n \leq 0,01$ ermitteln. Auch mit einem Gegenbeispiel für n mit $90 \leq n < 100$ ist die Aussage des Qualitätsprüfers widerlegt.	10	20	
b)	• <u>Erwartungswert</u> $n = 50$ und $p = 0,05$. Da X binomialverteilt ist, gilt: $E(X) = n \cdot p = 2,5$ Pro Schachtel sind also im Durchschnitt 2,5 Kugelschreiber defekt.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	- Bestimmt werden soll $P(Z \leq 2)$: <u>Entweder</u> berechnet man die Einzelwahrscheinlichkeiten mit der Formel $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ und erhält}$ $P(X \leq 2) = 0,95^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0,05^1 \cdot 0,95^{49} + \binom{50}{2} \cdot 0,05^2 \cdot 0,95^{48} \approx 0,5405 \approx 54,1\%$ <u>oder</u> man bedient sich der Formelsammlung, die eine Tafel für $n = 50$ und $p = 0,05$ enthält, und liest den Wert 0,5405 ab. - Ereignis G: Sendung enthält genau 50 defekte Kugelschreiber $n = 1000, p = 0,05$. Es gilt: $P(G) = P(X = 50) = \binom{1000}{50} 0,05^{50} \cdot 0,95^{950} \approx 0,058.$ Mit den meisten Taschenrechnern kann man diesen Wert mit dieser Formel auf diesem Wege nicht berechnen, aber man kann die Binomial- durch die Normal-Verteilung approximieren, da $\sigma > 3$. $P(X = k) \approx \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ und } \sigma = \sqrt{47,5}, \mu = 50.$ $P(G) \approx \frac{1}{\sqrt{47,5 \cdot 2\pi}} \cdot e^0 \approx 0,058.$ - Der Erwartungswert der Anzahl defekter Kugelschreiber in 20 Schachteln mit je 50 Kugelschreibern beträgt zwar $n \cdot p = 1000 \cdot 0,05 = 50$, aber es ist dennoch sehr unwahrscheinlich, diesen genau zu treffen. (Andererseits ist es sehr wahrscheinlich, in die „Nähe“ zu kommen, z.B. in eine 2σ-Umgebung.)	5	15	10
c)	Die Zufallsvariable Y beschreibe die Kosten, die pro Kugelschreiber auftreten. Dann gilt: $E(Y) = 0,30\text{€} \cdot 0,95 + 1,30\text{€} \cdot 0,05 = 0,35\text{€}$ Bei einem Preis von 0,40 € ist also ein Gewinn von 0,05 € pro Kugelschreiber zu erwarten. Dieser beträgt dann $\frac{1}{7} \approx 14,3\%$ der zu erwartenden Kosten. Der Herstellerbetrieb kann also sein Planungsziel erreichen.	10	5	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	In beiden Fällen handelt es sich um einen einseitigen Hypothesentest über eine Binomialverteilung mit $n = 50$. A vertraut dem Angebot des Konkurrenten und verwirft die Nullhypothese $H_A : p \geq 0,98$ erst dann, wenn das Ergebnis der Stichprobe so klein ist, dass es im Ablehnungsbereich von H_A liegt. Hierbei ist $\mu = n \cdot p = 49$, $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{0,98} < 3$ Hier ist also die Voraussetzung für die Approximation der Binomial- durch die Normalverteilung nicht erfüllt. Es muss mit dem Tafelwerk gearbeitet werden, das sowohl für $p = 0,02$ als auch für $p = 0,05$ vorliegt. Mit Hilfe der Tafel ergibt sich unter der Annahme $p = 0,98$ für die Anzahl Z der fehlerfreien Kugelschreiber: $P(Z \leq 46) \approx 1,8 \% \quad , \quad P(Z \leq 47) \approx 7,8 \%$ A wird also erst dann beim alten Hersteller bleiben wollen, wenn weniger als 47 fehlerfreie Kugelschreiber in der Lieferung sind. B misstraut dem Konkurrenten und ist erst dann bereit, die Lieferfirma zu wechseln, wenn das Ergebnis der Stichprobe auf eine deutlich bessere Qualität hinweist. Seine Nullhypothese ist, dass die Qualität keineswegs besser als die des alten Lieferanten ist: $H_B : p \leq 0,95$. Von dieser Meinung weicht er erst ab, wenn die Stichprobe ungewöhnlich gut ausfällt. Unter der Annahme $p = 0,95$ liest man aus der Tafel ab: $P(Z = 50) = 1 - P(Z \leq 49) \approx 7,7 \%$ Das heißt: selbst wenn B H_B erst dann ablehnt, wenn alle Kugelschreiber fehlerfrei sind, ist die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art immer noch über 5 %, d.h. B wird durch kein mögliches Testergebnis davon abzubringen sein, den alten Lieferanten beizubehalten. (Um hier überhaupt zu signifikanten Ergebnissen zu kommen, müsste n erhöht werden, der Fehler 2. Art beträgt so übrigens 100 %).			
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 9 Modengeschäfte

