Schriftliche Überprüfung
Klasse 10 an Gymnasien

Mathematik

Hinweise und Beispiele zu den zentralen schriftlichen Überprüfungen

Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung

Impressum

Herausgeber:
Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung
Hamburger Straße 31, 22083 Hamburg

Referatsleitung Mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Unterricht:
Dr. Najib Karim

Fachreferentin Mathematik für Gymnasien:
Xenia Rendtel

Redaktion:
Xenia Rendtel (Koordination)
Sarah Lange
Marion Böttcher
Matthias Aschenbach
Sebastian Thurau

Vorwort und Schlussredaktion:
Xenia Rendtel
Sarah Lange

Layout in LaTeX:
Xenia Rendtel

Internet: `http://www.hamburg.de/abschlusspruefungen`

Hamburg, am 31. Mai 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Sehr geehrte Kolleginnen und Kollegen,

die vorliegende Handreichung versteht sich als Ergänzung zu den „Hinweisen zu den schriftlichen Überprüfungen“ und enthält Übungsaufgaben und Beispiele für Prüfungsaufgaben, wie sie für die zentralen schriftlichen Überprüfungen gestaltet sein werden.

Die Aufgabenstellungen berücksichtigen die im Rahmenplan Mathematik für Gymnasien sowie die in den Bildungsstandards der KMK für den Mittleren Schulabschluss formulierten zentralen Ideen (Leitideen) und Anforderungen.

Das bisherige Heft mit Beispielaufgaben wurde vollständig überarbeitet und wurde durch die aktuellen Prüfungsaufgaben der letzten Jahre ergänzt. Dabei wurden folgende Aspekte berücksichtigt:

- Im hilfsmittelfreien Teil stehen dem Prüfling vier vollständige Prüfungsaufgabensätze zur Verfügung, die geeignet sind, das Aufgabenformat zu üben und auch den zeitlichen Rahmen erfahrbar zu machen.
- Desweiteren sind typische Fragestellungen für einen hilfsmittelfreien Teil aufgeführt.
- Der hilfsmittelfreie Teil wurde dem aktuellen Format angepasst: Aufgabe 1 umfasst somit 14 Teilaufgaben mit meist einschrittigem Lösungsweg; die restlichen 20 BWE verteilen sich auf Aufgaben mit mehrschrittigem Lösungsweg.
- Die Liste der verbindlichen Arbeitsaufträge (Operatoren) wurde dem aktuellen Stand angepasst. Die vorliegenden Aufgaben wurden entsprechend überarbeitet. Die Operatoren sind in den Aufgaben – wie in den Prüfungsaufgaben – fett gedruckt. Alle abgedruckten Beispiele für Prüfungsaufgaben entsprechen dem Format, das aktuell für die Überprüfungen vorgesehen ist.
- Die komplexen Aufgaben, die mit Einsatz eines Taschenrechners gelöst werden, sind nach Leitideen geordnet.
- Soweit möglich wurde auf Anhänge zu Teilaufgaben – wie in den Prüfungsaufgaben – verzichtet. Notwendige Informationen und Abbildungen wurden direkt bei den Teilaufgaben eingefügt.
- Für die Schülerinnen und Schüler wurde eine Übersichtsseite eingefügt, in der notiert werden kann, welche Aufgabe wann und mit welchem Erfolg bearbeitet wurde.

- Die Lösungen wurden an vielen Stellen ausführlicher formuliert, sodass diese von den Schülerinnen und Schülern leichter selbstständig nachvollzogen werden können. Teilweise sind verschiedene Lösungswege dargestellt. Andere Lösungswege sind natürlich nach wie vor möglich.

In der Hoffnung, dass die vorliegende Handreichung hilfreich für Ihre Unterrichtsarbeit und die Vorbereitung Ihrer Schülerinnen und Schüler auf die schriftliche Überprüfung ist, wünschen wir Ihnen und Ihren Schülerinnen und Schülern viel Erfolg!

Um die weitere Qualitätsentwicklung der Prüfungsaufgaben sind wir ständig bemüht, gern nehmen wir daher Ihre Rückmeldungen entgegen.
Den Mitgliedern der Arbeitsgruppe, die diese Handreichung erstellt haben, möchten wir sehr herzlich für die intensive und zeitaufwendige Arbeit danken.

Xenia Rendtel	Dr. Najib Karim
Fachreferentin Mathematik Gymnasien	Referatsleiter MINT-Referat

Hamburg, den 31. Mai 2022

2 Liste der Arbeitsaufträge

Mehr noch als bei dezentralen Aufgaben, die immer im Kontext gemeinsamer Erfahrungen der Lehrenden und Lernenden mit vorherigen Klassenarbeiten stehen, müssen zentrale Prüfungsaufgaben für die Schülerinnen und Schüler eindeutig hinsichtlich des Arbeitsauftrages und der erwarteten Leistung formuliert sein. Die in den zentralen schriftlichen Prüfungsaufgaben verwendeten Operatoren (Arbeitsaufträge) werden in der unten folgenden Tabelle definiert und inhaltlich gefüllt. Entsprechende Formulierungen in den vorausgehenden Klassenarbeiten sind ein wichtiger Teil der Vorbereitung auf die schriftliche Überprüfung.

Neben Definitionen und Beispielen enthält die Tabelle auch Zuordnungen zu den Anforderungsbereichen **I**, **II** und **III**, wobei die konkrete Zuordnung auch vom Kontext der Aufgabenstellung abhängen kann und eine scharfe Trennung der Anforderungsbereiche nicht immer möglich ist.

Anforderungsbereich I: reproduzieren

Dieser Anforderungsbereich umfasst die Wiedergabe und direkte Anwendung von grundlegenden Begriffen, Sätzen und Verfahren in einem abgegrenzten Gebiet und einem wiederholenden Zusammenhang.

Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen

Dieser Anforderungsbereich umfasst das Bearbeiten bekannter Sachverhalte, indem Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten verknüpft werden, die in der Auseinandersetzung mit Mathematik auf verschiedenen Gebieten erworben wurden.

Anforderungsbereich III: verallgemeinern und reflektieren

Dieser Anforderungsbereich umfasst das Bearbeiten komplexer Gegebenheiten u.a. mit dem Ziel, zu eigenen Problemformulierungen, Lösungen, Begründungen, Folgerungen, Interpretationen oder Wertungen zu gelangen.

Arbeitsaufträge	Definitionen	Beispiele
angeben, nennen **I-II**	Formulierung eines Sachverhaltes, Aufzählen von Fakten etc. ohne Begründung und ohne Lösungsweg	**Gib an**, wofür die Variable m in der Geradengleichung $y = mx + b$ steht. **Nenne** ein Beispiel, in dem lineare Funktionen in der Realität auftreten.
auseinandersetzen **II-III**	kreativer Prozess, mindestens auf dem Anforderungsniveau II	**Setze** dich mit den Äußerungen der Schülerinnen und Schüler **auseinander** (z. B.: Aufgabe 11, Bildungsstandards)

Arbeitsaufträge	**Definitionen**	**Beispiele**
auswählen **I-II**	ohne Begründung aus mehreren Angeboten eines auswählen	**Wähle** ohne Hilfe des Taschenrechners diejenige Zahl **aus**, die dem Wert von $\sqrt{199}$ am nächsten kommt.
begründen **II-III**	für einen angegebenen Sachverhalt einen Begründungszusammenhang herstellen	**Begründe**, warum der abgebildete Graph die Situation nicht richtig beschreibt. **Begründe**, warum eine quadratische Gleichung höchstens zwei Lösungen hat.
berechnen **I-II**	Ergebnis von einem Ansatz ausgehend durch nachvollziehbare Rechenoperationen gewinnen. Die Wahl der Mittel kann eingeschränkt sein.	**Berechne** ohne Benutzung des Taschenrechners den Wert des Ausdrucks $2^3 + 3^2$.
beschreiben **II-III**	Darstellung eines Sachverhalts oder Verfahrens in Textform unter Verwendung der Fachsprache. Es sollten hierbei vollständige Sätze gebildet werden; hier sind auch Einschränkungen möglich (z. B. Beschreibung in Stichworten).	**Beschreibe**, wie sich A ändert, wenn x größer wird. Beschreibe, wie man den Flächeninhalt dieser Figur bestimmen kann.
bestätigen **I-II**	eine Aussage oder einen Sachverhalt durch Anwendung einfacher Mittel (rechnerisch wie argumentativ) sichern	**Bestätige**, dass in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit unter 10 % liegt.
bestimmen, ermitteln **II-III**	Darstellung des Lösungsweges und Formulierung des Ergebnisses. Die Wahl der Mittel kann frei, unter Umständen auch eingeschränkt sein.	**Bestimme** die Lösung der Gleichung $\sqrt{x} + x = 12$. **Bestimme** die Lösung der Gleichung $3x - 5 = 5x + 3$ durch Äquivalenzumformungen. **Bestimme** grafisch den Schnittpunkt.
beurteilen **II-III**	zu einem Sachverhalt ein selbstständiges Urteil unter Verwendung von Fachwissen und Fachmethoden formulieren	**Beurteile**, welche der beiden vorgeschlagenen Funktionen das ursprüngliche Problem besser darstellt. **Beurteile** die Diskussion von Yildiz und Sven.
entscheiden **II-III**	bei Alternativen sich begründet und eindeutig auf eine Möglichkeit festlegen	**Entscheide**, mit welchen der vorgeschlagenen Formeln man das Volumen des abgebildeten Körpers berechnen kann. **Entscheide**, welcher Graph zu welcher Funktionsgleichung gehört.

Arbeitsaufträge	Definitionen	Beispiele
ergänzen, vervollständigen, eintragen I	Tabellen, Ausdrücke oder Aussagen nach bereits vorliegenden Kriterien, Formeln oder Mustern füllen	**Ergänze** die fehlenden Werte. **Vervollständige** die Tabelle.
erstellen I-II	einen Sachverhalt in übersichtlicher, meist fachlich üblicher oder vorgegebener Form darstellen	**Erstelle** eine Wertetabelle für die Funktion. **Erstelle** eine Planfigur.
interpretieren II-III	die Ergebnisse einer mathematischen Überlegung rückübersetzen auf das ursprüngliche Problem	**Interpretiere**: Was bedeutet deine Lösung für die ursprüngliche Frage? **Interpretiere** die Bedeutung der Variablen d vor dem Hintergrund des Problems.
konstruieren II-III	Anfertigung einer genauen Zeichnung, wobei die einzelnen Handlungsschritte einem mathematischen Konzept folgen, was in der Zeichnung erkennbar ist. Hilfsmittel werden benannt, müssen aber gegebenenfalls nicht alle verwendet werden.	**Konstruiere** mit Hilfe von Zirkel und Lineal die Mittelsenkrechte der Strecke. **Konstruiere** mit Hilfe des Geodreiecks ein Dreieck ABC mit $\alpha = 25°$, $c = 4$ cm, $h_c = 1{,}5$ cm.
skizzieren I-II	grafische Darstellung der wesentlichen Eigenschaften eines Objektes, auch Freihandskizze möglich	**Skizziere** den Verlauf des Graphen. **Skizziere** die Figur, die im Text beschrieben wird.
vergleichen II-III	nach vorgegeben oder selbst gewählten Gesichtspunkten Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede ermitteln und darstellen	**Vergleiche** Umfang und Flächeninhalt der drei Figuren.
zeichnen I-II	sorgfältige Anfertigung einer grafischen Darstellung	**Zeichne** den Graphen der Funktion.
zeigen, nachweisen II-III	eine Aussage, einen Sachverhalt nach gültigen Schlussregeln, Berechnungen, Herleitungen oder logischen Begründungen bestätigen	**Zeige**, dass das betrachtete Viereck ein Drachenviereck ist.
zuordnen I-II	ohne tiefer gehende Erläuterung eine Verbindung zwischen zwei Listen herstellen	**Ordne** die Füllgraphen den Gefäßen **zu.**

3 Aufgabenbeschreibung

Die folgenden Aufgabenbeispiele für die schriftliche Überprüfung in den 10. Klassen der Gymnasien im Fach Mathematik werden in zwei Aufgabenformaten vorgestellt: Aufgaben, die ohne den Einsatz des Taschenrechners bearbeitet werden sollen, und Aufgaben, zu deren Lösung der Einsatz des Taschenrechners vorgesehen ist.

Die reine Arbeitszeit beträgt 155 Minuten, es sind insgesamt 100 Punkte zu erreichen.

Für den Aufgabenteil I stehen als Richtwert 45 Minuten zur Verfügung. Er beansprucht etwa ein Drittel der Gesamtpunktzahl zugeordnet (34 von 100 Punkten).

Für den zweiten Aufgabenteil II, der aus drei Prüfungsaufgaben besteht und bei dem der Einsatz des Taschenrechners vorgesehen ist, steht die Restarbeitszeit zur Verfügung. Ihm werden etwa zwei Drittel der Gesamtpunktzahl zugeordnet (3-mal jeweils 22 Punkte = 66 Punkte).

Die Aufgabenbeispiele enthalten neben der Aufgabenstellung den Erwartungshorizont (die erwartete Schülerleistung) und Vorschläge für eine mögliche Bewertung. Im Erwartungshorizont kursiv gedruckte Passagen sind Hinweise für die korrigierende Lehrkraft und keine Bestandteile der erwarteten Lösung.

Für die Bewertung der Gesamtleistung der schriftlichen Überprüfung gilt die folgende Zuordnungstabelle:

Bewertungseinheiten	**Note**
≥ 90	1
≥ 85	1–
≥ 80	2+
≥ 75	2
≥ 70	2–
≥ 65	3+
≥ 60	3
≥ 55	3–
≥ 50	4+
≥ 45	4
≥ 40	4–
≥ 33	5+
≥ 26	5
≥ 19	5–
< 19	6

Bewertungskriterien für die Noten „gut“ und „ausreichend“

Die Note „gut“ („2“) kann nur erteilt werden, wenn mindestens 75 % der erreichbaren Gesamtleistung erbracht wurden.

Die Note „ausreichend“ („4“) kann nur erteilt werden, wenn mindestens 45 % der erreichbaren Gesamtleistung erbracht wurden.

Bei erheblichen Mängeln in der sprachlichen Richtigkeit ist die Bewertung der schriftlichen Prüfungsleistung je nach Schwere und Häufigkeit der Verstöße um bis zu einer Note herabzusetzen. Dazu gehören auch Mängel in der Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen sowie falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text.

4 Aufgabenübersicht

4.1 Aufgaben, die ohne Einsatz des Taschenrechners bearbeitet werden

4.1.1 Beispiele zu den zentralen Prüfungsaufgaben

Nr.	**Aufgabe**	**Seite**	**bearbeitet**	**kontrolliert**	**Punkte**	☺	😐	☹
1.	Beispiel	15						
2.	Beispiel	19						
3.	Beispiel	22						
4.	Beispiel	26						

4.1.2 Beispiele für weitere Teilaufgaben

Nr.	**Aufgabe**	**Seite**	**bearbeitet**	**kontrolliert**	**Punkte**	☺	😐	☹
1.	Besondere Werte der trigonometrischen Funktionen	30						
2.	Flächen	30						
3.	Flächenberechnung	31						
4.	Benzinverbrauch	31						
5.	Formel 1	32						
6.	Goldener Schnitt	33						
7.	Füllgraphen 1	33						
8.	Füllgraphen 2	34						
9.	Graphen zuordnen	35						
10.	Geraden	36						
11.	Schiefe Ebene	36						
12.	Graphen 2	37						
13.	Gebläse	38						
14.	Würfel und Münze	39						
15.	Martins Glücksspiel	39						

4.2 Aufgaben, die mithilfe des Taschenrechners bearbeitet werden

4.2.1 Leitidee Raum und Form sowie Leitidee Messen

Nr.	**Aufgabe**	**Seite**	**bearbeitet**	**kontrolliert**	**Punkte**	☺	😐	☹
1.	Wassertank	40						
2.	Paranussbaum	42						
3.	Pfadfinderzelt	44						
4.	Vom Stern zur Pyramide	46						
5.	Partyzelt	48						
6.	Eishockeypucks	49						
7.	Kaffeefilter	51						
8.	Neues Rosenbeet	53						
9.	Designerlampe	56						
10.	Industrieroboter	59						
11.	Kettenanhänger	61						
12.	Schwimmbecken	63						
13.	Dachgaube	65						
14.	Hürdenmodell	68						
15.	Eishockey	70						
16.	Schiefer Kirchturm	72						

4.2.2 Leitidee des funktionalen Zusammenhangs

Nr.	**Aufgabe**	**Seite**	**bearbeitet**	**kontrolliert**	**Punkte**	☺	😐	☹
1.	Brücken	74						
2.	^{14}C	77						
3.	Laichplätze	80						
4.	Medikamente	81						
5.	Flächeninhalt eines Rechtecks	83						
6.	Herr Sorgenfrei	85						
7.	Gefahr aus dem Weltall	87						
8.	Abbau eines Wirkstoffs	89						
9.	Barometer	90						
10.	Motorrad	91						
11.	Entwicklung eines Pferdehof-Spiels	93						
12.	Pudding	95						
13.	Tennistraining	97						

4.2.3 Leitidee Daten und Zufall

Nr.	Aufgabe	Seite	bearbeitet	kontrolliert	Punkte	☺	😐	☹
1.	Mit und ohne Brille	100						
2.	Dominosteine	102						
3.	Führerscheinprüfung	104						
4.	Auf dem Jahrmarkt	106						
5.	Lotterie	107						
6.	Mensch ärgere dich nicht	109						
7.	Teilzeitarbeit	111						
8.	Parkplatz	113						
9.	Basketball	115						
10.	Hörtest	117						
11.	Marketing für Trek Wars 7	120						
12.	Bluffen beim Poker	122						
13.	Verkaufsstrategie des Computerspiels	124						
14.	Vorliebe für Schokolade	126						
15.	Autoversicherung	128						

Aufgaben

5 Aufgaben, die ohne Einsatz des Taschenrechners bearbeitet werden

1. Erstes Beispiel zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil [1] Lösung S. 129

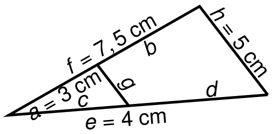
1. Multiple-Choice

Von den jeweils angebotenen Lösungen ist immer genau eine richtig. Überlege und schreibe den zugehörigen Buchstaben **A**, **B**, **C** oder **D** in die Spalte „**Lösung**“. Nebenrechnungen auf einem gesonderten Blatt sind zulässig, eine Begründung wird nicht verlangt. **(14 P)**

	Aufgabe	**A**	**B**	**C**	**D**	**Lösung**
a)	$0{,}02 \cdot 0{,}3 =$	0,0006	0,006	0,06	0,6	
b)	$\frac{5}{4} + \frac{4}{3} =$	$\frac{9}{7}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{31}{12}$	$\frac{32}{7}$	
c)	$0{,}02\ell =$	2 mℓ	0,2 dm^3	200 mℓ	20 cm^3	
d)	$\left(2^3\right)^2 =$	128	64	32	16	
e)	$\frac{3}{\sqrt{x^3}} =$ für $x > 0$	$3x^{-\frac{3}{2}}$	$3x^{\frac{2}{3}}$	x^{-2}	$3x^{-\frac{2}{3}}$	
f)	Der um 15 % gegenüber dem Originalpreis reduzierte Preis eines Fernsehers beträgt 765 €. Das Gerät kostete ursprünglich…	1 015 €	900 €	879,75 €	820 €	
g)	5 Schüler stellen sich für ein Foto auf. Wie viele Möglichkeiten gibt es, sie in einer Reihe anzuordnen?	3125	120	32	15	

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2014): schriftliche Überprüfung Klasse 10 Mathematik, Haupttermin

	Aufgabe	**A**	**B**	**C**	**D**	**Lösung**
h)	Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit drei normalen Würfeln eine Augensumme unter 5 zu würfeln?	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{216}$	$\frac{1}{54}$	
i)	Ergänze so, dass man eine binomische Formel anwenden kann $25a^6 - 70a^3b^2 ...$	$+49b^4$	$-36b^4$	$+36b^8$	$-25b^2$	
j)	cos(30°) =	sin(120°)	sin(210°)	cos(120°)	cos(210°)	
k)	Die Funktion $f(x) = 3^x - 9$ hat ...	eine Nullstelle bei $x = -2$	eine Nullstelle bei $x = 0$	eine Nullstelle bei $x = 2$	keine Nullstelle	
l)	Jeder Innenwinkel in einem regelmäßigen Achteck beträgt ...	180°	145°	135°	120°	
m)	Wenn der Radius eines Kreises $r = \frac{2}{\pi}$ cm beträgt, dann ist die Maßzahl seines Umfangs ...	kleiner als 4	nicht berechenbar	eine irrationale Zahl	eine natürliche Zahl	
n)	In dieser Abbildung gilt: g ist parallel zu h  Es gilt ebenfalls:	$d = 5$ cm	$g = 4$ cm	$\frac{a}{g} = \frac{f}{h}$	$\frac{a}{g} = \frac{b}{d}$	

2. Gleichungen

Bestimme jeweils alle Lösungen der folgenden Gleichungen und notiere deinen Lösungsweg.

a) $x \cdot \left(x^2 - 3x\right) = 0$ **(3 P)**

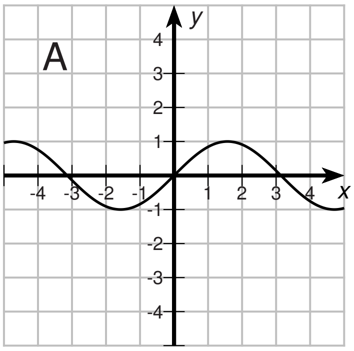
b) $\sqrt{\frac{x}{4} + 13} = 7$ **(3 P)**

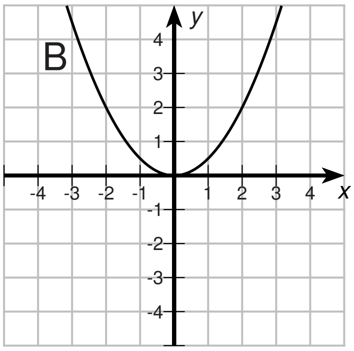
c) $\frac{x^2-25}{x-5} = 0$ **(3 P)**

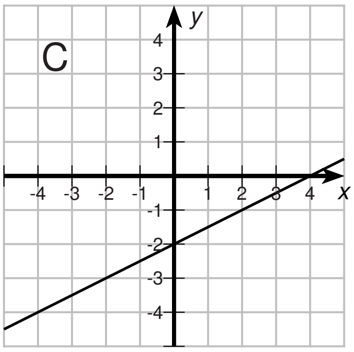
3. Graphen

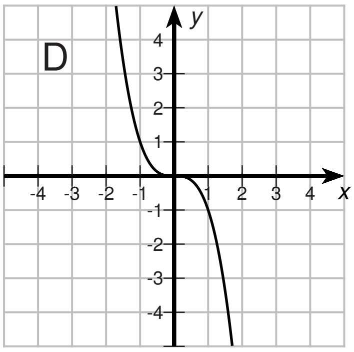
Gib an, welcher der aufgeführten Graphen jeweils zu dem Funktionsterm gehört.
Trage dazu den Buchstaben des Graphen neben dem zugehörigen Term in die Liste ein.

