

DEUTSCHES ELEKTRONEN-SYNCHROTRON



DESY 97-092
May 1997



Energie-Energie Korrelation
in Ordnung α_s^2

T. Ziegenhagen

II. Institut für Theoretische Physik, Universität Hamburg

ISSN 0418-9833

NOTKESTRASSE 85 - 22607 HAMBURG

DESY behält sich alle Rechte für den Fall der Schutzrechtserteilung und für die wirtschaftliche Verwertung der in diesem Bericht enthaltenen Informationen vor.

DESY reserves all rights for commercial use of information included in this report, especially in case of filing application for or grant of patents.

To be sure that your preprints are promptly included in the
HIGH ENERGY PHYSICS INDEX,
send them to (if possible by air mail):

**DESY
Bibliothek
Notkestraße 85
22607 Hamburg
Germany**

**DESY-Zeuthen
Bibliothek
Platanenallee 6
15738 Zeuthen
Germany**

Energie-Energie Korrelation in Ordnung α_s^2

THOMAS ZIEGENHAGEN
*II. Institut für Theoretische Physik
Universität Hamburg
D-22761 Hamburg, Germany
Germany*

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Rechentechnische Vorbereitungen	7
2.1	3-Teilchenphasenraum	8
2.2	4 Teilchenphasenraum	9
2.3	3 Jet-Näherung	12
2.3.1	Differenz zur ungenäherten EEC	14
2.3.2	Anwendung auf einen Beispielterm	16
2.4	Numerik	17
2.4.1	Prinzip der Abspaltungen	18
2.4.2	Substitutionen	19
2.4.3	Numerischer Fit	20
3	Explizite Berechnungen	22
3.1	Colorfaktor C_F^2	23
3.1.1	Singuläre Beiträge	23
3.1.2	nicht-singuläre Beiträge	29
3.2	Colorfaktor $C_F N_c$	32
3.2.1	Singuläre y_{13} -Beiträge	32
3.2.2	Nicht-singuläre y_{13} -Beiträge	34
3.2.3	y_{34} -Beiträge	38
3.3	4 Quark Endzustände	40
4	Zusammenfassung und Diskussion	41
A	4 Teilchen Beiträge	47
A.1	C_F^2 Beiträge, Klassen (A) und (B)	47
A.2	$C_F N_c$ -Formeln, Klassen (B) und (C)	49
A.3	4-Quark Beiträge, Klassen (D) und (E)	50
B	Integrale	52

Zusammenfassung

Die Energie-Energie Korrelation (EEC) ist ein prinzipiell einfacher Test der Theorie der starken Wechselwirkung, Quantenchromodynamik (QCD). Nur die Energie von Teilchen, die unter einem bestimmten Winkel detektiert werden, ist für die EEC relevant. In der vorliegenden Arbeit wird die EEC bis zur Ordnung α_s^2 berechnet.

Die EEC ermöglicht eine Bestimmung der starken Kopplungskonstante α_s . Bei der störungstheoretischen Berechnung treten allerdings weiche und kollineare Singularitäten auf. Daher divergiert die EEC in jeder Ordnung Störungstheorie für bestimmte Winkel. Diese Divergenzen können aber durch die Aufsummation aller Ordnungen in α_s in ein endliches Resultat überführt werden. Die Aufsummation aller Ordnungen ist nur durch Näherungen möglich, die unter dem Begriff Leading-Log Approximation (LLA) zusammengefaßt ist. Eine Entwicklung nach α_s des Ergebnisses der LLA sollte mit dem entsprechenden Ergebnis der perturbativen QCD übereinstimmen. In erster Ordnung ist dies der Fall, während in zweiter Ordnung bislang nur numerische und zu unpräzise Ergebnisse vorliegen. Im Rahmen der Berechnungen dieser Arbeit wurde festgestellt, daß schon in führender Ordnung der Divergenzen eine Diskrepanz zwischen LLA und perturbativen QCD bestehen bleibt.

Abstract

The Energy-Energy Correlation (EEC) is in principle a simple test of the theory of strong interaction, quantumchromodynamics (QCD). Only the energy of particles detected at a certain angle is relevant for the EEC. This study examines the calculation of the EEC in second order in α_s .

The measurement of the EEC enables a determination of the strong coupling constant α_s . In the perturbative calculation there are soft and collinear singularities, therefore the EEC is divergent in each order of the perturbation series. But these divergencies can be summed up over all orders in α_s , leading to a finite result. This summation over all orders is only possible with the use of approximations. These are summed up under the concept of Leading Log Approximation (LLA). A perturbative expansion in α_s of the result in the framework of the LLA should reproduce the corresponding results of perturbative QCD. In first order this is the case, while in second order only numerical and too unprecise results existed so far. Within the calculations of this study it was ascertained that a discrepancy between the results of the LLA and the results of perturbative QCD remains.

1 Einleitung

Die fundamentale Größe in der Quantenchromodynamik QCD ist die starke Kopplungskonstante α_s . Daher sind Möglichkeiten zur Bestimmung dieses Parameters von höchstem Interesse. Die Messung der sogenannten Energie-Energie-Correlation EEC ist ein Weg α_s zu bestimmen und bietet sich damit als Test der störungstheoretischen QCD an.

Die experimentelle Messung erfolgt über die Detektion der Energie zweier Teilchen, die unter dem relativen Winkel χ nachgewiesen werden und ist definiert durch

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\Sigma}{d \cos \chi} = \frac{1}{N} \frac{2}{\Delta \chi \sin \chi} \sum_{A=1}^N \sum_{a,b} \left(\frac{E_{Aa}}{E} \right) \left(\frac{E_{Ab}}{E} \right). \quad (1.1)$$

Der Index A spezifiziert das jeweilige Ereignis, während a und b die jeweiligen in diesem Ereignis produzierten Teilchen benennen. Somit sind E_{Aa} und E_{Ab} die Energien der detektierten Teilchen, während E die Schwerpunktsenergie ist. N ist die Zahl der Ereignisse. σ ist der totale Wirkungsquerschnitt $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$. Die Summe läuft über alle Teilchenpaare, die einen Winkel χ_{ab} bei der Detektion bilden, d.h. $\cos \chi - \Delta \cos \chi/2 < \cos \chi_{ab} < \cos \chi + \Delta \cos \chi/2$. Hierbei ist $\Delta \chi \sin \chi$ die Größe des Raumwinkелеlements in dem Ereignisse um den Winkel χ streuen dürfen. Da nur die Energie der Teilchen relevant ist, ist es nicht notwendig festzustellen welcher Art das Teilchen ist. Dies führt zu in einer hohen statistischen Signifikanz der experimentellen Messungen.

Die vereinfachte Version der EEC besteht darin, nur den relativen Winkel χ_{ab} zwischen den beiden detektierten Teilchen zu berücksichtigen. Zusammen mit dem Wechselwirkungspunkt, spannen dann die beiden jeweils detektierten Teilchen eine Ebene auf. Die Orientierung dieser Ebene und der Teilchen innerhalb dieser Ebene ist beliebig. Dies führt zu 2+1 Winkelmittelungen bei der Ausführung der Phasenraumintegrationen. Aus dieser Freiheit ergibt sich die Möglichkeit die winkelgemittelte EEC zu betrachten, d.h. alle Ereignisse nur nach dem relativen Winkel zwischen den detektierten Teilchen zu klassifizieren.

Die Größe α_s kann natürlich auch durch die Messung einer Reihe anderer Variablen aus experimentellen Daten bestimmt werden. Solche Variablen basieren im allgemeinen auf der Auswertung von Jetwirkungsquerschnitten. Hierzu muß ein Algorithmus festgelegt werden, der sowohl die experimentell erzeugten Hadronen als Jets zusammenfaßt als auch in der Theorie eine Definition von aus Quarks und Gluonen bestehenden Jets erlaubt. Bei der Analyse von Energie-Energie-Korrelationen ist dies nicht notwendig, da auf experimenteller Ebene zwei beliebige Hadronen detektiert werden, die zu irgendwelchen Jets gehören können. Aufgrund der Parton-Hadron Dualität geht man davon aus, daß diese experimentell gemessene Korrelation mit der theoretischen Berechnung der Korrelation von zwei Quarks, Antiquarks oder Gluonen gleichgesetzt werden kann. Durch die Energiewichtung in der EEC tragen Teilchen mit hoher Energie stärker bei als Teilchen mit niedriger Energie. Teilchen mit hoher Energie werden aber hauptsächlich von Partonen gleicher Energie fragmentiert. Dies macht die beschriebene Gleichsetzung

der experimentellen Messung von Hadronen mit der theoretischen Berechnung der Korrelation von Quarks, Antiquarks und Gluonen um so plausibler. QCD-artige Modelle, die die Fragmentation von Quarks und Gluonen berücksichtigen, erlauben eine weiteren Test dieser Annahme und in der Regel sind die Hadronisierungseffekte bei LEP-Energien sehr klein. Sie machen ungefähr einen Fehler von 2 Prozent bei der Messung von α_s aus. Die EEC wurde experimentell von Kollaborationen bei PETRA, PEP, TRISTAN, SLC und LEP untersucht. In der ausführlichen Publikation der SLD-Kollaboration am SLC [1] findet man eine Darstellung der hierbei auftretenden Probleme. Man findet dort auch Zitate für Ergebnisse die bei PETRA, PEP, TRISTAN und LEP gewonnen wurden. Die experimentellen Daten, besonders die von LEP [2], sind inzwischen so präzise, daß der Bestimmung von α_s hauptsächlich durch die Genauigkeit der theoretischen Vorhersagen Grenzen gesetzt sind.

In dieser Arbeit werden die perturbativen Beiträge der Unterklasse von Ereignissen berechnet, die Quarks und Gluonen im Endzustand und Elektronen und Positronen im Anfangszustand haben. Weiterhin werden alle auftretenden Teilchen als masselos angenommen. Für einen direkten Vergleich mit experimentellen Daten müssen natürlich noch Hadronisierungseffekte eingeschlossen werden. Die EEC kann durch eine Störungsreihe der Form

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{d\Sigma}{d \cos \chi} = \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{2\pi} \right) A(\omega) + \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{2\pi} \right)^2 \left(2\pi b_0 \log \left(\frac{\mu^2}{s} \right) A(\omega) + B(\omega) \right) + O(\alpha_s^3) \quad (1.2)$$

mit $b_0 = (11N_c - 2n_f)/12/\pi$ und $\omega = \cot^2(\chi/2)$ beschrieben werden. Hierbei ist

$$\alpha_0 = \frac{4\pi\alpha^2}{311^2} \sum_f 3Q_f^2. \quad (1.3)$$

Der Beitrag niedrigster Ordnung $A(\omega)$ wird durch die Berechnung des Prozesses $\gamma \rightarrow q\bar{q}\gamma$ gewonnen und ist analytisch bekannt [3]

$$A(\omega) = \frac{C_F}{\sin^2 \chi} (1 + \omega)(2 + 6\omega) \left\{ (2 - 6\omega^2) \log \left(1 + \frac{1}{\omega} \right) + 6\omega - 3 \right\}. \quad (1.4)$$

wenn man $\omega \neq 0, \infty$ beachtet. In diesem Winkelbereich sind nur Baumgraphenbeiträge relevant. Der nächstführende Term $B(\omega)$ resultiert aus den Prozessen $\gamma^* Z \rightarrow q\bar{q}\gamma$ auf Ein-Schleifenebene und $\gamma^* Z \rightarrow q\bar{q}q\bar{q}q\bar{q}q\bar{q}$ auf Baumgraphen-Niveau. Die Ein-Schleifenbeiträge findet man in der Arbeit von Ellis, Ross, Terrano [4] und Fabricius et al. [5], die in der Arbeit von Falck und Kramer [6] bereits für die Berechnung der EEC verwendet wurden. Die Terme, die aus Baumgraphenbeiträgen mit vier Teilchen im Endzustand resultieren, wurden zuerst von Ali et al. [7] berechnet. Man findet diese Terme ebenfalls in der Arbeit von Ellis, Ross, Terrano [4] und in der Arbeit von Kramer und Lampe [8]. Die vorliegende Arbeit fokussiert auf die Berechnung der EEC für 4 Teilchen-Endzustände, daher werden die relevanten Beiträge im Anhang kurz zusammengestellt und dabei in einer Weise aufgeschrieben, die für die weiteren Berechnungen günstig ist. Die Größe $B(\omega)$ wurde von verschiedenen Gruppen berechnet. Dies sind

Richards, Stirling, Ellis [9], Ali, Barreiro [10], Falck, Kramer [6], Kunszt, Nason [11], Glover, Sutton [12], Clay, Ellis [1.] und Kramer, Spiesberger [14]. Die SLD-Kollaboration [1] hatte die Arbeiten von [6],[9],[10] und [11] herangezogen, um α_s aus ihren Messungen zu bestimmen. Die theoretischen Vorhersagen für $B(\omega)$ variieren aber um bis zu 50 Prozent. Diese unzufriedenstellende Situation hat zu einem erneuten, verstärkten Interesse an der Berechnung der EEC geführt. Die Resultate von Glover, Sutton [12] und Kramer, Spiesberger [14] bestätigen die älteren Arbeiten von Kunszt, Nason [11], während Clay, Ellis [13] die älteren Resultate von Falck, Kramer zu bestätigen scheinen. Die Diskrepanzen bleiben also bestehen. Schon der führende Anteil $A(\omega)$ divergiert für $\omega \rightarrow 0$. Dies gilt ebenso für den nachfolgenden Beitrag $B(\omega)$, jedoch kann durch die sogenannte Leading-Log-Approximation eine Berechnung durchgeführt werden, die die jeweils führenden Anteile jeder Ordnung in α_s berücksichtigt. Dies erlaubt dann eine Aufsummation all dieser Anteile und liefert ein endliches Resultat. Eine Entwicklung nach der Größe α_s sollte dann die in der perturbativen Berechnung auftretenden Divergenzen reproduzieren. Aus einigen Arbeiten [9],[13],[15] lassen sich nun die numerischen Werte dieser Koeffizienten extrahieren. Hierbei zeigt sich jedoch, daß nicht unbedingt eine Übereinstimmung mit den Leading-Log-Resultaten erzielt wird. Die vorliegende Arbeit soll nun einen Beitrag zur Klärung des Problems liefern, indem die Koeffizienten der führenden Divergenzen analytisch berechnet werden.

Die EEC ist offenbar eine Funktion des relativen Winkel χ , jedoch läßt sich schon mit der in Gleichung (1.4) angegebenen Formel erkennen, daß die EEC in $O(\alpha_s)$ im Grenzfall $\omega \rightarrow 0$, d.h. für $\chi \rightarrow \pi$ groß wird, wo die Teilchen in fast entgegengesetzter Richtung emittiert werden. Allgemein gilt für eine rein störungstheoretische Behandlung im Grenzfall $\omega \rightarrow 0$

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\Sigma^{(n+2)}}{d \cos \chi} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \alpha_s^n \frac{1}{\omega} \left(\ln \frac{1}{\omega} \right)^{2n-1}, \quad (1.5)$$

wobei $\Sigma^{(n+2)}$ der Beitrag n -ter Ordnung zu EEC ist, d.h. mit n Gluonen im Endzustand. Diese Divergenzen für $\omega \rightarrow 0$ entstehen durch Bremsstrahlungsdiagramme. Bei einem Zustand mit 2 Quarks und n Gluonen im Endzustand können $n-1$ dieser Gluonen sowohl kollinear als auch soft werden. Für den Bereich von Detektionswinkeln $\chi \simeq \pi$ haben die gemessenen Querschnitte der EEC die größte statistische Genauigkeit. Aus diesem Grund ist man bestrebt diesen Winkelbereich für die Bestimmung von α_s , bzw. für den Test der QCD einzuschließen. Die dominanten Beiträge für $\omega \rightarrow 0$ zur EEC verhalten sich allerdings wie in (1.5) beschrieben. Die ab einer Schranke $\omega_0 \ll 1$ integrierte EEC im Bereich kleiner ω in Ordnung α_s^n ist damit durch

$$\int_{\omega_0}^1 d \cos \chi \frac{1}{\sigma} \frac{d\Sigma}{d \cos \chi} \sim \alpha_s^n \ln^{2n} \left(\frac{1}{\omega_0} \right) \quad (1.6)$$

für $\omega_0 \rightarrow 0$ gegeben. In diesem Fall liegt also eine Störungsreihe in $\alpha_s \ln^2(1/\omega_0)$ vor. Für hinreichend kleine ω_0 kann die Größe $\alpha_s \ln^2(1/\omega_0)$ von $O(1)$ sein. Daher ist eine sinnvolle Berechnung der EEC nur möglich, wenn alle Terme dieser Reihe aufsummiert werden. Es treten also mit zunehmender Ordnung immer stärker Divergenzen auf. Die Ursache für das Auftreten solcher Divergenzen liegt darin begründet, daß hier die perturbative

Entwicklung und der Limes $\chi \rightarrow \pi$ nicht kommutieren. Eine Aufsummation dieser Terme über alle Ordnungen sollte dann wieder ein auch für $\chi \rightarrow \pi$ endliches Resultat ergeben. In diesem Bereich des Phasenraums sind die abgestrahlten Gluonen sowohl weich als auch stark geordnet, d.h.

$$k_{T_1} \ll k_{T_2} \ll \dots \ll k_{T_N} \simeq Q_T. \quad (1.7)$$

wobei die Impulse der Gluonen definiert sind als

$$k_i^p := \mu_i p_1^p + \theta_i p_2^p + \vec{k}_{T_i} \quad \mu_i, \theta_i \ll 1. \quad (1.8)$$

Hierbei sind p_1^p und p_2^p die Impulse des Quarks und des Antiquarks. In dieser Region des Phasenraums ist die Emission der Gluonen nicht durch Impulserhaltung korreliert, da ein Gluon den gesamten Transversalimpuls Q_T tragen kann. Ebenso gibt es keine Korrelation durch die Energiewichtung, da alle Gluonen soft sind. Da auch durch das Matrixelement selbst keine Korrelation vorliegt, faktorisiert die Berechnung solcher Terme. Die Technik zur Berechnung solcher Terme unterscheidet sich naturgemäß stark von der üblichen störungstheoretischen Vorgehensweise und wird unter dem Begriff Leading-Log-Approximation (LLA) zusammengefasst. Ein allgemeiner Überblick der in dieser Näherung verwendeten Vorgehensweise findet sich zum Beispiel in Refs.[16]. Die LLA erfordert starke Näherungen des Phasenraums und der Matrixelemente, die in jedem Fall nur für $\chi - \pi \ll 1$ angebracht sind. In der einfachsten Version liefert dies [17]

$$\left. \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\Sigma}{d \cos \chi} \right|_{LLA} = \frac{\alpha_s C_F \ln\left(\frac{1}{\eta}\right)}{4\pi \eta} \exp\left(-\frac{\alpha_s C_F}{2\pi} \ln^2(\eta)\right) \quad \eta = \frac{\omega}{1+\omega}. \quad (1.9)$$

Für kleine Winkel gilt $\eta \sim \omega$. Man sieht in Gleichung (1.9), daß in jeder Ordnung α_s^n divergente Terme auftauchen, daß aber die *Summe* all dieser Terme endlich ist.

Es existieren also zwei Arten von Vorhersagen, die eine beruht auf perturbativer QCD und ist gültig, wenn χ weit genug von π entfernt ist, während die der LLA Vorhersagen nur in der Region $\pi - \chi \ll 1$ Gültigkeit haben. Natürlich ist nicht klar, bis zu welchem Punkt die störungstheoretische Vorgehensweise angebracht ist, d.h. bis wohin Terme wie in Gleichung (1.5) proportional zu $(\ln 1/\omega)^{2n-1}/\omega$ noch nicht sehr groß sind. Andererseits ist auch nicht klar bis zu welchem Punkt die LLA-Vorhersagen ihre Gültigkeit behalten. Eine nachträgliche Reihenentwicklung in α_s der Leading-Log-Vorhersage sollte die in der störungstheoretischen Behandlung auftretenden Terme der Art wie in (1.5) reproduzieren.

Ein Ansatz zur Verbesserung der theoretischen Vorhersage ist, die in der perturbativen Behandlung auftretenden, divergenten Terme zu exponentieren, d.h. in einen Term zu absorbieren, der in der Form der Leading-Log Vorhersage gleicht und dessen Entwicklung nach α_s diese Terme reproduziert, und für die Vorhersage ein Hybrid aus dem endlichen Rest der perturbativen Behandlung und diesem exponentierten Term herzustellen. Angenommen man kennt alle divergenten Beiträge bis $O(\alpha_s^2)$ und kann diese in eine Funktion $\frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \ln(\omega)\omega^{-1} F_{\text{div}}(\omega)$ absorbieren, dann sollte eine Hybridfunktion

$$\left. \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\Sigma}{d \cos \chi} \right|_{\text{Hyb}} = \left. \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\Sigma}{d \cos \chi} \right|_{\text{pert.}} - \left(\frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \right) \frac{\ln(\omega)}{\omega} (F_{\text{div}} + 1 - \exp(F_{\text{div}})) \quad (1.10)$$

eine verbesserte Beschreibung experimenteller Daten ermöglichen.

Diese Hybridfunktion sollte dann über den gesamten Bereich Gültigkeit haben und somit die Vorteile der störungstheoretischen Behandlung und der Leading-Log-Approximation kombinieren. Dieses Verfahren ist natürlich nur sinnvoll, wenn die höheren Näherungen in F_{div} , soweit sie berechnet werden, mit den Vorhersagen der Leading-Log-Approximation vereinbar sind. In $O(\alpha_s)$ ist dies der Fall, denn hier tritt nur der Term $1/\omega \ln(1/\omega)$ auf, der in (1.9) enthalten ist. Bislang wurde dieses Problem in $O(\alpha_s^2)$ nur auf der Basis numerischer Methoden untersucht [9],[13],[14],[18]. Allerdings sind die Ergebnisse von Ref.[9] von denselben Autoren noch einmal in Ref.[18] verbessert dargestellt worden. Um einen direkten Vergleich mit den in der vorliegenden Arbeit erzielten Ergebnissen zu ermöglichen, werden die Ergebnisse der erwähnten Arbeiten in der Zusammenfassung dieser Arbeit referiert. Diese Arbeiten liefern das Ergebnis, daß im Rahmen der Genauigkeit die dominanten Terme der LLA mit der numerischen Analyse der vollständigen Theorie in $O(\alpha_s^2)$ übereinstimmen, aber nicht definitiv bestätigt werden können. Für nachfolgende Terme, den NLL und NNLL Beiträgen, liegen keine übereinstimmenden Resultate vor. Entwickelt man das Ergebnis der LLA in Gleichung (1.9) nach den auftretenden Divergenzen, entsprechend wie dies schon in Refs.[17],[18] geschehen ist, so gilt

$$\left. \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\Sigma}{d \cos \chi} \right|_{LLA} = \frac{1}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n-1} {}_n C_m \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^n \ln^m \left(\frac{1}{\omega} \right). \quad (1.11)$$

Die Terme mit abnehmendem singulären Verhalten haben alternierende Vorzeichen, wodurch ein Fit an numerische Daten erschwert wird. Die numerische Bestimmung der Koeffizienten ${}_n C_m$ erfordert daher die Berechnung der EEC über einen großen Bereich in ω und mit sehr hoher Genauigkeit. Darüberhinaus wurden in den bereits erwähnten Arbeiten Beiträge, die schwächer als $1/\omega$ divergieren, und nichtsinguläre Terme, die von $O(1)$ sind oder mit $\omega \rightarrow 0$ verschwinden, nicht berücksichtigt. Dies mag vielleicht die unbestimmte Aussage über die $O(\alpha_s^2)$ Beiträge proportional zu $1/\omega \ln^m \omega$ für $m = 2, 1, 0$ erklären. In dieser Arbeit werden die Koeffizienten in der Entwicklung der EEC in Gleichung (1.9) ${}_2 C_3, {}_2 C_2$ und ${}_2 C_1$ analytisch und der Koeffizient ${}_2 C_0$ numerisch bestimmt. Schwächere Divergenzen, die in der perturbativen Berechnung auftreten, werden soweit möglich ebenfalls bestimmt. Sämtliche Berechnungen werden in der sogenannten 3-Jet-Näherung durchgeführt, die in Kapitel 2 beschrieben wird. Wie in anderen Arbeiten ebenfalls üblich, werden die Beiträge der Farbfaktoren $C_F^2, C_F N_c$ und $C_F T_R$ getrennt behandelt. Die erzielten Ergebnisse werden mit den Vorhersagen der LLA verglichen.