		Lösungsskizze			Zuordnung, Bewertung															
					I	II	III													
a)	<table border="1"><tr><th>von \ nach</th><th>BlueBlack</th><th>Goldie X</th><th>JeansHouse</th></tr><tr><th>BlueBlack</th><td>0,6</td><td>0,2</td><td>0,15</td></tr><tr><th>Goldie X</th><td>0,25</td><td>0,55</td><td>0,15</td></tr><tr><th>JeansHouse</th><td>0,15</td><td>0,25</td><td>0,7</td></tr></table> Tabelle oder Graph erwartet.	von \ nach	BlueBlack	Goldie X	JeansHouse	BlueBlack	0,6	0,2	0,15	Goldie X	0,25	0,55	0,15	JeansHouse	0,15	0,25	0,7	10		
von \ nach	BlueBlack	Goldie X	JeansHouse																	
BlueBlack	0,6	0,2	0,15																	
Goldie X	0,25	0,55	0,15																	
JeansHouse	0,15	0,25	0,7																	
b)	Die Übergangsmatrix ist $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,15 \\ 0,25 & 0,55 & 0,15 \\ 0,15 & 0,25 & 0,7 \end{pmatrix}$ (aus Tabelle oder Graph). Nach einem Monat ergibt sich: $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,15 \\ 0,25 & 0,55 & 0,15 \\ 0,15 & 0,25 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2700 \\ 2000 \\ 3200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2500 \\ 2255 \\ 3145 \end{pmatrix}$ Die Berechnung für den 2. Monat kann erfolgen durch (i) $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,15 \\ 0,25 & 0,55 & 0,15 \\ 0,15 & 0,25 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2500 \\ 2255 \\ 3145 \end{pmatrix}$ oder (ii) $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,15 \\ 0,25 & 0,55 & 0,15 \\ 0,15 & 0,25 & 0,7 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 2700 \\ 2000 \\ 3200 \end{pmatrix}$ Die Annahme, das Modell aus a) gelte in den folgenden 6 Monate weiter, bedeutet, dass in diesen 6 Monaten - die Anzahl der Gesamtkunden in den drei Geschäften unverändert bleibt - die Wanderungsanteile sich ebenfalls nicht ändern.	15	5																	
c)	Stillstand der Kundenbewegung würde bedeuten, dass die Gleichung $M \cdot X = X$ lösbar ist, also mindestens ein solcher Vektor X existiert. I $0,6x_1 + 0,2x_2 + 0,15x_3 = x_1 \quad -40x_1 + 20x_2 + 15x_3 = 0$ Ansatz: II $0,25x_1 + 0,55x_2 + 0,15x_3 = x_2 \Leftrightarrow 25x_1 - 45x_2 + 15x_3 = 0$ III $0,15x_1 + 0,25x_2 + 0,7x_3 = x_3 \quad 15x_1 + 25x_2 - 30x_3 = 0$																			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Aus $II-I$ und $2 \cdot I + III$ folgt $65x_1 - 65x_2 = 0$ und $-65x_1 + 65x_2 = 0$, also $x_1 = x_2$. Eingesetzt in III folgt $30x_3 = 40x_2 \Leftrightarrow x_3 = \frac{4}{3}x_2$. Wie in b) erwähnt, ist die Gesamtkundenzahl von Anfang noch gültig, d.h. es muss auch gelten $x_1 + x_2 + x_3 = 7\,900$. x_1 und x_3 eingesetzt ergeben $10x_2 = 5900 \cdot 3 = 23\,700 \Rightarrow x_2 = 2\,370 = x_1$ und damit $x_3 = 3\,160$. Die Kundenbewegung stabilisiert sich im Modell bei diesen absoluten Zahlen: <i>BlueBlack</i> und <i>Goldie X</i> je 2 370 Kunden, <i>JeansHouse</i> 3 160 Kunden. Diese Werte sind nach 6 Monaten fast erreicht. <i>BlueBlack</i> schneidet am schlechtesten ab, da es über 12 % der Kunden verliert, <i>JeansHouse</i> bleibt fast stabil und <i>Goldie X</i> gewinnt über 18 % an Kunden hinzu. Die Geschäftsführerin muss also dringend eine erfolgreiche Werbekampagne starten.			
	d) Es ist zunächst ein Modell zu erstellen, mit dem die Frage beantwortet werden kann: Wir betrachten das Sammeln der Puzzleteile als einen zufälligen Prozess mit 6 Zuständen. Zustand i bedeutet, dass man unter den bereits gesammelten Puzzleteilen i verschiedene hat. Der Zustand 0 ist die Anfangssituation, der Zustand 5 ist der gewünschte Endzustand. Jedes Mal, wenn man einen neuen Umschlag bekommt findet ein „Übergang“ statt, und die Übergangswahrscheinlichkeiten sind in folgendem Diagramm dargestellt. Angenommen wurde dabei die Gleichverteilung der verschiedenen Puzzleteile („große, gutgefüllte Schale“). Zustand 5 kann nicht mehr verlassen werden (absorbierend). Ausgehend vom Zustand 0 soll die erwartete Anzahl der Übergänge bestimmt werden, bis man im erstmals im Zustand 5 ist. Die Lösungsidee besteht darin, nicht nur diesen Erwartungswert e zu betrachten, sondern simultan für <u>jeden</u> Zustand i die erwartete Anzahl $E(i)$ der Übergänge unter der Bedingung, dass man sich im Zustand i befindet. Die Beziehungen zwischen diesen Werten erlauben es letztlich den gesuchten Wert $E(0)$ zu bestimmen: Es gilt trivialerweise: $E(5) = 0$ Nun können wir $E(4)$ bestimmen, es gilt nämlich nach Definition des Erwartungswertes:		25	10