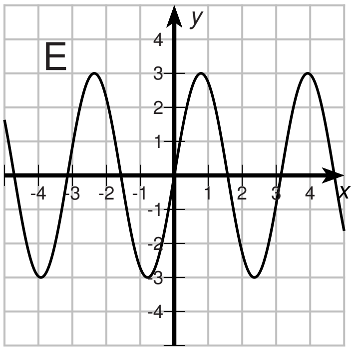
(5 P)











Funktion	Graph
$f_1(x) = \cos(x)$	
$f_2(x) = \frac{1}{2}x - 2$	
$f_3(x) = 2x^2$	
$f_4(x) = 3\sin(2x)$	
$f_5(x) = \sin(x)$	
$f_6(x) = 3\sin(\frac{x}{2})$	
$f_7(x) = 2^x$	
$f_8(x) = -x^3$	
$f_9(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$	
$f_{10}(x) = x^3$	

4. Wahrscheinlichkeit

Ein Glücksrad besteht aus vier Feldern, von denen zwei rot und zwei grün angemalt wurden. Das kleinere grüne Feld bedeckt ein Sechstel der Kreisfläche. Das größere grüne Feld ist doppelt so groß wie das kleinere grüne Feld. Die beiden roten Felder sind gleich groß.

a) **Ergänze** die Abbildung 1 zu einem passenden Glücksrad. **(2 P)**

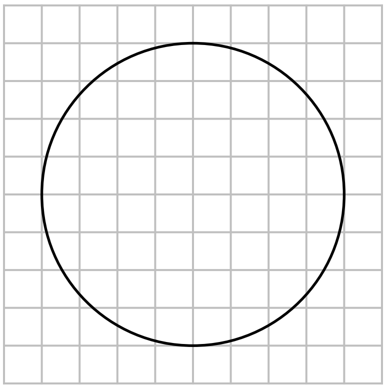


Abbildung 1

b) **Gib** die Wahrscheinlichkeit **an**, dass bei einmaligem Drehen...

- das größere grüne Feld getroffen wird.
- ein grünes Feld getroffen wird. **(2 P)**

c) **Berechne** die Wahrscheinlichkeit, dass bei zweimaligem Drehen einmal ein grünes und einmal ein rotes Feld getroffen wird. Die Reihenfolge soll dabei nicht beachtet werden.

(2 P)

2. Zweites Beispiel zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil [1] Lösung S. 131

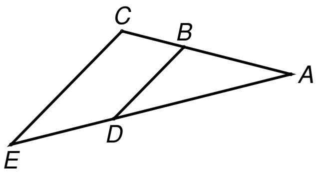
1. Multiple-Choice

Von den jeweils angebotenen Lösungen ist immer genau eine richtig. Überlege und schreibe den zugehörigen Buchstaben **A**, **B**, **C** oder **D** in die Spalte „**Lösung**". Nebenrechnungen auf einem gesonderten Blatt sind zulässig, eine Begründung wird nicht verlangt. **(14 P)**

	Aufgabe	**A**	**B**	**C**	**D**	**Lösung**
a)	$0{,}7 \cdot 0{,}07 =$	0,0049	0,049	0,49	4,9	
b)	$3{,}4\ \text{m}^3 =$	3 400 000 mℓ	34 000 mℓ	3 400 mℓ	34 mℓ	
c)	$(x+7)(2x+4) =$	$2x^2+14x+28$	$2x^2+11x+28$	$20x+28$	$2x^2+18x+28$	
d)	$\frac{2}{3}+\frac{4}{5} =$	$\frac{6}{8}$	$\frac{20}{15}$	$\frac{22}{15}$	$\frac{24}{15}$	
e)	$\sqrt[3]{8^2} =$	2	3	4	8	
f)	$2^{-3} =$	8	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	-8	
g)	Ein Gebrauchtwagen kostet ohne Mehrwertsteuer 12000 €. Einschließlich 19 % Mehrwertsteuer kostet er ...	2 280 €	14 028 €	14 280 €	14 580 €	
h)	6 Schüler stellen sich hintereinander an einer Kinokasse an. Wie viele verschiedene Aufstellungen gibt es?	21	120	216	720	
i)	Bei einem Zylinder werden der Radius und die Höhe verdoppelt. Um welchen Faktor verändert sich das Volumen des Zylinders?	2	4	8	16	

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2016): schriftliche Überprüfung Klasse 10 Mathematik, Haupttermin

	Aufgabe	A	B	C	D	Lösung
j)	Es wird gleichzeitig mit zwei fairen sechsseitigen Spielwürfeln und mit einer fairen Münze geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden zwei gleiche Augenzahlen und Wappen geworfen?	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{72}$	
k)	Die Funktion $f(x) = x^2 - 4$ hat . . .	die beiden Nullstellen -2 und 2.	nur die Nullstelle 2.	nur die Nullstelle 4.	keine Nullstelle.	
l)	Ein Kreis mit dem Radius 10 cm hat ungefähr den Flächeninhalt . . .	63 cm^2	314 cm^2	630 cm^2	3 140 cm^2	
m)	Gegeben ist die folgende Gleichung: $\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 0$ Entscheide, welche Lösung richtig ist.	$x = -2$	$x = 2$	$x = -2$ und $x = 2$	Die Gleichung hat keine Lösung.	
n)	 Es gilt in dieser nicht maßstabsgetreuen Zeichnung: $\overline{BD} \parallel \overline{CE}$ sowie: $\overline{AB} = 4$ cm $\overline{BC} = 2$ cm $\overline{BD} = 5$ cm Die Länge der Strecke $\overline{CE}$ beträgt . . .	10 cm	7,5 cm	5,5 cm	5 cm	

2. Gleichungen

Bestimme jeweils alle Lösungen der folgenden Gleichungen und notiere deinen Lösungsweg.

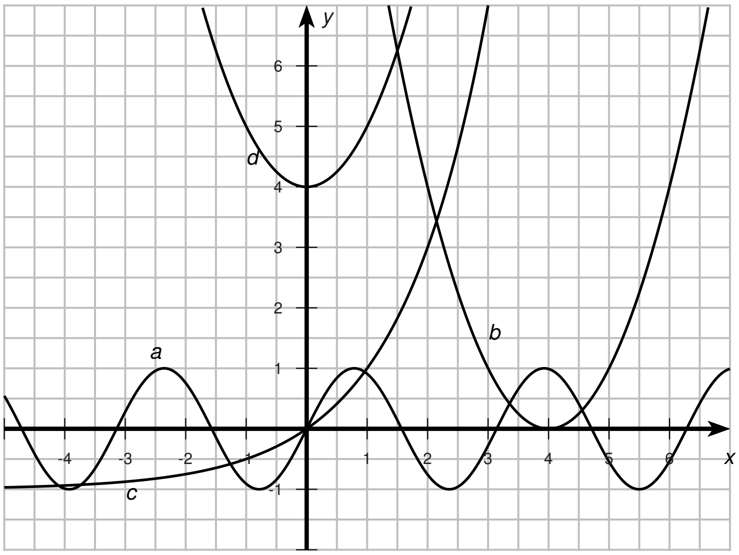
a) $(x-3)(2x+10)(x+4)=0$ **(3 P)**

b) $-4x^2+32x-60=0$ **(3 P)**

c) $-4x^2+32x-60=0$ **(3 P)**

3. Graphen

Gib an, welcher der aufgeführten Graphen jeweils zu dem Funktionsterm gehört.
Trage dazu den Buchstaben des Graphen neben dem zugehörigen Term in die Liste ein.



Funktion	Graph
$f_1(x)=\sin(x)$	
$f_2(x)=\sin(2x)$	
$f_3(x)=\sin(x)+2$	
$f_4(x)=2\sin(x)$	
$f_5(x)=(x-4)^2$	
$f_6(x)=(x+4)^2$	
$f_7(x)=x^2+4$	
$f_8(x)=x^2-4$	
$f_9(x)=2^x$	
$f_{10}(x)=2^x-1$	
$f_{11}(x)=2^{x-1}$	
$f_{12}(x)=2^{x+1}$	

(4 P)

4. Wahrscheinlichkeit

In einem Säckchen befinden sich 5 rote, 3 blaue und 2 grüne Kugeln. Es wird zweimal ohne Zurücklegen gezogen.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass beide gezogenen Kugeln blau sind. **(2 P)**

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass beide gezogenen Kugeln gleichfarbig sind. **(3 P)**

c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine gezogene Kugel grün ist. **(2 P)**

3. Drittes Beispiel zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil [1] Lösung S. 133

1. Multiple-Choice

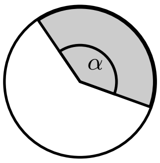
Von den jeweils angebotenen Lösungen ist immer genau eine richtig. Überlege und schreibe den zugehörigen Buchstaben **A**, **B**, **C** oder **D** in die Spalte „

Lösung“. Nebenrechnungen auf einem gesonderten Blatt sind zulässig, eine Begründung wird nicht verlangt. **(14 P)**

	Aufgabe	A	B	C	D	Lösung
a)	165 s =	1,65 min	2,45 min	2,75 min	2,85 min	
b)	7,6 m =	$7{,}6 \cdot 10^0$ mm	$7{,}6 \cdot 10^3$ mm	$7{,}6 \cdot 10^6$ mm	$7{,}6 \cdot 10^9$ mm	
c)	$0{,}006 \cdot 5000 =$	0,3	3	30	300	
d)	$\frac{11}{6} - \frac{1}{4} =$	$\frac{10}{2}$	$\frac{19}{12}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{31}{24}$	
e)	$(7x + 8)(3x - 4) =$	$21x^2 - 4x - 32$	$21x^2 + 4x - 32$	$21x^2 - 4x + 32$	$21x^2 - 32$	
f)	$4^{-3} =$	64	$\frac{1}{64}$	$-\frac{1}{64}$	-64	
g)	Ein Preis von 100 € wird zweimal nacheinander um 10 % des jeweils aktuellen Preises erhöht. Am Ende beträgt der Preis ...	119 €	120 €	121 €	130 €	
h)	Es wird mit einem fairen sechsseitigen Spielwürfel dreimal nacheinander gewürfelt. Die Wahrscheinlichkeit, dass dreimal dieselbe Zahl gewürfelt wird, beträgt ...	$\frac{6}{6+6+6}$	$\frac{1}{6+6+6}$	$\frac{6}{6\cdot6\cdot6}$	$\frac{1}{6\cdot6\cdot6}$	

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2017): schriftliche Überprüfung Klasse 10 Mathematik, Haupttermin

	Aufgabe	**A**	**B**	**C**	**D**	**Lösung**
i)	Das Volumen eines Zylinders beträgt $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, wobei r der Radius und h die Höhe des Zylinders ist. Um welchen Faktor verändert sich das Volumen des Zylinders, wenn man den Radius verdoppelt und die Höhe halbiert?	0,5	1	2	4	
j)	In einem Säckchen befinden sich 6 verschiedenfarbige Kugeln. Es wird dreimal nacheinander ohne Zurücklegen gezogen und die Farbfolge notiert. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es?	15	18	95	120	
k)	Die Funktion f mit $f(x) = 2^x - 4$ hat ...	nur die Nullstelle 2.	nur die Nullstelle -2.	die Nullstellen -2 und 2.	keine Nullstellen.	
l)	Ein Computer kostet einschließlich Mehrwertsteuer 297,50 €. Die Mehrwertsteuer in Höhe von 19 % lässt sich durch den folgenden Term berechnen:	$297{,}5 \cdot \frac{19}{119}$	$297{,}5 \cdot \frac{119}{19}$	$297{,}5 \cdot \frac{100}{81}$	$297{,}5 \cdot \frac{81}{100}$	
m)	 Der Winkel α hat die Größe 144°. Welcher prozentuale Anteil der Kreisfläche wird durch den grauen Kreissektor beschrieben?	35 %	37,5 %	38 %	40 %	

	Aufgabe	A	B	C	D	Lösung
n)	Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -(x-2)^2 + 2$, $x \in \mathbb{R}$ hat seinen Scheitelpunkt in ...	$(2\mid-2)$	$(2\mid2)$	$(-2\mid-2)$	$(-2\mid2)$	

2. Gleichungen

Bestimme jeweils alle Lösungen der folgenden Gleichungen und notiere deinen Lösungsweg.

a) $2x^2 - 8x - 120 = 0$ **(4 P)**

b) $(x-5)(x^2-9)(x^2+4) = 0$ **(3 P)**

c) $\frac{16}{x} = x^3$ **(3 P)**

3. Graphen

Gib zu den Graphen mit den Buchstaben *a* und *b* jeweils eine passende Funktionsgleichung **an**. **(4 P)**

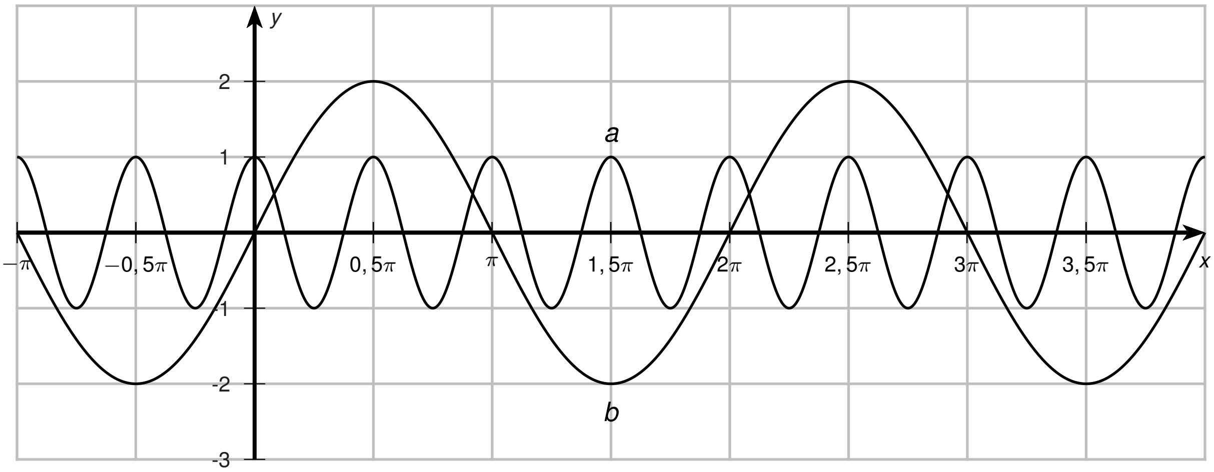


Abbildung 1

Graph mit dem Buchstaben	Funktionsgleichung
a	$a(x) =$
b	$b(x) =$

4. Flächenanteile

In der folgenden Abbildung 2 sind einem Quadrat Kreise und Halbkreise einbeschrieben.

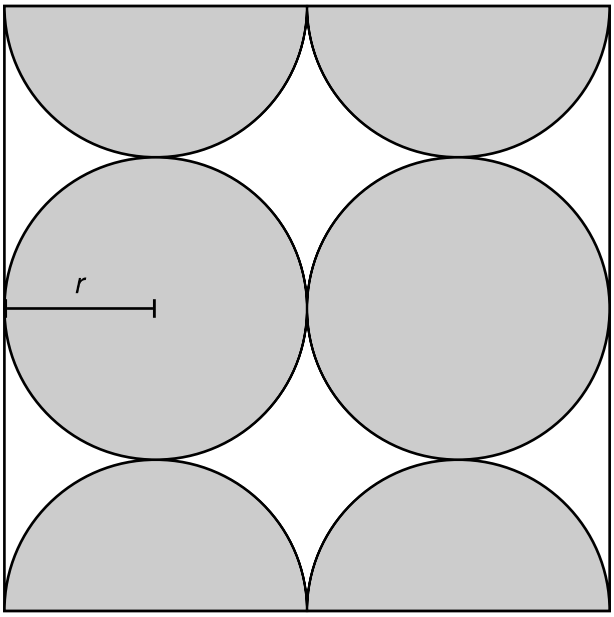


Abbildung 2

Weise nach, dass der Anteil der grau markierten Fläche am gesamten Quadrat $\frac{\pi}{4}$ beträgt.

(6 P)

4. Viertes Beispiel zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil [1] Lösung S. 134

1. Multiple-Choice

Von den jeweils angebotenen Lösungen ist immer genau eine richtig. Überlege und schreibe den zugehörigen Buchstaben **A**, **B**, **C** oder **D** in die Spalte „**Lösung**“. Nebenrechnungen auf einem gesonderten Blatt sind zulässig, eine Begründung wird nicht verlangt. **(14 P)**

	Aufgabe	**A**	**B**	**C**	**D**	**Lösung**
a)	$0{,}06 \cdot 0{,}5 =$	0,3	0,03	0,003	0,0003	
b)	$\frac{3}{9} + \frac{4}{6} =$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	
c)	$0{,}25\ \ell =$	$\frac{1}{4}\ \ell$	$25\ \mathrm{m}\ell$	$250\ \mathrm{dm}^3$	$25\ \mathrm{cm}^3$	
d)	$\left(5^2\right)^2 =$	25	125	625	3125	
e)	$-4x^{\frac{5}{2}} =$	$\frac{4}{x^{-\frac{5}{2}}}$	$-4x^{2{,}5}$	$-\frac{4}{x^{\frac{5}{2}}}$	$\frac{4}{x^{-\frac{2}{5}}}$	
f)	30000 € werden unter den Personen *A* und *B* im Verhältnis 1 : 5 aufgeteilt. Gib an welchen Betrag jeder bekommt.	*A*: 6000 € *B*: 24000 €	*A*: 4000 € *B*: 26000 €	*A*: 1500 € *B*: 28500 €	*A*: 5000 € *B*: 25000 €	
g)	Der Kaufpreis einer Gitarre wird von 900 € auf 792 € reduziert. Die Reduzierung betrug ...	12 %	11 %	10 %	9 %	
h)	Man wirft eine Münze und hat bereits 4 Mal Zahl geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ein fünftes Mal Zahl zu werfen?	0,0625	0,125	0,25	0,5	

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2018): schriftliche Überprüfung Klasse 10 Mathematik, Haupttermin

	Aufgabe	**A**	**B**	**C**	**D**	**Lösung**
i)	Auf einem 10 m-Sprungturm im Schwimmbad stehen vier Mädchen und zwei Jungen. Es darf nur nacheinander gesprungen werden. Alle Kinder sind gleich mutig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Jungen zuerst runterspringen?	$p = \frac{1}{3}$	$p = \frac{1}{6}$	$p = \frac{1}{12}$	$p = \frac{1}{15}$	
j)	In einem Säckchen befinden sich 5 blaue und 3 rote Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu ziehen beträgt?	$p = \frac{3}{5}$	$p = \frac{3}{8}$	$p = \frac{30}{50}$	$p = \frac{50}{50}$	
k)	Ergänze so, dass man eine binomische Formel anwenden kann: $36a^4 - ... + 4a^2b^4$	$72a^4b^2$	$36ab^4$	$24a^3b^2$	$18a^3b^2$	
l)	Um welchen Faktor wächst die Mantelfläche eines Zylinders, wenn man die Höhe verdoppelt, der Radius aber gleich bleibt?	1	2	4	16	
m)	Die Funktion $f(x) = (x-2)^2 + 4$ hat Nullstellen bei ...	$x_1 = 0$ $x_2 = 4$	$x_1 = -2$ $x_2 = 2$	$x_1 = 2$ $x_2 = 6$	nirgends	
n)	Welche Lösung ist für die Gleichung $\frac{4y - 4z}{x - 4} = 0$ richtig?	$x = 1$ $y = 1$ $z = 1$	$x = 1$ $y = 1$ $z = -1$	$x = 4$ $y = 1$ $z = 1$	$x = 2$ $y = 1$ $z = 2$	

2. Gleichungen

Bestimme jeweils alle Lösungen der folgenden Gleichungen und notiere deinen Lösungsweg.

a) $12x^4 + 9x^3 = 0$ **(3 P)**

b) $4 = 3x^2 + 12x - 11$ **(4 P)**

c) $\sqrt{\frac{4}{x}} = 3$ **(3 P)**

3. Graphen

Gib an, welcher der aufgeführten Graphen jeweils zu dem Funktionsterm gehört. Trage dazu den Buchstaben des Graphen neben dem zugehörigen Term in die Liste ein.

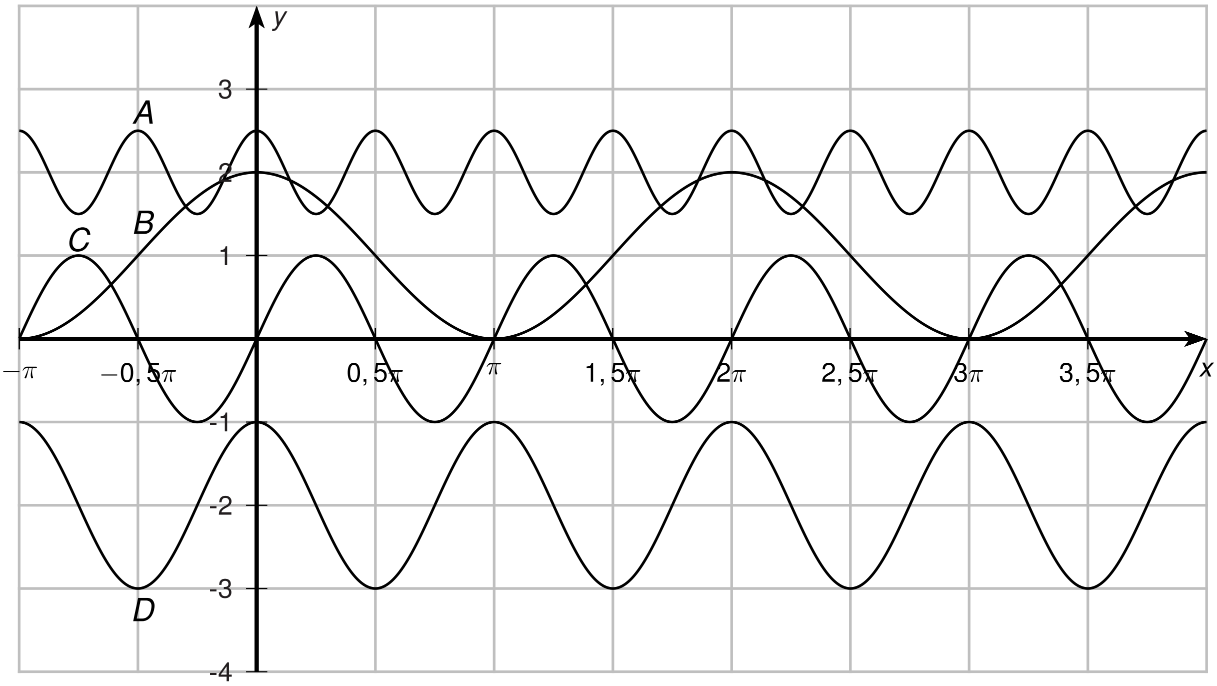


Abbildung 1

Funktion	Graph	Funktion	Graph
$f_1(x) = \cos(x) + 1$		$f_5(x) = \cos(2x) - 2$	
$f_2(x) = \sin(0{,}5x)$		$f_6(x) = 0{,}5\cos(4x) + 2$	
$f_3(x) = \cos(x + 1)$		$f_7(x) = \sin(2x) - 1$	
$f_4(x) = \sin(2x)$		$f_8(x) = 0{,}5\cos(4x) - 2$	

4. Geometrie

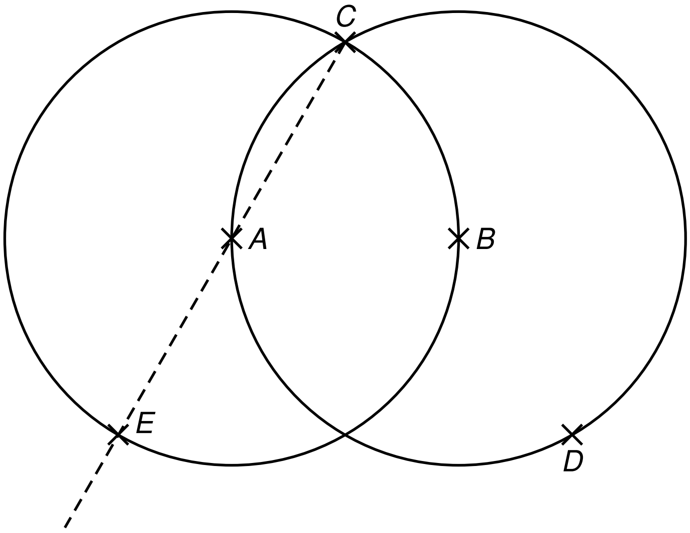


Abbildung 2

Die Punkte *A* und *B* sind jeweils der Mittelpunkt des linken bzw. rechten Kreises und liegen gleichzeitig auf dem rechten bzw. linken Kreis. Der Punkt *C* ist der obere Schnittpunkt der beiden Kreise.

a) **Begründe**, dass das Dreieck *ABC* gleichseitig ist und **gib an**, wie groß seine drei Innenwinkel sind. **(3 P)**

Von *C* aus wird ein Strahl durch den Punkt *A* gezogen.
Der dem Punkt *C* gegenüberliegende Schnittpunkt des Strahls mit dem Kreis wird *E* genannt.
Entsprechend wird im rechten Kreis der Punkt *D* konstruiert.

b) **Bestimme** die Länge der Strecke $|ED|$ in Abhängigkeit vom Kreisradius r.