In dieser Arbeit werden nun zuerst die theoretischen Grundlagen zur praktischen Berechnung der EEC beschrieben. In Kapitel 2 werden notwendige Vorbereitungen beschrieben, um ausgehend von Gleichung (1.1) eine rechentechnisch handhabbare Darstellung der EEC zu erhalten. Weiterhin wird die 3-Jet-Näherung beschrieben und die Numerik wird behandelt. In Kapitel 3 wird dann die praktische Anwendung dieser Rechentechnik auf die einzelnen Beiträge beschrieben. Im Kapitel 4 werden dann die erzielten Ergebnisse mit denen anderer Arbeiten verglichen.

2 Rechentechnische Vorbereitungen

Jeder Beitrag zur EEC besteht aus drei Anteilen: dem Matrixelement, dem Phasenraum und einer Wichtungsfunktion, die aus dem Phasenraum den relevanten Anteil herauschält. In der definierenden Gleichung (1.1) wird dies durch die Festlegung des Winkels χ erreicht. Im Idealfall geht die Winkelgenauigkeit $\Delta\chi$ gegen Null, das heißt der Winkel χ ist exakt bestimmt. Daher geht der Faktor $1/\Delta\chi$ in eine Delta-Funktion über.

Zur Berechnung der EEC ersetzt man daher Gleichung (1.1) durch

$$\frac{d\Sigma^{(N)}}{d\cos\chi} = \int d\text{PS}^{(N)} M^{(N)} W^{(N)} = \int d\text{PS}^{(N)} M^{(N)} \sum_{i,j} \delta(\hat{p}_i \hat{p}_j - \cos\chi) \frac{2E_i E_j}{q^2}, \quad (2.1)$$

wobei der Index N die Zahl der Teilchen im Endzustand angibt. $\text{PS}^{(N)}$ ist der N -Teilchenphasenraum, $M^{(N)}$ das jeweilige Matrixelement mit N Partonen im Endzustand und $W^{(N)}$ die entsprechende Energiewichtungsfunktion. Um zum selben Ergebnis wie mit Gleichung (1.1) zu kommen, muß man Gleichung (2.1) noch über alle Teilchenzahlen im Endzustand summieren.

In diesem Kapitel werden nun die notwendigen technischen Voraussetzungen für die Berechnung der EEC beschrieben. Zum einen ist dies eine geeignete Wahl für die Darstellung des Phasenraums, zum anderen ist dies die sogenannte 3-Jet-Näherung für die Energiewichtungsfunktion.

Die Emission eines weichen oder kollinearen Gluons entspricht im Phasenraum einer Region, in der ein 4-Jet-Prozess ein 3-Jet-Ereignis simuliert. Dies führt zu Infrarot-Divergenzen, die sich gegen entsprechende Beiträge aus Gluon-Schleifendiagrammen wegheben müssen. Die Regularisierung sowohl dieser Divergenzen als auch der üblichen ultravioletten Divergenzen erfolgt im Rahmen der dimensional Regularisierung. Die Dimension der Raumzeit wird hier kontinuierlich auf $n = 4 - 2\epsilon$ fortgesetzt. Der n -dimensionale Phasenraum lautet für N masselose Teilchen

$$\text{PS}^{(N)}(q; p_1, \dots, p_N) = \prod_{i=1}^N \int \frac{d^n p_i}{(2\pi)^{n-1}} \delta_+(p_i^2) (2\pi)^n \delta^{(n)}\left(q - \sum_{j=1}^N p_j\right). \quad (2.2)$$

Die Matrixelemente $M^{(N)}$ lassen sich durch invariante Viererimpulsprodukte beschreiben. Im folgenden werden

$$y_{ij} := \frac{(p_i + p_j)^2}{q^2} \quad (2.3)$$

als 2-Impulsprodukte bezeichnet. Entsprechend werden 3-Impulsprodukte als

$$y_{ijk} := \frac{(p_i + p_j + p_k)^2}{q^2} \quad (2.4)$$

bezeichnet. Es ist günstig, auch den Phasenraum $\text{PS}^{(N)}$ und die Wichtungsfunktion durch diese Variablen darzustellen. Gleichung (1.1) wird für den Fall von 3 bzw. 4 Teilchen im Endzustand benötigt. Im folgenden sollen daher die Phasenräume $\text{PS}^{(3)}$ und $\text{PS}^{(4)}$ ebenfalls durch diese Variablen ausgedrückt werden.

2.1 3-Teilchenphasenraum

Mit Hilfe der Definition (2.2) wird nun zuerst der 3-Teilchenphasenraum $\text{PS}^{(3)}$ und dann die entsprechende Wichtungsfunktion $W^{(3)}$ durch die Invarianten $y_{ij} = (p_i + p_j)^2/q^2$ dargestellt. Geht man von (2.2) aus, so erreicht man durch Ausnutzen verschiedener δ -Funktionen,

$$\begin{aligned} \text{PS}^{(3)} &= \int \frac{1}{8(2\pi)^{2n-3}} d^3 p_1 p_1^{n-3} d^3 p_2 p_2^{n-3} d^{n-2} \Omega_1 d^{n-2} \Omega_{12} \\ &\times \delta\left(q - p_1 - p_2 - \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos\theta_{12}}\right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

wobei hier gilt $p_1 = |\vec{p}_1| = p_{10}$. Natürlich wäre es auch möglich die Impulsintegration p_3 beizubehalten und dafür entweder die Integration über p_1 oder p_2 durch die Ausnutzung der δ -Funktion auszuführen. Weiterhin ist es angenehm die Winkelabhängigkeit der Impulses \vec{p}_2 relativ zum Impuls \vec{p}_1 festzulegen.

Die verbliebene δ -Funktion kann ausgenutzt werden, wenn man das Argument nach $\cos\vartheta_{12}$ umformt. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\delta\left(q - p_1 - p_2 - \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos\vartheta_{12}}\right) \\ &= \frac{q - p_1 - p_2}{p_1 p_2} \delta\left(\cos\vartheta_{12} - \frac{q^2 + 2p_1 p_2 - 2q(p_1 + p_2)}{2p_1 p_2}\right) \\ &\times \theta(q - 2(p_1 + p_2)) \theta(q - 2p_1) \theta(q - 2p_2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Die Stufenfunktionen tragen der Tatsache Rechnung, daß der Wertebereich eingeschränkt ist durch $|\cos\vartheta_{12}| < 1$. An dem Argument der δ -Funktion läßt sich ablesen, wie die Winkel zwischen den Teilchen durch die Impulse beschrieben werden können. Da die Wahl von p_1 und p_2 als verbleibende Impulsvariablen willkürlich war, können durch Austauschen der entsprechenden Indizes natürlich auch alle anderen Winkel, also $\cos\vartheta_{12}$ und $\cos\vartheta_{23}$, durch die entsprechenden Impulse ausgedrückt werden.

Für das n -dimensionale Winkelement gilt [19]

$$d^{n-2} \Omega_{12} = \sin\vartheta_{12} d\vartheta_{12} d^{n-3} \Omega_{12} \quad (2.7)$$

womit eine Ausnutzung von (2.6) möglich wird. Weiterhin gilt

$$y_{ij} = \frac{(p_i + p_j)^2}{q^2} = \frac{2p_{i0} p_{j0}}{q^2} (1 - \cos\vartheta_{ij}). \quad (2.8)$$

Auch hier läßt sich aus Gleichung (2.6) $\cos\vartheta_{ij}$ ablesen und es folgt nach elementaren Umrechnungen

$$y_{12} = 1 - \frac{2p_3}{q}, \quad y_{13} = 1 - \frac{2p_2}{q}, \quad y_{23} = 1 - \frac{2p_1}{q}. \quad (2.9)$$

Somit kann der Phasenraum durch die Variablen y_j ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \text{PS}^{(3)} &= \int \frac{2^{n-4}}{8(2\pi)^{2n-3}} \left(\frac{q}{2}\right)^{2n-6} dy_{13} dy_{23} d^{n-2}\Omega_1 d\Omega_{12} \\ & \left[(1 - y_{13} - y_{23}) y_{13} y_{23} \right]^{\frac{n-4}{2}} \theta(y_{13}) \theta(y_{23}) \theta(1 - y_{13} - y_{23}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

In dieser Arbeit wurde durchgehend die winkelmittelte Energie Korrelation betrachtet. Dies erlaubt eine Ausführung der Winkelintegrationen, die sich nicht auf den relativen Winkel zwischen \vec{p}_1 und \vec{p}_2 beziehen, wenn man

$$\int d^{n-3}\Omega = 2\pi \frac{\pi^{\frac{n-4}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} - 1)} \quad , \quad \int d^{n-2}\Omega = 4\pi (4\pi)^{\frac{n-4}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} - 1)}{\Gamma(n-2)} \quad (2.11)$$

verwendet. so erhält man schließlich für den 3-Teilchenphasenraum

$$\begin{aligned} \text{PS}^{(3)} &= \int \frac{q^2}{2(4\pi)^3} \frac{1}{\Gamma(n-2)} \left(\frac{q}{4\pi}\right)^{n-4} dy_{13} dy_{23} \left[y_{13} y_{23} (1 - y_{13} - y_{23}) \right]^{\frac{n-4}{2}} \\ & \times \theta(1 - y_{13} - y_{23}) \theta(y_{13}) \theta(y_{23}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (2.6) und (2.9) läßt sich auch die Wichtungsfunktion $W^{(3)}$ auf die Variablen y_j umschreiben. Allerdings ist es für weitere Rechnungen günstiger, anstatt $\cos \chi$ die Variable ω zu verwenden. Es gilt dann

$$W^{(3)} = \sum_{ij} W_{ij}^{(3)} = \sum_{ij} \frac{2E_i E_j}{E^2} \delta(\hat{p}_i \hat{p}_j - \cos \chi) = \frac{1}{4} (1 + \omega)^3 \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}} y_{ij}^2 \delta(\omega y_{ij} - y_{ik} y_{jk}). \quad (2.13)$$

Gleichung (2.13) und die später noch folgende Gleichung (2.26) für den 4-Teilchen Endzustand, wurden schon in Ref.[9] hergeleitet.

2.2 4-Teilchenphasenraum

Entsprechend der Vorgehensweise im Falle von 3 Teilchen, soll nun auch der Fall von 4 Teilchen im Endzustand behandelt werden. Geht man von der Definition (2.2) aus und fügt dann zusätzliche δ -Funktionen ein, die durch entsprechende Integrationen wieder aufgehoben werden

$$1 = \int d^n r \delta^n(r - p_1 - p_3) dy_{13} q^2 \delta(r^2 - q^2 y_{13}) \theta(y_{13}). \quad (2.14)$$

dann läßt sich der 4-Teilchenphasenraum in ein Produkt aus einem 2-Teilchen- und einem 3-Teilchenphasenraum aufspalten. In vielen expliziten Berechnungen tauchen Pole in y_{13} auf. Dies bedeutet eine Dominanz der Beiträge des Phasenraums, in dem Teilchen

1 und 3 sich wie ein Teilchen verhalten. Daher soll die Beschreibung der Parametrisierung des Phasenraums $\text{PS}^{(4)}$ zugeschnitten auf diesen Fall beschrieben werden. In manchen Fällen ist es entsprechend der Polstruktur in den y_{ij} günstiger eine andere Aufspaltung zu wählen, jedoch kann eine dementsprechende Parametrisierung des Phasenraums einfach durch Vertauschung der Indizes erreicht werden. Benutzt man also (2.14), so gilt

$$\begin{aligned} \text{PS}^{(4)} &= \int \left[\frac{1}{8(2\pi)^{2n-3}} \delta^n(q - p_2 - p_4 - r) \frac{d^{n-1} p_2}{p_2} \frac{d^{n-1} p_4}{p_4} \frac{d^{n-1} r}{E_r} \right] \\ & \times \left[\frac{1}{4(2\pi)^{n-2}} \delta^n(r - p_1 - p_3) \frac{d^{n-1} p_1}{p_1} \frac{d^{n-1} p_3}{p_3} \right] dy_{13} \frac{q^2}{2\pi} \theta(y_{13}) \\ & = \text{PS}^{(3)}(q; p_2, p_4, r) \cdot \text{PS}^{(2)}(r; p_1, p_3) dy_{13} \frac{q^2}{2\pi} \theta(y_{13}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Es wird ein "künstliches" Teilchen mit dem Impuls $r = p_1 + p_3$ eingeführt. Der Impuls r übernimmt die Rolle des Impulses p_3 im Falle dreier Teilchen im Endzustand. Es gilt allerdings zu beachten, daß $r^2 = (p_1 + p_3)^2 = q^2 y_{13}$ gilt. Dieses "Teilchen" ist also im allgemeinen nicht masselos.

Der 2-Teilchenphasenraum läßt sich völlig elementar bestimmen zu

$$\text{PS}^{(2)}(r; p_1, p_3) = \frac{1}{8(2\pi)^{n-2}} \left(\frac{q}{2}\right)^{n-4} \frac{1}{y_{13}^2} d^{n-2}\Omega^* \quad (2.16)$$

Auch hier ist also eine Verwendung der Invarianten als Integrationsvariablen möglich. Man muß im Auge behalten, daß $r = p_1 + p_3$ gilt und daher auch die Variablen

$$y_{ijk} = \frac{1}{q^2} (p_i + p_j + p_k)^2 \quad (2.17)$$

benutzen. Der Winkel zwischen den Teilchen läßt sich nun auch durch diese Variablen beschreiben. Da $r^2 = q^2 y_{13}$ und $\vec{r} = -(\vec{p}_2 + \vec{p}_4)$ ist, muß Gleichung (2.6) zu

$$\begin{aligned} & \delta \left(q - p_2 - p_4 + \sqrt{q^2 y_{13} + p_2^2 + p_4^2 + 2p_2 p_4 \cos \vartheta_{24}} \right) \\ & = \frac{q - p_2 - p_4}{p_2 p_4} \delta \left(\cos \vartheta_{24} - \frac{y_{134} y_{123} - y_{13} - y_{24}}{y_{134} y_{123} - y_{13} + y_{24}} \right) \\ & \times \theta(y_{134} y_{123} - y_{13}) \theta(1 - y_{134} - y_{123} + y_{13}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

abgeändert werden, wobei die Stufenfunktionen wieder aus der einschränkenden Tatsache $|\cos \vartheta_{24}| < 1$ folgen.

Für den winkelmittelten Phasenraum können wieder die Integrationen entsprechend denen über $d\Omega_1$ und $d\Omega_{12}$ im Falle dreier Teilchen ausgeführt werden. Das Winkelement $d\Omega^*$ aus dem künstlich erzeugten 2-Teilchenphasenraum, für die Teilchen mit den

Impulsen p_1 und p_3 bleibt jedoch erhalten. Dies bedeutet, im Gegensatz zum 3-Teilchen Fall, daß eine Parametrisierung der Impulse mit Hilfe dieser Winkel nötig ist. In diesem Beispiel wählt man das Bezugssystem so, daß $\vec{p}_1 + \vec{p}_3 = 0$ gilt. Man spricht vom "1-3"-System, wenn die Impulse durch y_{13}, y_{134}, y_{123} und durch zwei Winkel beschrieben werden

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\sqrt{y_{13}}}{2} \sqrt{q^2} (1, \dots, \sin \theta \cos \theta', \cos \theta) \\ p_2 &= \frac{y_{123} - y_{13}}{2\sqrt{y_{13}}} \sqrt{q^2} (1, \dots, 0, 1) \\ p_3 &= \frac{\sqrt{y_{13}}}{2} \sqrt{q^2} (1, \dots, -\sin \theta \cos \theta', -\cos \theta) \\ p_4 &= \frac{y_{134} - y_{13}}{2\sqrt{y_{13}}} \sqrt{q^2} (1, \dots, \sin \beta, \cos \beta) \end{aligned} \quad (2.19)$$

mit

$$\cos \beta = 1 - \frac{2y_{13}y_{24}}{(y_{123} - y_{13})(y_{134} - y_{13})}. \quad (2.20)$$

Dies folgt aus der Viererimpulserhaltung.

Die Wahl $\vec{p}_2 \parallel \vec{e}_z$ in (2.19) ist natürlich willkürlich. Abhängig von der Struktur der zu betrachtenden Matrixelemente, kann es günstig sein $\vec{p}_4 \parallel \vec{e}_z$ zu wählen. In manchen Fällen führt dies zur Vereinfachung von expliziten Rechnungen.

Natürlich sind y_{13}, y_{123} und y_{134} nicht die einzigen Invarianten, die in den Matrixelementen auftauchen. Um die EEC berechnen zu können, braucht man also auch die Parametrisierung der verbleibenden Invarianten. Führt man $v = (1 - \cos \theta)/2$ ein, dann gilt

$$\begin{aligned} y_{12} &= (y_{123} - y_{13})v \\ y_{23} &= (y_{123} - y_{13})(1 - v) \\ y_{14} &= (y_{134} - y_{13}) \left[v(1 - \gamma) + (1 - v)\gamma - 2 \cos \theta' \sqrt{v(1 - v)\gamma(1 - \gamma)} \right] \\ y_{34} &= (y_{134} - y_{13}) \left[(1 - v)(1 - \gamma) + v\gamma + 2 \cos \theta' \sqrt{v(1 - v)\gamma(1 - \gamma)} \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

mit

$$\gamma = \frac{y_{13}y_{24}}{(y_{123} - y_{13})(y_{134} - y_{13})} \quad (2.22)$$

und

$$y_{24} = 1 - y_{123} - y_{134} + y_{13}. \quad (2.23)$$

Eine Parametrisierung wie in (2.21) wird "1-3"-System genannt. Dies richtet sich danach, welche zwei Teilchen in (2.15) zu einem zusammengefasst werden. Wie beschrieben verbleibt die Möglichkeit, in der Parametrisierung die Impulse \vec{p}_2 und \vec{p}_4 auszutauschen. Dies resultiert in (2.21) in der Vertauschung der Indizes (2 \leftrightarrow 4). Dies bewirkt, daß

nun y_{12} und y_{23} von den Winkelvariablen v und θ' abhängen und y_{14} und y_{34} nur noch von v . Manche explizite Berechnung läßt sich so einfacher durchführen. Diese Art der Parametrisierung wird von nun an als "1-3"-System bezeichnet.

Beachtet man ferner, daß die verbleibende Winkelintegration aus $PS^{(2)}$ entsprechend Gleichung (2.11) normiert sein muß, erhält man

$$\begin{aligned} PS^{(4)} &= \frac{1}{N_S} \frac{q^4}{64(2\pi)^5} \left(\frac{q^2}{4\pi} \right)^{\frac{3}{2}(n-4)} \frac{1}{\Gamma(n-2)\Gamma(\frac{n}{2}-1)} \\ &\times \int dy_{13} dy_{134} dy_{123} [y_{13}y_{24}(y_{134}y_{123} - y_{13})]^{\frac{n-4}{2}} \\ &\times \theta(y_{13})\theta(y_{24})\theta(y_{134}y_{123} - y_{13}) \\ &\times \int_0^1 dv (v(1-v))^{\frac{n-4}{2}} \int_0^\pi d\theta' \frac{1}{N_{\theta'}} \sin^{n-4} \theta', \end{aligned} \quad (2.24)$$

wobei $q^2 y_{134} = (p_1 + (p_3 + p_4))^2$ ist und für y_{123} Entsprechendes gilt. Weiterhin ist

$$N_{\theta'} = \int_0^\pi d\theta' \sin^{n-4} \theta' = 2^{1-n} \pi \frac{\Gamma(n-3)}{\Gamma^2(\frac{n}{2}-1)} \quad (2.25)$$

der Normierungsfaktor der letzten Winkelintegration. N_S ist ein statistischer Faktor, der sich aus der Identität der Teilchen im Endzustand ergibt. Für einen Endzustand $q\bar{q}q\bar{q}$ ist $N_S = 4$, für $q\bar{q}g\bar{g}$ ist $N_S = 2$.

Die Energiewichtungsfunktion $W^{(4)}$ kann ebenfalls durch Invarianten dargestellt werden. An Gleichung (2.18) kann man die jeweilige Beschreibung des entsprechenden Winkels durch Invarianten ablesen und es folgt schließlich

$$W^{(4)} = \sum W_{ij}^{(4)} = \sum_{ij} \frac{2E_i E_j}{E^2} \delta(\hat{p}_i \hat{p}_j - \cos \vartheta) = \frac{1}{4} (1 + \omega)^3 \sum_{\substack{ij \\ k, l \neq i, j}} y_{ij}^2 \delta(\omega y_{ij} - y_{ijk} y_{ijl} + y_{kl}). \quad (2.26)$$

2.3 3-Jet-Näherung

Für die Berechnung der EEC in $O(\alpha_s^2)$ sind folgende Prozesse mit vier Teilchen im Endzustand relevant:

$$e^+ e^- \rightarrow q(p_1) + \bar{q}(p_2) + g(p_3) + g(p_4) \quad (2.27)$$

$$e^+ e^- \rightarrow q(p_1) + \bar{q}(p_2) + q(p_3) + \bar{q}(p_4) \quad (2.28)$$

Die 3-Jet Näherung besteht darin, die Prozesse (2.27) und (2.28) wie den Prozess

$$e^+ e^- \rightarrow q(p_1) + \bar{q}(p_2) + g(p_3) \quad (2.29)$$

zu behandeln, d.h. für die Energiewichtung nicht (2.26) zu benutzen, sondern daraus eine Gleichung wie (2.13) abzuleiten. Für den Prozess (2.27) wird angenommen, daß ein

Gluon weich oder kollinear zu einem der anderen Teilchen ist, für den Prozess (2.28), daß eines der beiden Quark-Antiquarkpaare wie ein abgestrahltes Gluon behandelt wird. Die Beiträge zum Matrixelement $M^{(4)}$ enthalten, in der einfachsten Form, Pole in den Variablen y_{ij} . Sollte nun mehr als ein solcher Pol, d.h. zwei verschiedene y_{ij} , im Nenner auftauchen, so führt man eine Partialbruchzerlegung durch, bis man das Matrixelement in Bestandteile zerlegt hat, in denen es nur noch einen Pol gibt, zum Beispiel

$$\frac{1}{y_{13}y_{24}} = \frac{1}{y_{13}} \frac{1}{y_{13} + y_{24}} + \frac{1}{y_{24}} \frac{1}{y_{13} + y_{24}}. \quad (2.30)$$

In diesem Fall würde man den ersten Term im "1-3"-System und den zweiten im "2-4"-System behandeln. Sollten mehr als zwei verschiedene y_{ij} im Nenner auftauchen, so führt man entsprechend solange Partialbruchzerlegungen durch, bis man Terme erhält, die nur noch einen Pol in y_{ij} enthalten.

Es ist offensichtlich, daß das Integral über den ersten Term den dominanten Beitrag im Bereich kleiner y_{13} enthält. Ein kleiner Wert für y_{13} bedeutet aber, daß entweder der räumliche Winkel zwischen den Impulsen \vec{p}_1 und \vec{p}_3 klein wird oder einer der beiden Impulse einfach einen kleinen Betrag hat. In jedem Fall bedeutet ein kleiner Wert für y_{13} , daß hier die Teilchen 1 und 3 praktisch wie ein Teilchen auftreten und daher dieser Bereich des Phasenraums als "quasi" 3 Teilchen Phasenraum bezeichnet werden kann. Die 3-Jet-Näherung besteht nun darin, sich diese Tatsache zunutze zu machen. Im behandelten Beispiel führt man in der Wichtungsfunktion $W^{(4)}$ den Limes $y_{13} \rightarrow 0$ aus. Die Matrixelemente selbst bleiben unverändert.

Die Wichtungsfunktion $W^{(4)}$ lautet ausgeschrieben

$$\begin{aligned} W^{(4)} = \frac{1}{4}(1 + \omega)^3 & \left\{ y_{13}^2 \delta(\omega y_{13} - y_{124}y_{234} + y_{24}) + y_{24}^2 \delta(\omega y_{24} - y_{123}y_{134} + y_{13}) \right. \\ & + y_{12}^2 \delta(\omega y_{12} - y_{134}y_{234} + y_{34}) + y_{23}^2 \delta(\omega y_{23} - y_{124}y_{134} + y_{14}) \\ & \left. + y_{14}^2 \delta(\omega y_{14} - y_{123}y_{234} + y_{23}) + y_{34}^2 \delta(\omega y_{34} - y_{123}y_{124} + y_{12}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Setzt man nun für die Invarianten die Parametrisierung aus (2.21) ein und führt den Limes $y_{13} \rightarrow 0$ aus, so folgt

$$\begin{aligned} W^{(4)} = \frac{1}{4}(1 + \omega)^3 & \left\{ (y_{24} - y_{13})^2 \delta(\omega(y_{24} - y_{13}) - y_{123}y_{134}) \right. \\ & + y_{123}^2 \delta(\omega y_{123} - y_{134}(y_{24} - y_{13})) \\ & \left. + y_{134}^2 \delta(\omega y_{134} - y_{123}(y_{24} - y_{13})) \right\}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

In der ersten Zeile von Gleichung (2.31) ist eine δ -Funktion weggefallen, in den beiden anderen Zeilen fallen die Argumente der beiden δ -Funktionen zusammen, so daß im Limes $y_{13} \rightarrow 0$ nur drei δ -Funktionen übrig bleiben. Dies entspricht dem Fall von

drei Teilchen im Endzustand. Alle Berechnungen der EEC werden mit dieser genäherten Wichtungsfunktion durchgeführt, bzw. mit entsprechenden Permutationen der Indizes abhängig von der Struktur der Matrixelemente.