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$E(4) = \frac{4}{5} \cdot (1 + E(4)) + \frac{1}{5} \cdot (1 + E(5)) = 1 + \frac{4}{5} \cdot E(4) + \frac{1}{5} \cdot 0$ $E(4) = 1 + \frac{4}{5} \cdot E(4)$ Diesen Zusammenhang können wir als lineare Bestimmungsgleichung für $E(4)$ auffassen mit der eindeutigen Lösung: $E(4) = 5$. Man sieht, wie es weiter geht: $E(3) = 1 + \frac{3}{5} \cdot E(3) + \frac{2}{5} \cdot E(4) \Leftrightarrow E(3) = \frac{15}{2} \quad \text{oder} \quad E(3) = 7,5.$ $E(2) = 1 + \frac{2}{5} \cdot E(2) + \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{2} \Leftrightarrow E(2) = \frac{55}{6}, \text{ gerundet} \quad E(2) \approx 9,2$ $E(1) = 1 + \frac{1}{5} \cdot E(1) + \frac{4}{5} \cdot \frac{55}{6} \Leftrightarrow E(1) = \frac{125}{12}, \text{ gerundet} \quad E(1) \approx 10,4$ $E(0) = 1 \cdot (1 + E(1)) = 1 + \frac{125}{12} \Leftrightarrow E(0) = \frac{137}{12}, \text{ gerundet} \quad E(0) \approx 11,4$ Im Mittel muss man also 11 bis 12 Umschläge sammeln, um in den „Genuss“ des ausgefallenen Kleidungsstücks von <i>Carotti</i> zu kommen, also im Mittel einen Umsatz von 550 bis 600 € machen. Wenn das Modegeschäft ansonsten angemessene Preise hat, und man dort auch ohne die Werbeaktion gerne kauft, geht das in Ordnung. Wenn aber wegen des Sonderangebots z.B. alle Kleidungsstücke doppelt so teuer wie in vergleichbaren Geschäften sind, dann „kostet“ <i>Carotti</i> fast 300 €. <u>Bemerkung:</u> Diese Überlegungen lassen sich leicht auf Situationen verallgemeinern, bei denen die vollständige Sammlung aus n Objekten besteht, z.B. zur Weltmeisterschaft Fußballerbilder. Es gibt auch Würfelspiele, bei denen derjenige gewinnt der zuerst alle Augenzahlen mindestens einmal geworfen hat. Weitere Verallgemeinerungen bestehen darin, dass man absorbierende endliche Markoff-Ketten betrachtet, denn unser Beispiel lässt sich als eine solche auffassen. Dann kann man prinzipiell immer zwei Fragen stellen und beantworten: – Mit welchen Wahrscheinlichkeiten landet man in den einzelnen absorbierenden Endzuständen? (Hier sinnlos, da nur ein absorbierender Zustand vorhanden ist) – Wie groß ist der Erwartungswert der Anzahl der Übergänge bis zum Erreichen eines absorbierenden Endzustandes? In beiden Fällen geht man genau so vor wie hier, beantwortet die gestellten Fragen also nicht nur für den speziellen Startzustand sondern für alle Zustände als Startzustände. Die Beziehungen zwischen diesen Größen liefern für beide Fragestellungen je ein lineares Gleichungssystem, das es zu lösen gilt.			
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 10 Gepäckaufgabe