Hinweis: Es reicht aus, durch logische Schlussfolgerungen die Länge zu bestimmen und diesen Weg in einem kurzen Text darzulegen. **(3 P)**

5. Weitere typische Aufgaben im hilfsmittelfreien Prüfungsteil Lösung S. 137

1. Besondere Werte der trigonometrischen Funktionen

Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck (siehe Abbildung 1).

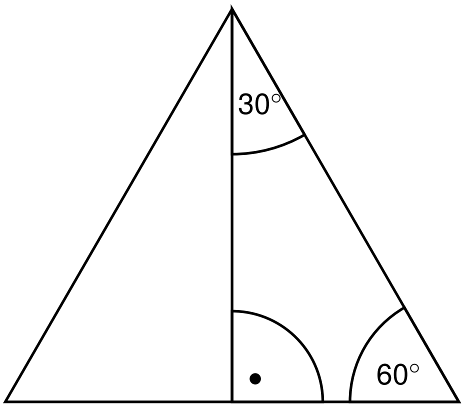


Abbildung 1

a) Begründe, dass die angegebenen Winkelgrößen korrekt sind. **(1 P)**

b) Zeige mit Hilfe des Dreiecks:

- $\sin 30° = \frac{1}{2}$
- $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **(6 P)**

2. Flächen

Der Kreis in der Abbildung 2 hat einen Radius von 3 cm und ist in vier gleichgroße Sektoren unterteilt. In jedem der Sektoren ist noch ein Viertel eines Kreisbogens (Kreisradius ebenfalls 3 cm) eingezeichnet.

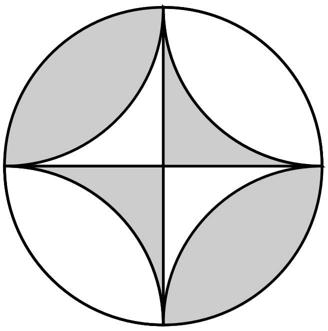


Abbildung 2

Gib einen Term für den Gesamtflächeninhalt der grau unterlegten Flächen **an**.
Hinweis: Das Ergebnis kann mit minimalem Rechenaufwand bestimmt werden. **(3 P)**

3. Flächenberechnung

Bestimme einen Term für den Flächeninhalt des grau markierten Quadrats in Abhängigkeit von a und vereinfache ihn soweit wie möglich.

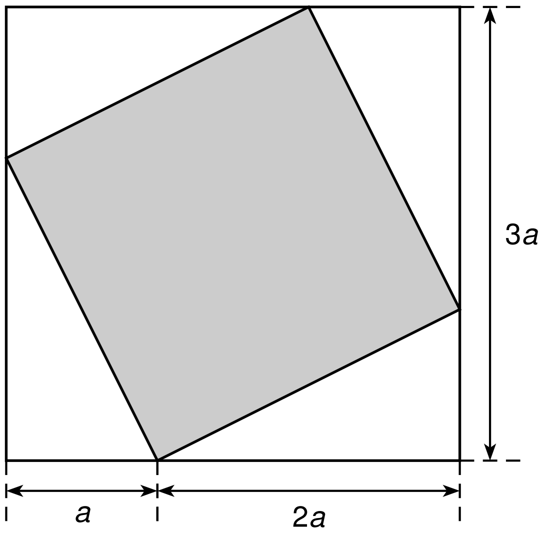


Abbildung 3

(5 P)

4. Benzinverbrauch

Die Abbildung 4 zeigt die Tankfüllung eines (wenig Benzin verbrauchenden) Pkws während einer Autobahnfahrt an.

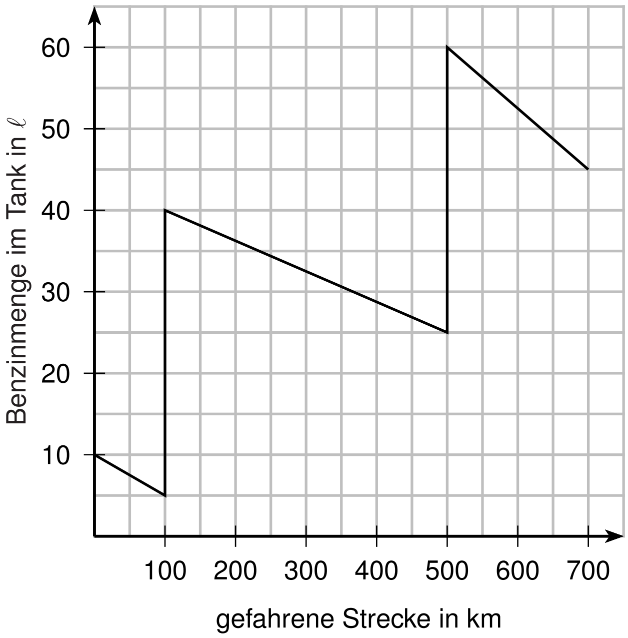


Abbildung 4

a) **Gib an**, welche Strecke seit Antritt der Fahrt bis zum ersten Tankstopp zurückgelegt wurde. **(1 P)**

b) **Gib an**, wie viele Liter Benzin beim ersten Tanken gekauft wurden. **(2 P)**

c) **Gib** den Benzinverbrauch pro 100 km **an**, zunächst vor dem ersten Tankauffüllen und dann zwischen dem ersten und zweiten Tankauffüllen. **(2 P)**

d) **Berechne** den Benzinverbrauch pro 100 km für die Gesamtstrecke. **(2 P)**

5. Formel 1

Die Rennstrecke eines Formel-1-Rennens ist normalerweise nicht so einfach wie in Abbildung 5, doch die Skizze gibt das Prinzip wieder.

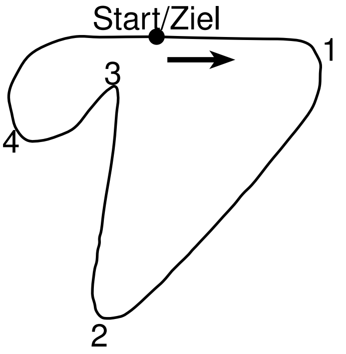


Abbildung 5

- **Zeichne** einen Graphen, der die Geschwindigkeit eines Rennwagens in der ersten Runde in Abhängigkeit von der Zeit zeigen könnte.
- **Begründe** den Verlauf deines Graphen. **(7 P)**

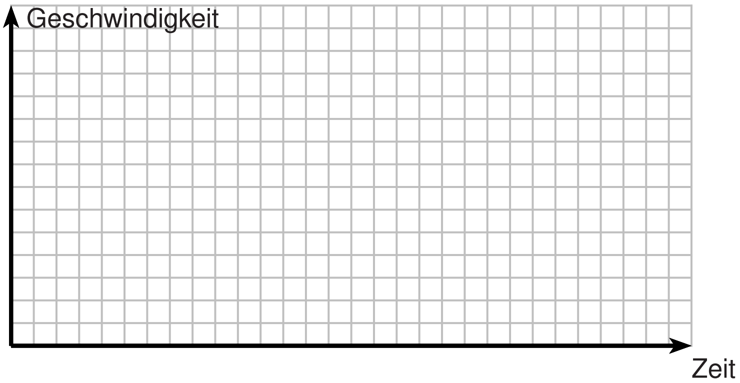


Abbildung 6

6. Goldener Schnitt

Zwei Strecken stehen im **goldene Schnitt** zueinander, wenn sich die kürzere Strecke (a) zur längeren Strecke (b) so verhält, wie die längere Strecke (b) zur Summe der Strecken ($a + b$), d. h. für die Strecken a und b gilt die Gleichung:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$$

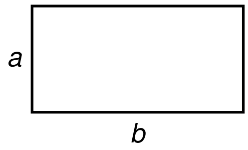


Abbildung 7

a) Begründe, dass die Gleichung $a^2 + ab = b^2$ zur obigen Gleichung äquivalent ist. **(2 P)**

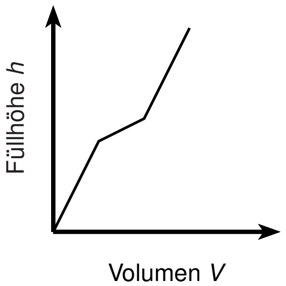
b) Zeige, dass sich bei gegebenem b eine Lösung für a durch

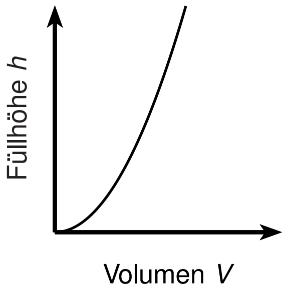
$$a = \frac{b}{2}(-1 + \sqrt{5})$$

bestimmen lässt. **(3 P)**

7. Füllgraphen 1

Die beiden vorgegebenen Graphen beschreiben den Zusammenhang zwischen dem Volumen und der Höhe des Flüssigkeitsstands in Gefäßen.





Mögliche Gefäßform

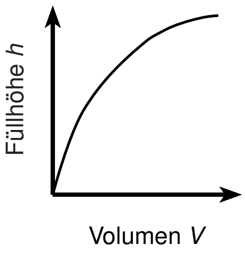
Mögliche Gefäßform

Skizziere zu jedem Graphen eine Gefäßform, für die der vorgegebene Verlauf zutreffen könnte. **(4 P)**

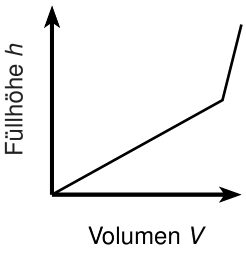
8. Füllgraphen 2

Nachstehend folgen einige Graphen, die einen Zusammenhang zwischen dem Volumen und der Höhe des Flüssigkeitsstands in Gefäßen beschreiben.

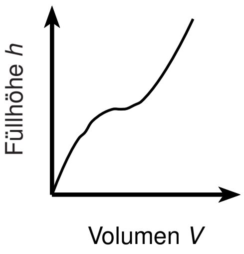
A



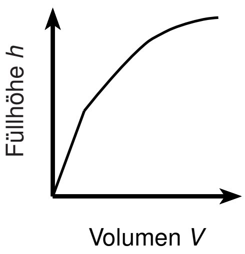
B



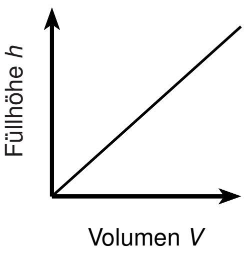
C



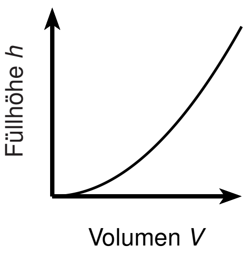
D



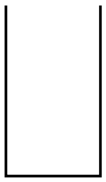
E



F

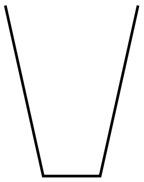


(a)



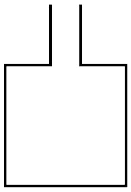
Ein Messbecher

(b)



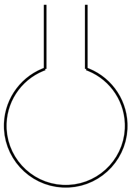
Eine Vase

(c)



Eine Flasche

(d)

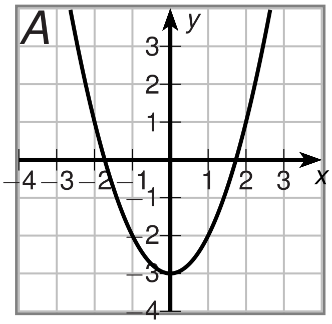


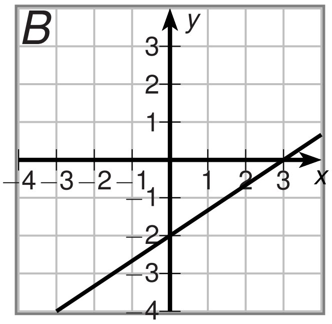
Ein Parfümflakon

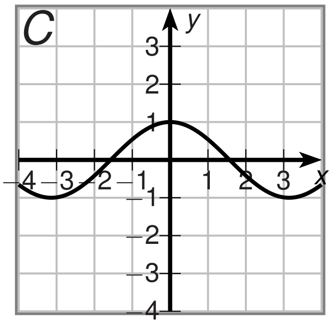
- **Nenne** zu jedem Gefäß (a), (b), (c), (d) einen der Graphen (*A*), (*B*), (*C*), (*D*), (*E*), (*F*), der den Zusammenhang zwischen Volumen und Höhe des Flüssigkeitsspiegels am besten beschreibt.
- **Begründe** deine Entscheidung jeweils kurz. **(8 P)**

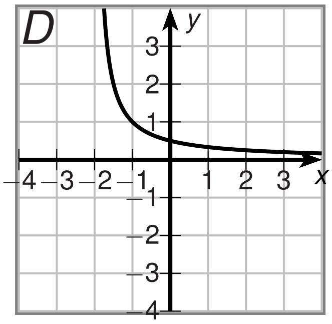
9. Graphen zuordnen

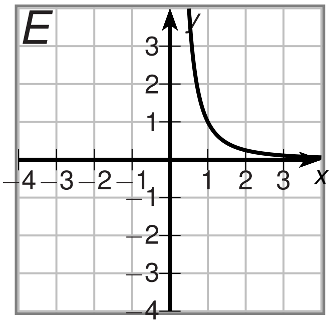
Gib an, welcher der aufgeführten Funktionsterme jeweils zu den Graphen *A* bis *I* gehört.

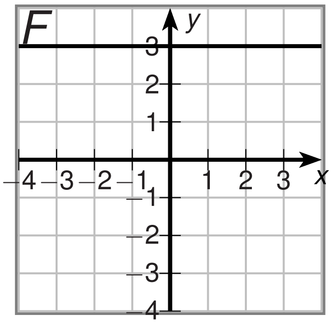


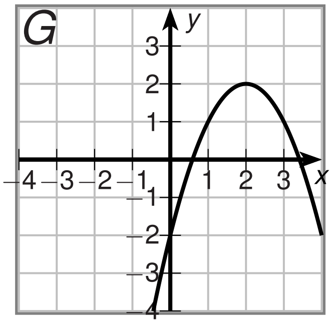


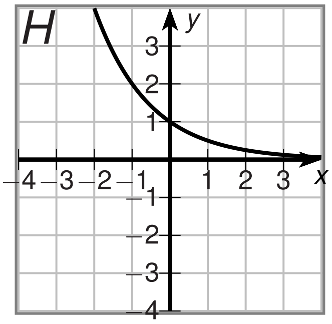


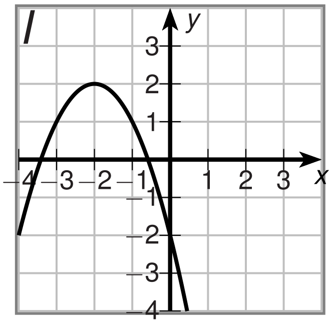












Funktionsterm	$\frac{2}{3}x-2$	$\sin(x)$	$\frac{1}{x+2}$	x^2-3	3	$-(x+2)^2+2$
Zugeh. Graph						

Funktionsterm	$\frac{1}{x^2}$	$(\frac{1}{2})^x$	$\frac{3}{2}x-2$	2^x	$-(x-2)^2+2$	$\cos(x)$
Zugeh. Graph						

Funktionsterm	x^2+3	$\frac{1}{x+1}$	$-(x+2)^2-2$	$\frac{1}{x^3}$	$-\frac{2}{3}x-2$	-3
Zugeh. Graph						

(9 P)

10. Geraden

In der Abbildung 8 siehst du die Graphen verschiedener Funktionen.

a) **Gib** jeweils die zugehörige Funktionsgleichung **an**:

$f(x) =$

$g(x) =$

$h(x) =$

$k(x) =$ **(4 P)**

b)
- **Zeichne** eine Parallele zur y-Achse in das Koordinatensystem **ein**.
- **Gib** die zugehörige Gleichung **an**.

(4 P)

c) **Entscheide**, ob es sich bei der Geraden unter b) um den Graphen einer Funktion handelt. **(1 P)**

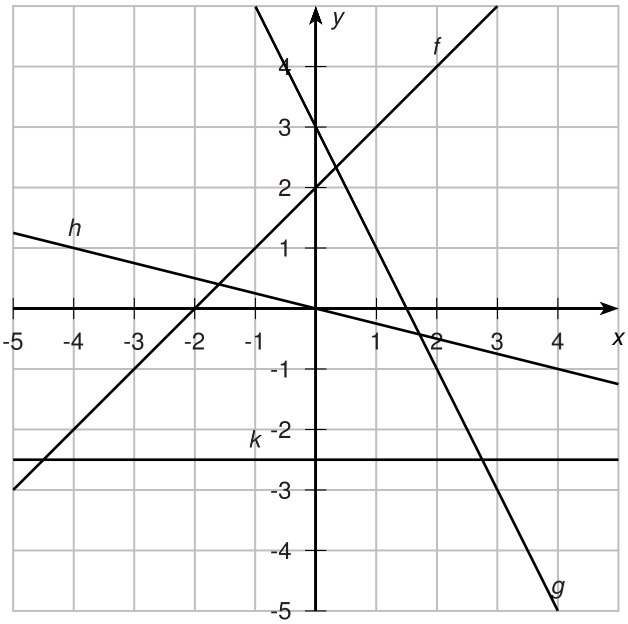
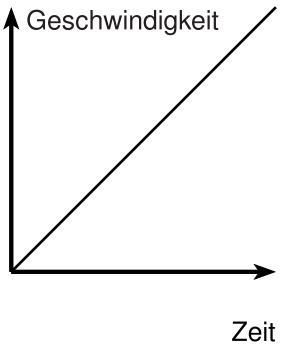


Abbildung 8

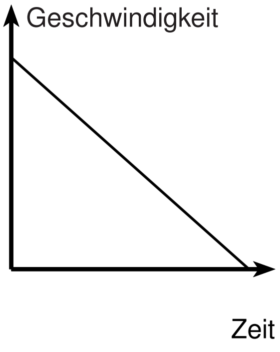
11. Schiefe Ebene

In einem Experiment im Physikunterricht rollt eine Kugel eine schiefe Ebene herab und beschleunigt dabei gleichmäßig.

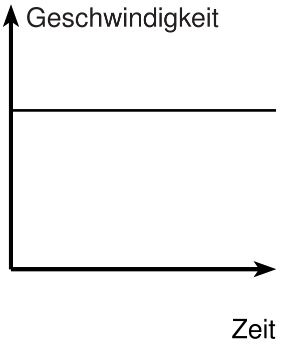
Graph 1



Graph 2



Graph 3



- **Gib an**, welcher Graph den Geschwindigkeitsverlauf der Kugel richtig erfasst.
- **Begründe** kurz deine Angabe. **(2 P)**

12. Graphen 2

Gegeben seien die Funktionen f, g und h mit $f(x) = x^3$, $g(x) = -x^3$ und $h(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$.

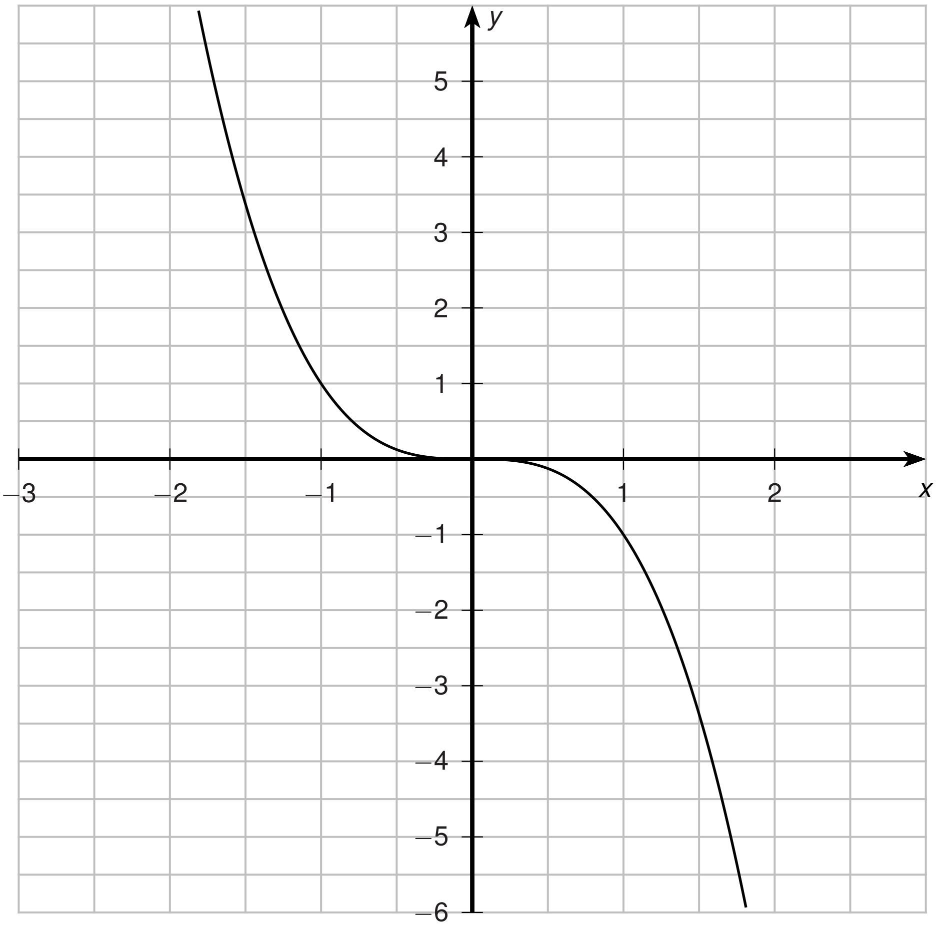


Abbildung 9

In der Abbildung 9 ist der Graph einer dieser Funktionen zu sehen.

a) **Gib an**, welche Funktion grafisch dargestellt ist. **(1 P)**

b) **Skizziere** die Graphen der beiden anderen Funktionen in die Abbildung 9. **(4 P)**

c) **Beschreibe** kurz, welche Beziehung zwischen den Funktionen f und h besteht. **(2 P)**

d) 3 Schüler einer Klasse können Aufgabe a) lediglich durch pures Raten bearbeiten.

Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle drei diese Aufgabe richtig beantworten.

(2 P)

13. Gebläse

In der Anordnung in der Abbildung 10 kann eine Kugel nach dem Loslassen einen der möglichen Wege gehen. Die Chance, nach rechts oder links abgelenkt zu werden, beträgt jeweils 50 %. Durch ein Gebläse kann dies geändert werden: Dann wird eine Kugel in acht von zehn Fällen nach rechts abgelenkt.

a) **Gib an**, wie viele verschiedene Wege die Kugel durchlaufen kann, um in das Fach *B* zu gelangen. **(1 P)**

b) **Ermittle** die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei abgeschaltetem Gebläse eine Kugel in ein Fach mit dem Namen *E* fällt. **(2 P)**

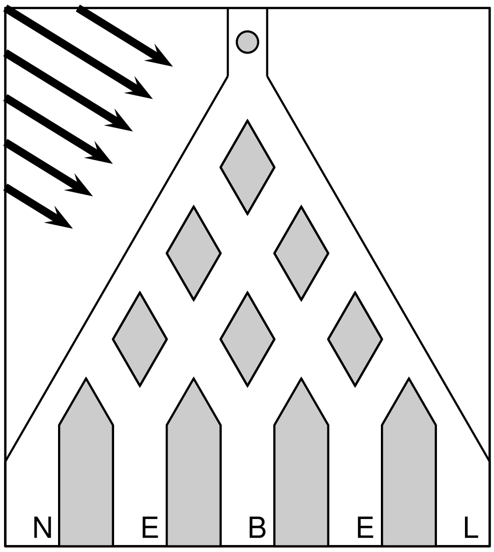


Abbildung 10

Jetzt wird das Gebläse eingeschaltet.

c) Es werden nacheinander 10 000 Kugeln fallen gelassen.

Ermittle die Anzahl der Kugeln, die man im Fach *N* erwarten kann. **(2 P)**

d) **Gib** einen Zahlenterm für die Wahrscheinlichkeit **an**, dass eine Kugel in das Fach *B* fällt.

(2 P)

14. Würfel und Münze

Mit einem Würfel, dessen Netz in Abbildung 11 angegeben ist, wird einmal gewürfelt.

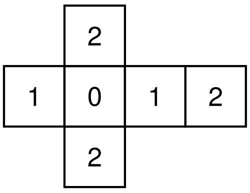


Abbildung 11

Anschließend wird eine Münze (Wappen oder Zahl) so oft geworfen, wie es die Augenzahl des Würfels anzeigt.

Zeichne ein Baumdiagramm und **bestimme** die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

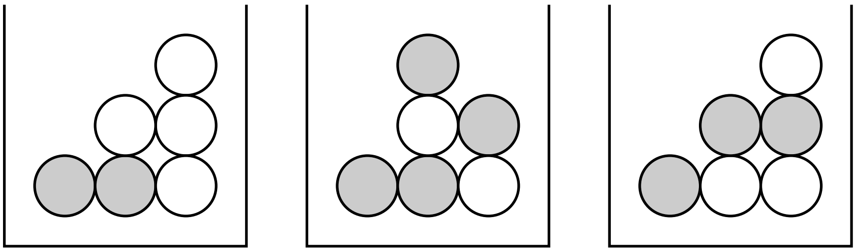
(A) genau einmal Zahl

(B) mindestens einmal Zahl

(C) keinmal Wappen **(8 P)**

15. Martins Glücksspiel

Martin hat für seine Freunde ein Glücksspiel vorbereitet und dazu einen normalen fairen Spielwürfel und drei mit Bällen gefüllte Vasen mitgebracht (siehe Abbildung 12).



Vase 1 Vase 2 Vase 3

Abbildung 12

Er vereinbart folgende Regeln:

- Erst muss man würfeln, anschließend zieht man eine Kugel aus einer der Vasen.
- Bei einer Eins zieht man aus Vase 1, bei einer geraden Augenzahl aus Vase 2, sonst aus Vase 3.
- Gewonnen hat man, wenn man eine dunkle Kugel zieht.

Er verlangt 1 € Spieleinsatz und zahlt bei Gewinn den Einsatz und 1 € extra zurück.

a) **Berechne** die Wahrscheinlichkeit dafür, zunächst eine Eins zu würfeln, dann eine helle Kugel zu ziehen. **(2 P)**

b) **Entscheide**, ob Martin auf lange Sicht bei seinem Glücksspiel Gewinn macht. **(5 P)**

6 Aufgaben, die mithilfe des Taschenrechners bearbeitet werden

6.1 Aufgaben zur Leitidee Raum und Form sowie zur Leitidee Messen

1. Wassertank [1] Lösung S. 142

In der Abbildung 1 ist ein Wassertank dargestellt.

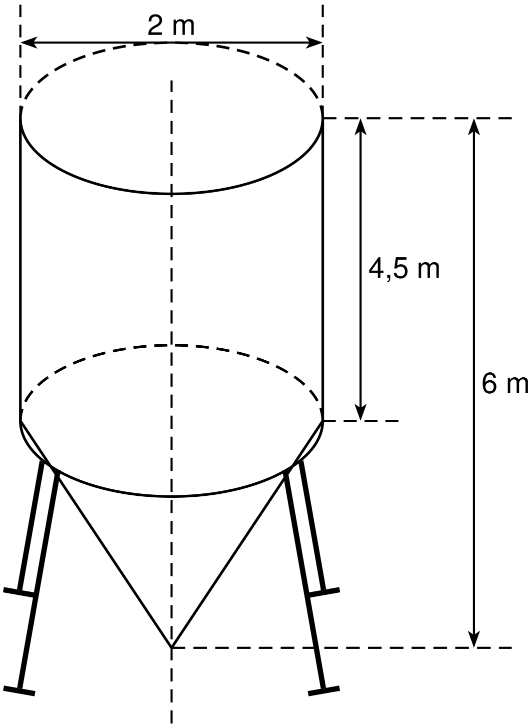


Abbildung 1: Skizze ist nicht maßstabsgerecht

Der zylinderförmige Teil des Tanks soll von außen einen neuen Anstrich erhalten. Mit einem Liter Farbe bekommt man 8 m^2 angestrichen.

a) **Berechne**, wie viel Liter Farbe man braucht. **(6 P)**

b)
- **Berechne** durch Überschlag das Gesamtvolumen des Tanks.
- **Beschreibe**, wie du vorgegangen bist. **(4 P)**

c) Der spitze Teil des Tanks wird bis zu seiner halben Höhe mit Wasser gefüllt.

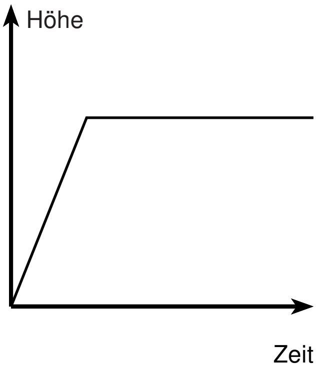
Berechne, wie viele Kubikmeter Wasser der Tank enthält. **(7 P)**

---

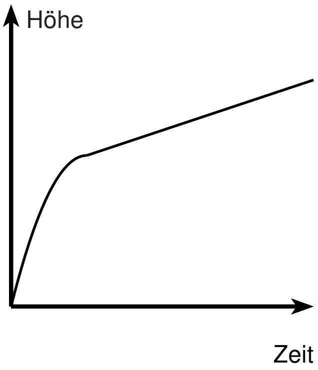
[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2012): Beispielaufgaben für die schriftliche Überprüfung an Gymnasien - Klasse 10 Mathematik

d) Der leere Tank wird gleichmäßig mit Wasser gefüllt.

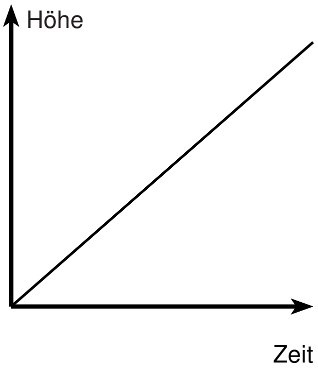
- **Gib an**, welcher der folgenden Graphen zeigt, wie sich die Höhe des Wasserspiegels mit der Zeit ändert.
- **Begründe** deine Entscheidung.
- **Begründe** für die anderen Graphen, warum sie nicht die Änderung beschreiben.



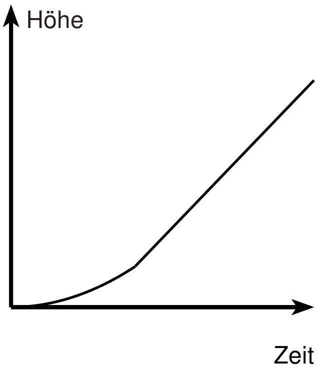
A



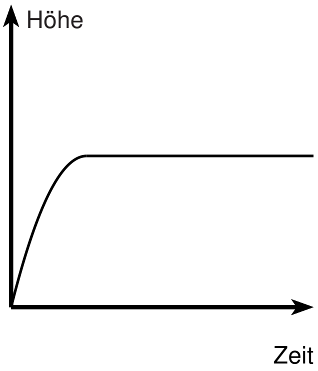
B



C



D



E

(5 P)

2. Paranussbaum [1] **Lösung S. 143**

Paranussbäume sind Urwaldriesen. Als so genannte „Überständer“ ragen sie weit über das etwa vierzig Meter hohe Kronendach des tropischen Regenwalds hinaus.
Besonders große Exemplare dieser Bäume können bis zu 60 m hoch werden, davon entfallen etwa 43 m auf den Stamm. Der Stamm eines solchen Baums hat einen Umfang von ungefähr 16 m und ist annähernd zylindrisch.

a) **Bestimme** den Durchmesser eines solchen Baumstammes. **(2 P)**

b) **Berechne** die Masse eines solchen Baumstammes (vom Boden bis zur Krone) in Tonnen, wenn man von einer Dichte von 0,8 g/cm³ für das Holz ausgeht. **(4 P)**

Um die Entfernung der Baumkronenpunkte B_1 und B_2 nahe beieinander stehender Paranussbäume zu bestimmen, werden nach der Methode des „Vorwärtseinschneidens“ von einer zugänglichen Standlinie $\overline{PQ}$ aus die folgenden Werte gemessen:

$\alpha_1 = 69°$, $\alpha_2 = 36°$

$\beta_1 = 80°$, $\beta_2 = 49°$

Standlinie $\overline{PQ} = 100$ m.

Dabei wird vorausgesetzt, dass die vier Punkte P, Q, B_1, B_2 in einer Ebene liegen.

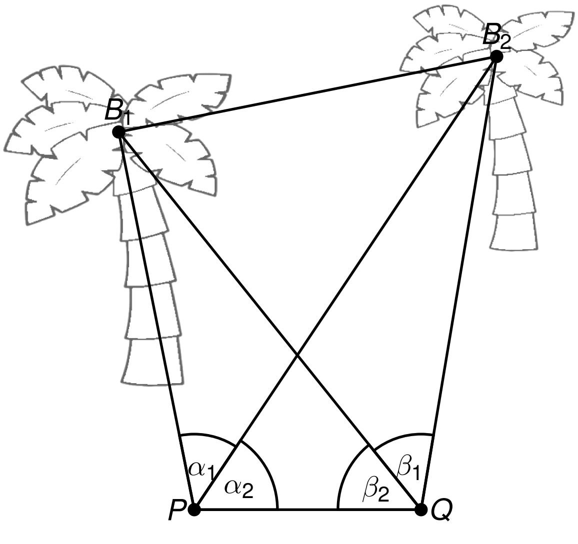


Abbildung 1

c) **Bestimme** mit diesen Daten zuerst die Entfernungen $\overline{PB_1}$ und $\overline{PB_2}$ und dann die gesuchte Entfernung der Baumkronenpunkte B_1 und B_2. **(11 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2012): Beispielaufgaben für die schriftliche Überprüfung an Gymnasien - Klasse 10 Mathematik

Die beiden Bäume sind unterschiedlich hoch (61 m bzw. 49 m). Deshalb wird durch die oben angewandte Methode nicht der Abstand der Baumstämme voneinander, sondern der Abstand der Baumkronenpunkte B_1 und B_2 bestimmt. Diese beiden Abstände stimmen hier nicht überein (siehe Abbildung 2).

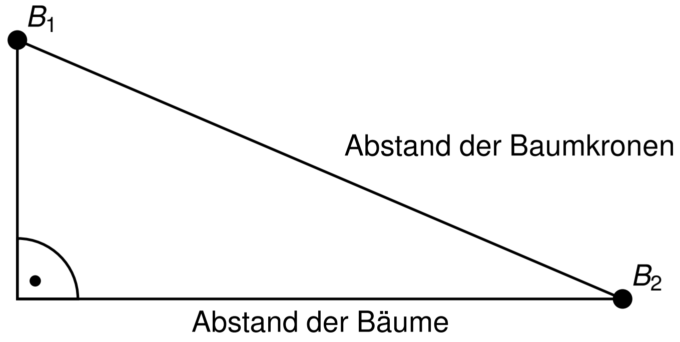


Abbildung 2

d) **Vergleiche** die beiden Abstände miteinander und **entscheide**, ob das oben beschriebene Verfahren dennoch auch zur Bestimmung des Abstandes dieser beiden unterschiedlich großen Bäume geeignet sein könnte, falls wenigstens die Fußpunkte der Baumstämme sich auf gleicher Höhe befinden. **(5 P)**

3. Pfadfinderzelt [1] **Lösung S. 145**

Eine einfache Art, ein Zelt zu konstruieren, besteht darin, gleichlange Stangen in den Eckpunkten eines Vielecks auf dem Boden aufzustellen und sie in einer Dachspitze zusammenzubinden. Anschließend wird das „Gerüst“ mit Zeltbahnen bespannt. Der Fußboden bleibt „Natur“.

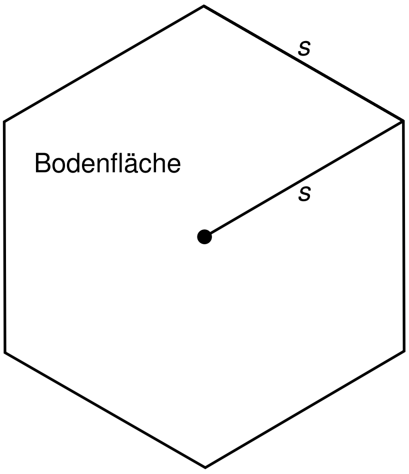


Abbildung 1

Wir betrachten als Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck (siehe Abbildung 1). Die sechs Stangen haben eine Länge von jeweils 8 m, werden aber einen Meter vor ihrem Ende zusammengebunden. Der Durchmesser der Stangen wird hier vernachlässigt.
Der Abstand s der Fußpunkte der Stangen zum Bodenmittelpunkt betrage zunächst 5 m.

a) **Berechne** die Höhe des Zeltes (Abstand vom Boden bis zum Kreuzungspunkt der Stangen).
(Zur Kontrolle: $h \approx 4{,}9$ m*)* **(4 P)**

b)
- **Bestimme** den Flächeninhalt des Zeltbodens.
  (Zur Kontrolle: $A \approx 65$ m^2*)*
- **Begründe** allgemein, dass man bei variabler Länge s den Flächeninhalt des Zeltbodens $A(s)$ mit folgender Formel berechnen kann:

$$A(s) = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s^2$$

Hinweis: Der sechseckige Zeltboden setzt sich aus sechs kongruenten Dreiecken zusammen.

(5 P)

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2012): Beispielaufgaben für die schriftliche Überprüfung an Gymnasien - Klasse 10 Mathematik

c) **Bestimme**, wie viel Quadratmeter Zelttuch benötigt werden. **(5 P)**

d) **Bestimme** das Volumen des Zeltes. **(3 P)**

e) Wir nehmen an, dass eine Person im Zelt stehen kann, wenn der senkrechte Abstand zum Zeltdach mindestens 1,80 m beträgt (siehe Abbildung 2).

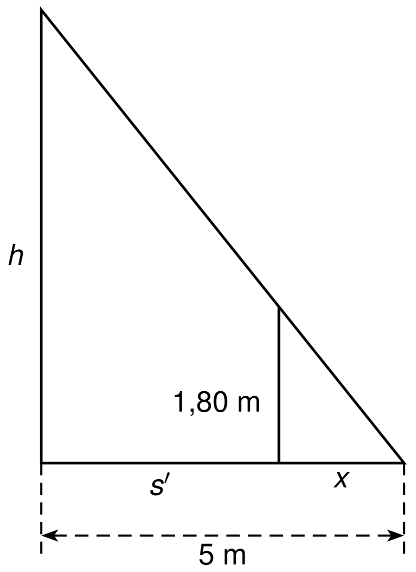


Abbildung 2

Bestimme den Flächeninhalt der Bodenfläche, auf der man stehen kann.
Hinweis: Benutze dazu die Abbildung 2 und berechne x und s'. **(5 P)**

4. Vom Stern zur Pyramide [1] **Lösung S. 147**

Der symmetrische Stern in Abbildung 1 hat folgende Eigenschaften:

- Alle Seiten sowie die Strecke $\overline{AC}$ haben die gleiche Länge a.
- $\overline{AC}$ steht senkrecht zu $\overline{CE}$.

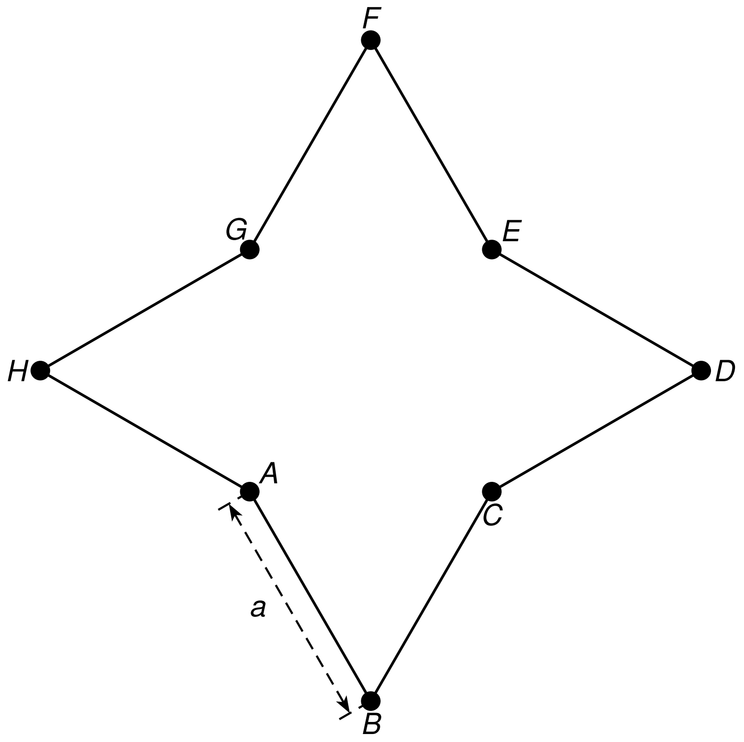


Abbildung 1

a) **Gib an**, wie viele Symmetrieachsen der Stern hat. **(2 P)**

b) **Beschreibe** kurz eine mögliche Konstruktion des Sterns. **(4 P)**

Die Dreiecksflächen sollen so geklappt werden, dass eine Pyramide entsteht.

c) **Bestimme** das Volumen der Pyramide für $a = 5$ cm. **(9 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2012): Beispielaufgaben für die schriftliche Überprüfung an Gymnasien - Klasse 10 Mathematik

Der Stern wird so verändert, dass die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$ nicht mehr gleich lang sind. Die Symmetrie des Sterns bleibt jedoch erhalten.

d) **Untersuche**, unter welchen Bedingungen durch Klappen der Dreiecksflächen eine Pyramide entstehen kann. **(3 P)**

Betrachtet wird jetzt die so geänderte Pyramide, bei der die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ doppelt so lang geworden sind (die Strecke $\overline{AC}$ hingegen hat ja ihre Länge beibehalten!).

e) **Begründe**, dass das Volumen dieser Pyramide nicht doppelt so groß ist wie das der Pyramide aus c) und **entscheide**, ob es mehr als das Doppelte ist oder weniger. **(4 P)**

5. Partyzelt [1] **Lösung S. 149**

Ein Partyzelt wird – wie in der Abbildung 1 zu sehen – aus zwölf gleichlangen Stangen von je 5 m Länge errichtet.

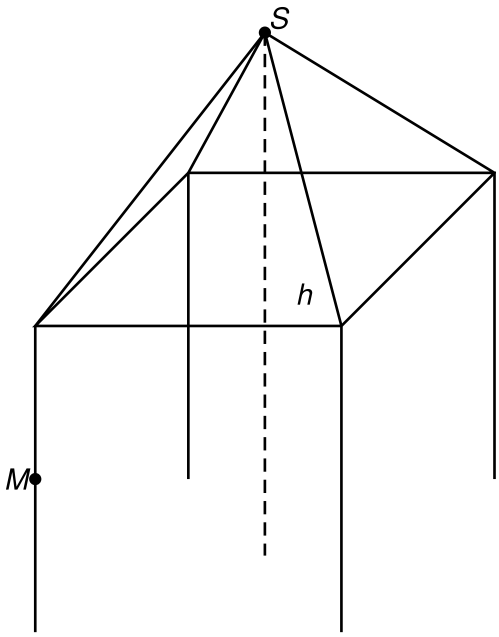


Abbildung 1

a) **Zeige**, dass das Zelt eine Gesamthöhe von gut 8,5 m hat. **(5 P)**

b) **Berechne** das Volumen des Zeltes. **(5 P)**

c) Die Außenflächen werden mit Planen verkleidet.
Entscheide, ob dazu 150 m^2 Planenstoff ausreichen. **(4 P)**

Von der Mitte *M* der vertikalen Stangen soll jeweils eine Lichtgirlande straff mit der Zeltspitze *S* verbunden werden.

d) **Bestimme** die Länge einer solchen Girlande. **(4 P)**

e) **Bestimme** den Winkel, mit dem eine Lichtgirlande gegenüber der Horizontalen ansteigt. **(4 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2012): Beispielaufgaben für die schriftliche Überprüfung an Gymnasien - Klasse 10 Mathematik

6. Eishockeypucks [1] **Lösung S. 150**

Eishockeypucks sind runde Scheiben mit einem Durchmesser von 7,62 cm und einer Höhe von 2,54 cm (siehe Abbildung 1).

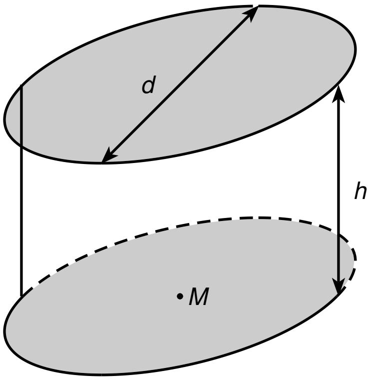


Abbildung 1: nicht maßstabsgetreu

a) **Zeige**, dass das Volumen eines Pucks ungefähr 116 cm^3 beträgt. **(3 P)**

Zwölf Pucks sollen in einer Schachtel mit quadratischer Grundfläche verkauft werden. In der Schachtel liegen je vier Pucks in drei Schichten übereinander (siehe Abbildung 2).