2.3.1 Differenz zur ungenäherten EEC

Wie bei jeder Approximation stellt sich hier die Frage nach der Güte der Näherung. In diesem Fall ist diese durch die Differenz der Berechnung in der 3-Jet-Näherung zur ungenäherten Rechnung gegeben. Diese Differenz soll im folgenden abgeschätzt werden. Die Ausführung des Limes $y_{13} \rightarrow 0$ in $W^{(4)}$ hat auch Auswirkungen auf die Integrationen über y_{13} im Phasenraum. Zuerst spaltet man diesen Integrationsbereich auf in

$$\begin{aligned} \int_0^{y_{123}y_{134}} dy_{13} \theta(y_{24}) &= \int_0^{y_{123}y_{134}} dy_{13} \theta(y_{24}) \theta(1 - y_{123} - y_{134}) \\ &+ \int_0^{y_{123}y_{134}} dy_{13} \theta(y_{24}) \theta(y_{123} + y_{134} - 1). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Im ersten Integrationsbereich ist $\theta(y_{24}) = 1$ automatisch gegeben, im zweiten Bereich ist $y_{13} > 0$. Daher kann nur im ersten Bereich eine Singularität in y_{13} auftreten. In der 3-Jet-Näherung, d.h. wenn man $\tilde{W}^{(4)}$ aus (2.32) verwendet, ist aufgrund der Stufenfunktionen in jedem Fall nur der erste Bereich relevant. Die 3-Jet-Näherung bewirkt also indirekt eine Änderung der Integrationen im Phasenraum. Analog wie im Anhang von Ref.[9] kann man einen angepassten 4-Teilchenphasenraum definieren

$$\begin{aligned} \tilde{\text{PS}}^{(4)} &= \int dy_{123} dy_{134} dy_{13} \int_0^1 dv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \\ &\times \theta(y_{13}) \theta(y_{123}y_{134} - y_{13}) \theta(1 - y_{123} - y_{134}). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Die weitere Untersuchung der 3-Jet-Näherung erfolgt unter Verwendung von $\tilde{\text{PS}}^{(4)}$. Ebenfalls entsprechend zu Ref.[9] wird

$$I_{ij} = \int d\tilde{\text{PS}}^{(4)} M^{(4)} y_{ij}^2 \delta(\omega y_{ij} - y_{ik}y_{jk} + y_{kl}) \quad (2.35)$$

definiert. Die Differenz, die durch die 3-Jet-Näherung hervorgerufen wird, resultiert hauptsächlich aus der Änderung der Energiewichtungsfunktionen. Es lassen sich prinzipiell zwei Fälle unterscheiden. Einmal ist dies der Fall von I_{13} und I_{24} . Der Beitrag I_{13} ist durch den Vorfaktor y_{13}^2 stark unterdrückt und I_{24} enthält keine Abhängigkeit von den Winkelvariablen v und θ . Dieser Fall ist im Anhang von Ref.[9] ausreichend behandelt worden. Für den Fall, daß im Argument der δ -Funktion eine Winkelabhängigkeit vorliegt, soll hier eine andere Vorgehensweise gewählt werden. In der 3-Jet-Näherung für den Fall $y_{13} \rightarrow 0$ fallen I_{12} und I_{23} zusammen zu

$$J_2 := \int d\tilde{\text{PS}}^{(4)} M^{(4)} y_{123}^2 \delta(y_{123}(\omega + y_{134}) - y_{134}(1 - y_{134})). \quad (2.36)$$

Die Beiträge I_{14} und I_{34} fallen ebenfalls zusammen. Im Prinzip ist die Behandlung dieses Falles jedoch äquivalent zu dem nun beschriebenen Fall. Untersucht wird die Differenz

$$\Delta I_2 := J_2 - I_{12} - I_{23}. \quad (2.37)$$

Der Term ΔI_2 repräsentiert die Differenz zwischen der EEC berechnet in der 3-Jet-Näherung und der ungenäherten Version der EEC. Für die weiteren Rechnungen ist es günstig

$$\begin{aligned} \Delta := & \frac{y_{123}^2}{\omega + y_{134}} \delta(y_{123} - \hat{\omega}) \\ & - \frac{y_{12}^2}{\omega + y_{134} v} \delta(y_{123} - \hat{\omega} - y_{13} + h_1) \\ & - \frac{y_{23}^2}{\omega + y_{134} (1-v)} \delta(y_{123} - \hat{\omega} - y_{13} + h_2) \end{aligned} \quad (2.38)$$

mit

$$\hat{\omega} := \frac{y_{134}(1 - y_{134})}{\omega + y_{134}} \quad (2.39)$$

$$h_1 := \frac{1 - y_{134}}{v \omega + y_{134}} (y_{34} - y_{134}(1 - v)) \quad (2.40)$$

$$h_2 := \frac{1 - y_{134}}{1 - v \omega + y_{134}} (y_{14} - y_{134}v) \quad (2.41)$$

zu definieren. Führt man den Limes $y_{13} \rightarrow 0$ aus, so verschwinden die Beiträge h_1 und h_2 . Dies ist offensichtlich, wenn man für y_{14} und y_{34} die Parametrisierung entsprechend (2.21) einsetzt. In Gleichung (2.38) sind die Argumente der δ -Funktionen scheinbar nach y_{123} aufgelöst. Allerdings sind h_1 und h_2 natürlich selbst noch Funktionen von y_{123} , so daß man die δ -Funktionen noch nicht ausführen könnte. Wie gesagt verschwinden h_1 und h_2 jedoch im Limes $y_{13} \rightarrow 0$. Man kann daher eine schrittweise Näherung betrachten indem man

$$\begin{aligned} h_1^0 &:= h(y_{123}) \Big|_{y_{123}=\hat{\omega}+y_{13}} \\ h_1^1 &:= h(y_{123}) \Big|_{y_{123}=\hat{\omega}+y_{13}+h_1^0} \\ &\vdots \\ h_1^p &:= h(y_{123}) \Big|_{y_{123}=\hat{\omega}+y_{13}+h_1^{p-1}} \end{aligned} \quad (2.42)$$

definiert. Für h_2 gelte entsprechendes. So kann man im Prinzip eine beliebig genaue Näherung im Argument der δ -Funktion durchführen und den Einfluß der verschiedenen Grade der Näherung untersuchen. Im folgenden wird nur der erste Schritt betrachtet.

Berechnet man nun

$$\begin{aligned} \Delta I &:= \int \text{PS}^{(4)} M(y_{123}) \Delta \\ &= \int \text{PS}^{(4)} \left[M(\hat{\omega}) \frac{\hat{\omega}^2}{\omega + y_{134}} - M(\hat{\omega} - h_1 + y_{13}) \frac{(\hat{\omega} - h_1)^2}{\omega + y_{134}} v \right. \\ &\quad \left. - M(\hat{\omega} - h_2 + y_{13}) \frac{(\hat{\omega} - h_2)^2}{\omega + y_{134}} (1 - v) \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

mit Hilfe der Gleichungen (2.40) und (2.41), dann sieht man, daß

$$h_1 v + h_2 (1 - v) = -y_{13} \frac{\hat{\omega}}{y_{134}} \quad (2.44)$$

gilt. Daher ist die weitergehende Näherung

$$\begin{aligned} \Delta I &\simeq \int \text{PS}^{(4)} \left[M(y_{123}) - v M(y_{123} - h_1 + y_{13}) - (1 - v) M(y_{123} - h_2 + y_{13}) \right] \\ &\quad \frac{y_{123}^2}{\omega + y_{134}} \delta\left(y_{123} - \frac{y_{134}(1 - y_{134})}{\omega + y_{134}}\right) \end{aligned} \quad (2.45)$$

vertretbar. In erster Linie kann also die Näherung $y_{13} \rightarrow 0$ im Argument der δ -Funktion als eine Verschiebung in der Variablen y_{123} angesehen werden. Dies hat natürlich auch Auswirkungen auf die Integration über y_{13} , jedoch ändert dies nur die obere Integrationsgrenze und kann daher ignoriert werden.

2.3.2 Anwendung auf einen Beispielterm

Eine Überprüfung, welchen Effekt diese Verschiebung auf jeden einzelnen der zu behandelnden Terme hat, erscheint wenig praktikabel. Die größten Auswirkungen sind aber natürlich dort zu erwarten, wo die Berechnung in der 3-Jet-Näherung schon die größten Beiträge liefert. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird sich zeigen, daß ein Term

$$M := C_F^2 \frac{1}{y_{13}} \frac{1}{y_{134}} \frac{1}{y_{13} + y_{24}} \frac{1}{y_{13} + y_{23}} \quad (2.46)$$

die hauptsächlich Beiträge zu Termen proportional zu C_F^2 liefert. Weiterhin wird sich zeigen, daß dies eben in der behandelten Energie-Korrelation geschieht. Es ist daher sinnvoll diesen Term als Beispiel zu verwenden.

Nimmt man nun den Term aus Gleichung (2.46), dann folgt nach längerer Rechnung

$$\begin{aligned} \Delta M &= \frac{v}{y_{13} + y_{24}} \frac{(h_1 - y_{13})}{y_{13} + y_{23}} \left(\frac{1}{y_{13} + y_{24} + h_1 - y_{13}} + \frac{1 - v}{y_{13} + y_{23} + (h_1 - y_{13})(1 - v)} \right) \\ &+ \frac{(1 - v)}{y_{13} + y_{24}} \frac{(h_2 - y_{13})}{y_{13} + y_{23}} \left(\frac{1}{y_{13} + y_{24} + h_2 - y_{13}} + \frac{1 - v}{y_{13} + y_{23} + (h_2 - y_{13})(1 - v)} \right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Nimmt man nur die führende Ordnung in $(h_1 - y_{13})$ bzw. $(h_2 - y_{13})$ mit, so vereinfacht sich (2.47) zu

$$\Delta M = -y_{13} \frac{1+\omega}{\omega + y_{134} y_{13} + y_{24} y_{13} + y_{23}} \frac{1}{y_{13} + y_{24}} \left(\frac{1}{y_{13} + y_{24}} + \frac{1-v}{y_{13} + y_{23}} \right). \quad (2.48)$$

Berechnet man hiermit nun ΔI , so zeigt sich, daß ΔI von der Ordnung $\ln^2 \omega/\omega$ ist. Berechnet man den Term M in der normalen 3-Jet-Näherung, wie dies im folgenden Kapitel geschehen wird, dann ergibt sich, daß dieser Term, neben Polen in ε , Beiträge proportional zu $\ln^3 \omega/\omega$ erzeugt. Dies kann man als Hinweis dafür nehmen, daß die 3-Jet-Näherung nur nachgeordnete Divergenzen in den einzelnen Termen vernachlässigt. Weiterhin ist nicht gesagt, daß eine Berechnung des Termes M in der 3-Jet-Näherung eine Differenz proportional zu $\ln^2 \omega/\omega$ zur ungenäherten Version der EEC liefert, sondern nur daß diese Differenz höchstens wie $\ln^2 \omega/\omega$ divergiert. Es ist durchaus möglich, daß diese Differenz bedeutend schwächer divergiert. Eine Berechnung der EEC in der 3-Jet-Näherung ist sinnvoll, da die führende Ordnung der Divergenzen für jeden Term richtig sein sollte. Man kann daher feststellen, welche Art Divergenzen die einzelnen Terme maximal enthalten und es ist durchaus wahrscheinlich, daß die Differenz zur ungenäherten Berechnung nur sehr nachgeordnete Divergenzen enthält. Es ist durchaus möglich, daß für die nicht-singulären Beiträge diese Differenz konvergent ist.

Man kann auch eine eher experimentelle Rechtfertigung für die 3-Jet-Näherung angeben. Die δ -Funktionen in der Wichtungsfunktion $W^{(4)}$ schneiden den Bereich des Phasenraums heraus, in dem zwei Teilchen unter einem vorgegebenen Winkel auslaufen. Experimentell ist es aber natürlich unmöglich den Winkel zwischen zwei Teilchen wirklich exakt zu vermessen. Die Verwendung von δ -Funktionen ist daher eine Idealisierung. Man könnte auch scharf zentrierte Wichtungsfunktionen verwenden, deren Maximum an der Position des Pols der δ -Funktion liegen und deren Halbwertsbreite der Messgenauigkeit für die Winkel entspricht. Für hinreichend kleine Werte von y_{13} unterscheiden sich die Positionen der Maxima schließlich um weniger als diese Halbwertsbreite, werden also experimentell ununterscheidbar. Da aber der Hauptbeitrag zur EEC aus exakt diesem Bereich des Phasenraums kommt, kann man dies als einen physikalischen Hinweis auf die Güte dieser Näherung nehmen.

2.4 Numerik

Auch in der beschriebenen 3-Jet-Näherung lassen sich nicht alle Terme analytisch behandeln. Jedoch wurden im Rahmen der Berechnungen jeweils die führenden Divergenzen abgespalten. Wie dabei die allgemeine Vorgehensweise war, soll in diesem Abschnitt beschrieben werden.

Die auftretenden Divergenzen werden im folgenden entsprechend wie in Gleichung (1.11) bezeichnet. Terme, die wie ${}_2C_0$ oder schwächer divergieren, werden im Normalfall numerisch behandelt. Die Koeffizienten der Divergenzen, die wie ${}_2C_3$, ${}_2C_2$ und ${}_2C_1$ gehen, werden analytisch behandelt. Durch die wechselnden Vorzeichen in diesen Termen ergaben sich in anderen Arbeiten enorme Schwierigkeiten beim numerischen Fit dieser

Koeffizienten. Die Tatsache, daß hier nur der Koeffizient ${}_2C_0$ gefittet wird, ergibt eine enorme Verbesserung der Genauigkeit.

2.4.1 Prinzip der Abspaltungen

Zur analytischen Bestimmung der Koeffizienten von ${}_2C_3$, ${}_2C_2$ und ${}_2C_1$ ergeben sich prinzipiell zwei Vorgehensweisen. Entweder der behandelte Term ist vollständig analytisch berechenbar, was nur selten der Fall ist, oder der Term kann in einen Anteil aufgespalten werden, der einer analytischen Behandlung zugänglich ist, plus einem Anteil, der numerisch behandelt wird, d.h. höchstens wie ${}_2C_0$ divergiert. Eine solche Aufspaltung muß zwei Kriterien erfüllen. Zum einen muß der abgespaltene Term analytisch zugänglich sein, zum anderen muß die Differenz zwischen diesem Term und dem Originalterm für eine numerische Behandlung geeignet sein, d.h. nicht einfach nur die Differenz zweier großer Zahlen.

Meist bestehen die Terme aus Produkten verschiedener Brüche als Funktion der y_{ij} . Eine Näherung im Zähler ist eigentlich immer möglich, im Nenner sollte sich die Näherung auf nur einen der Brüche beschränken. Also z.B.:

$$K = \frac{1}{f(y_{ij})} \frac{1}{g(y_{ij})} \frac{1}{h(y_{ij})} = \frac{1}{f(y_{ij})} \frac{1}{g(y_{ij})} \frac{1}{h^0(y_{ij})} + \Delta K, \quad (2.49)$$

$$\Delta K = \frac{1}{f(y_{ij})} \frac{1}{g(y_{ij})} \left(\frac{1}{h(y_{ij})} - \frac{1}{h^0(y_{ij})} \right).$$

Im Term ΔK tritt also nicht eine große Differenz auf sondern eine Differenz multipliziert mit den restlichen Originalbeiträgen. Im allgemeinen führt dies zu wesentlich genaueren numerischen Ergebnissen. Diese Methode wurde fast durchgehend in dieser Arbeit verwendet. Weiterhin ist zu beachten, daß bei Näherungen im Nenner die Abhängigkeit von einer Integrationsvariablen immer erhalten bleiben sollte. Nur bei der Integration der Winkelvariablen v und v' ist es unter Umständen vertretbar, die Abhängigkeit von diesen Variablen aufzugeben. Dies muß aber in jedem Einzelfall sorgfältig geprüft werden. Die Berechnungen wurden wie gesagt in der 3-Jet-Näherung ausgeführt. Die Winkelvariablen v und v' resultieren aber aus den verbliebenen Integrationen, die durch die Einführung des "künstlichen" Teilchen bei der Aufspaltung des 4-Teilchen-Phasenraumes (2.15) resultieren. Daher ist anzunehmen, daß die Ergebnisse nicht sehr sensitiv auf Näherungen in diesen Variablen reagieren.

Im folgenden werden Terme der Art wie ΔK nicht jedesmal explizit aufgeschrieben sondern nur wenn es sich nicht unmittelbar ergibt. Weiterhin wird vereinbart, daß Terme, die mit einem Δ beginnen, numerisch zu behandeln sind ohne daß dies einer weiteren Erwähnung bedarf. Die Abspaltung von numerischen Termen kann sukzessive erfolgen, jedoch wurden hier solche Abspaltungen fast immer nur am Originalterm durchgeführt oder nachdem die Integrationen ausgeführt wurden, die keine Unterscheidung nach den verschiedenen Wichtungsfunktionen benötigen.

Die numerische Integrationen wurden mit Hilfe der NAGLIB-Routine D01FCF durchgeführt. Diese Integrationsroutine beruht im wesentlichen darauf, daß die zu integrie-

rende Funktion an einer vorgegebenen Anzahl von Punkten berechnet wird. Der jeweils nächste Punkt wird dadurch bestimmt, daß höhere, numerisch berechnete Ableitungen des Integranden berechnet werden. Dadurch wird gewährleistet, daß die Punktdichte dort am höchsten ist, wo die zu integrierende Funktion besonders steil verläuft. Für Details, siehe Ref.[20]

2.4.2 Substitutionen

Eine wesentliche Verbesserung der numerischen Genauigkeit läßt sich mit Hilfe verschiedener Substitutionen der Integrationsvariablen erreichen. Insgesamt werden normalerweise 4 Integrationen ausgeführt, z.B. über y_{134} , y_{13} , v , ϑ' wenn ein Term im "1 3" System berechnet wird. Für die Integration über ϑ' hat sich keine geeignete Substitution finden lassen, jedoch lassen sich in den anderen Fällen Substitutionen angeben, die die Genauigkeit verbessern. Welche dies sind, hängt natürlich von der betrachteten Korrelation und dem zu integrierenden Term ab. Das Ziel einer glättenden Substitution ist es, daß die auftretende Jacobische Determinante möglichst einen der auftretenden Nenner herauskürzt. Substituiert man

$$y_{134} = \omega \left(\left(\frac{1+\omega}{\omega} \right)^{y_{134}} - 1 \right), \quad (2.50)$$

$$dy_{134} = dy'_{134} \ln \left(\frac{1+\omega}{\omega} \right) (\omega + y_{134}).$$

so kürzt der Faktor $(\omega + y_{134})$ einen entsprechenden Nenner heraus. Der logarithmische Vorfaktor hat praktisch die Divergenz absorbiert, die bei der Integration über y_{134} entsteht. Der Integrationsbereich hat sich nicht geändert. Der verbleibende Integrand kann somit geglättet werden. Für die Integration über y_{13} wird die Substitution

$$y_{13} = \frac{1 - y_{123} - y_{134}}{2} \left(\left(1 + \frac{2y_{123}y_{134}}{1 - y_{123} - y_{134}} \right)^{y_{13}} - 1 \right), \quad (2.51)$$

$$dy_{13} = dy'_{13} \frac{1}{2} (y_{13} + y_{24}) \ln \left(1 + \frac{2y_{123}y_{134}}{1 - y_{123} - y_{134}} \right)$$

gewählt. Hierbei ist zu beachten, daß aus technischen Gründen die Substitution so gewählt wird, daß $y'_{13} \in [0, 1]$ gilt. Der Faktor $(y_{13} + y_{24})$ kürzt ebenfalls einen häufig auftretenden Nenner des zu integrierenden Matrixelements. Als letztes folgt noch die Substitution

$$v = -\frac{y_{123}}{y_{123} - y_{13}} \left(\left(\frac{y_{13}}{y_{123}} \right)^{1-v'} - 1 \right), \quad (2.52)$$

$$dv = dv' (-1) \ln \left(\frac{y_{13}}{y_{123}} \right) \frac{y_{13} + y_{23}}{y_{123} - y_{13}}$$

Auch hier gilt für die neue Integrationsvariable $v' \in [0, 1]$, jedoch ist zu beachten, daß sich die Integrationsrichtung umgedreht hat. Dies kompensiert das Minuszeichen.

Welche Substitutionen genau durchgeführt werden, hängt natürlich von der Art des jeweils behandelten Terms und der betrachteten Korrelation ab, jedoch sind die angegebenen Beispiele exemplarisch. Diese Art Substitutionen führten zu einer bemerkenswerten Verbesserung der numerischen Genauigkeit, teilweise bis zu vier Größenordnungen. Dies hat erst eine wirklich genaue numerische Berechnung der EEC für kleine ω ermöglicht und somit die Bestimmung der Koeffizienten der verschiedenen Divergenzen erlaubt.

2.4.3 Numerischer Fit

Mit der numerischen Integration der Terme ist natürlich nur der erste Schritt getan. Mit Hilfe der gewonnenen Daten müssen noch die Koeffizienten der einzelnen Divergenzen bestimmt werden. Natürlich ist es nicht möglich, endliche Beiträge bei der Integration auszuschließen, d.h. man berechnet

$$F(\omega) = F_{div} + const. + K(\omega). \quad (2.53)$$

Hierbei enthält F_{div} die auftretenden Divergenzen, während $K(\omega) \rightarrow 0$ im Grenzfall $\omega \rightarrow 0$ für den endlichen Rest gilt. Üblicherweise erfolgt der Fit der Koeffizienten der Divergenzen durch Minimierung der Größe

$$\chi^2 = \frac{1}{n - m - 1} \sum_m \frac{(F_{div}(\omega_n) + const. - Y(\omega_n))^2}{(\Delta(\omega_n))^2}. \quad (2.54)$$

Hierbei ist $Y(\omega_n)$ der an n Stellen numerisch berechnete Wert von $F(\omega_n)$. Die Zahl der zu fittenden Parameter ist m . Im Grunde genommen ist dies ein gewichteter Least-Square Fit, wobei die Wichtungsfunktionen umgekehrt proportional zu den Fehlern $\Delta(\omega_n)$ sind. Werte, die mit großen Fehlern behaftet sind, tragen nur schwach bei, Werte mit kleinen Fehlern tragen stärker bei.

In diesem Fall ergibt sich allerdings ein Problem. Es ist *nicht* sinnvoll für $\Delta(\omega_n)$ nur den numerischen Fehler $\Delta Y(\omega_n)$ anzusetzen, denn entscheidend ist die Abweichung der zu fittenden Funktion $F_{div}(\omega)$ zum berechneten numerischen Wert $Y(\omega)$, d.h. man müsste

$$\Delta(\omega_n) = \Delta Y(\omega_n) + K(\omega_n) \quad (2.55)$$

wählen. Dies ist jedoch nicht möglich, da $K(\omega)$ unbekannt ist.

In der verwendeten Integrationsroutine kann ein relativer Fehler Δr für die Werte $Y(\omega)$ vorgegeben werden. Nur Terme, die proportional zu $1/\omega$ oder schwächer divergieren, wurden numerisch behandelt. Daher kann man

$$\Delta Y(\omega_n) \sim \frac{\Delta r}{\omega} \quad (2.56)$$

ansetzen. Die relativen Fehler wurden immer zu $\Delta r = 10^{-8}$ gewählt. Numerisch zeigt sich, daß dieser Wert meist nicht erreicht werden konnte, jedoch kann meist ein relativer Fehler von $\Delta r = 10^{-7}$ angenommen werden. Die Wahl des Bereiches, in dem die

Größe ω liegen soll, ist ein entscheidendes Kriterium. Für zu kleine ω ist irgendwann die numerische Genauigkeit nicht mehr ausreichend, für zu große ω wird $K(\omega)$ von der selben Größenordnung wie $F_{div}(\omega)$ und ein Fit der Koeffizienten ist nicht mehr möglich. Üblicherweise wurde

$$\omega = \frac{n}{20} \cdot 10^{-m} \quad , \quad n \in \{2, 19\} \quad , \quad m \in \{5, 8\} \quad (2.57)$$

gewählt. Irgendein ω_0 ist also der größte Wert für ω , der noch zugelassen wird. Es ist aber anzunehmen, daß gilt

$$\frac{K(\omega_0)}{\Delta Y'(\omega_0)} > \frac{K(\omega_n)}{\Delta Y'(\omega_n)} \quad , \quad n > 0. \quad (2.58)$$

Würde man also für den Fehler $\Delta(\omega_n) \simeq \Delta Y'(\omega_n)$ in (2.54) ansetzen, so würde man ausgerechnet den Term am stärksten wichten, der den größten systematischen Fehler $K(\omega)$ enthält.