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Es werden nur zwei Ergebnisse unterschieden: Ein Gepäckstück wird der richtigen Maschine zugewiesen oder nicht. Der Anhänger kann zum Beispiel gleich beim Anbringen versehentlich verknickt werden. Fällt das Gepäckstück ungünstig auf das Förderband oder ist dieses an einer Stelle verschmutzt, kann die Lesbarkeit des Anhängers ebenfalls beeinträchtigt werden. Auf eine Abhängigkeit kann hieraus wohl nicht geschlossen werden, so dass man den Transport von n Gepäckstücken vom Einchecken bis zum richtigen Flugzeug als Bernoulli-Kette der Länge n ansehen kann.		15	
b)	Die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer in einer Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p beträgt $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$. Sieht man fehlgeleitete Gepäckstücke als „Treffer“ an, so berechnet man die gesuchten Wahrscheinlichkeiten mit $p = 0,035$. <u>Kein Gepäckstück fehlt: $k = 0$</u> $n = 45, k = 0 : P(X = 0) = 0,965^{45} \approx 0,201$. <u>Genau zwei Gepäckstücke sind fehlgeleitet: $k = 2$</u> $n = 45, k = 2 : P(X = 2) = \binom{45}{2} 0,035^2 \cdot 0,965^{43} \approx 0,262$. <u>Höchstens vier Gepäckstücke sind fehlgeleitet: $k = 0, 1, \dots, 4$</u> Zwei der fünf Summanden sind bereits bestimmt. $P(X = 1) = 45 \cdot 0,035 \cdot 0,965^{44} \approx 0,328$, $P(X = 3) = \binom{45}{3} \cdot 0,035^3 \cdot 0,965^{42} \approx 0,136$ $P(X = 4) = \binom{45}{4} \cdot 0,035^4 \cdot 0,965^{41} \approx 0,052$. Insgesamt erhält man also $P(X \leq 4) \approx 0,979$. <i>Dieser Wert ergibt sich als Summe der oben genannten gerundeten Werte, wenn man den exakten Wert auf 3 Nachkommastellen rundet, erhält man 0,980.</i> <u>Mehr als vier Gepäckstücke sind fehlgeleitet:</u> Dies ist ersichtlich das Gegenereignis zum gerade betrachteten Ereignis. $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) \approx 1 - 0,979 = 0,021$ (Analog erhält man dieselben Ergebnisse, wenn man ein richtig transportiertes Gepäckstück als „Treffer“ interpretiert.)		20	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung												
		I	II	III										
c)	Die Fluggesellschaften rechnen zunächst mit $E(Y_1) = 70 \text{ €} \cdot 0,035 = 2,45 \text{ €}$ Kosten pro aufgegebenem Gepäckstück. Nach der Verbesserung ihrer Lesegeräte gilt: <table border="1"> <tr> <td>Y_2</td><td>0</td><td>10</td><td>70</td><td>110</td></tr> <tr> <td>Wahrscheinlichkeit</td><td>0,965</td><td>0,024</td><td>0,005</td><td>0,006</td></tr> </table> und man erhält: $E(Y_2) = 1,25 \text{ €}$. Die zu erwartende Kostenminderung beträgt mithin 1,20 € pro Gepäckstück.	Y_2	0	10	70	110	Wahrscheinlichkeit	0,965	0,024	0,005	0,006	5	15	
Y_2	0	10	70	110										
Wahrscheinlichkeit	0,965	0,024	0,005	0,006										
d)	Nimmt man die Anzahl Z der Verlustkoffer innerhalb eines Jahres als binomialverteilt an, so ist, da $n > 100$ und $p < 0,01$, die Poisson-Verteilung eine gute Näherung. Für ein Jahr ergibt sich: $\mu = E(Z) = 12 \cdot 0,0002 \cdot 12000 = 28,8$. <u>$k = 29$</u> Mit Hilfe der Näherungsformel von Poisson $P(Z = k) \approx \frac{1}{e^\mu} \cdot \frac{\mu^k}{k!}$ direkt oder durch Differenzbildung zweier kumulierter Werte aus der Tabelle erhält man: $P(Z = 29) \approx (0,5639 - 0,4901) = 0,0738 \approx 0,074$. Bei 30 Verlustkoffern ist die Entschädigungssumme von 12 000 € zu zahlen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $P(Z > 30)$. Mit Hilfe der Tabelle erhält man $P(Z > 30) = 1 - P(Z \leq 30) \approx 1 - 0,6348 \approx 0,365$ Der Erwartungswert für die Schadenzahlung beträgt: $400 \cdot \frac{1}{e^\mu} \cdot \sum_{i=31}^{\infty} (i - 30) \cdot \frac{\mu^i}{i!} = 400 \cdot \left(\frac{1}{e^\mu} \cdot \sum_{i=31}^{\infty} i \cdot \frac{\mu^i}{i!} - 30 \cdot \frac{1}{e^\mu} \cdot \sum_{i=31}^{\infty} \frac{\mu^i}{i!} \right)$ $\approx 400 \cdot [(28,8 - 16,2415) - 30 \cdot (1 - 0,6348)] = [12,5585 - 10,956] \cdot 400 = 641.$		20	25										
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25										