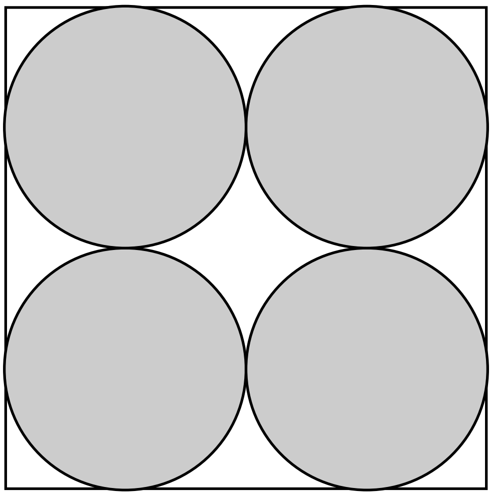


Abbildung 2: Ansicht von oben

Wenn die Pucks in der Schachtel liegen, bleibt ein Volumenanteil an Luft in der Schachtel.

b)
- **Bestimme** das Volumen der Luft in der Schachtel.
- **Gib** diesen Anteil am gesamten Schachtelvolumen in Prozent **an**. **(9 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2012): Beispielaufgaben für die schriftliche Überprüfung an Gymnasien - Klasse 10 Mathematik

In der Mitte entsteht ein Hohlraum, dem ein weiterer dunkelgrau markierter Kreis eingeschrieben werden kann (siehe Abbildung 3).

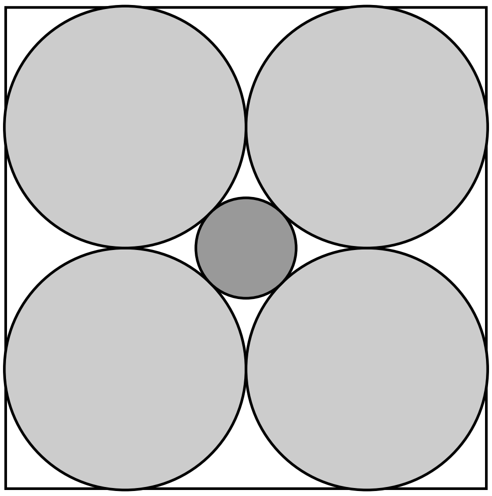


Abbildung 3

c) Bestimme den maximalen Durchmesser, den der dunkel gefärbte innere Kreis haben kann.

(6 P)

Der Sachverhalt aus Aufgabenteil b) soll nun (in der Ebene) verallgemeinert werden. Du siehst jeweils ein Quadrat, in das ein Kreis, vier und neun Kreise einbeschrieben sind.
Stelle dir vor, dass in dem Quadrat n^2 Kreise entsprechend einbeschrieben sind (siehe Abbildung 4).

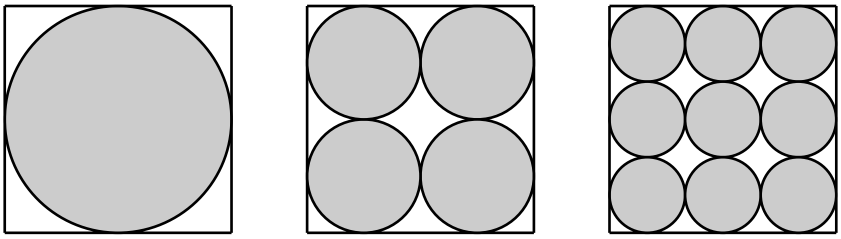


Abbildung 4

d) Zeige, dass der von den Kreisen nicht bedeckte Anteil der Quadrate immer der gleiche ist.

(4 P)

7. Kaffeefilter [1] **Lösung S. 153**

Ein Kaffeefilter hat die in Abbildung 1 gezeigte Form: Er besteht aus einem dreiseitigen Prisma mit zwei angesetzten halben senkrechten Kreiskegeln.

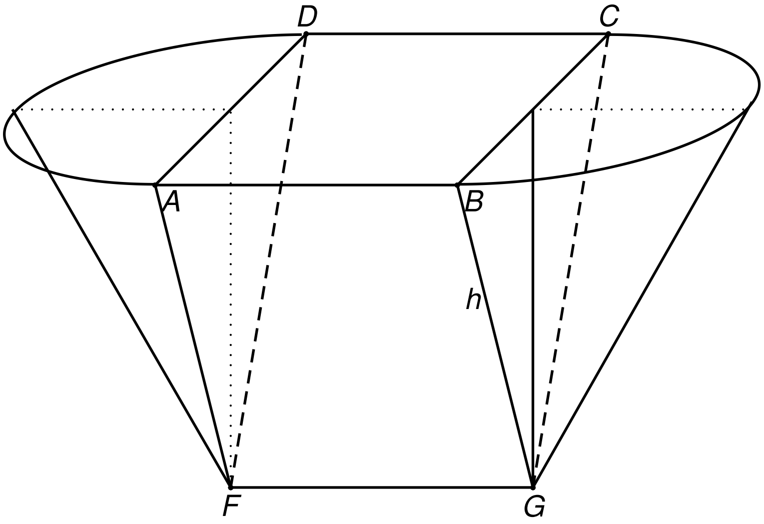


Abbildung 1

Die Höhe des Filters ist $h = 9$ cm. Im Rechteck $ABCD$ hat $\overline{AB}$ die Länge $\overline{AB} = 6$ cm und $\overline{BC}$ die Länge $\overline{BC} = 12$ cm. $\overline{AB}$ ist senkrecht zu den gleichschenkligen Dreiecken $\triangle DFA$ und $\triangle CGB$.

a) **Berechne** das Fassungsvermögen des Filters bis zu seinem oberen Rand. **(6 P)**

Zur Herstellung des Filters wird Filterpapier verwendet, das pro Quadratmeter 50 g wiegt.

b) **Berechne** die Masse des Filters. **(8 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2012): Beispielaufgaben für die schriftliche Überprüfung an Gymnasien - Klasse 10 Mathematik

Verpackt werden die Filter in flach zusammengedrückter Form (siehe Abbildung 2).

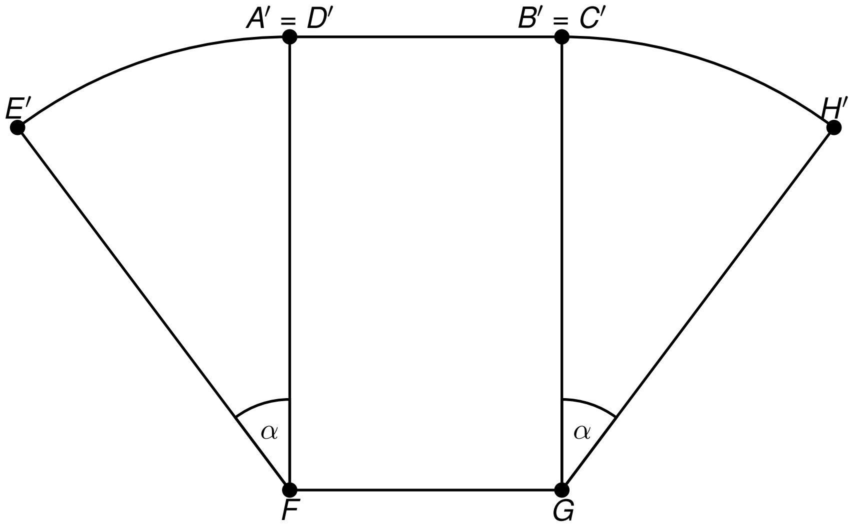


Abbildung 2

c) **Berechne** den eingezeichneten Winkel α.
(Zur Kontrolle: $\alpha \approx 50°$) **(4 P)**

d) **Bestimme** die Mindestlänge und die Mindestbreite dieser Schachteln. **(4 P)**

8. Neues Rosenbeet [1] **Lösung S. 155**

In einem botanischen Garten wird eine quadratische Rasenfläche von 10 m Seitenlänge neu gestaltet. In das innere Rechteck sollen Rosen gepflanzt werden (siehe Abbildung 1)

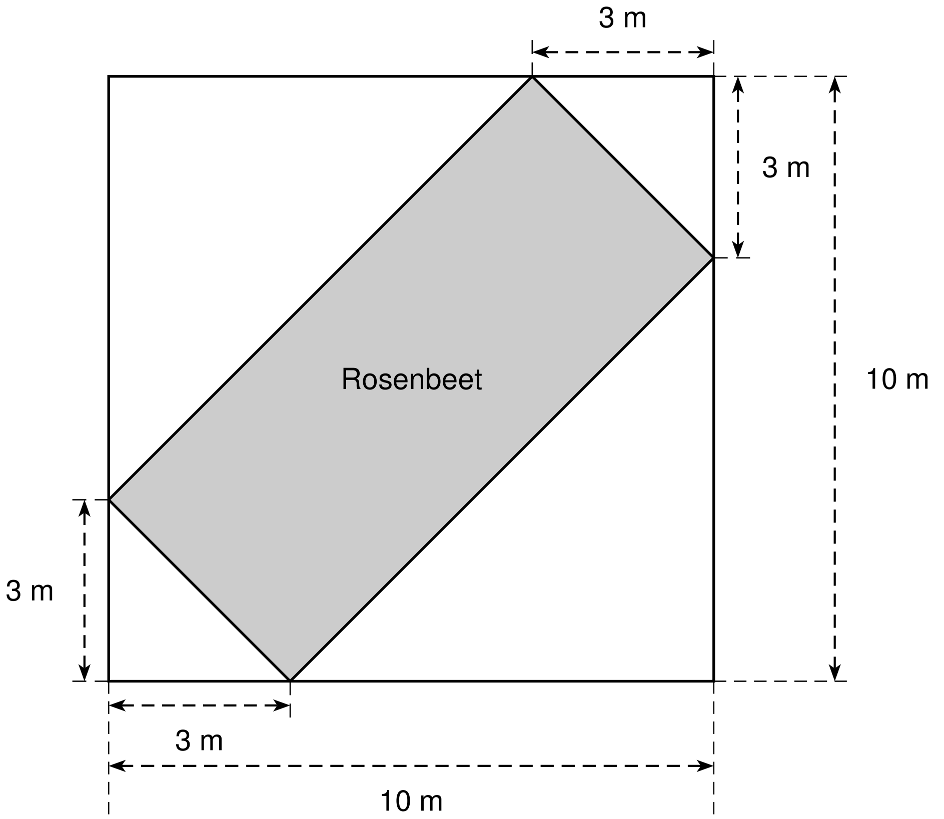


Abbildung 1

a) **Bestimme** den Flächeninhalt der aus vier Dreiecken bestehenden restlichen Rasenfläche und den Flächeninhalt des rechteckigen Rosenbeets. **(3 P)**

b) **Weise nach**, dass es sich nicht um ein quadratisches Beet handelt. **(4 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2012): Beispielaufgaben für die schriftliche Überprüfung an Gymnasien - Klasse 10 Mathematik

Jetzt soll die Strecke, die in Aufgabenteil a) 3 m lang war, veränderlich werden. Sie wird nun x genannt (siehe Abbildung 2).

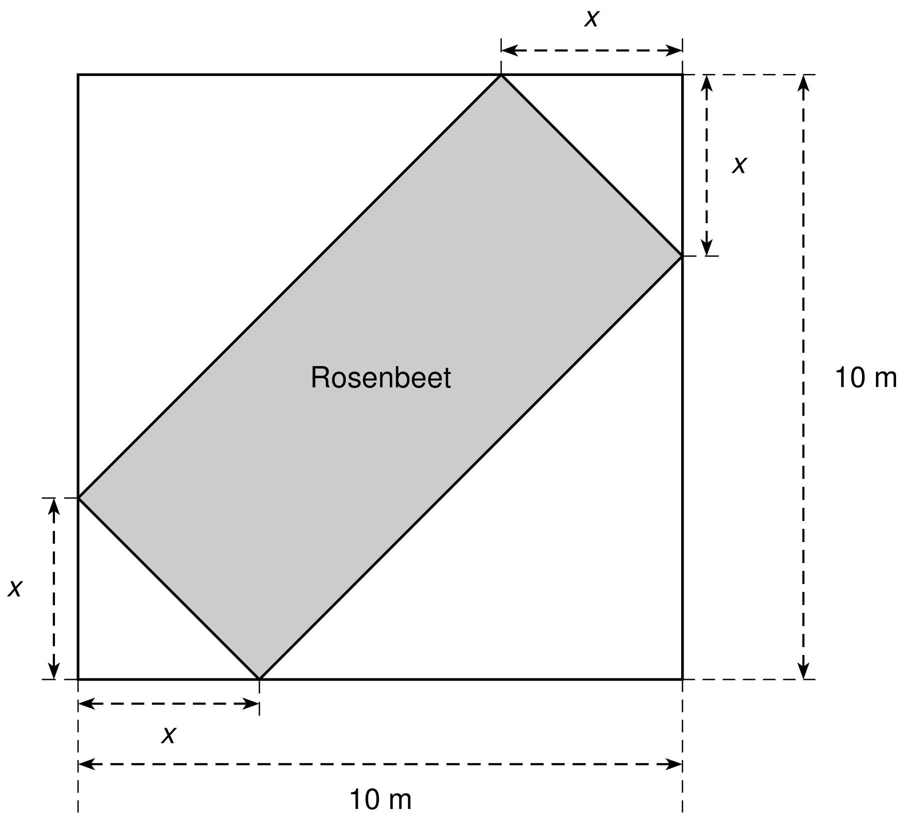


Abbildung 2

c) **Gib an**, welche Werte x annehmen kann. **(2 P)**

d) **Zeige**, dass sich der Flächeninhalt $A(x)$ des Rosenbeets durch die Funktion A mit

$$A(x) = -2x^2 + 20x$$

berechnen lässt. **(4 P)**

e) **Beschreibe** den Verlauf des Graphen von A und **berechne** das zugehörige x, wenn die Rosen für eine Fläche von 45 m^2 im Rosenbeet reichen. **(3 P)**

f) **Zeichne** den Graphen von *A* in das unten stehende Koordinatensystem ein.

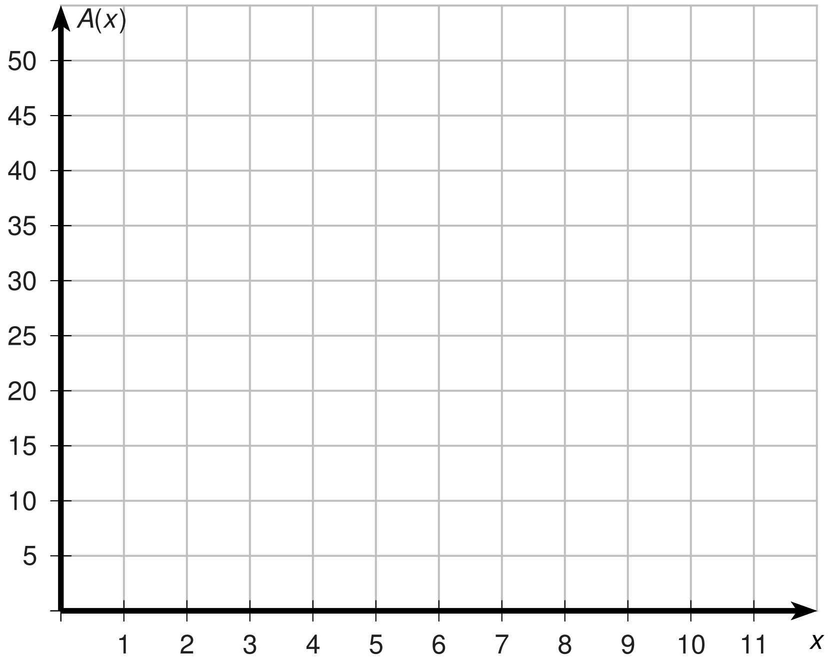


Abbildung 3

(2 P)

g)
- **Bestimme** rechnerisch den Wert für x, bei dem die Fläche des Rosenbeets den größten Wert aufweist.
- **Gib** die maximale Flächengröße des Rosenbeets **an**. **(4 P)**

9. Designerlampe [1] Lösung S. 157

Ein Lichtdesigner soll eine Lampe für einen Ausstellungsraum in einem Museum entwerfen. In dem betreffenden Raum ist ein Gemälde an der 4 m hohen Raumdecke montiert. Das Gemälde ist quadratisch mit einer Seitenlänge von 2 m.
Der Designer entwirft eine Lampe, wie sie in Abbildung 1 zu sehen ist. Die Lampe soll direkt unterhalb des Gemäldes auf dem Fußboden des Raumes stehen. Dabei sind die Kanten des unteren Teils der Lampe parallel zu den Seiten des Gemäldes und die punktförmige Lichtquelle liegt genau unter der Mitte des Gemäldes.

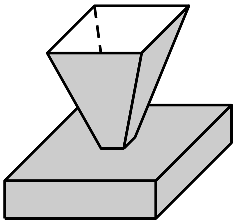


Abbildung 1

Die Lichtquelle befindet sich direkt im Übergang zwischen dem oberen und unteren Teil der Lampe. Im unteren Teil sind die elektrischen Bauteile eingebaut und der obere Teil ist der Lampenschirm. Dieser ist lichtundurchlässig. Verschiedene Ansichten und Beschriftungen sind in den Abbildungen 2 und 3 zu finden.

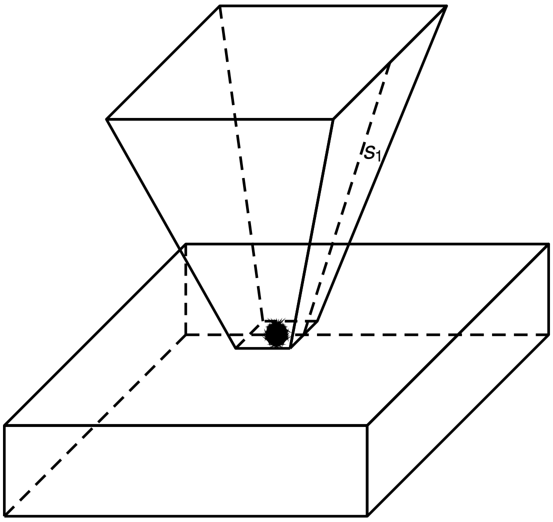


Abbildung 2: Perspektivische Ansicht der Designerlampe - nicht maßstabsgetreu

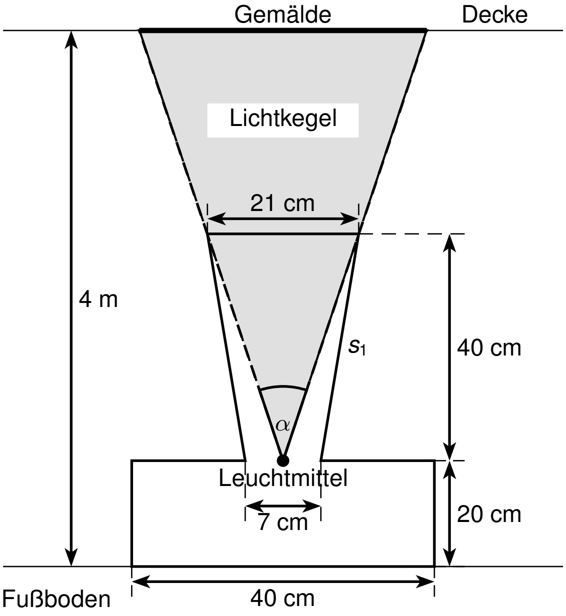


Abbildung 3: Längsschnitt der Designerlampe - nicht maßstabsgetreu

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2015): Fachbrief Mathematik Stadtteilschulen und Gymnasien, Nr. 1

a) Der untere Teil der Lampe hat eine quadratische Grundfläche.

Berechne das für die elektrischen Bauteile zur Verfügung stehende Volumen. **(3 P)**

Die obere Kantenlänge des Lampenschirmes ist 21 cm lang und die untere 7 cm. Die beiden Öffnungen des Lampenschirmes sind jeweils quadratisch (siehe Abbildung 3).

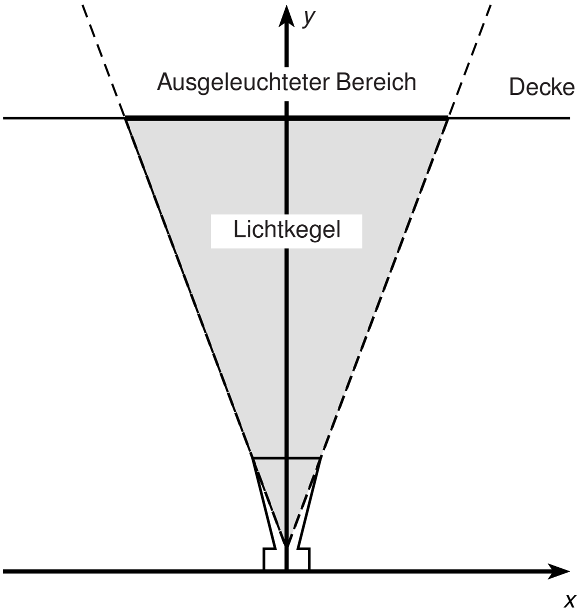


Abbildung 4: Der Ausstellungsraum ohne schräge Decke

b) **Bestätige**, dass die Höhe der seitlichen Trapezflächen $s_1 \approx 40{,}6$ cm lang ist (siehe Abbildung 3). **(4 P)**

c) **Berechne** die benötigte Menge des Lampenschirmmaterials in m^2. **(4 P)**

Wie bereits beschrieben, soll die auf dem Fußboden stehende Lampe ein Gemälde an der Decke in einem 4 m hohen Raum beleuchten.

d) - **Zeige**, dass der Lampenschirm den Lichtkegel auf einen Öffnungswinkel α von 29,42° begrenzt (siehe Abbildung 3).
- **Beurteile**, ob bei dem gegebenen Lampenaufbau das Gemälde vollständig ausgeleuchtet werden kann. **(5 P)**

Als die Lampe installiert werden soll, stellt der Designer fest, dass die Decke um $\gamma = 15°$ gegenüber der Horizontalen geneigt ist (siehe Abbildung 5 und Abbildung 6).