Es stellt sich also das Problem, wie gefittet werden soll. Mit Hilfe von Testintegrationen, d.h. der Integrationen von Termen, die den tatsächlich auftretenden Beiträgen sehr ähnlich sehen, aber vollständig analytisch berechenbar sind, wurden verschiedene Fitverfahren probiert. Generell zeigte sich, daß ein ungewichteter Fit, d.h. $\Delta(\omega_n) = 1$ die besten Resultate lieferte. Weiterhin konnte allgemein festgestellt werden, daß es günstig ist, für die Fits auch nachgeordnete Divergenzen mitzunehmen, obwohl die Koeffizienten dieser Divergenzen mit recht großen Fehlern behaftet sind. Dies liegt wohl daran, daß die verschiedenen Klassen von Divergenzen quasi "entkoppeln", also die benutzten Fitroutinen Schwankungen innerhalb der einzelnen Klassen ausgleichen. Die mit den Testintegrationen bestimmten Koeffizienten der führenden Divergenzen konnten so genauer reproduziert werden.

Die Berechnungen der Koeffizienten der Divergenzen wurden mit Hilfe der NAGLIB-Routine G02DAF [21] durchgeführt. Diese beruht auf dem Prinzip der multiplen Regression, die zum Beispiel in Ref.[22] beschrieben ist.

3 Explizite Berechnungen

Gegenstand dieser Arbeit war die Berechnung der EEC bis zur Ordnung α_s^2 im Falle von 4 Teilchen im Endzustand, wobei jeweils die in Kapitel 2 beschriebene 3-Jet-Näherung verwendet wird. In diesem Kapitel sollen die technischen Details dieser Berechnungen beschrieben werden. Angestrebt wird eine Hybridfunktion wie in Gleichung (1.10) beschrieben. Daher ist eine möglichst genaue Bestimmung der auftretenden Divergenzen als Funktion der Variablen ω notwendig. Für den Fall von 3 Teilchen im Endzustand kann auf das Ergebnis aus [6] zurückgegriffen werden, wenn man berücksichtigt, daß einige zusätzliche Terme noch den 4-Teilchen-Endzustandsbeiträgen zugeschlagen werden müssen. Dies wird später noch genauer erläutert.

Wie allgemein üblich werden die Berechnungen aufgespaltet nach den Colorfaktoren C_F^2 , $C_F N_c$ und $C_F T_R$. Vorab sind jedoch einige Vereinbarungen und Deklarationen nötig. Oft wurden erst die Integrationen ausgeführt, für die keine Unterscheidung bezüglich der einzelnen Wichtungsfunktionen notwendig ist. Führt man diese Integrationen zum Beispiel im "1-3"-System aus, so ist es günstig

$$d\zeta_{13} = dy_{13} dv d\mathcal{V}' \frac{1}{N_s} \Theta(y_{123} y_{134} - y_{13}) \Theta(y_{24}) \Theta(y_{13}) \quad (3.1)$$

zu definieren. Weiterhin ist es aus schreibtechnischen Gründen günstig häufig auftretende Faktoren wie

$$F_{CF} := \sigma_0 \frac{1}{N_s} (1 + \omega)^3 \left(\frac{\alpha_s}{2\pi} \right)^2 C_F^2 \quad (3.2)$$

zu definieren. Entsprechend sind F_{N_c} , F_{T_R} und $F_{CF-N_c/2}$ definiert.

Die einzelnen Beiträge des Matrixelements $M^{(4)}$ werden mit der genäherten Wichtungsfunktion (2.32) multipliziert und dann über den Phasenraum integriert, vorausgesetzt die Berechnung wird im "1-3"-System durchgeführt wird, was sehr häufig der Fall ist. Für jeden Anteil des Matrixelements führt dies zu 3 Beiträgen, abhängig davon mit welcher δ -Funktion multipliziert wird. Um eine durchgängige Unterscheidung zu ermöglichen, wird folgende Nomenklatur eingeführt. Wird ein Beitrag K_i behandelt, so ist

$$\begin{aligned} L_i &:= \int \text{PS}^{(4)} K_i \frac{1}{4} (1 + \omega)^3 \frac{y_{123}^2}{\omega + y_{134}} \delta \left(y_{123} - \frac{y_{134}(1 - y_{134})}{\omega + y_{134}} \right), \\ M_i &:= \int \text{PS}^{(4)} K_i \frac{1}{4} (1 + \omega)^3 \frac{y_{134}^2}{\omega + y_{123}} \delta \left(y_{134} - \frac{y_{123}(1 - y_{123})}{\omega + y_{123}} \right), \\ N_i &:= \int \text{PS}^{(4)} K_i \frac{1}{4} (1 + \omega)^3 \frac{(y_{24} - y_{13})^2}{\omega + y_{134}} \delta \left(y_{123} - \frac{\omega(1 - y_{134})}{\omega + y_{134}} \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Der Beitrag zur EEC, den ein Term K_i liefert ist damit

$$\left. \frac{d\Sigma}{d \cos \chi} \right|_{K_i} = L_i + M_i + N_i. \quad (3.4)$$

In der 3-Jet-Näherung wird der 4-Teilchenendzustand behandelt, als ob ein Quark, ein Antiquark und ein Gluon auslaufen. L_i beschreibt in jedem Fall die Detektion des Quark-Antiquark-Paares, M_i die Detektion von Quark und Gluon und N_i die von Antiquark und Gluon. Hierbei sind Quark, Antiquark und Gluon wie im Rahmen der 3-Jet-Näherung beschrieben zu verstehen. Weiterhin ist zu beachten, daß die im Anhang angegebenen Terme nicht das gesamte Matrixelement ausmachen. Es gibt noch Beiträge, die einfach aus der Vertauschung der Indizes (1 ↔ 2), (3 ↔ 4) und (1 ↔ 2, 3 ↔ 4) folgen. Dies führt jedoch, außer bei der Berechnung der ε -Pole für Terme proportional zu $C_F N_c$, nur zu einem globalen Faktor 4, der jeweils in den Faktoren F_{C_F} und F_{N_c} enthalten ist. Mit diesen Vorbereitungen sollen nun die einzelnen Beiträge, aufgegliedert nach den verschiedenen Colorfaktoren, behandelt werden. Eine vollständige Darstellung der Berechnungen ist natürlich nicht möglich, jedoch sollen typische Beispiele die durchgeführten Berechnungen verdeutlichen.

3.1 Colorfaktor C_F^2

In diesem Abschnitt soll nun auf die technische Durchführung der Berechnungen eingegangen werden, die für die Terme proportional zu C_F^2 nötig waren. Es wird nur auf Beiträge zum Matrixelement eingegangen, die im Resultat Divergenzen in ω liefern, die sich wie $\ln^3 \omega/\omega$, $\ln^2 \omega/\omega$ oder $\ln \omega/\omega$ verhalten. Sämtliche anderen Beiträge verhalten sich wie $1/\omega$ oder schwächer divergent. Diese Terme werden entweder numerisch behandelt oder in einfachen Fällen analytisch, wobei jedoch nur Methoden zur Anwendung kommen, die in diesem Kapitel beschrieben werden.

3.1.1 Singuläre Beiträge

Grundsätzlich lassen sich zwei verschiedene Arten von Beiträgen zu $M^{(4)}$ unterscheiden. Zum einen sind dies Terme, die für $y_{13} \rightarrow 0$ divergieren, zum anderen Terme, die in diesem Limes endlich bleiben. Der erste zu untersuchende Term resultiert aus der Aufsummation aller Terme, die für $y_{13} \rightarrow 0$ divergieren. Um Pole verschieden von y_{13} zu vermeiden, wurden Partialbruchzerlegungen wie in (2.30) durchgeführt. Dies lieferte [8]

$$\frac{AB_{13}^s}{y_{13}} = 48 C_F^2 \frac{1}{y_{13}} T(y_{134}, y_{13} + y_{24}) \left(\frac{2y_{12}}{y_{13} + y_{23}} + (1-v)(1-\varepsilon) \right) \quad (3.5)$$

mit

$$T(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2 \frac{1-x-y}{xy} - \varepsilon \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2 \right). \quad (3.6)$$

Das 3-Teilchen-Matrixelement $M^{(3)}$ resultierend aus dem Prozess $e^+e^- \rightarrow q(p_I)\bar{q}(p_{II})g(p_{III})$ ist proportional zu $T(y_{III}, y_{IIIII})$. Im Bereich kleiner y_{13} ist der Term AB_{13}^s dominant im Matrixelement $M^{(4)}$. In diesem Bereich des Phasenraums verhalten sich Teilchen 1 und 3 wie ein Teilchen. Hierbei sind

$$y_{IIII} := y_{123} - 2y_{13} \quad y_{IIIII} := y_{134} \quad y_{IIIIII} := y_{24} + y_{13} \quad (3.7)$$

die entsprechenden 3-Jet-Variablen. Gleichung (3.7) ergibt in der Summe

$$y_{IIII} + y_{IIIII} + y_{IIIIII} = 1, \quad (3.8)$$

wie es sein muss. Für $y_{13} \neq 0$ ist die Aufspaltung in (3.7) natürlich nicht eindeutig. Erst die Ausführung des Limes $y_{13} \rightarrow 0$ erzeugt den Beitrag, der dem des 3-Teilchen-Matrixelements entspricht. In Ref.[8] wird zum Beispiel die Aufspaltung

$$y_{IIII} := y_{123} - y_{13} \quad y_{IIIII} := y_{134} \quad y_{IIIIII} := y_{24} \quad (3.9)$$

gewählt. Eine Integration über die Variablen v, θ und y_{13} überführt den Term in Gleichung (3.5) in den entsprechenden Beitrag, der aus den 3-Parton-Endzuständen resultiert. Eine Aufspaltung wie in (3.9) führt jedoch dazu, daß der Term in (3.5) nicht direkt berechnet werden kann, da durch die andere Wahl der Aufspaltung noch Zusatzterme berücksichtigt werden müssen, die ebenfalls beitragen. Es ist daher günstiger, die Aufspaltung wie in Gleichung (3.7) vorzunehmen.

Daher ist der Beitrag AB_{13}^s/y_{13} der "quasi-3-Jet Beitrag" des 4-Teilchenmatrixelements. Sämtliche anderen Beiträge (A.3)–(A.9) sind dann reine 4-Jet-Beiträge. Eine Ausführung der Integrationen gemäß (3.1) führt zu Polen in ε , die sich gegen entsprechende Pole der 3-Teilchenbeiträge wegheben. Die explizite Abhängigkeit von $T(y_{134}, y_{24} + y_{13})$ von der Variablen y_{13} erschwert die Rechnung. Es liegt daher nahe einen Beitrag abzuspalten, in dem der Limes $y_{13} \rightarrow 0$ in der Funktion T ausgeführt ist

$$\frac{\overline{AB}_{13}^s}{y_{13}} = 48 C_F^2 \frac{1}{y_{13}} T(y_{134}, 1 - y_{123} - y_{134}) \left(\frac{2y_{12}}{y_{13} + y_{23}} + (1-v)(1-\varepsilon) \right). \quad (3.10)$$

Man muß allerdings beachten, daß der gesamte Beitrag AB_{13}^s im Limes $y_{13} \rightarrow 0$ relevant ist. Daher trägt der abgespaltene Beitrag in führender Ordnung bei. Aus rein rechen-technischen Gründen war eine Ausführung des Limes in der Integrationsvariablen y_{13} nötig.

Es ist zu beachten, daß im folgenden immer $\omega \neq 0, \infty$ angenommen wird, d.h. daß die Detektionswinkel $\chi = 0, \pi$ ausgeschlossen werden. Somit brauchen Beiträge aus 2-Teilchen-Endzuständen nicht berücksichtigt zu werden. Die Vorgehensweise kann man intuitiv an Gleichung (2.15) erkennen. Der 4-Teilchen-Phasenraum wird hier in ein Produkt aus einem 3-Teilchen-Phasenraum und zusätzlichen Integrationen aufgespalten. Damit eine Cancelierung mit den 3-Teilchen-Beiträgen möglich ist, müssen diese zusätzlichen Integrationen ausgeführt werden:

$$\begin{aligned} \int d\zeta_{13} \frac{\overline{AB}_{13}^s}{y_{13}^{1+\varepsilon}} &= 48 C_F^2 T(y_{134}, y_{24} - y_{13}) \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon} \left(\ln y_{123} - \frac{3}{2} \right) \right\} \\ &+ 48 C_F^2 T(y_{134}, y_{24} - y_{13}) \left\{ \frac{7}{2} - \frac{3}{2} \ln(y_{123} y_{134}) - \ln^2 y_{134} \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \ln^2 y_{123} - 2 \text{Li}_2(1 - y_{134}) \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

wobei $\text{Li}_2(x)$ der übliche Dilogarithmus ist:

$$\text{Li}_2(x) := - \int_0^1 dz \frac{\ln(1-xz)}{z}. \quad (3.12)$$

Bei der Berechnung von (3.11) wurde verwendet, daß

$$\begin{aligned} I(x, y) &= \int_0^x \frac{1}{s^{1+\epsilon}} \int_0^1 \frac{r^\epsilon(1-r)^{-\epsilon}}{(s+(y-s)r)} \\ &= \frac{\Gamma^2(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} \frac{1}{y} \left[\frac{1}{2\epsilon} - \frac{\ln y}{2\epsilon} - \frac{1}{2} \ln^2 \frac{x}{y} + \frac{1}{4} \ln^2 y - \text{Li}_2 \left(1 - \frac{x}{y} \right) + O(\epsilon) \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

gilt. Die Pole in ϵ in der ersten Zeile von (3.11) heben sich gegen entsprechende Pole aus den 3-Teilchenbeiträgen weg [4]. Führt man die Permutationen der Indizes aus, dann stimmen die endlichen Beiträge aus (3.11) mit denen aus Ref.[4]. Gleichung (3.25) überein.

In Gleichung (2.20) aus Ref.[4] treten außer den Polen in ϵ noch zwei andere Arten von konvergenten Beiträgen auf. Dies sind einmal Terme proportional zu einer Funktion F . Diese brauchen hier nicht berechnet zu werden, da dies schon in Ref.[6] geschehen ist. Zum anderen sind dies endliche Terme proportional zu T . Diese Beiträge werden jeweils den singulären 4-Teilchenbeiträgen zugeschlagen. Somit lautet der verbleibende konvergente Anteil, der für die Berechnung der EEC benötigt wird

$$\begin{aligned} K_{CF}^S := 48 C_F^2 T (y_{134} y_{24} - y_{13}) &\left\{ -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \ln(y_{123} y_{134}) - \ln^2(y_{134}) \right. \\ &\left. - 2\text{Li}_2(1 - y_{134}) + 2\zeta_2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

wobei wie üblich $\zeta_2 = \pi^2/6$ gilt. Führt man alle Permutationen der Indizes aus, so findet man Übereinstimmung mit Gleichung (3.26) aus Ref.[4]. Zur Berechnung der EEC in der 3-Jet-Näherung wird nun K_{CF}^S mit der genäherten Wichtungsfunktion aus Gleichung (2.32) multipliziert.

Da es immer vier Gruppen von Termen gibt, die durch Vertauschung der Indizes auseinander zu erhalten sind, ist zu beachten, daß dies zu einem Faktor 4 führt. Der Vorfaktor F_{CF} ist so gewählt, daß alle für die explizite Berechnung nicht notwendigen Faktoren darin absorbiert sind.

An einem Beispiel soll nun kurz vorgeführt werden, welcher Art die Berechnungen häufig waren. Führt man die δ -Funktion in (3.3) aus und setzt zur Vereinfachung der Schreibweise $y_{134} = x$, dann gilt

$$\begin{aligned} I_{CF}^S &= F_{CF} \int dx \frac{x^2(1-x)^2}{(x+\omega)^3} \left(\frac{x(x+\omega)}{\omega(1-x)} + \frac{\omega(1-x)}{x(x+\omega)} + \frac{2}{\omega} \right) \\ &\left\{ -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \ln \left(\frac{x^2(1-x)}{x+\omega} \right) - \ln^2 x - 2(\text{Li}_2(1-x) - \zeta_2) \right\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Bei der weiteren Berechnung ergeben sich schon in diesem einfachen Beispiel verschiedene Integrale der Art

$$I_n = \int dx \frac{1}{(x+\omega)^n} L[x, a], \quad M_n = \int dx x^n L[x, a]. \quad (3.16)$$

Hierbei steht $L[x, a]$ für eine Funktion der folgenden Art

$$\begin{aligned} L[x, a] \in \{ &1, \ln x, \ln(1-x), \ln(x+a), \ln^2 x, \ln^2(1-x), \ln^2(x+a), \\ &\ln x \ln(1-x), \ln x \ln(x+a), \ln(1-x) \ln(x+a), \text{Li}_2(x) \}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Die Anzahl der zu berechnenden Integrale ist sehr hoch, jedoch können Rekursionsformeln zwischen den verschiedenen Integralen benutzt werden, um die Berechnung mit einem REDUCE-Programm zu ermöglichen. Hierzu behält man zuerst $a \neq \omega$ bei, und setzt erst am Ende der Berechnungen $a = \omega$. Diese Vorgehensweise erlaubt partielle Ableitungen, so daß nur einige Basisintegrale berechnet werden müssen und die restlichen Integrale daraus rekursiv gewonnen werden können. Um eine generelle Unterscheidung zu einer später noch auftretenden anderen Klasse von Integralen zu ermöglichen, sollen Integrale der Art wie in (3.16) im weiteren "lineare" Integrale genannt werden. (siehe Anhang)

Führt man sämtliche Integrale aus, so folgt als Ergebnis:

$$\begin{aligned} \frac{I_{CF}^S}{F_{CF}} &= \frac{8(1+4\omega)(1+\omega)^2}{\omega} \left[-\frac{1}{2} \text{Li}_2(-\omega) (\ln(1+\omega) + \ln \omega) + \zeta_2 \frac{1}{2} (\ln(1+\omega) - \ln \omega) \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{S}_{12}(-\omega) + \text{Li}_3(-\omega) + \zeta_3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \ln^2 \omega \ln(1+\omega) + \frac{1}{3} \ln \omega \ln(1+\omega) + \frac{1}{12} \ln^2 \omega \right] \\ &+ \frac{\text{Li}_2(-\omega) + \zeta_2}{3\omega} [108\omega^3 + 267\omega^2 + 204\omega + 44] \\ &- \frac{\ln(1+\omega)}{\omega} [28\omega^3 + (72 + \frac{1}{12})\omega^2 + (60 - \frac{1}{3})\omega + 15 + \frac{3}{4}] \\ &+ \frac{\ln^2 \omega}{\omega} [6\omega^3 + (17 + \frac{1}{2})\omega^2 + 16\omega + 4 + \frac{1}{3}] \\ &+ \frac{\ln \omega}{\omega} [28\omega^3 + (60 + \frac{1}{12})\omega^2 + (39 - \frac{1}{6})\omega - 14 + \frac{1}{4}] \\ &+ \frac{1}{\omega} [-8\omega^2 + (-14 + \frac{1}{12})\omega - 5 + \frac{1}{12}]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Schon in diesem einfachen Beispiel ergeben sich also ein große Anzahl von Termen. Im folgenden wird daher darauf verzichtet, diese im einzelnen aufzuschreiben.

Die meisten dieser Terme sind endlich für $\omega \rightarrow 0$. Berücksichtigt man nur Terme, die für $\omega \rightarrow 0$ divergieren, dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{L_{CF}^{\zeta}}{F_{CF}} &= \frac{2 \ln^3 \omega}{3 \omega} + \frac{13 \ln^2 \omega}{3 \omega} + \frac{\ln \omega}{\omega} \left(7 + \frac{1}{4} + 4\zeta_2 \right) \\ &+ \frac{1}{\omega} \left(8\zeta_3 + \left(14 + \frac{2}{3} \right) \zeta_2 - 5 - \frac{1}{24} \right) \\ &+ 4 \ln^3 \omega + 14 \ln^2 \omega + \ln \omega \left(24\zeta_2 + 46 - \frac{1}{6} \right) + O(1). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Entsprechend folgt

$$\frac{M_{CF}^{\zeta}}{F_{CF}} = \frac{9}{4} \frac{1}{\omega} - \frac{2}{4} \ln^2 \omega + \ln \omega \left(6\zeta_2 - 5 - \frac{1}{2} \right) \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{N_{CF}^{\zeta}}{F_{CF}} &= -\frac{4 \ln^2 \omega}{3 \omega} - \frac{\ln \omega}{\omega} + \frac{1}{\omega} \left(-\frac{8}{3} \zeta_2 + \frac{11}{12} \right) \\ &- \ln^3 \omega - 7 \ln^2 \omega + \ln \omega \left(-6\zeta_2 - 13 - \frac{7}{12} \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Somit ist schließlich der Gesamtbeitrag zur EEC von K_{CF}^{ζ}

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_{CF}} \frac{d\Sigma}{d \cos \chi} \Big|_{K_{CF}^{\zeta}} &= \frac{2 \ln^3 \omega}{3 \omega} + 3 \frac{\ln^2 \omega}{\omega} + \left(6 + \frac{1}{4} + 4\zeta_2 \right) \frac{\ln \omega}{\omega} \\ &+ \left(8\zeta_3 + 12\zeta_2 - 2 + \frac{3}{8} \right) \frac{1}{\omega} \\ &+ 3 \ln^3 \omega + \left(24\zeta_2 + 27 - \frac{1}{4} \right) \ln \omega + O(1). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Die endlichen Terme können in zwei Gruppen unterschieden werden. Die erste Gruppe besteht aus den Beiträgen, die aus der Tatsache resultieren, daß man in dem "quasi 3 Jet"-Term (3.5) in der Funktion T der Limes $y_{13} \rightarrow 0$ ausgeführt hat, um die Pole in ϵ berechnen zu können. Dies resultiert in einer Änderung der 3-Jet-Variablen in (3.7). Es muß hier unterstrichen werden, daß dies nicht vernachlässigbar ist.

Weiterhin sind dies alle Beiträge, die von vorneherein nicht aus den Pol-Beiträgen in y_{13} folgen.