Aufgabe 11 Wahlen

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die prozentualen Anteile unter allen Wahlberechtigten betragen 30 % für Gruppe I, 45 % für Gruppe II und 25 % für Gruppe III. Daraus ergibt sich mit $0,3 \cdot 0,87 + 0,45 \cdot 0,82 + 0,25 \cdot 0,65 = 0,7925$ eine Wahlbeteiligung von insgesamt 79,25 %.	10		
b)	$n = 100$, $p = 0,35$. X bezeichne die Anzahl der Nichtwähler in dieser Stichprobe. Gesucht ist $P(31 \leq X \leq 39)$. Es ist mühsam, aber durchaus möglich, diese Wahrscheinlichkeit schrittweise mit Hilfe der Formel $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ auszurechnen. Da für $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ hier gilt: $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0,35 \cdot 0,65} = \sqrt{22,75} > 3$, kann jedoch die Binomial- durch die Normalverteilung approximiert werden. Mit Hilfe der Integralen Näherungsformel von Moivre und Laplace folgt mit Interpolieren: $P(31 \leq X \leq 39) \approx \Phi\left(\frac{39,5 - 35}{\sqrt{22,75}}\right) - \Phi\left(\frac{30,5 - 35}{\sqrt{22,75}}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{4,5}{\sqrt{22,75}}\right) - 1$ $\approx 2 \cdot \Phi(0,943) - 1 \approx 2 \cdot 0,8272 - 1 = 0,6544 \approx 65,4\%.$ <i>In einigen Büchern wird die Formel von Moivre-Laplace ohne die Korrektur mit 0,5 angegeben. Entsprechende Rechnungen sind natürlich auch als richtig anzusehen.</i>		20	
c)	<u>Es handelt sich um das einseitige Testen einer Hypothese.</u> Getestet wird $H_0: p \leq 0,55$. Die Hypothese H_0 wird abgelehnt und der Wahlkampf nicht intensiviert, wenn, die Anzahl Y der Wähler unter den 200 Befragten hinreichend groß ist. Genauer: Es wird eine möglichst kleine natürliche Zahl N bestimmt, so dass unter der Annahme, dass H_0 richtig ist, die Wahrscheinlichkeit $P(Y > N)$ kleiner oder gleich 5 % ist. Da H_0 eine zusammengesetzte Hypothese ist, müssen wir abschätzen und nehmen an, dass $p = 0,55$. Außerdem approximieren wir die jetzt angenommene Verteilung von Y durch eine Normalverteilung mit $\mu = 110$ und $\sigma = \sqrt{200 \cdot 0,55 \cdot 0,45} \approx 7,036$. Dem Tafelwerk entnimmt man: $P(Y \leq \mu + 1,64 \cdot \sigma) \approx 95 \% \text{ Also}$ $P(Y \leq 121,5) \approx 95 \% \text{ bzw. } P(Y > 121,5) \approx 5 \%.$ Also muss $N = 122$ gewählt werden, d.h. H_0 wird abgelehnt, wenn sich mindestens 123 Personen für die Partei G entscheiden.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<u>Fehler 2. Art:</u> Die Partei G führt unnötig einen aufwendigen Wahlkampf, begeht also einen Fehler 2. Art, wenn unter der Annahme, dass $p = 0,6$ das Ergebnis der Umfrage nicht im Ablehnungsbereich von H_0 liegt, wenn also $Y \leq 122$. Zu berechnen ist deshalb $P(Y \leq 122)$. Mit $\mu = 120$, $\sigma = \sqrt{48} > 3$ und der Integralen Näherungsformel folgt: $P(Y \leq 122) \approx \Phi\left(\frac{122 - 120 + 0,5}{\sqrt{48}}\right) \approx \Phi(0,3608) \approx 64,1 \%$ <u>Interpretation:</u> Dass dieser Fehler 2. Art so groß ist, verwundert nicht, da p nur geringfügig größer als 55 % ist. Der Annahmebereich von H_0, also das Intervall $[0 ; 122]$, endet erst mehr als eine Viertel Streuung rechts vom Erwartungswert 120 für $p = 0,6$. Wächst p, so „wandert“ der Erwartungswert nach rechts aus diesem Intervall heraus, der Fehler 2. Art wird kleiner. Auf die Situation der Partei G bezogen bedeutet dies sehr nachvollziehbar: Je mehr Wähler sie unter allen Wahlberechtigten hat, desto unwahrscheinlicher wird ein Umfrageergebnis, dass sie unnötig in einen aufwändigen Wahlkampf zwingt.	10	25	10
d)	Wie dieses Konfidenzintervall bestimmt wird, ob als so genanntes <i>grobes</i>, <i>echtes</i> oder <i>Näherungs-Konfidenzintervall</i>, hängt vom vorangegangenen Unterricht und entscheidend vom verwendeten Lernbuch ab. In der Darstellung muss das Verständnis für die gewählte Vorgehensweise deutlich werden. Die Korrektoren sollten auch tolerant sein gegenüber Formulierungen, die den Unterschied zwischen den Begriffen „Sicherheit“ und „Wahrscheinlichkeit“ verwischen. Wir geben hier die drei genannten Varianten an. Zunächst bestimmen wir ein zur zufällig gefundenen empirischen relativen Häufigkeit $R = 0,054$ symmetrisches Intervall, das den gesuchte Wert p nur mit ungefähr 90 % Wahrscheinlichkeit einschließt, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Intervall rechts von p liegt, ungefähr 5 %. Nur in diesem letzten Fall, würde das Institut die gestellte Frage fälschlich bejahen. Es muss dann gelten: $0,054 - p = 1,64 \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}}$ <u>Grobes Konfidenzintervall:</u> Man schätzt $\sqrt{p \cdot (1-p)}$ nach oben durch $\frac{1}{2}$ ab und setzt $n = 1100$. Dann gilt: $P(R - p \leq 0,025) \geq 90 \%$. Bei dieser Abschätzung kann die Partei also mit mindestens 95 % Wahrscheinlichkeit nur damit rechnen, mindestens 2,9 % der wahlberechtigten Stimmen zu bekommen. Die gestellte Frage ist so zu verneinen.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<u>Näherungs-Konfidenzintervall:</u> Man schätzt $\sqrt{p \cdot (1 - p)}$ durch $\sqrt{0,054 \cdot (1 - 0,054)} \approx 0,227$ ab und setzt $n = 1100$. Dann gilt $P(R - p \leq 0,011) \approx 90\%$ Dann kann bei dieser Abschätzung die Partei also mit mindestens 95 % Wahrscheinlichkeit damit rechnen, mindestens 4,3 % der wahlberechtigten Stimmen zu bekommen. Die gestellte Frage ist zu bejahen. <u>Echtes Konfidenzintervall:</u> Man löst die quadratische Gleichung: $p - 0,054 = 1,64 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{1100}}$ nach p auf und erhält als Lösungen zwei extreme Möglichkeiten für p also das Intervall $[0,044, 0,066]$ Nach dieser Rechnung kann die Partei mit ungefähr 95 % Wahrscheinlichkeit damit rechnen, mindestens 4,4 % der wahlberechtigten Stimmen zu bekommen. Die gestellte Frage ist zu bejahen.			
	Insgesamt 100 BWE	20	10	15