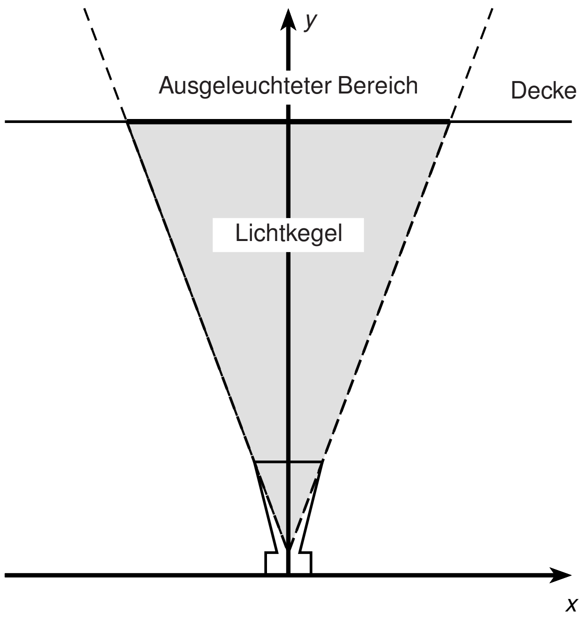


Abbildung 5: Der Ausstellungsraum ohne schräge Decke

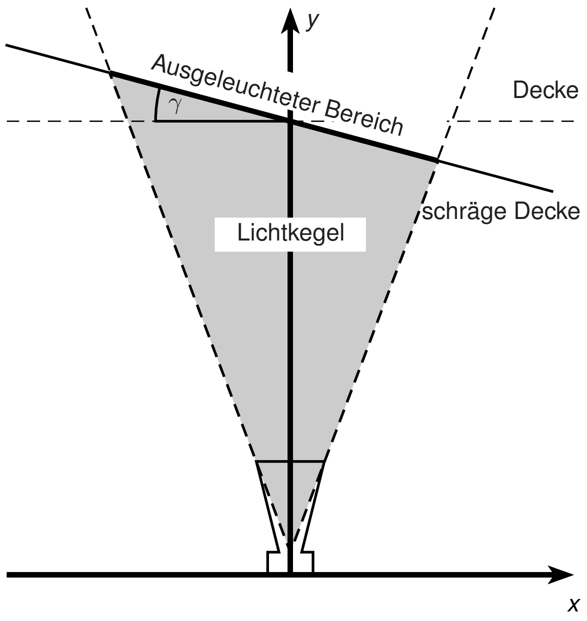


Abbildung 6: Der Ausstellungsraum mit schräger Decke

Der Museumsdirektor sagt, dieser Umstand sei egal, weil die Breite des Lichtkegels auf der einen Seite verkürzt würde und auf der anderen Seite verlängert. Das würde sich ausgleichen. Der Designer sagt, dass die Breite des Lichtkegels, der auf der schrägen Decke zu sehen ist, länger als 2 m ist.

e) **Entscheide** begründet, wer von beiden Recht hat. **(6 P)**

10. Industrieroboter [1] Lösung S. 159

Für ein Unternehmen soll ein einarmiger Industrieroboter gebaut werden. Er besteht aus einem Ober- und einem Unterarm und einer zweifingrigen Hand.
Der Roboterarm soll schon bald in einer Fabrikhalle stehen, vorab muss das Ingenieursbüro aber noch einige Berechnungen und Tests durchführen.
Der Oberarm soll 2,6 m und der Unterarm 2,1 m lang sein (siehe Abbildung 1).

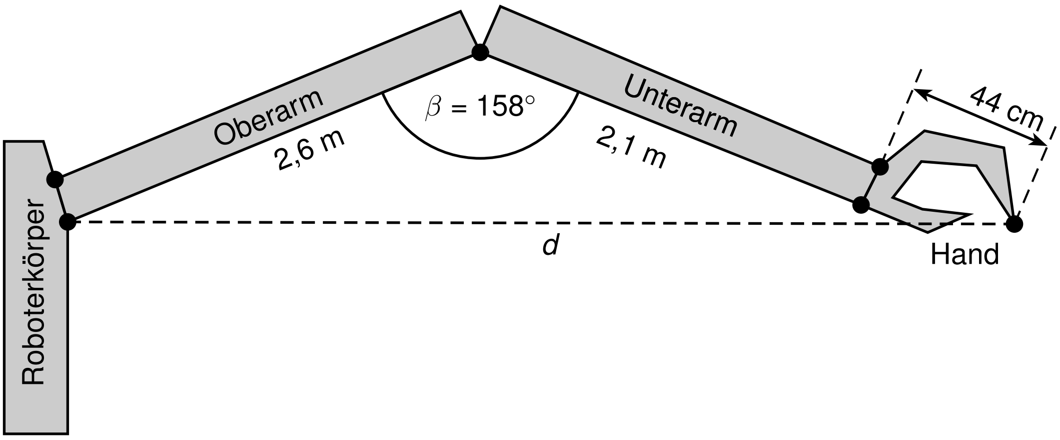


Abbildung 1: Roboterarm von der Seite – nicht maßstabsgetreu

Beide Teile bestehen aus kreisrunden Stahlrohren mit dem Außendurchmesser von 18 cm und einem Innendurchmesser von 13 cm. 1 cm^3 Stahl wiegt 7,85 g. Der Unterarm wiegt 81 % des Oberarms.

a) **Berechne** die Masse des Oberarms und die des Unterarms, wobei die innere Technik vernachlässigt wird. **(5 P)**

Die 7,7 kg schwere Roboterhand soll für einen Teil der anstehenden Tests durch eine genauso schwere Stahlkugel ersetzt werden. Die Stahlkugel und der Mantel des Unterarms sollen aus Sicherheitsgründen mit neongelber Farbe angestrichen werden. Eine Dose Farbe (400 ml) kostet 14 € und reicht für eine Fläche von 2 m^2. Es sollen zwei Farbschichten aufgetragen werden.

b) **Bestimme** die Kosten für die minimal benötigte Farbe.
(Zur Kontrolle: Der Radius der Kugel ist etwa 6,16 cm.*)* **(6 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2015): Fachbrief Mathematik Stadtteilschulen und Gymnasien, Nr. 1

In der Fabrikhalle soll ein rechteckiger, markierter Arbeitsbereich eingerichtet werden, in dessen linker oberer Ecke (Punkt *D*) der Roboter steht. Die genauen Maße können der Abbildung 2 entnommen werden.

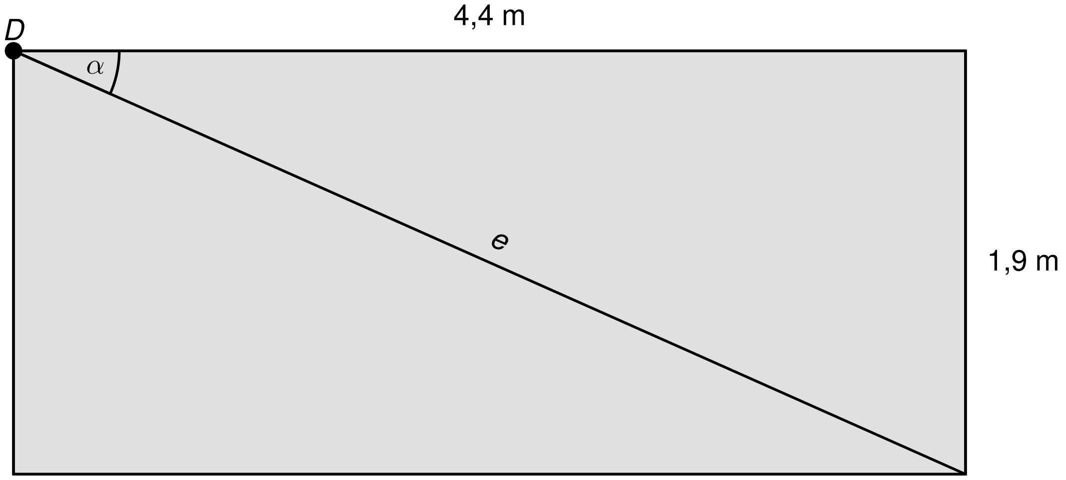


Abbildung 2: markierter Arbeitsbereich von oben – nicht maßstabsgetreu

c) Bestätige, dass die Diagonale *e* des Arbeitsbereichs etwa 4,8 m lang ist und die Größe des Winkels $\alpha \approx 23°$ beträgt. **(6 P)**

Mit der Hydraulik kann der Winkel zwischen Ober- und dem Unterarm maximal $\beta = 158°$ betragen.
Der Roboterarm und die am Unterarm befestige Hand seien nun maximal ausgestreckt. Die Hand hat eine Länge von 44 cm. Der Arm ist in dem Punkt *D* um 23° gedreht (siehe Abbildung 2).

d) Beurteile, ob der Roboterarm in der Position *D* über den markierten Arbeitsbereich hinaus greifen kann. **(5 P)**

11. Kettenanhänger [1] Lösung S. 160

Ein Goldschmied hat einen neuen Kettenanhänger entworfen. Den äußeren, kreisförmigen Rand des Anhängers fertigt er aus einem Golddraht der Dicke 1 mm. Der Radius dieses Kreises beträgt 2 cm. Die Kettenöse soll bei der Aufgabe nicht berücksichtigt werden.

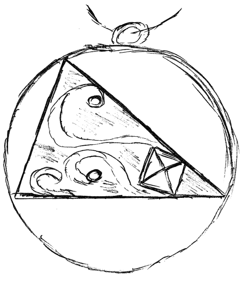


Abbildung 1: Die Entwurfsskizze

a) Berechne die Länge des Golddrahtes.
(Zur Kontrolle: Es ist $l \approx 12{,}6$ cm.*)* **(4 P)**

Der innere Teil des Kettenanhängers ist ein 1 mm hohes Dreiecksprima aus Weißgold. Auf die Deckfläche dieses Dreiecksprismas setzt der Goldschmied als Verzierung einen pyramidenförmigen Edelstein auf, den jeder Kunde individuell aussuchen kann. Alle auswählbaren Edelsteine haben eine quadratische Grundfläche. Dieses Quadrat wird so aufgesetzt, dass die Seite $\overline{DE}$ parallel zur Seite b des Dreiecksprismas liegt.
Besonders schön sieht diese Verzierung aus, wenn der Berührpunkt D die Seite a im Verhältnis 1:2 aufteilt (siehe Abbildung 2).

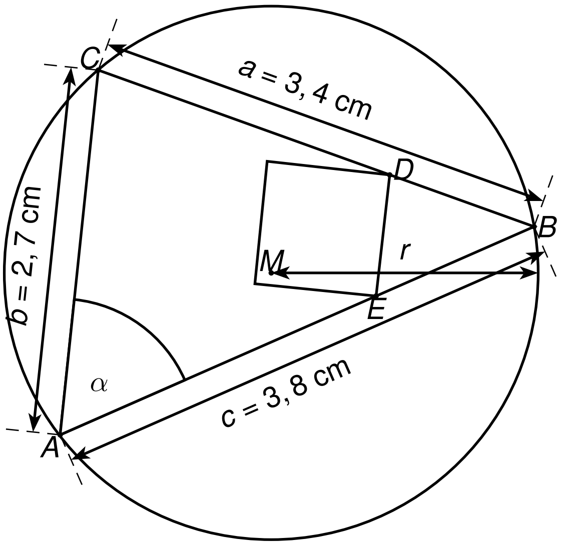


Abbildung 2: Der Kettenanhänger, Skizze nicht maßstabsgetreu

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2015): Fachbrief Mathematik Stadtteilschulen und Gymnasien, Nr. 1

b) **Bestimme** die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche des verwendeten Edelsteins. **(4 P)**

Der Goldschmied hofft, dass der Anhänger bei Kunden sehr beliebt sein wird und möchte deshalb mehrere Stücke vorfertigen. Damit er bei der Produktion den Winkel α des Dreiecksprismas möglichst genau einhalten kann, will er sich eine Schablone anfertigen.

c) **Bestätige**, dass die Größe des Winkels α in der Schablone etwa 60° beträgt. **(5 P)**

Zur Abschätzung des Verkaufspreises liegen dem Goldschmied folgende Informationen vor

Golddraht der Dicke 1 mm	371,00 € pro 10 cm Länge
Blech aus Weißgold der Dicke 1 mm	40,00 € pro Gramm
Dichte von Weißgold	19,32 $^{\text{g}}/_{\text{cm}^3}$
Edelstein z. B. Amethyst	32,80 €

Für seine handwerkliche Arbeit berechnet der Goldschmied 120,00 €. Die Mehrwertsteuer auf das fertige Stück beträgt 19 %. Es soll als Edelstein ein Amethyst aufgesetzt werden.

d) **Bestimme** den Preis, den er minimal für den Kettenanhänger fordern muss, um den Materialpreis, seine Handwerksarbeit und die Mehrwertsteuer zu decken. **(9 P)**

12. Schwimmbecken [1] **Lösung S. 161**

Familie Meier möchte ein Schwimmbecken im Garten bauen. Die Wasseroberfläche im Becken kann als Rechteckfläche mit zwei angesetzten Halbkreisen dargestellt werden (siehe Abbildung 1).

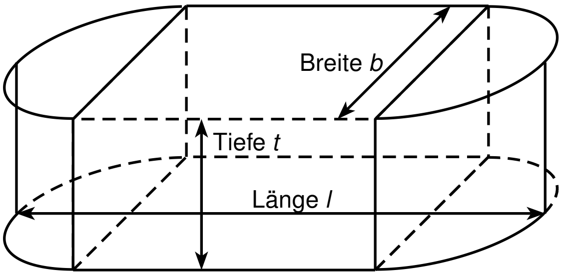


Abbildung 1: Schrägsicht des Schwimmbeckens, Skizze ist nicht maßstabsgetreu

Das Schwimmbecken hat an seiner längsten Stelle eine Länge *l* von 7 m. Der mittlere Teil hat eine konstante Breite *b* von 3 m. Die Tiefe des Wassers ist überall gleich und beträgt 1,8 m.

a)
- **Bestätige**, dass die Länge des mittleren Beckenteils 4 m beträgt und die Wasseroberfläche des Schwimmbeckens etwa 19 m^2 beträgt.
- **Berechne** das Wasservolumen des Schwimmbeckens. **(6 P)**

Familie Meier beschließt nachträglich für Nichtschwimmer auf einer der beiden Rundseiten des Schwimmbeckens ein Podest mit einer Höhe von $h_P = 0{,}8$ m einzubauen. Das Podest soll aus einem waagerechten Teil bestehen, an den eine gleichmäßig schräg abfallende Rampe anschließt. Der waagerechte Teil soll den halbkreisförmigen Bereich auf der rechten Seite des Beckens ganz ausfüllen. Die Rampe fällt in Richtung der längeren Seite des mittleren Schwimmbeckenteils bis auf die volle Beckentiefe ab (siehe Abbildung 2).

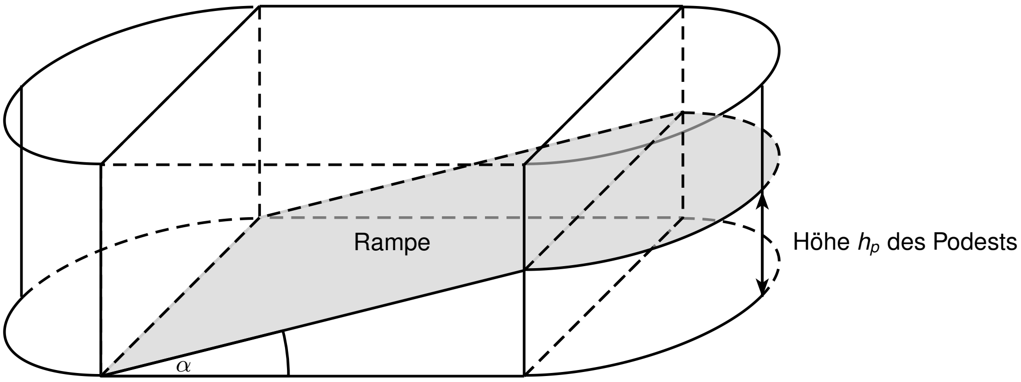


Abbildung 2: Schwimmbecken mit Podest und Rampe, Skizze ist nicht maßstabsgetreu

Bei einem Neigungswinkel α von mehr als 10° muss die Rampe aus Sicherheitsgründen mit einer Antirutschfarbe bestrichen werden.

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2016): schriftliche Überprüfung Klasse 10 Mathematik, Haupttermin

b) Bestätige, dass Antirutschfarbe verwendet werden muss. **(5 P)**

Die Farbe wird in 3 ℓ-Eimern angeboten. Ein Liter Farbe reicht für eine Fläche von 1,5 m^2.

c) Berechne die Anzahl der Farbeimer, die Familie Meier kaufen muss, um die gesamte Fläche der Rampe einmal zu streichen. **(6 P)**

Eine Wasserrutsche soll das Badevergnügen perfekt machen. Die Eltern haben ein Modell ausgesucht, bei dem die Länge der Leiter 1,8 m ist und der Abstand des Fußpunktes der Leiter zum Rutschenende 3,3 m beträgt. Der Winkel zwischen dem Erdboden und der Leiter ist 62° groß (siehe Abbildung 3).

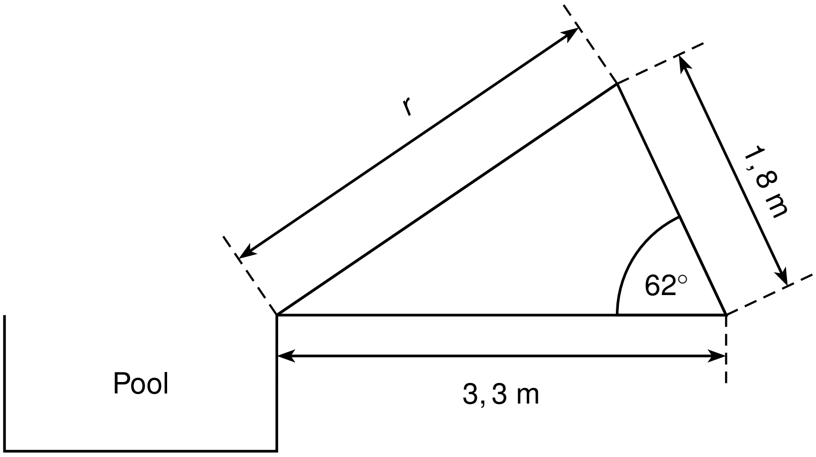


Abbildung 3: Vereinfachtes Rutschenprofil, Skizze ist nicht maßstabsgetreu

Die Kinder wünschen sich eine Rutsche, deren Rutschlänge *r* größer als 3 m ist.

d) Beurteile, ob die Rutschlänge den Wünschen der Kinder der Familie Meier genügt. **(5 P)**

13. Dachgaube [1] Lösung S. 161

Herr Kruse möchte seine bisherige Abstellkammer im Dachgeschoss in ein Arbeitszimmer umgestalten. Dazu soll eine Dachgaube gebaut werden, um zusätzliches Tageslicht hineinzulassen (siehe Abbildung 1). Herr Kruse macht sich eine Skizze (siehe Abbildung 2). Das untere Ende der Gaube liegt 0,75 m über dem Fußboden des Arbeitszimmers. Auf der Fensterseite beträgt die Gesamthöhe zum Fußboden gemessen 2,25 m. Die Breite *b* der Gaube soll 1,75 m betragen (siehe Abbildung 3). Die beiden Fenster zusammen haben eine Fläche von 1,43 m^2.

Quelle: BSB

Abbildung 1: Dach mit Gaube.

Für die Berechnungen sollen die Überstände des Gaubendaches und die Regenrinnen nicht berücksichtigt werden.

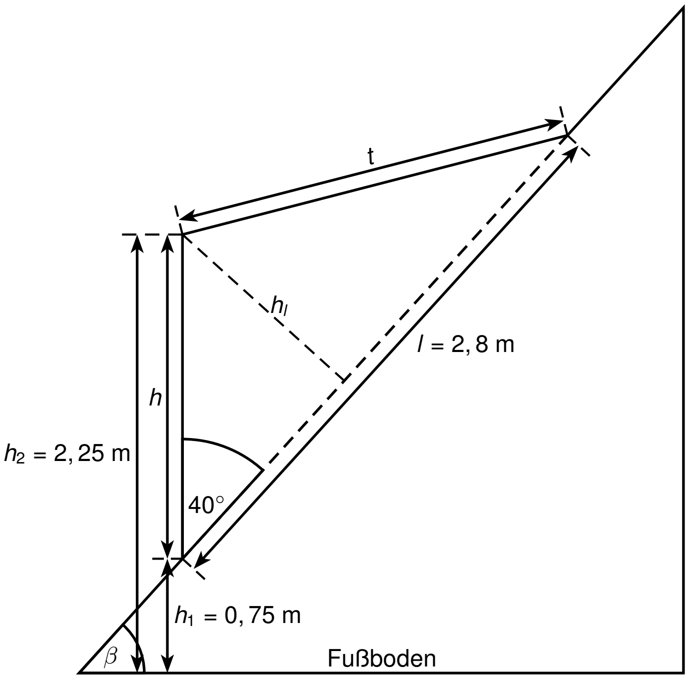


Abbildung 2: Die Abstellkammer mit Gaube in der Seitenansicht. Die Skizze ist nicht maßstabsgetreu.

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2017): schriftliche Überprüfung Klasse 10 Mathematik, Haupttermin

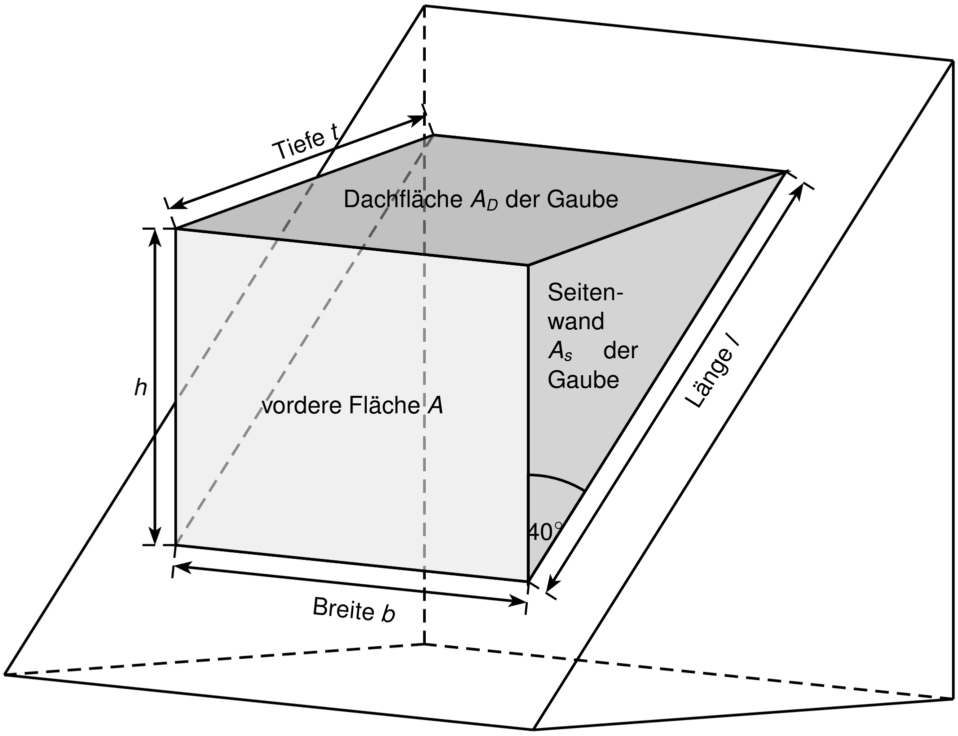


Abbildung 3: Die perspektivische Schrägansicht der Gaube. Die Skizze ist nicht maßstabsgetreu.

a)
- **Bestätige**, dass die Höhe h der Gaube auf der Fensterseite 1,5 m beträgt (siehe Abbildung 2).
- **Bestätige**, dass die Größe der vorderen Fläche um die Fenster herum rund 1,2 m^2 ist.

(3 P)

Die Größe des Winkels, den die Fensterfront der Gaube mit dem Dach des Hauses bildet, beträgt 40°. Das Dach wird für den Einbau der Gaube auf einer Länge l von 2,8 m geöffnet (siehe Abbildung 2).

b) **Bestimme** die Dachneigung, also die Größe des Winkels β (siehe Abbildung 2 in der Anlage).