Zuerst soll nun auf die Beiträge eingegangen werden, die aus der Differenz

$$\Delta T := T(y_{134}, y_{24} + y_{13}) - T(y_{134}, y_{24} - y_{13}) \quad (3.23)$$

resultieren. Hier tauchen Integrationen auf, die sich prinzipiell von denen unterscheiden, die zur Berechnung des Beitrages von K_{CF}^s notwendig waren und sollen daher hier kurz beschrieben werden. Mit ganz wenigen Ausnahmen lassen sich in allen übrigen Fällen die Integrale, die zu berechnen sind, auf diese beiden Klassen zurückführen. Der Beitrag, der aus der Ausführung des Limes $y_{13} \rightarrow 0$ folgt, lautet

$$K_{CF}^T = 48 C_F^2 \frac{2}{y_{134}} \left(1 - \frac{1 + (1 - y_{134})^2}{(y_{24} + y_{13})(y_{24} - y_{13})} \right) \left(-1 - v + \frac{2y_{123}}{y_{13} + y_{23}} \right). \quad (3.24)$$

Die Integrationen über \mathcal{V} , v und y_{13} können ausgeführt werden, ohne daß eine Spezifizierung der einzelnen Korrelationen notwendig ist

$$\begin{aligned} \int d\zeta_{13} \frac{K_{CF}^T}{48 C_F^2} &= -\frac{3}{y_{134}} \left(y_{123} y_{134} - \frac{1}{2} \frac{1 + (1 - y_{134})^2}{y_{24} - y_{13}} \ln \left(1 + \frac{2y_{123} y_{134}}{y_{24} - y_{13}} \right) \right) \\ &- \frac{4}{y_{134}} \left[y_{123} y_{134} (-1 + \ln y_{134}) \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \frac{1 + (1 - y_{134})^2}{y_{24} - y_{13}} \left(\text{Li}_2 \left(-\frac{2y_{123} y_{134}}{y_{24} - y_{13}} \right) + \ln y_{134} \ln \left(1 + \frac{2y_{123} y_{134}}{y_{24} - y_{13}} \right) \right) \right] \\ &+ \int d\zeta_{13} \frac{\Delta K_{CF}^T}{48 C_F^2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

mit

$$\Delta K_{CF}^T = 48 C_F^2 \frac{2y_{13}}{y_{13} + y_{23}} (T(y_{134}, y_{24} + y_{13}) - T(y_{134}, y_{24} - y_{13})). \quad (3.26)$$

Für alle drei Korrelationen ist der Beitrag ΔK_{CF}^T maximal von der Ordnung $1/\omega$ und wird daher numerisch behandelt. Für die L -Korrelation gilt

$$\begin{aligned} \frac{L_{CF}^T}{48 C_F^2} &= \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)^2}{(\omega+x)^3} \frac{1}{x} \left[\frac{x^2(1-x)}{x+\omega} - \frac{1}{2} \frac{1+(1-x)^2}{\omega(1-x)} (x+\omega) \ln \left(1 + \frac{2}{\omega} x^2 \right) \right] \\ &- \int_0^1 dx \frac{x^3(1-x)^3}{(\omega+x)^4} (-1 + \ln x) \\ &+ \int_0^1 dx \frac{x(1-x)^2}{(\omega+x)^2} \frac{2}{\omega} \left(\text{Li}_2 \left(-\frac{2}{\omega} x^2 \right) + \ln x \ln \left(1 + \frac{2}{\omega} x^2 \right) \right) \cdot (1 + (1-x)^2) \\ &+ \frac{\Delta L_{CF}^T}{48 C_F^2}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Hier ergeben sich Integrale, die $\ln(1 + \alpha x^2)$, $\ln x \ln(1 + \alpha x^2)$ und $\text{Li}_2(-\alpha x^2)$ enthalten. Im folgenden werden solche Integrale als "quadratische" Integrale bezeichnet. Zur Berechnung solcher quadratischer Integrale ist eine völlig andere Berechnungsmethode nötig als im Falle der "linearen" Integrale. Viele der nachfolgenden Rechnungen, auch für Terme mit Colorfaktoren $C_F N_c$, benötigen diese "quadratischen" Integrale. Diese

Integrale sind in den gängigen Formelsammlungen nicht zu finden und mußten daher durch neu entwickelte Methoden berechnet werden. Eine vollständig analytische Berechnung war meist nicht möglich. Hier wie im folgenden sind jedoch nur die auftretenden Divergenzen in ω relevant. Daher wurden Näherungsformeln für die auftretenden "quadratischen" Integrale bestimmt, deren Fehler für $\omega \rightarrow 0$ gegen Null gehen. Um eine Berechnung dieser Integrale mit REDUCE Programmen zu ermöglichen, mußten weiterhin Rekursionsformeln entwickelt werden, die die einzelnen Integrale miteinander verbinden. (Für Einzelheiten siehe Anhang) Die Berechnungen, die notwendig sind, um die M - und N -Korrelationen für $K_{C_F}^T$ zu erhalten, sind ebenfalls recht umfangreich, können aber im wesentlichen auf die Ausführung der erwähnten "linearen" und "quadratischen" Integrale zurückgeführt werden. Ohne die Berechnung dieser "quadratischen" Integrale wäre eine genaue Bestimmung der Koeffizienten der Divergenzen in ω gar nicht möglich gewesen.

Mit Hilfe dieser Integrale kann man die notwendigen Berechnungen für $K_{C_F}^T$ ausführen und es folgt schließlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_{C_F}} \frac{d\Sigma}{d \cos \chi} \Big|_{K_{C_F}^T} &= \frac{1}{2} \frac{\ln^3 \omega}{\omega} + \left(-\frac{3}{2} \ln 2 + \frac{9}{4} \right) \frac{\ln^2 \omega}{\omega} + \left(-\frac{3}{2} \ln^2 2 - \frac{9}{4} \ln 2 - 8 - \frac{1}{4} \right) \frac{\ln \omega}{\omega} \\ &+ (-7.03182819 \pm 4 \cdot 10^{-8}) \frac{1}{\omega} \\ &+ (-31.1002 \pm 4.3 \cdot 10^{-4}) \frac{\ln \omega}{\sqrt{\omega}} + (31.41 \pm 9 \cdot 10^{-3}) \frac{1}{\sqrt{\omega}} \\ &+ (2.43 \pm 0.02) \ln^3 \omega + (-11.1 \pm 0.5) \ln^2 \omega + (35 \pm 5) \ln \omega. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Hier treten zum ersten Mal Divergenzen der Art $\ln \omega / \sqrt{\omega}$ und $1/\sqrt{\omega}$ auf. Die Ursache für diese Art von Divergenzen in ω scheint ein Artefakt zu sein, das der Verwendung der 3-Jet-Näherung im 4-Teilchen Phasenraum entspringt. In der L -Korrelation tritt im behandelten Term $K_{C_F}^T$ nach Integration über y_{13} eine Abhängigkeit von der Größe

$$\frac{y_{13}}{y_{24} - y_{13}} \Big|_{y_{13}=y_{123}y_{134}} = \frac{y_{134}^2}{\omega} = \left(\frac{y_{134}}{\sqrt{\omega}} \right)^2 \quad (3.29)$$

auf. Für das Auftreten der Terme proportional zu $1/\sqrt{\omega}$ ist also die obere Grenze der Integration über y_{13} verantwortlich. Diese ist jedoch durch die 3-Jet-Näherung nach Gleichung (2.33) verändert worden. Es ist deshalb nicht auszuschließen, daß solche Beiträge in einer ungenäherten Berechnung verschwinden.

3.1.2 nicht-singuläre Beiträge

Die Terme $K_{C_F}^{11}$, $K_{C_F}^{21}$, $K_{C_F}^{22}$, $K_{C_F}^{32}$, $K_{C_F}^{41}$ und $K_{C_F}^{61}$ resultieren aus Beiträgen zum Matrixelement, die von vornherein endlich im Limes $y_{13} \rightarrow 0$ waren. Von diesen liefert nur $K_{C_F}^{41}$

Beiträge, die wie $\ln \omega / \omega$ divergieren. Sämtliche anderen Beiträge sind in allen drei Korrelationen höchstens wie $1/\omega$ divergent und werden daher entweder numerisch behandelt oder mit analytischen Methoden, die bereits bei der Berechnung der Terme $K_{C_F}^{21}$ und $K_{C_F}^{22}$ beschrieben wurden und auf die daher nicht mehr näher eingegangen werden muß. Vom Beitrag L_{41} lassen sich drei Terme abspalten, die die auftretenden Divergenzen in $\ln \omega / \omega$ enthalten, so daß der Rest nur noch von Ordnung $1/\omega$ ist. Die Abspaltung erfolgt nicht willkürlich. Die Struktur des Beitrags ist derart, daß eine Abhängigkeit von den Variablen v und ϑ' in den führenden Divergenzen auftritt. Die Berechnung in der 3-Jet-Näherung legt aber nahe, daß diese Abhängigkeit nicht besonders stark ist, da die erwähnten Variablen aus dem abgespaltenen 2-Teilchen-Phasenraum in (2.14) kommen.

Hier liegen nun Faktoren der Art

$$D(v, \vartheta') = \frac{v}{a(v) + b(v) \cos \vartheta'} \quad (3.30)$$

in $K_{C_F}^{41}$ vor. Die Abspaltung erfolgt nun derart, daß für die verschiedenen Faktoren $D(v, \vartheta')$ der Maximalwert angesetzt wird. Dies erfordert nur simple Extremalwertberechnung. Weiterhin liefern nicht alle Terme, die proportional zu Faktoren wie $D(v, \vartheta')$ sind. Beiträge proportional zu $\ln \omega / \omega$. Es ist günstig die Terme

$$K_{41}^I := -\frac{2y_{123}}{y_{134} y_{24} - y_{13} + 2y_{134} y_{13} + (y_{134} - y_{13})v} \frac{1}{v} \quad (3.31)$$

$$K_{41}^{II} := \frac{2y_{123} y_{123} - y_{13}}{y_{134} y_{13} + y_{23} y_{123} y_{134} - y_{13}(1 - y_{123})} \frac{1}{v} \quad (3.32)$$

$$K_{41}^{III} := \frac{4}{y_{123}^2} \frac{y_{123} - y_{13}}{y_{13} + y_{23}} \frac{1}{y_{13} + y_{24}} \frac{1}{y_{134}} \frac{1}{1 - y_{123}} \quad (3.33)$$

abzuspalten. Die notwendige Art der Behandlung dieser Terme ist unterschiedlich. Führt man die ersten Integrationen aus, so ergibt sich

$$J_{41}^I = - \int_0^1 dy_{134} \frac{y_{123}^2}{\omega + y_{134} - y_{123} + y_{134}} \frac{2y_{123}^2}{y_{134}(1 - y_{123})} \left[\frac{\ln y_{123}}{y_{123} y_{134}} - \frac{1}{y_{123} y_{134}} (\text{Li}_2(1 - y_{123}) - \zeta_2) \right] \quad (3.34)$$

mit

$$y_{123} = \frac{y_{134}(1 - y_{134})}{\omega + y_{134}}. \quad (3.35)$$

Der Term proportional zu $\text{Li}_2(1 - y_{123})$ ist von Ordnung $1/\omega$ und wird daher numerisch behandelt. Schwierigkeiten ergeben sich jedoch mit den anderen beiden Faktoren aufgrund der Tatsache, daß

$$\frac{1}{1 - y_{123}} = \frac{\omega + y_{134}}{\omega + y_{134}^2} \quad (3.36)$$

und

$$\frac{1}{1 - y_{123} + y_{134}} = \frac{\omega + y_{134}}{\omega(1 + y_{134}) + 2y_{134}^2} \quad (3.37)$$

gilt. Es tauchen hier also verschiedene Quadrate in den Integrationsvariablen y_{134} im Nenner auf. Eine Berechnung ist dennoch möglich. Allerdings muß eine eigenwillige Abspaltung

$$L_{41}^{I,a} := - \int_0^1 dy_{134} \frac{y_{123}^2}{\omega + y_{134}} y_{134} (1 - y_{134})^2 \left(\frac{2}{3} \frac{1}{(y_{134} + \sqrt{\omega})^4} + \frac{1}{3} \frac{1}{(y_{134} + \sqrt{\frac{\omega}{2}})^4} \right) \quad (3.38)$$

vorgenommen werden. Der Term proportional zu ζ_2 kann ebenfalls bestimmt werden. Dabei spaltet man

$$L_{41}^{I,b} := - \zeta_2 \int_0^1 dy_{134} \frac{y_{123}^2}{\omega + y_{134}} \frac{1 - y_{134}}{y_{134}^2 + \frac{\omega}{2}} \quad (3.39)$$

ab. Die Differenz $L_{41}^I - L_{41}^{I,a} - L_{41}^{I,b}$ ist dann numerisch behandelbar.

Auf den Term L_{41}^{II} braucht nicht näher eingegangen zu werden, da sich bei der Berechnung nach Ausführung der Integrationen $\int d\zeta_{13}$ ergibt, daß sich der Integrand in einen Beitrag aufspalten läßt, der nur wie $1/\omega$ divergiert und einen Beitrag, der nur aus "linearen" Integralen besteht.

Für den Term L_{41}^{III} ergibt sich nach den ersten Integrationen

$$L_{41}^{III} = - \int_0^1 \frac{1}{\omega + y_{134}} \frac{1}{y_{134}} \left[\frac{1}{2} \ln y_{134} \left(\ln(1 + \frac{y_{134}}{\omega}) + \ln(1 + \frac{y_{134}}{\omega + y_{134}}) \right) + \text{Li}_2\left(-\frac{y_{134}}{\omega}\right) \right] \quad (3.40)$$

Der erste Term läßt sich mit Hilfe elementarer Partialbruchzerlegungen und partieller Integration lösen. Der zweite und der dritte Term werden nach Substitutionen wie

$$z = \frac{x}{x + \omega} \quad , \quad y = \frac{z + \omega}{z - \omega} \quad (3.41)$$

lösbar.

Es verbleiben noch die Divergenzen in N_{41} . Terme proportional zu $\ln \omega/\omega$ in N_{41} können durch den Term K_{41}^{II} (3.32) abgespalten werden. Aufgrund der Struktur des Terms und der Tatsache, daß hier eine andere Korrelation betrachtet wird, ergeben sich jedoch bei der Berechnung keine nennenswerten Schwierigkeiten. Im Endeffekt können alle Berechnungen durch "lineare" Integrale ausgeführt werden.

Summiert man alle Beiträge der endlichen Terme auf, so ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_{CF}} \frac{d\Sigma}{d \cos \chi} \Big|_{\Sigma K_{CF}^2} &= \left(1 - \frac{7}{4} \zeta_2\right) \frac{\ln \omega}{\omega} + (3.0196593 \pm 1 \cdot 10^{-7}) \frac{1}{\omega} \\ &(11.518 \pm 3 \cdot 10^{-3}) \frac{\ln \omega}{\sqrt{\omega}} + (16.81 \pm 7 \cdot 10^{-2}) \frac{1}{\sqrt{\omega}} \\ &(0.9 \pm 0.1) \ln^3 \omega + (-15 \pm 5) \ln^2 \omega + (-160 \pm 50) \ln \omega \end{aligned} \quad (3.42)$$

Hierbei stammen die Fehler der Koeffizienten praktisch ausschließlich aus dem Beitrag K_{CF}^{41} .

3.2 Colorfaktor $C_F N_c$

Die Berechnung der Terme proportional zu $C_F N_c$ besteht aus zwei Anteilen. Zum einen sind dies die Terme, die Pole in y_{13} enthalten, zum anderen Terme, die Pole in y_{34} enthalten. Eine Aufteilung auf diese beiden Gruppen ist für diejenigen Terme, die keine Pole mehr enthalten, wie in [8] beschrieben, meist willkürlich. Um eine Vergleichbarkeit zu gewährleisten, wird der Aufspaltung aus [8] gefolgt. Zuerst werden die Terme proportional zu $1/y_{13}$, bzw. die dieser Gruppe zugeordneten konvergenten Beiträge (A.14)-(A.19) behandelt.

3.2.1 Singuläre y_{13} -Beiträge

Zuerst wird wieder der "quasi-3-Jet"-Term betrachtet. Dieser lautet

$$\frac{BC_{13}^*}{y_{13}} = \frac{48 C_F N_c}{y_{13}} T(y_{134}, y_{13} + y_{24}) \left(\frac{y_{134}}{y_{13} + y_{34}} - \frac{y_{123}}{y_{13} + y_{23}} \right) \quad (3.43)$$

Entsprechend der Vorgehensweise im Falle des Colorfaktors C_F^2 wird die folgende Aufspaltung durchgeführt

$$\frac{\overline{BC}_{13}^*}{y_{13}} = \frac{48 C_F N_c}{y_{13}} T(y_{134}, y_{24} - y_{13}) \left(\frac{y_{134}}{y_{13} + y_{34}} - \frac{y_{123}}{y_{13} + y_{23}} \right) \quad (3.44)$$

$$K_{N_c}^T = \frac{48 C_F N_c}{y_{13}} \Delta T \left(\frac{y_{134}}{y_{13} + y_{34}} - \frac{y_{123}}{y_{13} + y_{23}} \right) \quad (3.45)$$

mit ΔT wie in Gleichung (3.23) definiert. In beiden Beiträgen wird der Term proportional zu $y_{123}/(y_{13} + y_{23})$ im normalen "1-3"-System berechnet. Beim Term $y_{134}/(y_{13} + y_{34})$ wird bei der Parametrisierung des Phasenraums von der Freiheit gebrauch gemacht, den Impuls $\vec{p}_4 \parallel \vec{e}_z$ zu wählen und somit die Berechnungen im "1-3"-System durchzuführen. Dies hat zur Folge, daß der Term nicht von der Variablen ϑ' abhängt. Dies vereinfacht die Rechnung und die Wahl der Parametrisierung darf keinen Einfluß auf das Ergebnis haben. Allerdings muß man beachten, daß man es nun mit verschiedenen Winkelvariablen ϵ und ϑ' in den beiden Summanden zu tun hat. Erst nachdem diese Integrationen ausgeführt sind, darf man für nachfolgende Integrationen die beiden Integranden wieder addieren.

Führt man nun die Integration über $\int d\zeta_{13}$ aus, so folgt

$$\begin{aligned} \int d\zeta_{13} \frac{\overline{BC}_{13}^*}{y_{13}} &= 48 C_F N_c T(y_{134}, y_{24} - y_{13}) \frac{\Gamma^2(1 - \epsilon)}{\Gamma(1 - 2\epsilon)} \frac{1}{2\epsilon} \ln \left(\frac{y_{123}}{y_{134}} \right) \\ &+ 48 C_F N_c T(y_{134}, y_{24} - y_{13}) \left\{ \frac{3}{4} \ln^2 y_{134} - \frac{3}{4} \ln^2 y_{123} \right. \\ &\quad \left. - \text{Li}_2(1 - y_{123}) + \text{Li}(1 - y_{134}) \right\} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Der Polterm in ϵ hebt sich gegen entsprechende Pole der 3-Jet-Beiträge weg. Es ist zu beachten, daß hierfür auch die Terme, die aus der Vertauschung der Indizes (1 \leftrightarrow 2), (3 \leftrightarrow 4) und (1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4) resultieren, benötigt werden. Wie üblich kann diese Vertauschung in den endlichen Termen durch einen Faktor 4 berücksichtigt werden. Ebenso wie bei den Termen proportional zu C_F^2 müssen endliche Anteile aus dem 3-Jet-Beitrag, die nicht in der Funktion F berücksichtigt wurden, in dem endlichen Rest von \overline{BC}_{13} absorbiert werden. Daher ist

$$K_{N_c}^{\lambda} = 48 C_F N_c T(y_{134}, y_{24} - y_{13}) \left\{ \frac{1}{2} \ln^2 y_{134} - \frac{1}{2} \ln^2 y_{123} - \frac{1}{4} \ln^2(y_{24} - y_{13}) - \text{Li}_2(1 - y_{123}) + \text{Li}_2(1 - y_{134}) + \zeta_2 \right\} \quad (3.47)$$

Hiermit sind sämtliche endlichen Terme proportional zu $T(y_{134}, y_{24} - y_{13})$ aus dem 3-Teilchen-Matrixelement berücksichtigt. In den noch zu behandelnden Termen proportional zu C_{34} brauchen daher keine derartigen Terme berücksichtigt werden. Bei der Integration dieser Terme ergeben sich keine wesentlichen Probleme. Man muß bei der Berechnung der L -Korrelation von der Näherung

$$\text{Li}_2(1 - y_{123}) \simeq \frac{1 - y_{123}}{y_{134}} \text{Li}_2(y_{134}) \quad (3.48)$$

Gebrauch machen. Die resultierende Differenz zum Originalterm in (3.47) kann numerisch behandelt werden. Diese Art Näherung tritt in vielen Berechnungen der Terme proportional zu $C_F N_c$ auf. Bei der M -Korrelation tritt ähnliches auf, während die N -Korrelation völlig problemlos zu berechnen ist. Es müssen nur die "linearen" Integrale verwendet werden. Die notwendigen Berechnungen sind umfangreich, können jedoch mit Hilfe von REDUCE-Programmen durchgeführt werden. Das Ergebnis für den Term $K_{N_c}^{\lambda}$ lautet schließlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_{N_c}} \frac{d\Sigma}{d \cos \chi} \Big|_{K_{N_c}^{\lambda}} &= -\frac{1 \ln^3 \omega}{6 \omega} - \frac{3 \ln^2 \omega}{8 \omega} + \frac{\ln \omega}{\omega} \left(-\frac{3}{4} - 5\zeta_2 \right) \\ &+ \frac{1}{\omega} \left(-21.15568464 \pm 1 \cdot 10^{-9} \right) \\ &+ \ln^3 \omega \left(-\frac{5}{3} \right) + \ln^2 \omega \left(-2 - \frac{3}{2} \right) + \ln \omega \left(-49.564 \pm 3 \cdot 10^{-3} \right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Als nächstes wird der Term $K_{N_c}^T$ aus (3.45) behandelt. Der Term proportional zu $y_{123}/(y_{13} + y_{23})$ wurde so schon im Abschnitt über C_F^2 -Terme behandelt und kann daher dort abgelesen werden. Für die Berechnung des Terms proportional zu $y_{134}/(y_{13} + y_{34})$ wird die Parametrisierung im "1-3"-System durchgeführt.

Für die Berechnung der L -Korrelation ist es notwendig, den Term

$$\Delta K_{N_c}^T := 48 C_F N_c \frac{1 + (1 - y_{134})^2}{y_{13} + y_{24}} \frac{2}{y_{13} + y_{34}} \frac{y_{134}}{(1 - y_{123})(1 - y_{134}) + y_{123} y_{134}} \quad (3.50)$$

abzuspalten, der numerisch behandelt wird, da dies die analytische Berechnung des Restterms ermöglicht. Hierbei treten nur die genannten "linearen" und "quadratischen" Integrale auf, bzw. Anteile die numerisch behandelt werden. Eine Ausnahme bildet ein Term, der proportional zu $1/(2y_{134} + \omega)$ wird und daher eine umfangreiche Partialbruchzerlegung erfordert. Für die M -Korrelation braucht nur auf schon behandelte Methoden zurückgegriffen werden, während die N -Korrelation sogar nur einen konstanten Beitrag liefert. Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_{N_c}} \frac{d\Sigma}{d \cos \chi} \Big|_{K_{N_c}^T} &= \frac{\ln^3 \omega}{\omega} \left(-\frac{1}{12} \right) + \frac{\ln^2 \omega}{\omega} \left(\frac{\ln 2}{4} \right) + \frac{\ln \omega}{\omega} \left(-\frac{1}{4} \ln^2 2 + \frac{5}{2} \zeta_2 + \frac{1}{2} \right) \\ &+ \frac{1}{\omega} \left(22.516384 \pm 1 \cdot 10^{-7} \right) \\ &+ \frac{\ln \omega}{\sqrt{\omega}} \left(16.661 \pm 1 \cdot 10^{-3} \right) + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \left(28.263 \pm 1 \cdot 10^{-3} \right) \\ &+ \ln^3 \omega \left(-0.16 \pm 0.03 \right) + \ln^2 \omega \left(11.0 \pm 1.2 \right) + \ln \omega \left(48.4 \pm 33.2 \right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

3.2.2 Nicht-singuläre y_{13} -Beiträge

Als nächstes werden nun die reinen "4-Jet"-Beiträge aus (A.14)-(A.19) behandelt. In jedem Fall wird bei diesen Termen das "1-3"-System zur Parametrisierung des Phasenraums verwandt, wie es die Struktur der Terme nahelegt. Bei all diesen Termen sind die M - und die N -Korrelation maximal von Ordnung $1/\omega$ und werden daher numerisch behandelt. Auf diese Terme wird daher nicht näher eingegangen. Der Term $K_{N_c}^{III}$ ist in allen drei Korrelationen maximal proportional $1/\omega$ und könnte daher numerisch bearbeitet werden, jedoch ergeben sich aus der Struktur der Terme Probleme mit der Numerik. Allerdings ist eine analytische Behandlung ohne weiteres möglich.

Die Terme $K_{N_c}^{IV}$, $K_{N_c}^V$ und $K_{N_c}^{VI}$ liefern in der L -Korrelation Beiträge proportional zu $\ln \omega/\omega$. Der Term $K_{N_c}^{IV}$ wird berechenbar, wenn man

$$L_{IV}^s := 2 \frac{N_c}{C_F} L_{41}^{I,a} \quad (3.52)$$

abspaltet. Wie man sieht ist dieser Term schon bei den C_F^2 -Termen behandelt worden. Der Beitrag $K_{N_c}^V$ wird berechenbar, wenn man

$$K_V^s := 48 C_F N_c \frac{y_{123}}{y_{13} + y_{34}} \frac{1}{y_{13} + y_{24}} \frac{1}{y_{24} + y_{34}} \frac{y_{134} - y_{13}}{y_{134}} \quad (3.53)$$

abspaltet, da die Differenz mit $K_{N_c}^V$ numerisch behandelbar ist.

Führt man die ersten Integrationen aus, so folgt

$$I_{N_c}^s = F_{N_c} \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)^2}{(x+\omega)^3} \frac{1}{2\omega} \left[\frac{1}{2} \ln^2 \left(1 + \frac{\omega}{2x^2} \right) + \text{Li}_2 \left(-\frac{\omega}{2x^2} \right) + \zeta_2 \right. \\ \left. + \text{Li}_2 \left(-\frac{\omega}{\omega + 2x^2} \right) - \text{Li}_2(-1) + \ln \left(\frac{x^2 + x\omega}{x^2 + \omega} \right) \ln \left(1 + \frac{2x^2}{\omega} \right) \right] \quad (3.54)$$

wenn man wieder $y_{134} = x$ setzt. Dieser Term ist nicht vollständig berechenbar, jedoch sind die hauptsächlichsten Divergenzen in

$$I_{N_c}^{s,an} = F_{N_c} \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)^2}{(x+\omega)^3} \frac{1}{2\omega} \left[-\ln x \ln \left(1 + \frac{2x^2}{\omega} \right) - \text{Li}_2 \left(-\frac{2x^2}{\omega} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x}{\omega} \right) \ln \left(1 + \frac{2x^2}{\omega} \right) \right] \\ + F_{N_c} \frac{1}{\omega} \int_0^1 dx \frac{2x^2}{\omega + 2x^2} \left(\text{Li}_2 \left(-\frac{\omega}{\omega + 2x^2} \right) - \text{Li}_2(-1) \right) \quad (3.55)$$

enthalten. Der Rest wird wieder numerisch behandelt. Für den Beitrag der ersten Integrale werden die "quadratischen" Integrale benötigt, während für den Integrand des zweiten Integrals eine Stammfunktion angegeben werden kann.