Aufgabe 12 Qualitätskontrolle

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Der Sachverhalt wird wie folgt modelliert: Den beiden Ereignissen A: „Die kritische Kiste stammt von Maschine A“ B: „Die kritische Kiste stammt von Maschine B“ geben wir wegen der unterschiedlichen Produktionskapazitäten die a-priori-Wahrscheinlichkeiten $P(A) = \frac{4}{5}$ und $P(B) = \frac{1}{5}$. Die erwarteten zusätzlichen Kosten betragen also bei Strategie (1): $E(K) = \frac{1}{5} \cdot 9000 \text{ €} = 1800 \text{ €}$ und bei Strategie (2): $E(K) = \frac{4}{5} \cdot 1000 \text{ €} = 800 \text{ €}$. Strategie (2) ist also vorzuziehen.	20		
b)	X sei die Anzahl der defekten Artikel bei der Stichprobe. Wir nehmen an, dass $X \sim B(20, p)$-binomialverteilt ist. $P(A X = 5) = \frac{P(A) \cdot B(20, \frac{1}{4}, 5)}{P(A) \cdot B(20, \frac{1}{4}, 5) + P(B) \cdot B(20, \frac{1}{2}, 5)}$ $\approx 98,2 \%$ Verkauft man die Kiste mit der Aufschrift „von Anlage A“, betragen die erwarteten Zusatzkosten also $(1 - 0,982...) \cdot 9000 \text{ €} \approx 162 \text{ €}$. Im anderen Fall erhält man $0,982... \cdot 1000 \text{ €} \approx 982 \text{ €}$, also sollte man die Kiste mit der Aufschrift „von Anlage A“ verkaufen.		20	
c)	In diesem Falle wären die Erwartungswerte $\frac{1}{10} \cdot 9000 = 900$ und $\frac{9}{10} \cdot 1000 = 900$ zu vergleichen. Der Statistiker könnte zumindest nach dem Verfahren von b) nicht entscheiden, wie die Kiste zu kennzeichnen wäre.		10	
d)	Die Entscheidungssituation „kippt“ also, wenn $P(B X=k) = \frac{1}{10}$. Darum lösen wir $P(B X = k) = \frac{P(B) \cdot B(20, \frac{1}{2}, k)}{P(A) \cdot B(20, \frac{1}{4}, k) + P(B) \cdot B(20, \frac{1}{2}, k)} = \frac{1}{10}$ nach k auf. Wir erhalten die Gleichung: $\frac{\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{(20-k)} + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20}} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{(20-k)} + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20}} = 10$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$\Rightarrow \frac{\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{(20-k)}}{\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20}} = 9 \text{ also } \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{(20-k)} = \frac{9}{4 \cdot 2^{20}} \cdot \text{Weiteres Sortieren:}$ $\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}\right)^k = \frac{9 \cdot 4^{20}}{4 \cdot 6^{20}} \text{ zusammengefasst } \left(\frac{1}{3}\right)^k = 2,25 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{20}$ mit der Lösung $k = 6,64\dots$ Also wird der Statistiker falls $X \leq 6$ für die Aufschrift „von Anlage A“, ansonsten für „von Anlage B“ plädieren.		15	10
e)	Das Ereignis B wird als Nullhypothese über den unbekannten Parameter p einer Bernoulli-Urne gewählt: $H_0 : p_0 = 0,5$, und es wird die Alternativhypothese $H_1 : p < 0,5$ bei 20 Ziehungen getestet. Dies ergibt folgenden Ablehnungsbereich: $X \leq 4$ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art von $\alpha = 0,6 \%$.		15	
f)	Das Verfahren aus e) berücksichtigt das Vorwissen über die unterschiedlichen Produktionskapazitäten nicht, das eher für eine Kiste erster Wahl spricht. Es ist „vorsichtiger“ im Hinblick auf den gravierenden Schaden von 9000 €. Der vorgegebene Wert $\alpha \leq 1 \%$ ist sehr willkürlich. Diese Willkür ist aber Teil der Testlogik bei Signifikanztests.			10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 13 Amoral