(2 P)

c) **Bestätige**, dass eine Seitenwand der Gaube eine Fläche A_s von etwa 1,35 m^2 hat. **(4 P)**

d) **Berechne** die Tiefe t des Gaubendaches. *(Zur Kontrolle: $t \approx$ 1,91 m)* **(4 P)**

Generell gilt, dass sich Menschen in Räumen mit größerem Luftvolumen wohler fühlen. Das Zimmer, welches durch die Gaube erweitert werden soll, hatte zuvor ein Volumen von $V = 22\ \text{m}^3$.

e) **Berechne** den prozentualen Volumenzuwachs, der sich durch die Erweiterung des Zimmers mit der Gaube ergibt. **(4 P)**

Die Seitenwände der Gaube und die Fläche um die Fenster herum sollen mit Schieferplatten verkleidet werden. Das Gaubendach wird mit Dachziegeln gedeckt (siehe Abbildung 1). Herr Kruse erhält für die Verkleidung ein Angebot einer Baufirma. Diese berechnet für Dachziegel und Schieferplatten insgesamt 160 €. Im Baumarkt entdeckt Herr Kruse jedoch ein Sonderangebot. Wenn er 1 m^2 Wandfläche mit Schieferplatten aus dem Angebot bedecken würde, würde es 27,50 € kosten. Entsprechend würde 1 m^2 Dachfläche 19,60 € kosten.

f) **Entscheide** begründet, ob der Materialpreis für die Abdeckung der Seitenwände und des Dachs mit dem Sonderangebot im Baumarkt günstiger ist als das Angebot der Baufirma.

(5 P)

14. Hürdenmodell [1] **Lösung S. 163**

Die Firma Sgames stellt Computerspiele her. Zurzeit entwickeln sie ein neues Pferdehof-Spiel. Bei diesem Spiel leitet der Spieler einen Pferdehof, auf dem Pferde im Springreiten trainiert werden.
Im Spiel gibt es verschiedene Übungshindernisse, von denen eines auch auf dem Titelbild des Spiels zu sehen ist. Dieses Hindernis soll, für eine Werbeaktion auf einer Spielemesse, aus Holz gebaut werden. Leider hat der zuständige Designer beim Entwurf des Hindernisses nur unvollständige Aufzeichnungen an die mit dem Bau beauftragte Tischlerei geschickt.

Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Nordlicht8/Equestriansports/2014_April_11-20

Abbildung 1

Das Hindernis besteht aus vier Bauteilen (siehe Abbildung 2).

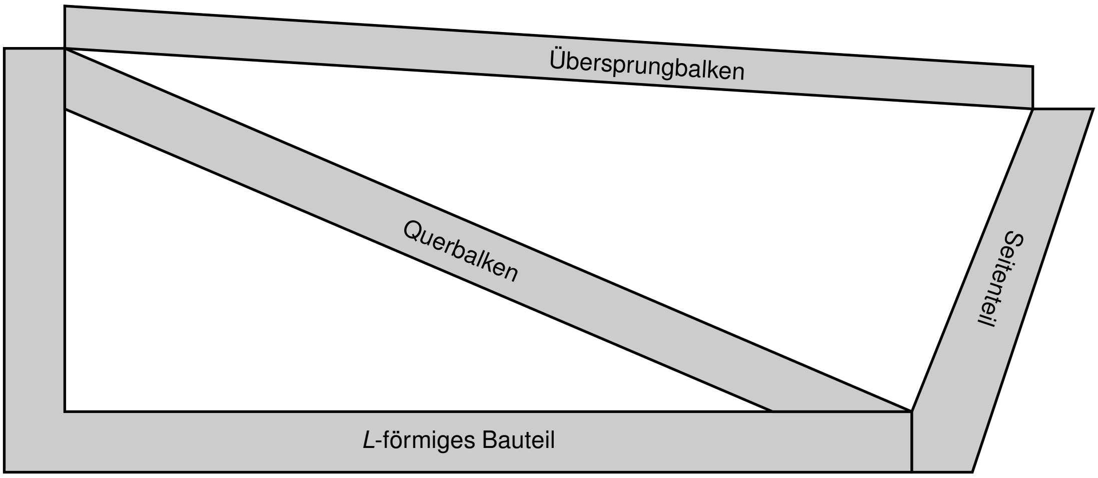


Abbildung 2: Skizze des Hindernisses mit den vier Bauteilen. Die Skizze ist nicht maßstabsgetreu.

Das *L*-förmige Bauteil stellt in der Fertigung kein Problem dar. Schwieriger ist die Konstruktion des Querbalkens, dessen Kanten k_1 und k_2 parallel zueinander sind (siehe Abbildung 3).

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2018): schriftliche Überprüfung Klasse 10 Mathematik, Haupttermin

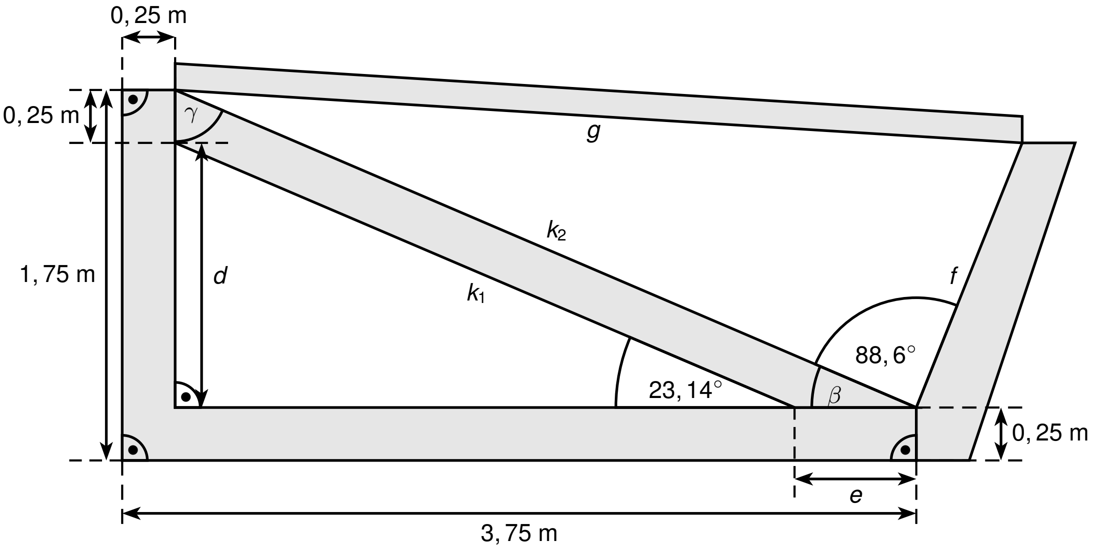


Abbildung 3: Bemaßte Skizze des Hindernisses. Die Skizze ist nicht maßstabsgetreu.

In der unfertigen Skizze (siehe Abbildung 3) für die Tischlerei wurden schon einige Maße eingetragen. Andere Längen müssen überprüft bzw. neu bestimmt werden.

a) **Bestätige**, dass die Strecke d eine Länge von 1,25 m und die Strecke k_1 eine Länge von rund 3,18 m hat. **(4 P)**

b) **Bestimme** die Größen der Winkel β und γ. **(3 P)**

c) **Beschreibe**, wie man die Länge von e schrittweise berechnen kann. **(5 P)**

d) **Berechne** die Länge der Kante k_2.
(Zur Kontrolle: $k_2 \approx$ 3,81 m) **(3 P)**

Das Seitenteil (siehe Abbildung 2) wurde bereits gefertigt, daher ist die Kantenlänge
f = 1,35 m bekannt. Der Übersprungbalken (siehe Abbildung 2), der aus einem zylindrischen Stück Holz gefertigt werden soll, wird auf kleinen Halterungen gelagert (in der Abbildung nicht enthalten). Das für die Fertigung vorgesehene Holz aus Esche hat einen Durchmesser von 10 cm und eine Länge von 4,26 m.
Ein cm^3 Eschenholz hat eine Masse von 0,69 g. Die Halterungen für den Übersprungbalken tragen zusammen eine Masse von maximal 27 kg.

e) **Entscheide**, ob das Holzstück für die Fertigung geeignet ist. **(3 P)**

f) **Beurteile**, ob das Holzstück leicht genug ist, um von den Halterungen getragen zu werden. **(4 P)**

15. Eishockey [1]

Lösung S. 166

Beim Eishockey spielen zwei Mannschaften gegeneinander. Ziel ist es, den Puck (die Spielscheibe) ins gegnerische Tor zu schießen. Gespielt wird auf der gesamten Eisfläche, also auch hinter den Toren.

Quelle: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/85/Eishockey_Eisbaeren_gegen_Capitals.jpg?uselang=de

Abbildung 1

Die Form und die Abmessungen der Eisfläche sind in Abbildung 2 angegeben. Sie besteht aus einem großen Rechteck in der Mitte und zwei kleineren Rechtecken an den beiden Enden. Die „Ecken" werden jeweils durch einen Viertelkreis gebildet.

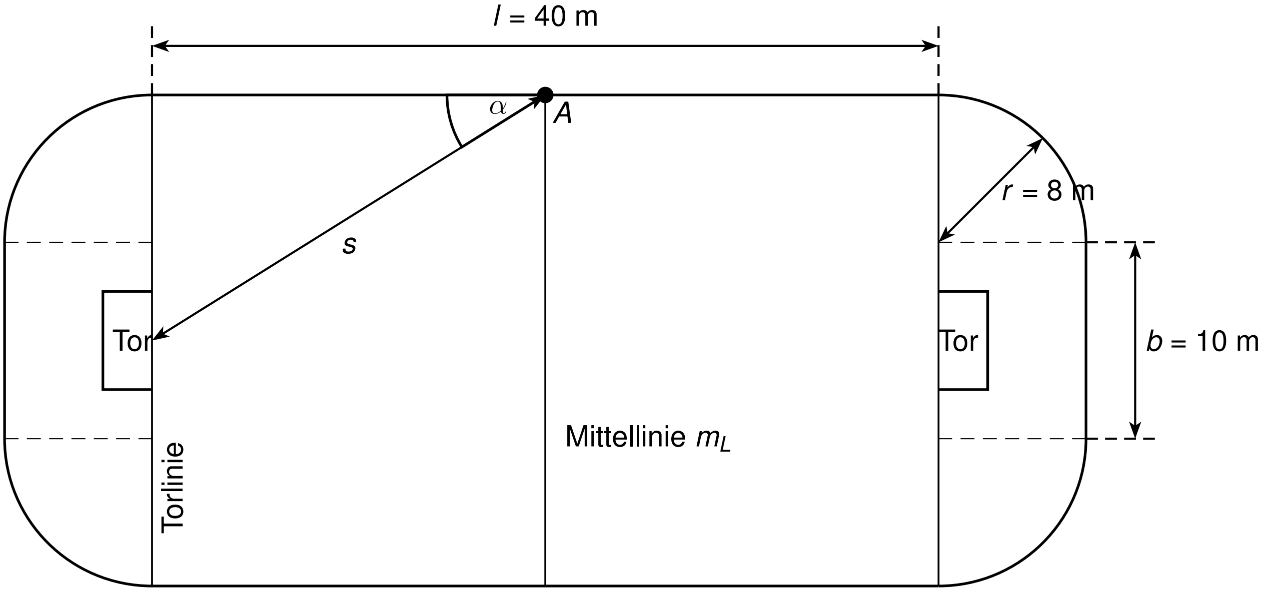


Abbildung 2: Eisfläche beim Eishockey, Skizze nicht maßstabsgerecht

Im Folgenden wird der Puck als punktförmig angesehen und alle Bewegungen als geradlinig.

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2019): schriftliche Überprüfung Klasse 10 Mathematik, Haupttermin

a)
- **Bestätige**, dass die Mittellinie eine Länge von $m_L = 26$ m hat.
- **Berechne** die Größe der Eisfläche in Quadratmetern.

  (Zur Kontrolle: $A \approx 1400$ m²)
- Ein Kubikmeter Eis hat eine Masse von 900 kg.

  Berechne die Masse des Eises, wenn die Eisschicht eine Dicke von 55 mm hat. **(6 P)**

Ein Spieler zielt vom Punkt *A* am Rand der Eisfläche (siehe Abbildung 2) genau auf die Mitte des gegnerischen Tores.

b)
- **Bestimme** die Entfernung *s* zwischen dem Punkt *A* und der Mitte der Torlinie.
- **Berechne** den Winkel α (siehe Abbildung 2). **(5 P)**

Ein Spieler will vom Punkt S_1 (siehe Abbildung 3) den Puck zu seinem Mitspieler in Punkt S_2 spielen. Da ein gegnerischer Spieler den direkten Weg versperrt, wählt er den in der Abbildung dargestellten Umweg über die Bande mit dem Auftreffpunkt *P*.

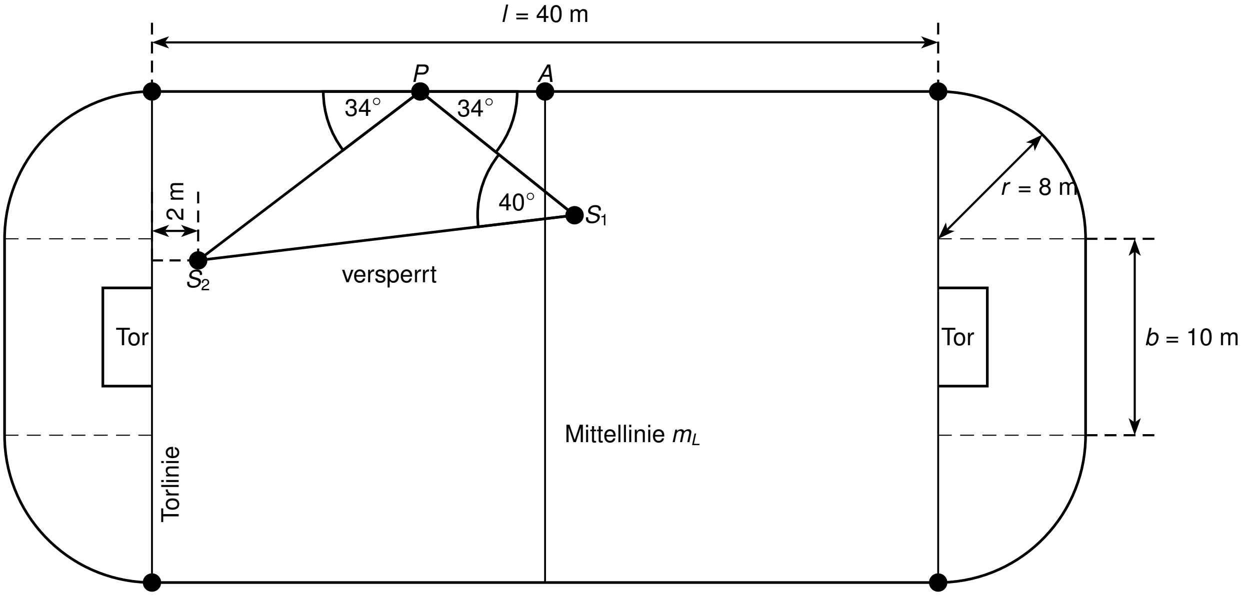


Abbildung 3: Spielsituation der Aufgabenteile c) und d), Skizze nicht maßstabsgerecht

c) **Ermittle**, um wie viele Meter dieser Umweg länger ist als der direkte Weg ($\overline{S_1S_2} = 22$ m) zum Mitspieler. **(6 P)**

d) **Beschreibe**, wie man den Abstand des Auftreffpunktes *P* vom Punkt *A* auf der Mittellinie berechnen könnte, ohne diese Rechnung auszuführen (siehe Abbildung 3). **(5 P)**

16. Schiefer Kirchturm [1] Lösung S. 167

In Suurhusen (Ostfriesland) befindet sich der fast 570 Jahre alte und mittlerweile schiefe Kirchturm der Suurhusener Kirche. Die folgende Abbildung 1 zeigt die seitliche Ansicht der Kirche.

Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Suurhusen_Church,_East_Frisia,_Germany,_Pic_05.jpg

Abbildung 1: seitliche Ansicht der Kirche

Der Kirchturm besteht mathematisch betrachtet aus einem Quader mit quadratischer Grundfläche und einem aufgesetzten gleichschenkligen Dreiecksprisma. Die ursprünglichen Maße des Kirchturms sind in Abbildung 2 dargestellt. Im Folgenden wird die Dicke des Materials vernachlässigt.

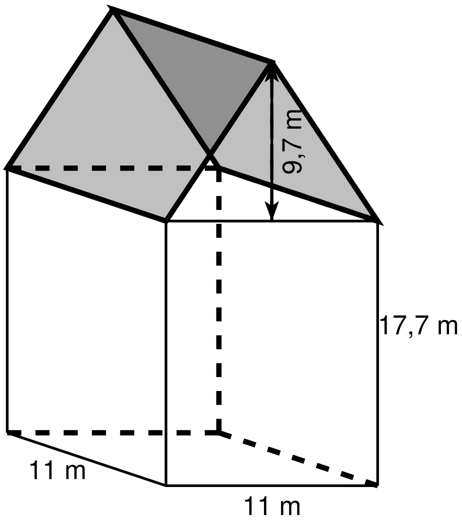


Abbildung 2: vordere, dreidimensionale Ansicht des Kirchturms (nicht maßstabsgerecht)

a) **Berechne** das Volumen des Kirchturms. **(3 P)**

b) **Berechne** den gesamten Flächeninhalt der beiden in Abbildung 2 grau markierten seitlichen Dachflächen. **(4 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2020): schriftliche Überprüfung Klasse 10 Mathematik, Haupttermin

Da der Kirchturm auf weichem Untergrund errichtet wurde, begann er 1850 sich zu neigen und ragt heute auf der einen Seite nur noch 27,3 m aus dem Boden heraus.
Ein Besucher möchte weitere Informationen zur Neigung des Kirchturms haben.
Er steht im Punkt *B*, der 100 m vom Fuß des Kirchturms (Punkt *F*) entfernt ist und sieht die Spitze des Kirchturms (Punkt *S*) unter einem Winkel von 15,6° (siehe Abbildung 3). Die Größe des Beobachters soll im Folgenden vernachlässigt werden.

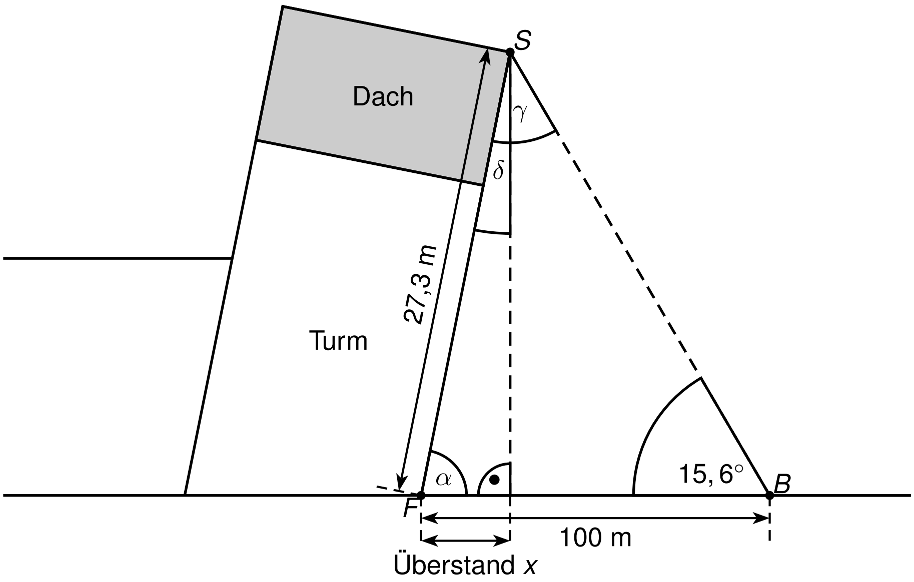


Abbildung 3: „schiefer Kirchturm“ - seitliche Ansicht (nicht maßstabsgerecht)

c) - **Begründe**, dass der Term

$$\tan\gamma = \frac{100}{27{,}3}$$

nicht zur Berechnung von γ geeignet ist.

- **Bestimme** den Winkel γ und **zeige** dann, dass der Turm mit der Horizontalen einen Winkel von $\alpha \approx 84{,}3°$ einschließt. **(6 P)**

d) **Bestätige**, dass die Kirchturmspitze einen Überstand *x* von ca. 2,7 m hat. **(4 P)**

Als Kriterium für die Schiefe eines Turms kann sowohl der Überstand *x* als auch der Neigungswinkel δ zwischen Turm und einer Senkrechten betrachtet werden (siehe Abbildung 3).
Der berühmte Turm von Pisa hat einen Überstand *x* von 4 m und einen Neigungswinkel δ von 4°.
Im Folgenden sollen der Kirchturm und der Turm von Pisa miteinander verglichen werden.

e) **Beurteile** anhand beider Kriterien, ob eine Aussage darüber getroffen werden kann, welcher der beiden Türme schiefer ist. **(5 P)**

6.2 Aufgaben zur Leitidee des funktionalen Zusammenhangs

1. Brücken [1] **Lösung S. 169**

In der Abbildung 1 siehst du eine Hängebrücke. Ihre Spannweite beträgt 40 m, die Höhe der oberen Befestigungspunkte über der Fahrbahn beträgt 12,5 m. Die Fahrbahn ist an zwei Haupttrageseilen aufgehängt.

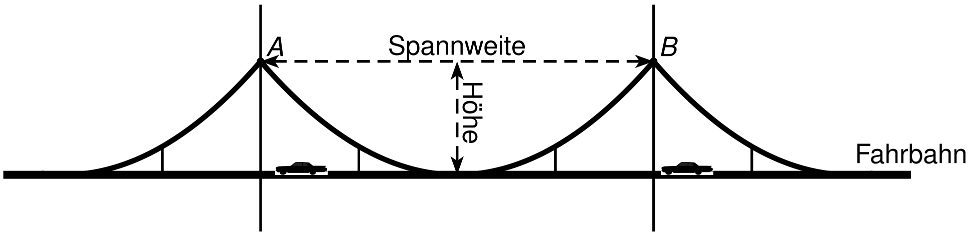


Abbildung 1: Hängebrücke

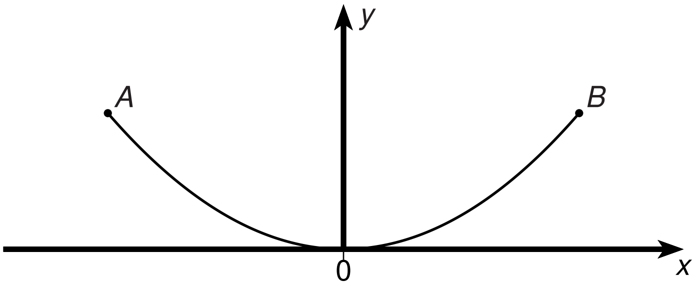


Abbildung 2

Die Hauptseile im mittleren Abschnitt haben annähernd die Form einer Parabel. Diese ist in Abbildung 2 noch einmal dargestellt. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Wirklichkeit.

a)
- **Zeichne** die Längenangaben in das obige Koordinatensystem **ein**.
- **Gib** dann die Koordinaten der Punkte A und B **an**. **(3 P)**

b) Im Folgenden werden vier Vorschläge für eine Funktionsgleichung gemacht, die zu der abgebildeten Parabel gehört.

Wähle den korrekten Vorschlag **aus** und **begründe**.