Die kompliziertesten Berechnungen waren für $K_{N_c}^{VI}$ nötig. Man kann die führenden Divergenzen in die Terme

$$K_{N_c}^{VI,1} := 48 C_F N_c \frac{y_{123}}{y_{234}} \frac{1 + y_{134}}{y_{134}} \frac{1}{y_{13} + y_{34}} \frac{1}{y_{13} + y_{24}} \quad (3.56)$$

$$K_{N_c}^{VI,2} := -48 C_F N_c \frac{2y_{123}}{y_{134}} \frac{1}{y_{13} + y_{34}} \frac{1}{y_{13} + y_{24}} \quad (3.57)$$

$$K_{N_c}^{VI,3} := 48 C_F N_c \frac{y_{123}}{y_{134}} \frac{1}{y_{13} + y_{34}} \frac{y_{123}(1-v)}{y_{13} + y_{24}} \quad (3.58)$$

abspalten. Hierbei ist in (3.56)

$$y_{234} := y_{24} + y_{34} + y_{123}(1-v). \quad (3.59)$$

Die Parametrisierung ist in (3.56) und (3.58) schon auf das "1-3"-System festgelegt. Die Differenz $K_{N_c}^{VI} - (K_{N_c}^{VI,1} + K_{N_c}^{VI,2} + K_{N_c}^{VI,3})$ ist numerisch behandelbar. Die bei weitem größten Schwierigkeiten bereite der Term $K_{N_c}^{VI,1}$. Daher soll dieser Term nun etwas genauer behandelt werden. Führt man die Winkelintegrationen über v und θ' aus, so folgt

$$\frac{L_{N_c}^{VI,1}}{F_{N_c}} = \int_0^1 dy_{134} \frac{y_{123}^2}{\omega + y_{134}} \int_0^{y_{123}y_{134}} dy_{13} \frac{y_{123}}{y_{134}} \ln \left(\frac{y_{13}}{y_{24}y_{134}} \right) \\ \times \frac{(-1)}{y_{24} - y_{13}} \left\{ \frac{2}{y_{24} + y_{13}} + \frac{1 - y_{134}}{y_{24}y_{134} - y_{13}} \right\} \quad (3.60)$$

Der erste Term in der geschweiften Klammer ist über y_{13} integrierbar. Schwierigkeiten ergeben sich nur insoweit, als daß das Argument des Logarithmus verschieden vom Nenner ($y_{13} + y_{24}$) ist. Es gilt

$$\int_0^{y_{123}y_{134}} dy_{13} \frac{2}{y_{13} + y_{24}} \ln \left(\frac{y_{13}}{y_{24}y_{134}} \right) = \\ -\frac{1}{4} \ln^2 \left(y_{123}y_{134} + \frac{y_{24} - y_{13}}{2} \right) + \frac{1}{4} \ln^2 \left(\frac{y_{24} - y_{13}}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln y_{123} \ln \left(1 + \frac{2y_{123}y_{134}}{y_{24} - y_{13}} \right) \\ - \frac{1}{2} \text{Li}_2 \left(-\frac{y_{24} - y_{13}}{y_{24} - y_{13} + 2y_{123}y_{134}} \right) - \text{Li}_2(-1) + \frac{1}{2} \text{Li}_2 \left(-\frac{2y_{123}y_{134}}{y_{24} - y_{13}} \right) \quad (3.61)$$

Die Berechnung des zweiten Terms in (3.60) war nur mit Mühe möglich. Bei

$$y_{13}^0 := \frac{y_{134}(1 - y_{123} - y_{134})}{1 - y_{134}} \quad (3.62)$$

liegt ein Pol in y_{13} vor, da der Nenner des betrachteten Terms hier Null wird. Am Punkt $y_{13} = y_{13}^0$ wird jedoch auch das Argument des logarithmischen Vorfaktors gleich eins. Zur Berechnung spaltet man den Integrationsbereich daher auf in

$$\int_0^{y_{123}y_{134}} dy_{13} = \int_0^{y_{13}^0} dy_{13} + \int_{y_{13}^0}^{y_{123}y_{134}} dy_{13} \quad (3.63)$$

Führt man nun die Integration über dy_{13} aus, so folgt

$$\int_0^{y_{123}y_{134}} dy_{13} \frac{1 - y_{134}}{y_{24}y_{134} - y_{13}} \ln \left(\frac{y_{13}}{y_{24}y_{134}} \right) = \\ \text{Li}_2(y_{134}) - \text{Li}_2(1) - \text{Li}_2 \left(y_{134} \left(1 - \frac{y_{123}(1 - y_{134})}{y_{24} - y_{13}} \right) \right) + \text{Li}_2 \left(1 - \frac{y_{123}(1 - y_{134})}{y_{24} - y_{13}} \right) \quad (3.64)$$

Mit diesen Berechnungen ist jedoch nur der erste Schritt getan. Es müssen noch einige

Abspaltungen entsprechend wie in Gleichung (3.48) durchgeführt werden.

$$\begin{aligned}
\frac{L_{N_c}^{VI,1}}{F_{N_c}} &= (-) \int_0^1 dy_{134} \frac{y_{123}^2}{\omega + y_{134}} \frac{1}{y_{24} - y_{13}} \frac{y_{123}}{y_{134}} \\
&\cdot \left[2\text{Li}_2 \left(-\frac{2y_{123}y_{134}}{y_{24} - y_{13}} \right) + \text{Li}_2(-1) - \ln \left(\frac{y_{24} - y_{13}}{2y_{123}} \right) \ln \left(1 + \frac{2y_{123}y_{134}}{y_{24} - y_{13}} \right) \right. \\
&- \text{Li}_2(-1) \frac{y_{24} - y_{13}}{y_{24} - y_{13} + 2y_{123}y_{134}} + \text{Li}_2(1) \frac{2y_{123}y_{134}}{y_{24} - y_{13} + 2y_{123}y_{134}} \\
&+ \text{Li}_2(y_{134}) - \text{Li}_2(1) - \frac{1}{1 - y_{134}} \text{Li}_2 \left(-\frac{y_{123}y_{134}}{y_{24} - y_{13}} \right) - \zeta_2 \frac{y_{134}}{1 - y_{134}} \\
&- \frac{1}{2} \frac{y_{134}}{1 - y_{134}} \ln^2 \left(\frac{y_{123}y_{134}}{y_{24} - y_{13}} \right) + \ln(1 - y_{134}) \ln^2 \left(\frac{y_{123}y_{134}}{y_{24} - y_{13}} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \ln^2(1 - y_{134}) - \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{y_{123}(1 - y_{134})}{y_{24} - y_{13}} \right) \\
&\left. - \left(1 - \frac{y_{24} - y_{13}}{y_{123}(1 - y_{134})} \right) \text{Li}_2(1) \right] + \Delta L_{N_c}^{VI,1}
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Da die Abspaltungen hier ziemlich kompliziert waren, sollen auch die numerisch behandelten Terme genannt werden.

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta L_{N_c}^{VI,1}}{F_{N_c}} &= (-) \int_0^1 dy_{134} \frac{y_{123}^2}{\omega + y_{134}} \frac{1}{y_{24} - y_{13}} \frac{y_{123}}{y_{134}} \\
&\cdot \left[- \left(\text{Li}_2 \left(y_{134} \left(1 - \frac{y_{123}(1 - y_{134})}{y_{24} - y_{13}} \right) \right) - \text{Li}_2 \left(-\frac{y_{123}y_{134}}{y_{24} - y_{13}} (1 - y_{134}) \right) \right) \right. \\
&+ \left(\text{Li}_2 \left(-\frac{y_{24} - y_{13}}{y_{123}y_{134}(1 - y_{134})} \right) - \frac{1}{1 - y_{134}} \text{Li}_2 \left(-\frac{y_{24} - y_{13}}{y_{123}y_{134}} \right) \right) \\
&+ \left(\left(1 - \frac{y_{24} - y_{13}}{y_{123}(1 - y_{134})} \right) \text{Li}_2(1) - \text{Li}_2 \left(1 - \frac{y_{24} - y_{13}}{y_{123}(1 - y_{134})} \right) \right) \\
&- \left(\text{Li}_2 \left(-\frac{y_{24} - y_{13}}{y_{24} - y_{13} + 2y_{123}y_{134}} \right) - \text{Li}_2(-1) \frac{y_{24} - y_{13}}{y_{24} - y_{13} + 2y_{123}y_{134}} \right) \\
&\left. + \left(\text{Li}_2 \left(\frac{2y_{123}y_{134}}{y_{24} - y_{13} + 2y_{123}y_{134}} \right) - \text{Li}_2(1) \frac{2y_{123}y_{134}}{y_{24} - y_{13} + 2y_{123}y_{134}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Bei der numerischen Behandlung dieser Terme hat es sich als günstig erwiesen die Dilogarithmen in folgender Form darzustellen

$$\text{Li}_2(-a) = \int_0^{y_{123}y_{134}} dy_{13} \frac{\ln \left(\frac{y_{13}}{y_{123}y_{134}} \right)}{y_{13} + \frac{y_{123}y_{134}}{a}} \tag{3.67}$$

Verwendet man (3.67) und behandelt die Dilogarithmen, die jeweils zusammen in einer runden Klammer stehen, auch numerisch gemeinsam, so lassen sich zufriedenstellende Resultate erzielen. Es sind in (3.65) noch umfangreiche Berechnungen durchzuführen bis die Divergenzen in ω bekannt sind, jedoch beruhen diese alle auf bereits behandelten Methoden.

Der Term $L_{N_c}^{VI,2}$ ist ohne größere Schwierigkeiten berechenbar. Nach Ausführung der ersten Integrationen ist

$$L_{N_c}^{VI,2} = -2F_{N_c} \int_0^1 dy_{134} \frac{y_{123}}{\omega + y_{134}} \frac{y_{123}}{y_{134}} \frac{\zeta_2}{1 - y_{123} + y_{134}} + \Delta L_{N_c}^{VI,2} \tag{3.68}$$

Nur der ausgeschriebene Term enthält Divergenzen proportional zu $\ln \omega / \omega$ und kann mit Hilfe von Partialbruchzerlegungen gelöst werden. Etwas komplizierter ist der Term $L_{N_c}^{VI,3}$. Nach den ersten Integrationen über $d\zeta_{13}$ ist

$$L_{N_c}^{VI,3} = F_{N_c} \int_0^1 dy_{134} \frac{y_{123}}{\omega + y_{134}} \frac{y_{123}^2}{y_{134}} \frac{1}{1 - y_{123} + y_{134}} \left\{ \ln y_{123} \frac{y_{123}}{1 - y_{123}} + \zeta_2 \right\} + \Delta L_{N_c}^{VI,3} \tag{3.69}$$

Der Term proportional zu ζ_2 kann auf ähnliche Weise wie $L_{N_c}^{VI,2}$ berechnet werden. Für den Term proportional zu $\ln y_{123}$ ließ sich keine andere Möglichkeit finden, als die Näherung

$$\ln \left(1 - \frac{\omega}{\omega + y_{134}} \right) \simeq \frac{-\omega}{\omega + y_{134}} \tag{3.70}$$

zu verwenden. Die Differenz zum Originalterm ist dann numerisch behandelbar. Addiert man sämtliche Beiträge proportional zu $C_F N_c$, die aus den endlichen Anteilen resultieren, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F_{N_c}} \frac{d\Sigma}{d \cos \lambda} \Big|_{\text{fin.} N_c} &= \frac{\ln^3 \omega}{\omega} \left(-\frac{1}{24} \right) + \frac{\ln^2 \omega}{\omega} \left(-\frac{1}{8} \ln 2 \right) + \frac{\ln \omega}{\omega} \left(-\frac{3}{2} - \frac{15}{8} \zeta_2 + \frac{1}{8} \ln^2 2 \right) \\
&+ \frac{1}{\omega} (-22.9727730 \pm 5 \cdot 10^{-7}) + \frac{\ln \omega}{\sqrt{\omega}} (-7.750 \pm 3 \cdot 10^{-3}) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\omega}} (-9.67 \pm 0.06) \\
&+ \ln^3 \omega (-0.1 \pm .6) + \ln^2 \omega (-7 \pm 2) + \ln \omega (-205 \pm 31)
\end{aligned} \tag{3.71}$$

3.2.3 y_{34} -Beiträge

Schließlich müssen noch die Terme proportional zu $1/y_{34}$ berechnet werden. Man muß beachten, daß C_{34}^s ausnahmsweise mit allen Vertauschungen der Indizes ausgeschrieben wurde. Dieser Term wird natürlich im "3-4"- bzw. "3-4"-System berechnet. Die Argumentation gilt entsprechend wie beim Term BC_{13}^s . Die Integrationen $\int d\zeta_{34}$ können

ausgeführt werden und es gilt

$$\int d\zeta_{34} \frac{C_{34}^s}{y_{34}} = 2T(y_{134}, y_{234}) \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left[\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{11}{6} - \frac{1}{2} \ln(y_{234}y_{134}) \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \ln^2 y_{134} - \frac{1}{4} \ln^2 y_{234} - \frac{11}{6} \ln(y_{134}y_{234}) \right. \\ \left. - \text{Li}_2(1-y_{134}) - \text{Li}_2(1-y_{234}) + \frac{67}{18} \right] \quad (3.72)$$

Die Pole in ε heben sich gegen entsprechende Terme aus dem 3-Jet Beitrag weg. Zur Berechnung der endlichen Beiträge wird

$$K_{34}^s := \frac{1}{2} T(y_{134}, y_{234}) \left\{ -\frac{1}{2} \ln^2 y_{134} - \frac{11}{3} \ln y_{134} - 2\text{Li}_2(1-y_{134}) + \frac{67}{18} \right\} \quad (3.73)$$

definiert. Hierbei wurde ein Faktor 1/4 künstlich eingeführt, damit der Faktor F_{N_c} nicht geändert werden muß. Weiterhin wurde von der Symmetrie in y_{134} und y_{234} Gebrauch gemacht. Die Berechnung dieses Terms bietet kaum Schwierigkeiten. Nur der Term proportional zum Dilogarithmus muß numerisch behandelt werden.

Wesentlich mehr Schwierigkeiten bietet der Term K_{34}^A . Dieser Term scheint eigentlich eine Berechnung im "3-4"-System nahezuzeigen, jedoch stellt sich heraus, daß dies nicht die günstigste Wahl ist. Im "3-4"-System ließ sich keine analytische Berechnung durchführen und selbst eine numerische Berechnung ist praktisch nicht möglich. Allerdings kann man den Term umschreiben zu

$$K_{34}^A = 48 C_F N_c \left[\frac{y_{12}}{2} \frac{e_1}{y_{34}y_{13}y_{24}} \frac{1}{y_{134}y_{234}} \right. \\ \left. + \frac{y_{12}^2}{2} \frac{1}{y_{24} - y_{13}} \frac{1}{y_{13} + y_{34}} \frac{1}{y_{134}y_{234}} \right. \\ \left. + \frac{y_{12}^2}{2} \frac{1}{y_{13} - y_{24}} \frac{1}{y_{24} + y_{34}} \frac{1}{y_{134}y_{234}} \right] + \Delta K_{34}^A \quad (3.74)$$

mit

$$\Delta K_{34}^A = -48 C_F N_c \frac{y_{12}}{y_{134}y_{234}} \frac{1}{y_{24} - y_{13}} \frac{1}{y_{13} + y_{34}} (y_{13} + y_{34} + y_{24}) \left(\frac{e_1}{y_{13}y_{24}} + 1 \right) \quad (3.75)$$

Der Term in der ersten Zeile von (3.74) kann im "3-4"-System berechnet werden. Für den Term in der zweiten Zeile ist eine Berechnung im "1-3"-System gerechtfertigt. Der dritte Term kann durch Vertauschung der Indizes ($1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4$) in den Term in der zweiten Zeile überführt werden. Obwohl diese Terme aus Beiträgen zu $1/y_{34}$ entstanden sind, weisen sie nun eine Struktur auf, wie ähnliche Terme die bereits im "1-3"-System berechnet wurden. Die Berechnungen ähneln sehr denen, die für $K_{N_c}^{VF}$ notwendig waren.

Diese wurden bereits ausführlich beschrieben, daher kann auf eine Beschreibung hier verzichtet werden. Leider ist der Term ΔK_{34}^A numerisch nur schlecht zu bestimmen und liefert daher fast den gesamten Fehler für die Terme proportional zu $C_F N_c$. Schließlich fehlen noch die Beiträge, die aus den Termen $K_{34}^B, K_{34}^C, K_{34}^D$ und K_{34}^E stammen. Diese sind jedoch sämtlich ohne größere Schwierigkeiten numerisch behandelbar. Somit folgt schließlich für die endlichen Beiträge

$$\frac{1}{F_{N_c}} \frac{d\Sigma}{d \cos \chi} \Big|_{K_{34}} = \frac{\ln^3 \omega}{\omega} \left(\frac{1}{12} \right) + \frac{\ln^2 \omega}{\omega} \left(2 + \frac{5}{24} \right) + \frac{\ln \omega}{\omega} \left(1 + \frac{5}{9} + \frac{7}{2} \zeta_2 \right) \\ + \frac{1}{\omega} (21.8351 \pm 1 \cdot 10^{-4}) + \frac{1}{\sqrt{\omega}} (12.47 \pm 2 \cdot 10^{-2}) \quad (3.76) \\ + \ln^3 \omega (1.0 \pm 0.2) + \ln^2 \omega (6 \pm 4) + \ln \omega (49 \pm 30)$$

Dies schließt die Berechnung der Terme proportional zu $C_F N_c$ ab, die aus den Klassen (B) und (C) stammen.

3.3 4-Quark-Endzustände

In diesem Abschnitt werden nun schließlich noch die Terme untersucht, die aus Beiträgen resultieren, bei denen vier Quarks im Endzustand vorliegen. Hierbei ist zu beachten, daß im Gegensatz zu den in den vorangegangenen Kapiteln behandelten Termen der statistische Faktor $N_s = 1/4$ ist, da hier der Prozess $\gamma^*, Z \rightarrow q\bar{q}q\bar{q}$ betrachtet wird. Es werden zwei Fälle unterschieden. Zum einen sind dies Interferenzterme, bei denen die in den beiden Paaren produzierten Quarkflavors (Klasse E) gleich sind, zum anderen sind dies die Terme, bei denen dies nicht der Fall ist (Klasse D). Diese Terme sind proportional zum Colorfaktor $C_F T_R$ und lassen sich analytisch berechnen. Als Ergebnis für diese Terme folgt

$$\frac{1}{F_{T_R}} \frac{d\Sigma}{d \cos \chi} \Big|_{K_{T_R}} = \frac{\ln^2 \omega}{\omega} \left(-\frac{4}{3} \right) + \frac{\ln \omega}{\omega} \left(\frac{2}{9} \right) + \frac{1}{\omega} \left(3 - \frac{8}{3} \zeta_2 \right) \\ + \ln^2 \omega (-6) + \ln \omega \left(-\frac{34}{3} \right) \quad (3.77)$$

Die Interferenzterme sind proportional zum Colorfaktor $C_F(C_F - N_c/2)$ und lassen sich numerisch bestimmen zu

$$\frac{1}{F_{(C_F - N_c/2)}} \frac{d\Sigma}{d \cos \chi} \Big|_{q\bar{q}q\bar{q}} = \frac{1}{\omega} (-0.9308804 \pm 4 \cdot 10^{-8}) \\ + \ln^2 \omega (7.77 \pm 0.05) + \ln \omega (31 \pm 1.4) \quad (3.78)$$

Dies schließt die Berechnungen der 4-Jet-Beiträge ab.

4 Zusammenfassung und Diskussion

In diesem Kapitel werden nun die Ergebnisse zusammengefaßt und diskutiert. Die Hauptaufgabe dieser Arbeit war es, die Koeffizienten der Divergenzen in ω möglichst genau zu bestimmen um einen Vergleich mit entsprechenden Leading-Log-Vorhersagen zu ermöglichen. Die ursprüngliche Erwartung war, daß die anfängliche Diskrepanz zwischen der Leading-Log-Vorhersage und der perturbativen Berechnung aufgehoben werden kann, wenn man auch die nicht-singulären Beiträge berücksichtigt. Es hat sich jedoch gezeigt, daß diese Anteile höchstens Terme liefern, die wie $C_F^2 \ln \omega/\omega$ für $\omega \rightarrow 0$ divergieren.

Addiert man sämtliche Einzelbeiträge auf und beschränkt sich auf die führenden Divergenzen, d.h. Anteile, die mindestens wie $1/\omega$ divergieren, so gilt

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{\sigma} \frac{d\Sigma}{d \cos \chi} \right|_{LLA} &= \frac{C_F}{8} \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 \frac{1}{\omega} \left\{ \right. \\ &\quad \ln^3 \frac{1}{\omega} \left[\left(-\frac{7}{6} \right) C_F + \frac{5}{24} N_c \right] \\ &\quad + \ln^2 \frac{1}{\omega} \left[\left(\frac{21}{4} - \frac{3}{2} \ln 2 \right) C_F + \left(\frac{11}{6} + \frac{\ln 2}{8} \right) N_c - \frac{1}{3} n_f \right] \\ &\quad + \ln \frac{1}{\omega} \left[\left(1 - \frac{9}{4} \zeta_2 + \frac{3}{2} \ln^2 2 + \frac{9}{4} \ln 2 \right) C_F \right. \\ &\quad \quad \left. + \left(\frac{7}{36} + \frac{7}{8} \zeta_2 + \frac{\ln^2 2}{8} \right) N_c + \left(-\frac{1}{18} \right) n_f \right] \\ &\quad + (23.253054 \pm 1 \cdot 10^{-6}) C_F \\ &\quad \left. + (9.7991 \pm 1 \cdot 10^{-4}) N_c + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \zeta_2 \right) n_f \right\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

wenn man bezüglich der verschiedenen Divergenzen in ω faktorisiert. Gleichung (4.1) ist das hauptsächliche Ergebnis dieser Arbeit.

Den Gesamtbeitrag zur EEC in Ordnung α_s^2 für kleine ω erhält man, wenn man das Resultat für die 3-Jet-Beiträge aus Ref.[6]

$$\begin{aligned} D^f &= \frac{C_F}{8\eta} \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 \left\{ \ln^3 \frac{1}{\eta} \left(-\frac{1}{6} N_c \right) + \ln \frac{1}{\eta} \left[\left(\frac{5}{2} - 4\zeta_2 \right) C_F + \left(\frac{1}{2} + \zeta_2 \right) N_c \right] \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{97}{12} + \frac{17}{9} \pi^2 - 8\zeta_3 \right) C_F + \left(\frac{7}{12} - \frac{25}{8} \pi^2 + 6\zeta_3 \right) N_c \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

hinzuaddiert. Hierbei ist wieder $\eta = \omega(1+\omega)^{-1}$. Da hier das Verhalten für sehr kleine ω betrachtet wird, kann $\eta \simeq \omega$ angenommen werden. Addiert man den 3-Jet-Beitrag (4.2) zum 4-Jet-Beitrag (4.1), so hebt sich der Anteil $N_c \ln^3 \omega/\omega$ fast vollständig heraus. Übrig

bleibt nur ein Koeffizient, der dem der nicht-singulären K_{N_c} -Terme entspricht. Hierbei ist auffällig, daß der Beitrag proportional zu $C_F N_c \ln^2 \omega/\omega 11/6$ genau der Leading-Log-Vorhersage entspricht. Weiterhin ist die bestimmende Größe bei den Berechnungen der nicht-singulären Anteile oft $\omega/2$. Dies resultiert aus Termen, die proportional zu $((y_{24} - y_{13}) + 2y_{13})^{-1}$ sind. Daher kann sowohl der verbleibende, nicht durch die Leading-Log-Vorhersage zu erklärende Beitrag proportional zu $\ln^3 \omega/\omega$ als auch der proportional zu $\ln^2 \omega/\omega$ erklärt werden, wenn man von einem Resultat $-\ln^3(\omega/2)/\omega/24$ in den nicht-singulären Anteilen ausgeht.