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Es werden nur zwei Ergebnisse unterschieden; geht man davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Nebenwirkungen auftreten, im Prinzip bei jedem Patienten $p = 0,06$ beträgt, so muss noch darauf geachtet werden, dass die Unabhängigkeit der Ereignisse gewährleistet ist. Jammert jemand z.B. den anderen vor, wie schlecht es ihm geht, horchen u.U. diese sehr aufmerksam in sich hinein, bis auch sie sich unwohl fühlen. Umgekehrt kann eine Frohnatur die anderen von ihren Beschwerden ablenken. Doch auch Wechselwirkungen mit anderen Medikamenten und „gemeinsame“ Gebrechen können stochastische Abhängigkeiten verursachen. Es wird eine „ergebnisoffene“ zusammenhängende Darstellung erwartet.		15	
b)	$P(X \leq 1) = 0,94^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0,06 \cdot 0,94^{49} \approx 0,190$. Die Wahrscheinlichkeit, dass von 50 Patienten höchstens bei einem Nebenwirkungen auftreten, beträgt etwa 19 %.	10		
c)	Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n, für die gilt: $0,94^n < 0,01$. Aufgelöst nach n ergibt sich $n > \frac{\lg 0,01}{\lg 0,94}$, also $n = 75$. Ab einer Gruppengröße von 75 Patienten sinkt die Wahrscheinlichkeit unter 1 %, dass wirklich keiner unter Nebenwirkungen leidet.	15		
d)	Aus $n = 200$ und $p = 0,06$ folgt: $\sigma = \sqrt{200 \cdot 0,06 \cdot 0,94} = \sqrt{11,28} > 3$. Also kann die Binomial- durch die Normalverteilung approximiert und die integrale Näherungsformel angewendet werden. Mit Hilfe der Tafel für die Gaußsche Integralfunktion erhält man $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9)$ $\approx 1 - \Phi\left(\frac{9,5 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{9,5 - 12}{\sqrt{11,28}}\right) \approx 1 - \Phi(-0,744) = \Phi(0,744) \approx 0,77$ Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von 200 Patienten bei mindestens 10 Nebenwirkungen auftreten, ist größer als 77 %.		25	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Diese Aufgabenstellung ist sehr offen gestellt, daher sind unterschiedliche Antworten denkbar und sinnvoll: Zu überlegen ist zunächst, welchen Stellenwert die Kostenersparnis haben soll. Steht diese im Vordergrund und wird die bessere Verträglichkeit nicht so wichtig genommen, könnte man das neue Medikament empfehlen, sofern das Stichprobenergebnis nicht nach oben signifikant von $p = 0,06$ abweicht. Hier müsste auch über das Signifikanzniveau nachgedacht werden. Wir wählen hier einen „üblichen“ Wert von 5 %: Man wird sich dann bei der genannten Interessenlage nur dagegen absichern, dass das neue Medikament nicht schlechter als das alte ist und würde $H_1: p > 6 \%$ gegen $H_0: p \leq 6 \%$ testen und käme zu dem Ergebnis, das neue Medikament abzulehnen, wenn mehr als 39 Patienten mit Nebenwirkungen auftreten. Möchte man in erster Linie sicher sein, dass das neue Medikament wirklich besser verträglich ist, so wird man anders vorgehen und die Frage, ob das neue Medikament die Nebenwirkungsquote tatsächlich gesenkt hat, durch einen einseitigen Hypothesentest untersuchen: $H_1: p < 6 \% \text{ gegen } H_0: p \geq 6 \% .$ Das führt bei 5 % Signifikanzniveau auf einen Ablehnungsbereich: $X \leq 21$. Erst bei weniger als 22 Patienten mit Nebenwirkungen würde man dann das neue Medikament empfehlen. Man könnte auch noch strenger sein und H_1 ersetzen durch $H_1: p < 4 \%$. Das würde dazu führen, dass man das Medikament erst empfiehlt bei weniger als 13 Patienten mit Nebenwirkungen. Mit dieser strengen Entscheidungsregel für das neue Medikament kann man ziemlich sicher sein, dass das neue Medikament nur eingeführt wird, wenn es wirklich deutlich besser ist. Ein methodisch ganz anderes Vorgehen verwendet die Möglichkeit der Approximation der Verteilung von X durch die passende Normalverteilung und zieht das um den Erwartungswert symmetrische 95 % Intervall heran: $\mu = n \cdot p = 30, \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{28,2}, \mu + 1,96\sigma \approx 40,4 .$ Bei bis zu 40 Fällen von Nebenwirkungen wird danach das neue Medikament empfohlen. Wenn die behauptete Senkung der Nebenwirkungen auf 4 % ausschlaggebend sein soll, so wird man $p = 0,04$ zugrunde legen: $\mu = n \cdot p = 20, \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{19,2}, \mu + 1,96\sigma \approx 28,6 .$ Nur bis zu 28 Fällen von Nebenwirkungen wird dann das neue Medikament empfohlen. Zu bedenken ist auch, dass mit dieser Entscheidungsregel die Wahrscheinlichkeit verringert wird, dass das neue Medikament zu Unrecht eingeführt wird. Je nachdem, wie hoch die Kosten für die Behandlung der Nebenwirkungen sind, kann durchaus die zweite Vorgehensweise auf lange Sicht günstiger sein.			
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

6 Tabellen zur Binomialverteilung

Binomialverteilung $n = 35$ bis 40

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

$n \backslash k$	p	0,1	0,2	0,3
35	0	0,0250	0,0004	0,0000
	1	0,0973	0,0035	0,0001
	2	0,1839	0,0151	0,0004
	3	0,2247	0,0415	0,0020
	4	0,1998	0,0830	0,0067
	5	0,1376	0,1286	0,0178
	6	0,0765	0,1607	0,0381

$n \backslash k$	p	0,1	0,2	0,3
38	0	0,0182	0,0002	0,0000
	1	0,0770	0,0020	0,0000
	2	0,1584	0,0091	0,0002
	3	0,2112	0,0274	0,0009
	4	0,2053	0,0599	0,0032
	5	0,1551	0,1018	0,0094
	6	0,0948	0,1400	0,0222

$n \backslash k$	p	0,1	0,2	0,3
36	0	0,0225	0,0003	0,0000
	1	0,0901	0,0029	0,0000
	2	0,1752	0,0128	0,0003
	3	0,2206	0,0362	0,0015
	4	0,2023	0,0747	0,0053
	5	0,1438	0,1195	0,0145
	6	0,0826	0,1543	0,0320

$n \backslash k$	p	0,1	0,2	0,3
39	0	0,0164	0,0002	0,0000
	1	0,0712	0,0016	0,0000
	2	0,1502	0,0077	0,0001
	3	0,2059	0,0237	0,0007
	4	0,2059	0,0534	0,0025
	5	0,1601	0,0934	0,0076
	6	0,1008	0,1323	0,0184

$n \backslash k$	p	0,1	0,2	0,3
37	0	0,0203	0,0003	0,0000
	1	0,0834	0,0024	0,0000
	2	0,1667	0,0108	0,0002
	3	0,2161	0,0315	0,0011
	4	0,2041	0,0670	0,0041
	5	0,1497	0,1105	0,0117
	6	0,0887	0,1474	0,0267

$n \backslash k$	p	0,1	0,2	0,3
40	0	0,0148	0,0001	0,0000
	1	0,0657	0,0013	0,0000
	2	0,1423	0,0065	0,0001
	3	0,2003	0,0205	0,0005
	4	0,2059	0,0475	0,0020
	5	0,1647	0,0854	0,0061
	6	0,1068	0,1246	0,0151