Nun erfolgt noch ein Vergleich mit den Resultaten anderer Arbeiten, siehe Tabelle 4.1. Die angegebenen Werte in Tabelle 4.1 entstammen den Arbeiten von Clay, Ellis [13], Ellis, Richards und Stirling [18], und Kramer und Spiesberger [14]. Zunächst wird noch einmal die Definition für die Entwicklungskoeffizienten aufgeschrieben, die schon in der Einleitung erwähnt wurde

$$\left. \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\Sigma}{d \cos \chi} \right|_{LLA} = \frac{1}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{2n-1} {}_n C_m \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^n \ln^m \left(\frac{1}{\omega} \right). \quad (4.3)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird nun noch definiert

$${}_n \hat{C}_m := \frac{8}{C_F} {}_n C_m \quad (4.4)$$

Um einen besseren Vergleich mit den Resultaten anderer Arbeiten zu ermöglichen, wird die Summe aus dem Ergebnis dieser Arbeit, Gleichung (4.1), und dem Beitrag D^f noch als Zahlenwerte dargestellt.

$$\begin{aligned} {}_2 \hat{C}_3 &= C_F(-1.1666) + N_c(0.04166) \\ {}_2 \hat{C}_2 &= C_F(4.2103) + N_c(1.9200) + n_f(-.3333) \\ {}_2 \hat{C}_1 &= C_F(-4.5006) + N_c(3.8388) + n_f(-.05555) \\ {}_2 \hat{C}_0 &= C_F(24.1959) + N_c(-23.0566) + n_f(-.3466) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit den Leading-Log-Vorhersagen, so zeigt sich, daß schon in führender Ordnung der Divergenzen proportional zu C_F^2 und $C_F N_c$ ein Unterschied bestehen bleibt, während die n_f -Beiträge, wie bereits bekannt, übereinstimmen. Die einzige wirkliche Näherung, die im Verlaufe dieser Arbeit verwendet wurde, ist die in Kapitel 2 beschriebene 3-Jet-Näherung. Die dort beschriebene Untersuchung ist letztendlich kein Beweis, jedoch ein deutlicher Hinweis dafür, daß die 3-Jet-Näherung eine sinnvolle Approximation ist. Der dort verwendete Beispielterm stellte sich im Verlaufe der Arbeit als der einzige heraus, der Divergenzen proportional zu $C_F^2 \ln^3 \omega/\omega$ hervorbringt. Die analytische Berechnung dieses Termes ist vergleichsweise einfach und kann

Tabelle 4.1: Die Koeffizienten der einzelnen Divergenzen aus anderen Arbeiten

Koeff.	Leading Log	Clay, Ellis	Ellis, Richards, Stirling	Kramer, Spiesberger
${}_2\hat{C}_3$	$(-1)C_F$	$(-1.0085 \pm .025)C_F$	$(-1.232 \pm .14)C_F$ $(0.0069 \pm 0.12)N_c$	$(-0.92 \pm 0.26)C_F$ $(0.0 \pm 0.03)N_c$
${}_2\hat{C}_2$	$\frac{1}{2}C_F$ $\frac{1}{6}N_c$ $-\frac{1}{3}n_f$	$(4.92 \pm .45)C_F$ $(1.815 \pm .06)N_c$ $(-0.333 \pm 0.0002)n_f$	$(10.5 \pm 4.5)C_F$ $(1.43 \pm 3.62)N_c$ $(-0.337 \pm 0.012)n_f$	$(-0.440 \pm 0.056)C_F$ $(-0.18 \pm 0.036)N_c$ $(-0.338 \pm 0.012)n_f$
${}_2\hat{C}_1$	$-\left(\frac{17}{2} + 2\zeta_2\right)C_F$ $\left(\frac{35}{36} - \zeta_2\right)N_c$ $-\frac{1}{18}n_f$	$(-10.3 \pm 2.4)C_F$ $(-0.765 \pm 1.05)N_c$ $(-0.11 \pm 0.015)n_f$	$(-70 \pm 55)C_F$ $(7.0 \pm 36)N_c$ $(-0.017 \pm 0.12)n_f$	$(19.20 \pm 1.0)C_F$ $(23.80 \pm 0.64)N_c$ $(0.074 \pm 0.042)n_f$

als gesichert betrachtet werden. Sämtliche anderen Beiträge proportional zu C_F^2 lieferten maximal Divergenzen, die wie $\ln \omega/\omega$ gehen. Die Koeffizienten dieser Divergenzen wurden analytisch bestimmt. Die nächstfolgende Divergenz, nämlich $1/\omega$, konnte daher recht präzise numerisch bestimmt werden.

Die numerisch berechneten Koeffizienten in Tabelle 4.1 sind in führender Ordnung ${}_2\hat{C}_3$ etwas oberhalb der Leading-Log Vorhersage angesiedelt. Dies stimmt mit dem Ergebnis dieser Arbeit überein. Der Koeffizient des Beitrages proportional zu N_c in (4.5) ist sehr klein. Daher ist wird eine numerische Bestimmung dieses Koeffizienten stark durch den um etwa einen Faktor 50 größeren, nachgeordneten Term $N_c \cdot {}_2\hat{C}_2$ behindert.

Die Ergebnisse der ersten beiden in der Tabelle aufgelisteten Arbeiten, Refs.[13],[18], sind in der Ordnung ${}_2\hat{C}_2$ noch in etwa mit den Ergebnissen dieser Arbeit vergleichbar, während die Ergebnisse von Ref.[15] schon deutlich abweichen. In der Ordnung ${}_2\hat{C}_1$ treten in allen Arbeiten bereits stark unterschiedliche Ergebnisse auf.

Die Ergebnisse von Kramer und Spiesberger wurden dem Anhang von Ref.[15] entnommen. Allerdings wurden in der erwähnten Arbeit auch versuchsweise Vorgaben für den Koeffizienten der führenden Divergenz ${}_2\hat{C}_3$ gemacht. Wurde ${}_2\hat{C}_3 = -7/6C_F$ gesetzt, so ergab ein Fit der nachfolgenden Beiträge proportional zu C_F^2 eine wesentlich bessere Übereinstimmung, zumindest in der Ordnung ${}_2\hat{C}_2$, mit dem Resultat der vorliegenden Arbeit.

Ein weiterer Unterschied zu den Leading-Log Vorhersagen ist das Auftreten von Divergenzen wie $\ln \omega/\sqrt{\omega}$ und $1/\sqrt{\omega}$. Diese Art von Divergenzen sind im Rahmen der Leading-Log-Theorie nicht zu erklären. Jedoch muß hier gesagt werden, daß, wie bereits in Kapitel 3 ausgeführt, diese Divergenzen ein Artefakt der 3-Jet Näherung sein könnten.

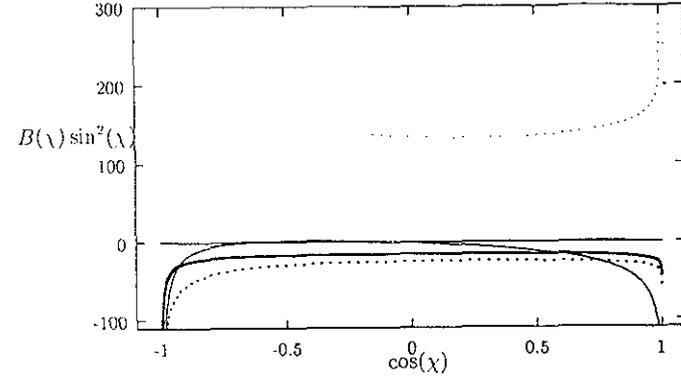


Abbildung 4.1: Die dick durchgezogene Linie ist der 3-Partonbeitrag, die normal durchgezogene Linie ist der Anteil der 4-Quark-Interferenz, die dünn durchgezogene Linie ist der C_F^2 -Anteil, die dünn gepunktete Linie ist der $C_F N_c$ -Anteil und die Linie mit den dickeren Punkten ist der Anteil mit 4 Quarks im Endzustand.

Es wurde auch eine numerische Berechnung der EEC über den gesamten Winkelbereich durchgeföhrt, siehe Abb.1. Die geplotteten Kurven wurden nicht zur Bestimmung der Koeffizienten der Divergenzen herangezogen, sondern dienen nur als Vergleich zu anderen Arbeiten. In der ersten Abbildung wurden die Berechnungen für 3 Teilchen und 4 Teilchen im Endzustand dargestellt. Die Berechnungen für 4 Partonen wurde aufgespalten nach den einzelnen Colorfaktoren durchgeföhrt. Die dick durchgezogene Linie ist der Anteil, der aus dem Beitrag von 3 Teilchen im Endzustand resultiert. Die normal durchgezogene Linie entspricht dem Beitrag, der aus dem Interferenzanteil von 4 Quarks im Endzustand resultiert, d.h. dem Beitrag proportional zu $C_F(C_F - N_c/2)$. Diese Linie ist fast mit Null identisch. Dies entspricht der Tatsache, daß die 4-Quark-Interferenzterme kaum zur EEC beitragen. Die dünn durchgezogene Linie ist der Anteil proportional zu C_F^2 , die dünn gepunktete Linie ist der Beitrag proportional zu $C_F N_c$. Die verbleibende Linie mit dickeren Punkten ist der Anteil mit 4 Quarks im Endzustand, der proportional zu $C_F T_R$ ist. Die einzelnen Anteile zeigen prinzipiell ein ähnliches Verhalten wie entsprechende Kurven in Ref.[14].

Die nächste Abbildung zeigt die Summe alle Beiträge zur EEC in Ordnung α_s^2 über den gesamten Winkelbereich. Im Bereich $\cos \chi \rightarrow 0$ zeigt $B(\chi)$ ein vergleichbares Verhalten, wie zum Beispiel eine entsprechende Abbildung in Ref.[13], in der auch die Ergebnisse der Arbeiten von Refs.[12],[11] abgebildet sind.

Dies entspricht dem Bereich $\omega \rightarrow 0$. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß in [13] eine etwas andere Definition der EEC verwendet wurde. Dies resultiert in einem globalen Faktor 2. Entfernt man sich vom Bereich kleiner ω , treten Abweichungen auf, die für $\cos \chi \rightarrow 1$

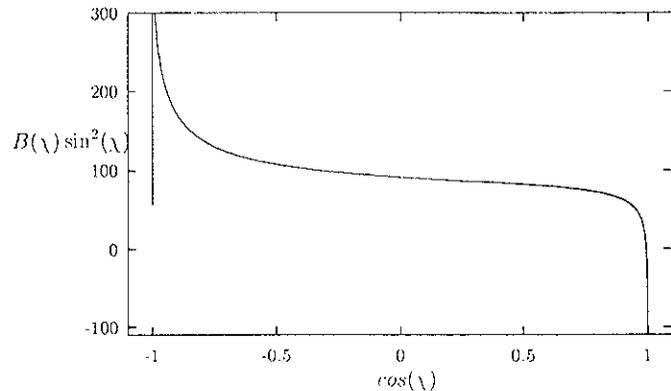


Abbildung 4.2: Aufsummation aller Beiträge.

immer stärker werden. Für $\cos \lambda \rightarrow 0$ wird die verwendete 3-Jet-Näherung immer ungenauer. Die Abweichungen resultieren daher aus dem reinen 4-Jet-Beitrag, d.h. die Differenz zwischen der ungenäherten EEC und der in der 3-Jet-Näherung berechneten EEC wird immer größer.

Zusammenfassend kann man als das hauptsächliche Ergebnis dieser Arbeit nennen, daß eine analytische Berechnung der führenden Divergenzen eine definitive Abweichung von der Leading-Log-Vorhersage zeigt. Die einzige verwendete Approximation war wie gesagt die 3-Jet-Näherung. Wie jedoch gezeigt wurde, resultiert die führende Divergenz gerade aus dem Anteil des Matrixelementes proportional zu C_F^2 , der sich wie ein entsprechender Anteil des 3-Teilchen-Matrixelementes verhält. Deshalb sollte aber die 3-Jet-Näherung für diesen Anteil relativ genau sein. Eine Abschätzung des Fehlers hatte ergeben, daß wohl höchstens in der nächsten Ordnung der Divergenzen in ω ein Beitrag aus der Differenz zwischen der Berechnung in der 3-Jet-Näherung und der ungenäherten Berechnung zu erwarten ist. Für die Berechnung der führenden Koeffizienten war es notwendig die sogenannten "quadratischen" Integrale zu lösen. Diese fanden sich in keiner bekannten Formelsammlung und mußten daher eigenständig gelöst werden. Weiterhin war es notwendig, Reduktionsformeln zwischen den einzelnen Integralen herzuleiten, um eine Behandlung durch analytische Programme zu ermöglichen. Dies trägt der Tatsache Rechnung, daß eine analytische Berechnung ohne Computerunterstützung aufgrund der Vielzahl der Einzelterme kaum machbar erschien. Einer der arbeitsintensivsten Anteile war daher die Entwicklung sowohl analytischer als auch numerischer Integrationsroutinen. Die numerischen Routinen mußten zu extrem hoher Genauigkeit gebracht werden, während bei den analytischen Routinen hauptsächlich die richtige Erkennung der auftretenden Integrale Schwierigkeiten bereitete. Die Integrale und die benötigten Rekursionsformeln sind im Anhang beschrieben.

Eine verbesserte Berechnung der EEC wäre wohl möglich, wenn man die im Abschnitt "3-Jet-Näherung" beschriebene, iterative Näherung durchführt. Es wäre sinnvoll, dies zuerst auf die Terme anzuwenden, die zur führenden Ordnung der Divergenzen beitragen. Eine solche iterative Berechnung der EEC sollte auch numerisch möglich sein und daher bei zukünftigen, numerischen Berechnungen eine Ausdehnung des Gültigkeitsbereichs der 3-Jet-Näherung für größere Werte von ω , im Idealfall über den gesamten Winkelbereich ermöglichen. Dies würde eine durchgehende, numerische Berechnung der EEC ermöglichen, ohne daß auf Phasenraumschnitte zurückgegriffen werden muß. Auch hier wird irgendwann die Differenz zwischen der 3-Jet-Näherung und der ungenäherten EEC sichtbar werden, jedoch sollte wohl über einen größeren Winkelbereich Übereinstimmung herrschen.

Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr. G. Kramer sehr für die Vergabe und die Betreuung dieser Doktorarbeit. Weiterhin danke ich Herrn Dr. H. Spiesberger für einige anregende Diskussionen.

A 4-Teilchen-Beiträge

In diesem Anhang werden die behandelten Matrixelemente zusammengestellt. Die Berechnung erfolgte bereits in den Arbeiten [8] und [4]. Für die explizite Berechnung der EEC war aber eine Darstellung der Matrixelemente nach erfolgter Partialbruchzerlegung notwendig. Um eine Nachvollziehbarkeit der Berechnungen zu gewährleisten, sollen hier nun die relevanten Matrixelemente zusammengestellt werden. Sämtliche Beiträge werden bis auf Permutationen der Indizes aufgeschrieben, die aus den Vertauschungen $(1 \leftrightarrow 2), (3 \leftrightarrow 4)$ und $(1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4)$ folgen, da dies im Rahmen dieser Arbeit jeweils nur zu einem globalen Faktor 4 führte.

Die Beiträge fallen in verschiedene Unterklassen: (A) ungekreuzte QED-artige Graphen, (B) gekreuzte QED-artige Graphen, (C) QCD-artige Graphen, (D) und (E) 4-Quark-Graphen. Klasse (C) besteht aus Beiträgen, die den 3-Gluon-Vertex enthalten. Dies ist der Unterschied zu reinen QED-artigen Termen. Die verschiedenen Klassen von Beiträgen führen zu Beiträgen proportional zu verschiedenen Colorfaktoren. Klasse (A) zu C_F^2 , Klasse (B) zu $C_F(C_F - N_c/2)$, Klasse (C) zu $C_F N_c$. Wenn im Endzustand $q_a \bar{q}_a q_b \bar{q}_b$ mit $a \neq b$ gilt, führt dies zu Beiträgen proportional zu $C_F T_R$, Klasse (D) und zu Beiträgen proportional zu $C_F(C_F - N_c/2)$, wenn $a = b$ ist. Klasse (E).

Hierbei ist $C_F = 4/3$, $N_c = 3$ und $T_R = n_f/2$ für n_f beitragende Quarkflavors.

A.1 C_F^2 -Beiträge, Klassen (A) und (B)

$$\frac{AB_{13}^*}{y_{13}} = \frac{AB_{13}^*}{y_{13}} + K_{C_F}^{11} + K_{C_F}^{21} + K_{C_F}^{22} + K_{C_F}^{32} + K_{C_F}^{41} + K_{C_F}^{42} + K_{C_F}^{61} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{AB_{13}^*}{y_{13}} = 48 C_F^2 \frac{1}{y_{13}} T(y_{134} \cdot y_{13} + y_{24}) \left(\frac{2y_{12}}{y_{13} + y_{23}} + (1-v)(1-\varepsilon) \right) \quad (\text{A.2})$$

Konvergente Terme, die nicht zu ε -Polen führen, liefern

$$K_{C_F}^{11} = 48 C_F^2 \frac{y_{34} - y_{134}(1-v)}{y_{13}} \frac{1}{y_{13} + y_{24}} \quad (\text{A.3})$$

$$K_{C_F}^{21} = 48 C_F^2 (1-v) \frac{1 - y_{123} + y_{13}}{y_{134}(y_{13} + y_{24})} \quad (\text{A.4})$$

$$K_{C_F}^{22} = 48 C_F^2 \frac{1}{y_{134}^2} \left[\frac{y_{24}(y_{34} - y_{134}(1-v)) - e_1}{y_{13}} + y_{12} - y_{134}(1-v) \right] \quad (\text{A.5})$$

$$K_{C_F}^{32} = 48 C_F^2 \frac{1}{y_{134} y_{234}} \left[y_{12} + \frac{e_1}{y_{13}} \left(\frac{1 - y_{12}}{y_{13} + y_{24}} - 1 \right) \right] \quad (\text{A.6})$$

$$K_{C_F}^{41} = 48 C_F^2 \left[\frac{2}{y_{13}} \left(\frac{y_{12}}{y_{13} + y_{14}} - \frac{y_{123}}{y_{134}} \right) \frac{y_{123}}{y_{13} + y_{24}} \left(\frac{1 - y_{134}}{y_{13} + y_{23}} - 1 \right) \right. \\ \left. + 4 \frac{y_{123}}{y_{13} + y_{24}} \frac{y_{12}}{y_{13} + y_{23}} \frac{1}{y_{13} + y_{14}} \left(\frac{y_{12}}{y_{14} + y_{24}} + 1 \right) \right. \\ \left. + \frac{4}{y_{134}} \left(1 + \frac{1}{y_{13} + y_{24}} \frac{y_{12}}{y_{13} + y_{23}} - \frac{y_{123}^2}{y_{13} + y_{24}} \right) \right] \quad (\text{A.7})$$

$$K_{C_F}^{42} = 48 C_F^2 \frac{-1}{y_{134}} \left[2 + \frac{2y_{12}}{y_{13} + y_{23}} + \frac{e_2}{y_{13}} \left(\frac{1}{y_{23}} - \frac{y_{23}}{y_{14} y_{24}} \right) \right] \quad (\text{A.8})$$

$$K_{C_F}^{61} = 48 C_F^2 \left[2 \frac{y_{14} y_{23} - y_{12} y_{34}}{y_{13}} \frac{1}{y_{234}} \frac{1}{y_{13} + y_{24}} \frac{1}{y_{13} + y_{23}} (1 - y_{12}(y_{24} - y_{13})) \right. \\ \left. + \frac{2}{y_{234}} \frac{1}{y_{13} + y_{24}} \frac{(-y_{12}(y_{23} + y_{24}) + y_{14}(1 + y_{123}))}{y_{13} + y_{23}} \right. \\ \left. - \frac{2}{y_{134} y_{234}} (2y_{134} + y_{24} - y_{13}) + \frac{2}{y_{134}} \frac{y_{12}}{y_{13} + y_{23}} \right. \\ \left. + \frac{2y_{34}}{y_{134} y_{234}} \frac{y_{12}}{y_{13} + y_{23}} (1 + y_{123} - y_{134}) \right. \\ \left. + \frac{2}{y_{134} y_{234}} \frac{y_{12}}{y_{13} + y_{23}} (1 + y_{12} + y_{23} - (y_{134} - y_{13})(y_{24} - y_{13})) \right] \quad (\text{A.9})$$

Hierbei sind

$$e_1 = y_{14} y_{23} - y_{12} y_{34} - y_{13} y_{24} \quad (\text{A.10})$$

$$e_2 = y_{14} y_{23} - y_{12} y_{34} + y_{13} y_{24} \quad (\text{A.11})$$

A.2 $C_F N_c$ -Formeln, Klassen (B) und (C)

Wie in Ref.[8] beschrieben, ergeben sich zwei Gruppen von Termen. Zum einen Beiträge proportional zu $1/y_{13}$ und zum anderen Beiträge proportional zu $1/y_{34}$. Die Aufteilung der finiten Terme ist relativ willkürlich. Hierbei wird Ref.[8] gefolgt.

$$\frac{BC_{13}^s}{y_{13}} = \frac{BC_{13}^s}{y_{13}} - \frac{N_c}{2C_F} \left(K_{C_F}^{41} + K_{C_F}^{42} + K_{C_F}^{61} \right) + K_{N_c}^I + K_{N_c}^{II} + K_{N_c}^{III} + K_{N_c}^{IV} + K_{N_c}^V + K_{N_c}^{VI} \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{BC_{13}^s}{y_{13}} = \frac{48 C_F N_c}{y_{13}} T(y_{134}, y_{13} + y_{24}) \left(\frac{y_{14}}{y_{13} + y_{34}} - \frac{y_{12}}{y_{13} + y_{23}} \right) \quad (\text{A.13})$$

Die folgenden Terme liefern nach Integration keine ϵ Pole

$$K_{N_c}^I = \frac{48 C_F N_c}{y_{13}} \frac{2}{y_{134}} \frac{1}{y_{13} + y_{24}} \frac{y_{12} y_{34} - y_{14} y_{23}}{y_{13} + y_{34}} \quad (\text{A.14})$$

$$K_{N_c}^{II} = \frac{48 C_F N_c}{y_{13}} \frac{y_{12} y_{34} - y_{14} y_{23}}{(y_{13} + y_{34}) y_{134} y_{234}} \frac{(y_{14} y_{134} + y_{12} (y_{123} + y_{134}))}{y_{13} + y_{24}} \quad (\text{A.15})$$

$$K_{N_c}^{III} = \frac{48 C_F N_c}{y_{13}} \frac{e_1}{y_{34} y_{134}} \left(2 + \frac{y_{23}}{2 y_{24}} \right) \quad (\text{A.16})$$

$$K_{N_c}^{IV} = 48 C_F N_c \frac{2}{y_{134}} \frac{1}{y_{13} + y_{24}} \frac{1}{y_{13} + y_{34}} (y_{11} + 2 y_{12}) \quad (\text{A.17})$$

$$K_{N_c}^V = 48 C_F N_c \left(\frac{y_{12}}{(y_{13} + y_{24})(y_{13} + y_{34})(y_{24} + y_{34})} - \frac{y_{14}}{(y_{13} + y_{34}) y_{134}} \right) \quad (\text{A.18})$$

$$K_{N_c}^{VI} = \frac{48 C_F N_c}{y_{234}} \left(\frac{y_{14}}{y_{13} + y_{34}} \frac{y_{12} + 2 y_{134}}{y_{13} + y_{24}} + \frac{y_{12}}{y_{13} + y_{24}} \frac{y_{134} + y_{123} - 2}{y_{134}} + \frac{y_{12}}{y_{13} + y_{34}} \frac{y_{123} + y_{134}}{y_{13} + y_{24}} \frac{y_{12} + 2 y_{13}}{y_{134}} \right) \quad (\text{A.19})$$

Nun folgen noch die Beiträge, die von Termen proportional zu $1/y_{34}$ stammen. Hierbei ist zu beachten, daß es für die Terme C_{34} und K_{34}^E keine Beiträge aus Vertauschungen der Indizes ($1 \leftrightarrow 2$), ($3 \leftrightarrow 4$) und ($1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4$) gibt. Der Term Σ_5 aus Ref.[8], Gleichung (C.27) wurde aufgeteilt in die Beiträge C_{34}^s und K_{34}^E . Die Anteile, die nach Integration über die Winkelvariablen verschwinden, werden nicht berücksichtigt.

$$\frac{C_{34}^s}{y_{34}} = \frac{1}{y_{34}} T(y_{134}, y_{234}) \left[\frac{y_{134}}{y_{13} + y_{34}} + \frac{y_{134}}{y_{14} + y_{34}} + \frac{y_{234}}{y_{23} + y_{34}} + \frac{y_{234}}{y_{24} + y_{34}} - 4 + 2v(1 - v) \right] \quad (\text{A.20})$$

$$K_{34}^A = 48 C_F N_c \frac{y_{12}}{2 y_{34}} \left\{ \frac{1}{(y_{13} + y_{34})(y_{24} + y_{34})} - \frac{1}{(y_{13} + y_{34}) y_{234}} - \frac{1}{(y_{24} + y_{34}) y_{134}} \right\} \quad (\text{A.21})$$

$$K_{34}^B = 48 C_F N_c \frac{e_1}{y_{34} y_{134} y_{234}} \left\{ \frac{1 - 2 y_{234} - y_{134}}{y_{13} + y_{34}} + \frac{y_{134}}{2 y_{13}} + \frac{y_{14} - y_{24}}{2 y_{13}} \right\} \quad (\text{A.22})$$

$$K_{34}^C = 48 C_F N_c \frac{1}{y_{13} + y_{34}} \left\{ \frac{2 - y_{24} - y_{34}}{y_{234}} + (y_{12} - y_{24}) \left(\frac{1}{y_{234} y_{134}} - \frac{2}{y_{134}} - \frac{1}{y_{234}} \right) \right\} \quad (\text{A.23})$$

$$K_{34}^D = 48 C_F N_c \frac{1}{y_{134}} \left\{ \frac{y_{12}}{2 y_{234}} - \frac{1}{2 y_{134}} - 2 - \frac{1}{y_{234}} \right\} \quad (\text{A.24})$$

$$K_{34}^E = 48 C_F N_c \frac{2}{y_{134}} y_{234} (1 - v + v^2) \left(\frac{y_{134}}{y_{234}} + \frac{y_{234}}{y_{134}} - 2 - 2 y_{12} \right) \quad (\text{A.25})$$

A.3 4-Quark-Beiträge, Klassen (D) und (E)

Es werden die Terme aus Ref.[8] übernommen. In Klasse (D), Term H_{T_R} , werden Anteile weggelassen, die nach Ausführung der Winkelintegrationen im Phasenraum verschwinden, da sie für diese Arbeit nicht relevant sind. Bei den Interferenztermen, Klasse (E), stellt man fest, daß die in Ref.[8] angegebene Form noch nicht für weitere Berechnungen geeignet ist. Daher werden hier die Terme gleich so dargestellt, daß sich die Pole in y_{14} und y_{34} offensichtlich herausheben. Die einzelnen singulären Beiträge werden im Term H_S aufsummiert. Für die Beiträge proportional zu $C_F T_R$ wird gleich der relevante Anteil angegeben:

$$K_{T_R} = 48 C_F T_R \left\{ \left(\frac{2}{3} (\ln y_{123} + \ln y_{124}) - \frac{10}{9} \right) T(y_{123}, y_{124}) + \frac{2}{3} \frac{1}{y_{123}^2 y_{134}^2} (2 y_{34} y_{123} y_{124} - (y_{123} - y_{124})^2) \right\} \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned}
H_S = & 48C_F \left(C_F - \frac{N_c}{2} \right) \frac{2}{y_{14} + y_{34}} \\
& \left[\frac{1}{y_{34}} \frac{1}{y_{124}} \frac{1}{y_{234}} \frac{1}{y_{134}} (y_{12} + y_{14}) y_{24} (y_{13} y_{24} - y_{23} y_{14} + y_{34} (y_{13} - y_{23})) \right. \\
& + \frac{y_{12} y_{13}}{y_{34}} \frac{1}{y_{134}^2} \frac{1}{y_{234}} (y_{14} y_{23} - y_{24} y_{13} + y_{34} (y_{14} - y_{24})) \\
& + \frac{1}{y_{14}} (y_{23} + y_{34}) y_{24} \frac{1}{y_{234}} \frac{1}{y_{134}} \frac{1}{y_{124}} (y_{13} y_{24} - y_{12} y_{34} + y_{14} (y_{13} - y_{12})) \\
& \left. + \frac{1}{y_{14}} y_{23} y_{13} \frac{1}{y_{134}^2} \frac{1}{y_{124}} (y_{12} y_{34} - y_{13} y_{24} + y_{14} (y_{34} - y_{24})) \right]. \quad (\text{A.27})
\end{aligned}$$

Num folgen noch die finiten Beiträge.

$$H_{73}^F = 48C_F \left(C_F - \frac{N_c}{2} \right) \frac{2y_{13}}{y_{134}^2} \frac{y_{12} + y_{23}}{y_{14} + y_{34}} + \frac{2y_{13}}{y_{14} y_{34}} \frac{e_3}{y_{134}^2} \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned}
H_{74}^F = & 48C_F \left(C_F - \frac{N_c}{2} \right) \frac{1}{y_{124}} \frac{1}{y_{134}} \frac{1}{y_{14} + y_{34}} \\
& \left[2y_{13} y_{24} + (y_{12} + y_{14} + y_{34} + y_{23}) \left(\frac{e_4}{y_{14}} + \frac{e_5}{y_{34}} \right) \right] \quad (\text{A.29})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{83}^F = & 48C_F \left(C_F - \frac{N_c}{2} \right) \frac{1}{y_{234}} \frac{1}{y_{134}} \frac{1}{y_{14} + y_{34}} \\
& \left[2y_{13} y_{24} - (y_{12} + y_{14} + y_{34} + y_{23}) \left(\frac{e_5}{y_{14}} + \frac{e_4}{y_{34}} \right) \right] \quad (\text{A.30})
\end{aligned}$$

$$H_{84}^F = 48C_F \left(C_F - \frac{N_c}{2} \right) - 2 \frac{y_{24}}{y_{124}} \frac{1}{y_{234}} \frac{1}{y_{14} + y_{34}} (y_{12} + y_{14} + y_{34} + y_{23}) \quad (\text{A.31})$$

mit

$$e_3 := y_{12} y_{34} + y_{23} y_{14} - y_{13} y_{24} \quad (\text{A.32})$$

$$e_4 := y_{14} y_{23} - y_{12} y_{34} + y_{13} y_{24} \quad (\text{A.33})$$

$$e_5 := y_{14} y_{23} - y_{12} y_{34} - y_{13} y_{24}. \quad (\text{A.34})$$

B Integrale

Im Rahmen dieser Arbeit wurden umfangreiche analytische Berechnungen durchgeführt. Diese erfolgten unter Verwendung von REDUCE-Programmen. Hierzu mußten Basisintegrale bestimmt werden, die dann mit Hilfe von Rekursionsformeln verallgemeinert werden konnten. Die allgemeine Vorgehensweise, die hierfür nötig war, soll nun in diesem Abschnitt beschrieben werden.

Es wurden zwei Sorten von Integralen zur Berechnung der analytischen Beiträge verwendet, die "linearen" und die "quadratischen" Integrale. Die linearen Integrale sind in verschiedenen Formelsammlungen wie Gradsteyn-Ryshik [23] oder der Arbeit von Duke und Devoto [24] zu finden, während die "quadratischen" Integrale völlig neu bestimmt werden mußten. Zuerst werden die einfacheren "linearen" Integrale behandelt. Hierzu sind folgende Definitionen nötig

$$I_n^1(f(x)) := \int_0^1 dx \frac{\ln(f(x))}{(x+\omega)^n} \quad (\text{B.1})$$

$$M_n^1(f(x)) := \int_0^1 dx x^n \ln(f(x)) \quad (\text{B.2})$$

$$I_n^2(f(x), g(x)) := \int_0^1 dx \frac{\ln(f(x)) \ln(g(x))}{(x+\omega)^n} \quad (\text{B.3})$$

$$M_n^2(f(x), g(x)) := \int_0^1 dx x^n \ln(f(x)) \ln(g(x)) \quad (\text{B.4})$$

wobei

$$f(x), g(x) \in \{e, x, 1-x, x+\omega\} \quad (\text{B.5})$$

Die Rekursionsformeln gehen von verschiedenen Anfangsintegralen aus. Für die Terme mit einem Logarithmus im Integranden gilt.

$$I_1^1(e) = \ln(1+\omega) - \ln(\omega) \quad (\text{B.6})$$

$$I_1^1(x) = \text{Li}_2\left(-\frac{1}{\omega}\right) \quad (\text{B.7})$$

$$I_1^1(x+\omega) = \frac{1}{2} \left(\ln^2(1+\omega) - \ln^2 \omega \right) \quad (\text{B.8})$$

$$I_1^1(1-x) = -\text{Li}_2\left(\frac{1}{1+\omega}\right) \quad (\text{B.9})$$

Rekursionsformeln für höhere Integrale erhält man durch Ableitungen. Für Terme, in denen das Argument des Logarithmus keine Abhängigkeit von ω enthält, ist dies unmittelbar ersichtlich, zum Beispiel

$$I_n^1(x) = -\frac{1}{n-1} \partial_\omega I_{n-1}^1(x) \quad (\text{B.10})$$

Die Rekursionsformeln für den Term mit einer Abhängigkeit von ω lautet

$$I_n^1(x+\omega) = -\frac{1}{n-1} \left\{ \partial_\omega I_{n-1}^1(x+\omega) + \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{(1+\omega)^{n-1}} - \frac{1}{\omega^{n-1}} \right) \right\} \quad (\text{B.11})$$

Nun folgen die Anfangsintegrale für Terme mit zwei Logarithmen im Integranden

$$I_1^2(x, x) = -2\text{Li}_3\left(-\frac{1}{\omega}\right) \quad (\text{B.12})$$

$$I_1^2(x, x + \omega) = -\frac{1}{3}\ln^3\omega - \zeta_2\ln\omega - \zeta_3 + S_{1,2}(-\omega) - \text{Li}_3(-\omega) \quad (\text{B.13})$$

$$I_1^2(x, 1-x) = -S_{1,2}(-\omega) - \text{Li}_3(-\omega) + \zeta_3 - \ln(1+\omega)\left\{\text{Li}_2(-\omega) + \frac{1}{2}\ln^2\omega + 2\zeta_2\right\} \quad (\text{B.14})$$

$$I_1^2(x + \omega, x + \omega) = \frac{1}{3}\left(\ln^3(1+\omega) - \ln^3(\omega)\right) \quad (\text{B.15})$$

$$I_1^2(x + \omega, 1-x) = -(\ln\omega + \ln(1+\omega))\left(\text{Li}_2(-\omega) + \frac{1}{2}\ln\omega\ln(1+\omega)\right) + \frac{1}{3}\ln^3(1+\omega) - \zeta_2\ln(1+\omega) + \text{Li}_3(-\omega) - S_{1,2}(-\omega) + \zeta_3 \quad (\text{B.16})$$

$$I_1^2(1-x, 1-x) = -2S_{1,2} - \ln\omega\ln^2(1+\omega) + \frac{1}{3}\ln^3(1+\omega) - 2\text{Li}_2(-\omega)\ln(1+\omega) + \zeta_3 - \zeta_2\ln(1+\omega) \quad (\text{B.17})$$

Die Rekursionsformeln für Terme, die keine Abhängigkeit von ω in den Logarithmen haben folgen entsprechend wie in Gleichung (B.11). Für die restlichen Integrale gilt

$$I_n^2(x, x + \omega) = -\frac{1}{n-1}\left\{\partial_\omega I_{n-1}^2(x, x + \omega) - I_n^1(x)\right\} \quad (\text{B.18})$$

$$I_n^2(x + \omega, x + \omega) = -\frac{1}{n-1}\left\{\partial_\omega I_{n-1}^2(x + \omega, x + \omega) - 2I_n^1(x + \omega)\right\} \quad (\text{B.19})$$

$$I_n^2(x + \omega, 1-x) = -\frac{1}{n-1}\left\{\partial_\omega I_{n-1}^2(x + \omega, 1-x) - 2I_n^1(1-x)\right\} \quad (\text{B.20})$$

Die Momentintegrale M lassen sich ebenfalls durch Rekursionsformeln miteinander verbinden oder direkt, in allgemeiner Form berechnen.

$$M_n^1(x) = \frac{1}{(n+1)^2} \quad (\text{B.21})$$

$$M_n^1(x + \omega) = \frac{1}{n+1}\left\{(1+\omega)\ln(1+\omega) - \frac{1}{n+1} - n\omega M_{n-1}^1(x + \omega)\right\} \quad (\text{B.22})$$

$$M_n^1(1-x) = \frac{1}{n+1}\left\{nM_{n-1}^1(1-x) - \frac{1}{n+1}\right\} \quad (\text{B.23})$$

Die zugehörigen Anfangsintegrale sind hier trivial. Ebenso folgt für die Momentintegrale mit zwei Logarithmen.

$$M_n^2(x, x) = \frac{2}{(n+1)^3} \quad (\text{B.24})$$

$$M_n^2(x, x + \omega) = \frac{1}{n+1}\left\{-n\omega M_{n-1}^2(x, x + \omega) - M_n^1(x + \omega) - \omega M_{n-1}^1(x + \omega) + \frac{1}{(n+1)^2}\right\} \quad (\text{B.25})$$

$$M_n^2(x + \omega, 1-x) = \frac{1}{n+1}\left\{nM_{n-1}^2(x, 1-x) + M_{n-1}^1(1-x) - M_n^1(1-x) + \frac{1}{(1+n)^2}\right\} \quad (\text{B.26})$$

$$M_n^2(x + \omega, x + \omega) = \frac{1}{n+1}\left\{(1+\omega)\ln(1+\omega)(\ln(1+\omega) - 1) - n\omega M_{n-1}^2(x + \omega, x + \omega) + (n-1)M_n^1(x + \omega) + n\omega M_{n-1}^1(x + \omega)\frac{1}{n+1}\right\} \quad (\text{B.27})$$

$$M_n^2(x + \omega, 1-x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N_k^2(x, 1 + \omega - x) \quad (\text{B.28})$$

$$M_n^2((1-x), 1-x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-)^k \frac{2}{(k+1)^3} \quad (\text{B.29})$$

Für die beiden letzten Anteile ist es noch notwendig

$$N_n^2(x, 1 + \omega + x) = \int dx x^n \ln x \ln(1 + \omega - x) \quad (\text{B.30})$$

$$= \frac{1}{n+1}\left\{n(1+\omega)N_{n-1}(x, 1 + \omega - x) - N_n^1(1 + \omega - x) + (1+\omega)N_{n-1}^1(1 + \omega - x) + \frac{1}{(n+1)^2}\right\} \quad (\text{B.31})$$

$$N_n^1(1 + \omega - x) = \int_0^1 dx x^n \ln(1 + \omega - x) \quad (\text{B.32})$$

$$= \frac{1}{n+1}\left\{-\omega\ln\omega + n(1+\omega)N_{n-1}(1 + \omega - x) - \frac{1}{n+1}\right\} \quad (\text{B.33})$$

zu kennen. Die angegebenen Rekursionsformeln können innerhalb eines REDUCE-Programms dazu verwendet werden, aus den vorhandenen Anfangsintegralen Integrale bis zu beliebig hohen Ordnungen n zu bestimmen. In der Regel war $n = 4$ allerdings ausreichend.

Eine technische Schwierigkeit bestand darin, dem Programm zu ermöglichen die verschiedenen Integrale zu erkennen, ohne diese alle per Hand einzugeben. Verwendet man allerdings den Trick, Potenzen als Felder zu definieren, wie z.B. $NEN(n) := (\omega+x)^{-n}$, so lassen sich auch komplizierte Vorfaktoren mit Hilfe rekursiver Substitutionsregeln sicher ausreduzieren. Somit konnten diese Art von Integralen vollständig durch analytische REDUCE-Programme berechnet werden.

Nun folgen noch die erwähnten "quadratischen" Integrale. Dies sind zum einen

$$J_q^n(a, b) = \int_0^1 dx \frac{\ln\left(1 + \frac{x^2}{a}\right)}{(x+b)^n} \quad (\text{B.34})$$

$$J_{xq}^n(a, b) = \int_0^1 dx \frac{\ln x \ln \left(1 + \frac{x^2}{a}\right)}{(x+b)^n} \quad (\text{B.35})$$

$$J_{Lq}^n(a, b) = \int_0^1 dx \frac{\text{Li}_2\left(-\frac{x^2}{a}\right)}{(x+b)^n} \quad (\text{B.36})$$

und die entsprechenden Momentintegrale

$$M_q^n(a, b) = \int_0^1 dx \ln \left(1 + \frac{x^2}{a}\right) x^n \quad (\text{B.37})$$

$$M_{Jq}^n(a, b) = \int_0^1 dx \ln x \ln \left(1 + \frac{x^2}{a}\right) x^n \quad (\text{B.38})$$

$$M_{Lq}^n(a, b) = \int_0^1 dx \text{Li}_2\left(-\frac{x^2}{a}\right) x^n \quad (\text{B.39})$$

$$N_q^n(a) = \int_0^1 dx \frac{x^n}{1 + \frac{x^2}{a}} \ln x \quad (\text{B.40})$$

zum anderen. Die Integrale mit $n = 1$ müssen zuerst auf andere zurückgeführt werden gemäß

$$J_q^1(a, b) = -\frac{1}{2}\text{Li}_2\left(-\frac{1}{a}\right) - bJ_q^2(a, b) - b^2J_q^3(a, b) - b^3 \int_0^1 dx \frac{\ln \left(1 + \frac{x^2}{a}\right)}{x(x+b)^3} \quad (\text{B.41})$$

$$J_{xq}^1(a, b) = \frac{1}{4}\text{Li}_3\left(-\frac{1}{a}\right) - bJ_{xq}^2(a, b) - b^2J_{xq}^3(a, b) - b^3 \int_0^1 dx \frac{\ln x \ln \left(1 + \frac{x^2}{a}\right)}{x(x+b)^3} \quad (\text{B.42})$$

$$J_{Lq}^1(a, b) = \frac{1}{2}\text{Li}_3\left(-\frac{1}{a}\right) - bJ_{Lq}^2(a, b) - b^2J_{Lq}^3(a, b) - b^3 \int_0^1 dx \frac{\text{Li}_2\left(-\frac{x^2}{a}\right)}{x(x+b)^3} \quad (\text{B.43})$$

Die Integrale mit $n = 1$ können also nicht vollständig analytisch behandelt werden, jedoch sind die in den Gleichungen (B.41) bis (B.43) auftauchenden Restintegrale für alle praktischen Anwendungen als endlich anzusehen, wenn man $a = b = \infty$ setzt.

Die für die Rekursionsformeln nötigen Anfangsintegrale findet man bei $n = 2$. Für die weiteren Berechnungen ist es nötig, zuerst $a \neq b$ beizubehalten

$$J_q^2(a, b) = \frac{1}{a+b^2} \left[\frac{b-a}{1+b} \ln \left(1 + \frac{1}{a}\right) - 2b \ln \left(1 + \frac{1}{b}\right) + 2\sqrt{a} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \right] \quad (\text{B.44})$$

$$J_{xq}^2(a, b) = -\frac{1}{b}J_q^1(a, b) - \frac{1}{a+b^2} \left[2b\text{Li}_2\left(-\frac{1}{b}\right) + \frac{a}{2b}\text{Li}_2\left(-\frac{1}{b}\right) + 2\sqrt{a}G\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \right] \quad (\text{B.45})$$

$$J_{Lq}^2(a, b) = \frac{b}{1+b}\text{Li}_2\left(-\frac{1}{a}\right) - 2J_q^1(a, b) \quad (\text{B.46})$$

Hierbei ist

$$G(y) := \int_0^y \frac{\arctan(x)}{x} \quad (\text{B.47})$$

Für praktische Zwecke ist $a \ll 1$ anzusehen, daher gilt

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \simeq \frac{\pi}{2} \quad G\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \simeq -\frac{\pi \ln a}{4\sqrt{a}} \quad (\text{B.48})$$

Für $n \geq 3$ gelten dann Rekursionsformeln entsprechend zu

$$J_q^n(a, b) = -\frac{1}{n-1} \partial_b J - q^{n-1}(a, b) \quad (\text{B.49})$$

Für die entsprechenden Momentintegrale muß eine Unterscheidung zwischen geraden und ungeraden Ordnungen in n getroffen werden. Benötigt werden die Anfangsintegrale

$$M_q^0(a) = \ln \left(1 + \frac{1}{a}\right) - 2 + 2\sqrt{a} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \quad (\text{B.50})$$

$$M_q^1(a) = \frac{1}{2} \left\{ (1+a) \ln \left(1 + \frac{1}{a}\right) - 1 \right\} \quad (\text{B.51})$$

$$N_q^0(a) = -\sqrt{a}G\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \quad (\text{B.52})$$

$$N_q^1(a) = \frac{a}{4}\text{Li}_2\left(-\frac{1}{a}\right). \quad (\text{B.53})$$

Die entsprechenden Rekursionsformeln lauten

$$M_q^n(a) = \frac{1+a}{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{a}\right) - \frac{2}{(n+1)^2} - a \frac{n-1}{n+1} M_q^{n-2}(a) \quad (\text{B.54})$$

$$N_q^n(a) = -\frac{a}{(n-1)^2} - a N_q^{n-2}(a) \quad (\text{B.55})$$

$$M_{xq}^n(a) = -\frac{1}{n+1} M_q^n(a) + \frac{2}{(n+1)^3} + \frac{2}{(n+1)} N_q^n(a) \quad (\text{B.56})$$

$$M_{Lq}^n = \frac{1}{n+1} \text{Li}_2\left(-\frac{1}{a}\right) + \frac{2}{n+1} M_q^n(a) \quad (\text{B.57})$$

Literatur

- [1] K.Abe et al., SLD Collaboration, Phys.Rev.D50 (1994)5580.
- [2] P.Abreu et al., DELPHI Collaboration, Phys.Lett.B252(1990)149.
Z.Phys.C59 (1993)21;
M.Akrawy et al., OPAL Collaboration, Phys.Lett.B252(1990)159,
Phys.Lett.B276(1992)547;
B.Adeva et al., L3 Collaboration, Phys.Lett.B257(1991)469;
O.Adriani et al., L3 Collaboration, Phys.Lett.B284(1992)471.
- [3] C.L.Basham, L.S.Brown, S.D.Ellis, S.T.Love, Phys. Rev. Lett.41 (1978)1585.
Phys.Rev.D19 (1979)2018.
- [4] R.K.Ellis, D.A.Ross, A.E.Terrano, Nucl.Phys.B178(1981)421.
- [5] K.Fabricius, G.Kramer, G.Schierholz, I.Schmitt, Z.Phys.C11(1982)315.
- [6] N.K.Falek, G.Kramer, Z.Phys.C42(1989)459.
- [7] A.Ali et al., Nucl.Phys.B167(1980)451.
- [8] G.Kramer, B.Latope, Fortsch.Phys.37 (1989)161.
- [9] D.G.Richards, W.J.Stirling, S.D.Ellis, Phys.Lett.B 119(1982)193.
Nucl.Phys. B229(1983)317
- [10] A.Ali, F.Barreiro, Phys.Lett.B118 (1982), Nucl.Phys.B236(1984)269.
- [11] Z.Kunszt, P.Nason in "Z physics at LEP 1" CERN89 08, vol.1, eds. G.Altarelli,
R.Kleiss und C.Verzegnassi (CERN, Geneva,1989)
- [12] E.Glover, M.Sutton, Phys.Lett.B342 (1995)375.
- [13] K.A.Clay, S.D.Ellis, Phys.Rev.Lett.74 (1995)1392.
- [14] G.Kramer, H.Spiesberger, DESY 96 044.
- [15] G.Kramer, H.Spiesberger, Z.Phys.C11(1996)111.
- [16] Y.L.Dokshitzer, D.I. Dynakov, S.I.Troyan, Phys.Rep.58 (1980)269.
S.D.Ellis in "Perturbative Quantum chromodynamics", AIP proceedings, Florida
State University, Tallahassee, 1981, (ed. D.W.Duke).
S.D.Ellis Volendam Lectures 1982 S.935 (ed. Kittel, Metzger, Sergiou).
- [17] S.D.Ellis, W.J.Stirling, Phys.Rev.D23(1981)214, Phys.Rev.D24 (1981)1386;
J.C.Collins, D.E.Soper, Nucl.Phys.B193(1981)381, Nucl.Phys.B197(1982)446.
- [18] S.D.Ellis, D.G.Richards, W.J.Stirling, Phys.Lett.B136(1984)99.
- [19] P.Ramond **Field Theory A Modern Primer** S.387.
- [20] NAG Fortran Library Band 1, Routine D01CF.
- [21] NAG Fortran Library Band 9, Routine G02DAF.
- [22] Müller **Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik** S.280
und S.326 ff.
- [23] Gradsteyn, Rhyshik **Summen-, Produkt- und Integraltafeln.**
- [24] A.Duke, D.W.Devoto, Riv.Nuovo Cimento7 (1984)1.