Binomialverteilung für $p = 0,05$: $n = 100$ bis 104 und $k = 0$ bis 5

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
100	0,0059	0,0312	0,0812	0,1396	0,1781	0,1800
101	0,0056	0,0299	0,0787	0,1367	0,1762	0,1799
102	0,0053	0,0287	0,0762	0,1338	0,1742	0,1797
103	0,0051	0,0275	0,0739	0,1309	0,1722	0,1795
104	0,0048	0,0264	0,0715	0,1280	0,1701	0,1791
105	0,0046	0,0253	0,0693	0,1252	0,1680	0,1787

Summierte Binomialverteilung $n = 20$

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

$k \backslash p$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
0	0,1216	0,0115	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,3917	0,0692	0,0076	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,6769	0,2061	0,0355	0,0036	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,8670	0,4114	0,1071	0,0160	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,9568	0,6296	0,2375	0,0510	0,0059	0,0003	0,0000	0,0000
5	0,9887	0,8042	0,4164	0,1256	0,0207	0,0016	0,0000	0,0000
6	0,9976	0,9133	0,6080	0,2500	0,0577	0,0065	0,0003	0,0000
7	0,9996	0,9679	0,7723	0,4159	0,1316	0,0210	0,0013	0,0000
8	0,9999	0,9900	0,8867	0,5956	0,2517	0,0565	0,0051	0,0001
9	1,0000	0,9974	0,9520	0,7553	0,4119	0,1275	0,0171	0,0006
10	1,0000	0,9994	0,9829	0,8725	0,5881	0,2447	0,0480	0,0026
11	1,0000	0,9999	0,9949	0,9435	0,7483	0,4044	0,1133	0,0100
12	1,0000	1,0000	0,9987	0,9790	0,8684	0,5841	0,2277	0,0321
13	1,0000	1,0000	0,9997	0,9935	0,9423	0,7500	0,3920	0,0867
14	1,0000	1,0000	1,0000	0,9984	0,9793	0,8744	0,5836	0,1958
15	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9941	0,9490	0,7625	0,3704
16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9987	0,9840	0,8929	0,5886
17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9964	0,9645	0,7939
18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9924	0,9308
19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9992	0,9885
20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Summierte Binomialverteilung $n = 100$

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

$p \backslash k$	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5
0	0,1326	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,4033	0,0371	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,6767	0,1183	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,8590	0,2578	0,0078	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,9492	0,4360	0,0237	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,9845	0,6160	0,0576	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,9959	0,7660	0,1172	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
7	0,9991	0,8720	0,2061	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
8	0,9998	0,9369	0,3209	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
9	1,0000	0,9718	0,4513	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	1,0000	0,9885	0,5832	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
11	1,0000	0,9957	0,7030	0,0126	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000
12	1,0000	0,9985	0,8018	0,0253	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000
13	1,0000	0,9995	0,8761	0,0469	0,0025	0,0001	0,0000	0,0000
14	1,0000	0,9999	0,9274	0,0804	0,0054	0,0002	0,0000	0,0000
15	1,0000	1,0000	0,9601	0,1285	0,0111	0,0004	0,0000	0,0000
16	1,0000	1,0000	0,9794	0,1923	0,0211	0,0010	0,0000	0,0000
17	1,0000	1,0000	0,9900	0,2712	0,0376	0,0022	0,0000	0,0000
18	1,0000	1,0000	0,9954	0,3621	0,0630	0,0045	0,0000	0,0000
19	1,0000	1,0000	0,9980	0,4602	0,0995	0,0089	0,0000	0,0000
20	1,0000	1,0000	0,9992	0,5595	0,1488	0,0165	0,0000	0,0000
21	1,0000	1,0000	0,9997	0,6540	0,2114	0,0288	0,0000	0,0000
22	1,0000	1,0000	0,9999	0,7389	0,2864	0,0479	0,0001	0,0000
23	1,0000	1,0000	1,0000	0,8109	0,3711	0,0755	0,0003	0,0000
24	1,0000	1,0000	1,0000	0,8686	0,4617	0,1136	0,0006	0,0000
25	1,0000	1,0000	1,0000	0,9125	0,5535	0,1631	0,0012	0,0000
26	1,0000	1,0000	1,0000	0,9442	0,6417	0,2244	0,0024	0,0000
27	1,0000	1,0000	1,0000	0,9658	0,7224	0,2964	0,0046	0,0000
28	1,0000	1,0000	1,0000	0,9800	0,7925	0,3768	0,0084	0,0000
29	1,0000	1,0000	1,0000	0,9888	0,8505	0,4623	0,0148	0,0000
30	1,0000	1,0000	1,0000	0,9939	0,8962	0,5491	0,0248	0,0000
31	1,0000	1,0000	1,0000	0,9969	0,9307	0,6331	0,0398	0,0001
32	1,0000	1,0000	1,0000	0,9984	0,9554	0,7107	0,0615	0,0002
33	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9724	0,7793	0,0913	0,0004
34	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9836	0,8371	0,1303	0,0009
35	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9906	0,8839	0,1795	0,0018
36	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9948	0,9201	0,2386	0,0033
37	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9973	0,9470	0,3068	0,0060
38	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9986	0,9660	0,3822	0,0105
39	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9790	0,4621	0,0176
40	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9875	0,5433	0,0284