1. $f_1(x) = x^2$
2. $f_2(x) = 40x^2 + 12{,}5$
3. $f_3(x) = 0{,}03125x^2$
4. $f_4(x) = (x + 40)^2 - 12{,}5$

(2 P)

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2012): Beispielaufgaben für die schriftliche Überprüfung an Gymnasien - Klasse 10 Mathematik

In der Abbildung 1 kann man erkennen, dass die Fahrbahn in regelmäßigen Abständen mit senkrechten Stahltrageseilen an den Hauptseilen befestigt ist. Im mittleren Bereich der Brücke befinden sich auf jeder Fahrbahnseite sechs Trageseile.

c) **Bestimme** rechnerisch die Gesamtlänge der Stahltrageseile, die für den mittleren Brückenabschnitt für beide Fahrbahnseiten benötigt werden. **(4 P)**

In der Abbildung 3 ist eine Eisenbahnbrücke dargestellt, die über eine Straße führt. Der Bogen der Brücke bildet eine Parabel mit der Gleichung

$$g(x) = -0{,}16x^2$$

.

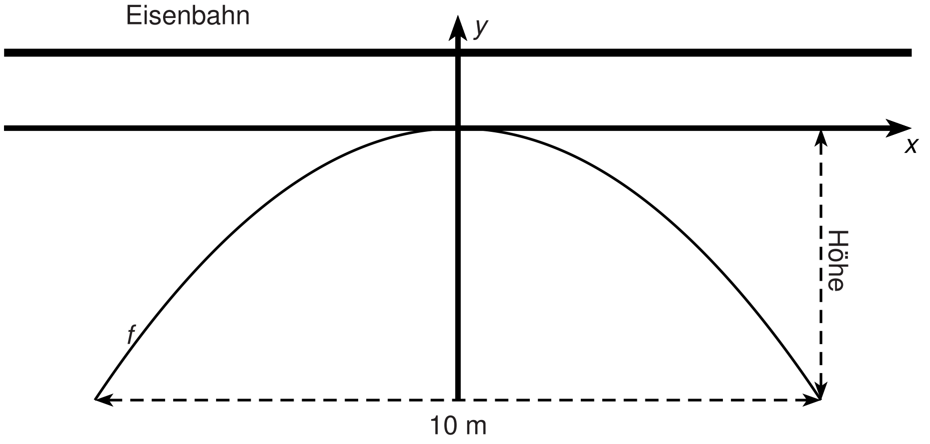


Abbildung 3: Eisenbahnbrücke

d) **Begründe** mithilfe einer Rechnung, dass die maximale Höhe der Durchfahrt 4 m beträgt. **(2 P)**

e) **Bestimme** rechnerisch, wie breit ein 3,19 m hoher LKW sein darf, damit er gerade noch unter der Brücke hindurch fahren kann. Dabei darf er den Verkehrsregeln entsprechend nur auf der rechten Fahrbahnseite fahren. **(4 P)**

Eine andere Brücke (siehe Abbildung 4) hat die Form einer Parabel mit den folgenden Eigenschaften (Längen in m):

- Der Scheitelpunkt der Parabel ist $S(0|45)$.
- Der Stützpfeiler p_3 trifft den Parabelbogen im Punkt $P(50|20)$.
- Für den Brückenbogen gilt die allgemeine Gleichung $y = ax^2 + c$.

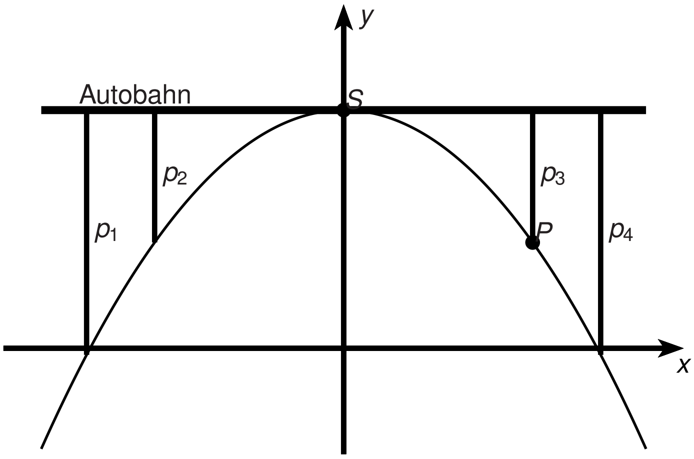


Abbildung 4: Autobahnbrücke

f) **Bestimme** die Parameter a und c und **zeige**, dass die Gleichung für den Brückenbogen

$$y = -\frac{1}{100}x^2 + 45$$

lautet. **(4 P)**

g) **Berechne** wie weit die Fußpunkte der Pfeiler p_1 und p_4 voneinander entfernt sind und **runde** das Ergebnis auf einen ganzzahligen Wert. **(3 P)**

2. ^{14}C [1] **Lösung S. 170**

In der Atmosphäre der Erde findet man in geringen Mengen das radioaktive Kohlenstoffisotop ^{14}C. Obwohl es mit einer Halbwertszeit von 5 730 Jahren zerfällt, ist sein Gehalt in der Atmosphäre konstant, da es durch kosmische Strahlung immer wieder neu gebildet wird. Jeder lebende Organismus enthält, während er lebt, den gleichen Anteil an ^{14}C – Atomen unter allen Atomen. Das liegt daran, dass die Pflanzen bei der Atmung CO_2 aufnehmen und damit auch ^{14}C. Durch die Nahrungskette gelangt es in Menschen und Tiere.

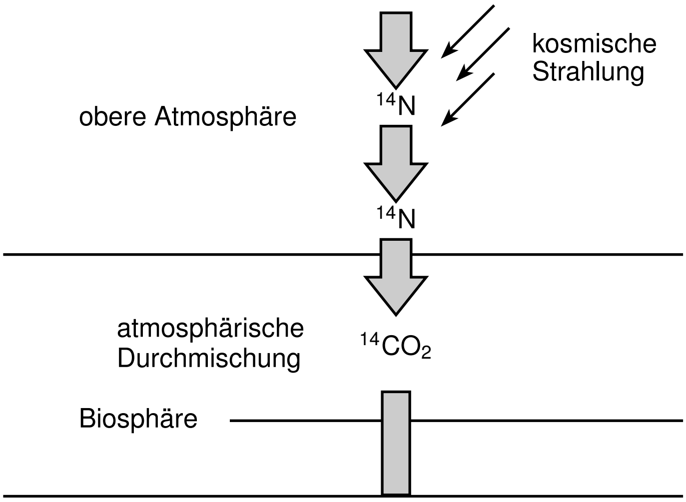


Abbildung 1: Schema der Radiokarbonmethode

Stirbt der Organismus, so atmet und ernährt er sich nicht mehr. Damit wird kein ^{14}C mehr nachgeliefert. Das vorhandene ^{14}C zerfällt im abgestorbenen Gewebe und die „Radiokarbonuhr" beginnt zu ticken. Wenn man den ^{14}C – Anteil von lebender und toter Substanz vergleicht, lässt sich daraus der Zeitpunkt bestimmen, von dem an keine Nahrung mehr aufgenommen wurde. So kann z. B. auf das Alter antiker Holzstücke oder Knochen geschlossen werden (siehe Abbildung 1).

a) **Gib an**, wie viel Prozent des ursprünglichen ^{14}C nach 5 730 Jahren / nach ca. 11 500 Jahren noch gemessen wird. **(5 P)**

b) **Zeichne** einen Graphen, welcher dem Alter (bis 24 000 Jahre) die noch vorhandene Menge ^{14}C in Prozent zuordnet. **(4 P)**

1992 wurde in den Ötztaler Alpen die Leiche „Ötzi" gefunden. Als diese nach ihrer Bergung genau untersucht wurde, entpuppte sie sich als die älteste Gletscherleiche der Welt. In ihren Knochen wurden 53 % des ursprünglichen ^{14}C – Gehalts festgestellt.

c) **Berechne**, vor wie vielen Jahren dieser Mensch etwa gelebt hat. **(4 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2012): Beispielaufgaben für die schriftliche Überprüfung an Gymnasien - Klasse 10 Mathematik

d) **Berechne**, wie viel Prozent des ^{14}C – Anteils die Mumie des ägyptischen Pharaos Tutanchamun (Regierungszeit 1332 bis 1323 v. Chr.) bei der Graböffnung 1922 enthielt.

(4 P)

Die Lascaux – Höhle in Frankreich ist berühmt für ihre Höhlenmalereien. Holzkohle aus der Zeit, als diese Höhle bewohnt war, hatte im Jahr 1950 eine ^{14}C – Zerfallsrate von 0,97 Zerfällen pro Minute und Gramm.
^{14}C in lebendem Holz hat eine Zerfallsrate von 15,3 Zerfällen pro Minute und Gramm.

e) **Bestimme**, wann diese Höhlenmalereien vermutlich entstanden sind. **(5 P)**

3. Laichplätze[1]

Lösung S. 172

Um zu ihren Laichplätzen zu gelangen, müssen Lachse verschiedene gefährliche Stufen überwinden. Nach elf Stufen haben die Lachse ihr Ziel erreicht. Es wird angenommen, dass an jeder Stufe 3 % der angekommenen Lachse ausscheiden.
1 000 Lachse machen sich auf den Weg.

Um zu ihren Laichplätzen zu gelangen, müssen Lachse verschiedene gefährliche Stufen überwinden. Nach elf Stufen haben die Lachse ihr Ziel erreicht. Es wird angenommen, dass an jeder Stufe 3 % der angekommenen Lachse ausscheiden.
1 000 Lachse machen sich auf den Weg.

a) **Berechne** die Anzahl der Lachse, die die Laichplätze erreichen.
(Zur Kontrolle: ca. 715*)* **(1 P)**

b) **Berechne** die Anzahl der Gefahrenstellen, nach denen erstmalig weniger als 85 % der Lachse vorhanden sind. **(3 P)**

c) Nach jeder fünften Gefahrenstufe gibt es Bären, die jeweils konstant 250 Lachse wegfangen.
Berechne, wie viel Prozent der Lachse jetzt noch ihr Ziel erreichen.
(Zur Kontrolle: ca. 26,4 %*)* **(4 P)**

d) **Vergleiche** die Ergebnisse der Teilaufgaben a) und c), wenn

- doppelt so viele Lachse los schwimmen,
- doppelt so viele Lachse pro Gefahrenstelle ausscheiden (also 6%).

(8 P)

In den Aufgabenteilen a) bis d) haben wir mit einem idealisierten mathematischen Modell gearbeitet. Tatsächlich sind die Gefahrenstellen unterschiedlich.

e) **Vergleiche** die Anzahl der Lachse aus Teilaufgabe c), die am Laichplatz ankommen, wenn entweder die erste Gefahrenstelle eine Verlustrate von 20 % oder die letzte Gefahrenstelle eine Verlustrate von 20 % bewirkt. **(3 P)**

f) **Beurteile,**ob bei der Beschreibung der Lachswanderung das exponentielle Wachstum geeignet ist. **(3 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2012): Beispielaufgaben für die schriftliche Überprüfung an Gymnasien - Klasse 10 Mathematik

4. Medikamente [1] Lösung S. 173

Antibiotika sind Medikamente gegen Infektionserkrankungen.
Wird ein bestimmtes Antibiotikum in Form einer Tablette eingenommen, kann man (idealisiert) annehmen, dass die Konzentration dieses Antibiotikums im Blut sofort nach der Einnahme einen Wert von 4 mg pro Liter Blut aufweist. Pro Stunde sinkt die Konzentration um 5 %.
Sei x die Zeit gemessen in Stunden nach Einnahme des Medikamentes, $f(x)$ die Konzentration des Antibiotikums im Blut gemessen in mg pro Liter.

a) **Begründe**, dass die zugehörige Funktion f mit

$$f(x) = 4 \cdot 0{,}95^x$$

lautet. **(3 P)**

b) **Berechne**, wie hoch die Antibiotikumskonzentration eine, vier und zwölf Stunden nach Einnahme einer Tablette ist. **(3 P)**

c) Um die Therapie genau zu überwachen, wird einem Patienten bereits zwanzig Minuten nach Einnahme der ersten Tablette Blut abgenommen und die Antibiotikumskonzentration bestimmt.

Berechne die zu erwartende Konzentration. **(2 P)**

d) Ein Patient muss die Therapie wegen Unverträglichkeit bereits nach der Einnahme der ersten Tablette abbrechen.

Bestimme, wann die Unverträglichkeitsgrenze von 0,2 mg pro Liter unterschritten wird, der Patient also keine negativen Reaktionen durch die Einnahme des Medikaments mehr spüren sollte. **(4 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2012): Beispielaufgaben für die schriftliche Überprüfung an Gymnasien - Klasse 10 Mathematik

Es gibt Substanzen, deren Konzentration im Blut linear abnimmt. Eine bestimmte derartige Substanz führt sofort nach Einnahme zu einer Konzentration im Blut von 4 mg pro Liter, die innerhalb einer Stunde jeweils um 0,2 mg pro Liter sinkt (siehe Abbildung 1).

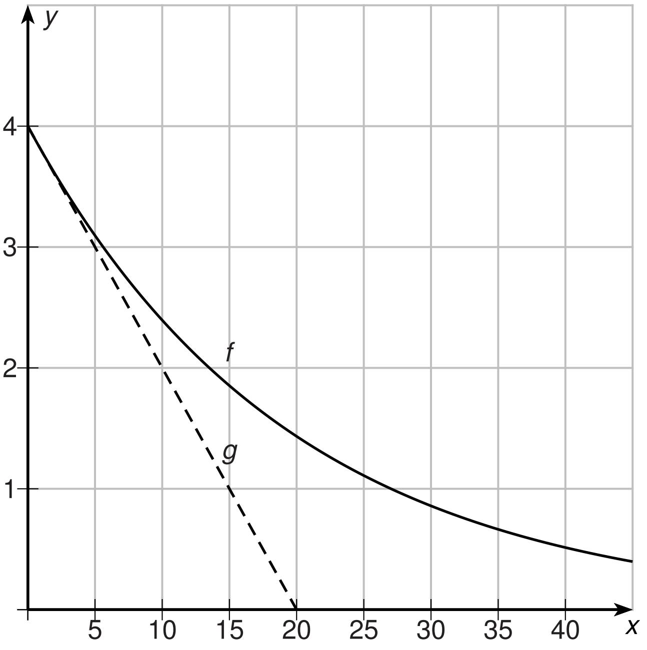


Abbildung 1

e) **Bestimme** die zugehörige Funktion g. **(2 P)**

f) **Beschreibe** je zwei Eigenschaften von exponentiellem negativem Wachstum und linearem negativem Wachstum bezogen auf den Kontext der Aufgabe. **(4 P)**

Bei manchen Substanzen kann man den Abbau im Blut so beschreiben, dass relativ große Konzentrationen zunächst linear abgebaut werden, dann $P(12{,}5|1{,}5)$ durch die Funktion g beschrieben werden. Danach verlaufe der weitere Abbau exponentiell. Dies kann mit der Funktion h mit

$$h(x) = a \cdot b^{x-12{,}5}$$

(mit $a, b \in \mathbb{R}$; $a \neq 0, b \neq 0$).
Neben $h(12{,}5) = 1{,}5$ sei auch $h(32) = 0{,}11$ bekannt.

g) **Bestimme** die Parameter a und b und **interpretiere** diese im Kontext der Aufgabe. **(4 P)**

5. Flächeninhalt eines Rechtecks [1] **Lösung S. 175**

Wir betrachten Rechtecke mit folgenden Eigenschaften:

- zwei Seiten liegen auf den Koordinatenachsen;
- ein Eckpunkt liegt im Ursprung *O*;
- ein Eckpunkt liegt auf der Geraden *g*.

In der Abbildung 1 siehst du zwei Beispiele: die Rechtecke *OBCD* und *OEFG* (Seitenlängen bzw. Einheiten der Achsen in cm).

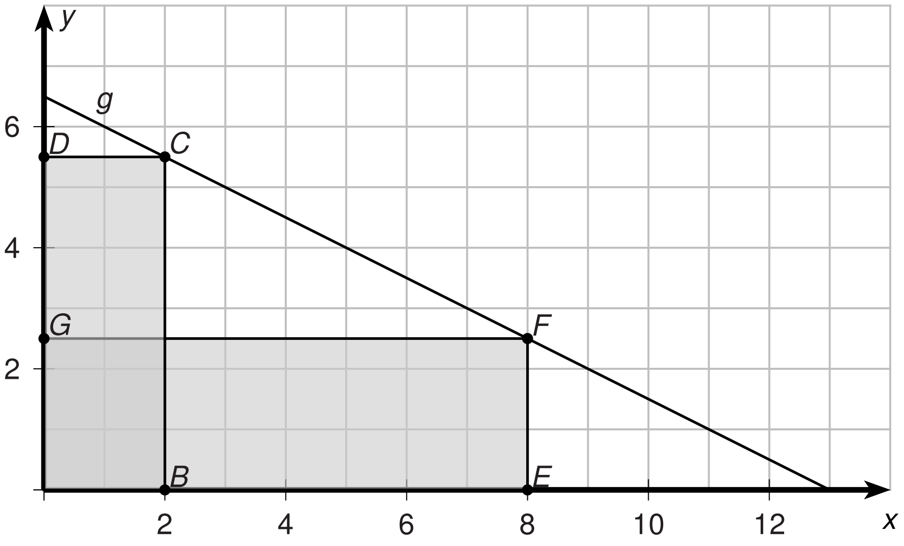


Abbildung 1

a) Berechne den Flächeninhalt der Rechtecke *OBCD* und *OEFG*. **(2 P)**

b) Gib die Geradengleichung für *g* **an.**

Hinweis: Sollte dir dies nicht gelingen, arbeite mit der folgenden – nicht mit der Lösung übereinstimmenden – Geradengleichung weiter: $h(x) = -0{,}5x + 5{,}5$ **(3 P)**

c) Entscheide, ob der Punkt $P(-2|7{,}5)$ auf der Geraden *g* liegt. **(3 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2012): Beispielaufgaben für die schriftliche Überprüfung an Gymnasien - Klasse 10 Mathematik

Die Flächeninhalte der beiden betrachteten Rechtecke *OBCD* und *OEFG* sind unterschiedlich groß.

d) **Bestimme** die Funktionsvorschrift für die Funktion A, mit welcher die Flächeninhalte der Rechtecke mit einer beliebigen Seitenlänge x berechnet werden können.

Hinweis: Sollte dir dies nicht gelingen, arbeite mit der folgenden – nicht mit der Lösung übereinstimmenden – Funktionsgleichung weiter: $A(x) = -0{,}5x^2 + 5{,}5x$ **(3 P)**

e) **Bestimme** die Seitenlängen und den Flächeninhalt des Rechtecks mit dem maximalen Flächeninhalt. **(7 P)**

Man kann den in e) betrachteten Sachverhalt verallgemeinern:
Durch

$$f(x) = m \cdot x + b$$

mit $m < 0$ und $b > 0$ ist eine beliebige Gerade f gegeben, deren entsprechende Rechtecke auch im I. Quadranten liegen.

f) **Zeige**, dass das Rechteck mit dem maximalen Flächeninhalt für jede solche Gerade bei

$$x_{\max} = \frac{1}{2} \cdot x_{\mathit{Nullstelle}}$$

liegt. **(4 P)**

6. Herr Sorgenfrei [1] **Lösung S. 176**

Herr Sorgenfrei möchte 50 000 € als Altersvorsorge anlegen. Sein Bankberater bietet ihm zwei Modelle an:

(A) Beim ersten Modell wird das Geld für 16 Jahre festgelegt. Dann erhält Herr Sorgenfrei 93 649,06 € ausgezahlt.

(B) Beim zweiten Modell gibt es nur Zinsen 3,25 % pro Jahr. Dafür ist der nach 16 Jahren ausgezahlte Betrag steuerfrei.

Wenn das Geld nach dem ersten Modell ausgezahlt wird, muss Herr Sorgenfrei seinen Gewinn mit 25 % versteuern.

a) **Bestätige**, dass das Geld von Herrn Sorgenfrei nach dem Modell (A) mit einem Zinssatz von 4 % jährlich verzinst wird. **(2 P)**

b) **Berechne**, wie viel Geld Herr Sorgenfrei nach dem Modell (A) nach 16 Jahren tatsächlich ausgezahlt bekommt.

(Zur Kontrolle: 82 736,79 €) **(3 P)**

c)
- **Ermittle** andererseits, mit wie viel Geld Herr Sorgenfrei beim Modell (B) nach 16 Jahren rechnen kann.
- **Begründe**, welches Modell ertragreicher ist. **(2 P)**

d) **Bestimme**, wie lange Herr Sorgenfrei sein Geld nach dem Modell (B) anlegen muss, um den Betrag zu verdoppeln. **(2 P)**

e) **Überprüfe**, ob der Zeitraum zur Verdopplung des Kapitals vom Anfangskapital abhängig oder unabhängig ist. **(2 P)**

Die Schwester von Herrn Sorgenfrei möchte zum gleichen Auszahlungszeitpunkt ebenfalls über 93 649,06 € verfügen. Ihre Entscheidung dafür trifft sie aber zwei Jahre später als ihr Bruder.

f) **Gib an** wie viel Startkapital sie einsetzen muss, um nach dem Modell (B) auf die gewünschte Summe zu kommen. **(3 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2012): Beispielaufgaben für die schriftliche Überprüfung an Gymnasien - Klasse 10 Mathematik

Herr Sorgenfrei ist sehr vorsichtig. Er rechnet für die Zukunft mit einer jährlichen Geldentwertung von 2 % (Inflationsrate).

g) **Berechne**, wie viel Wert das Startkapital von 50 000 € nach 16 Jahren dann noch hat. **(3 P)**

h) **Berechne** dann, wie hoch beim Modell (A) die Kaufkraft des Vermögens von Herrn Sorgenfrei (einschließlich Zinsen und nach Abzug der Steuern) nach 16 Jahren ist. **(2 P)**

i) **Beurteile**, ob es sinnvoll ist, Kapital bei dieser Bank anzulegen. **(3 P)**

7. Gefahr aus dem Weltall [1] **Lösung S. 178**

Ein Science – Fiction – Film erzählt die folgende Geschichte[2]:
In einer Raumstation werden biologische Experimente vorgenommen. Durch den Fehler eines unaufmerksamen Gentechnikers wird ein 1 mm langer und normalerweise harmloser Wurm so umprogrammiert, dass seine Länge exponentiell zunimmt. Die Abbildung zeigt das Wachstum des Wurmes in den ersten 80 Minuten.

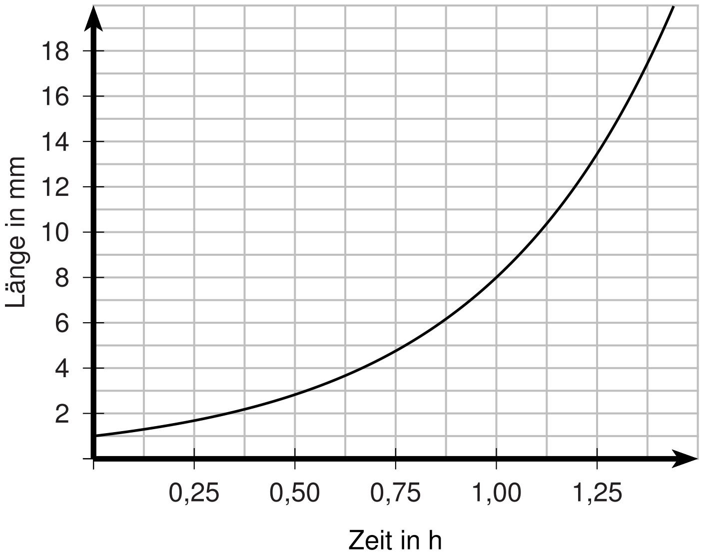


Abbildung 1

a) **Bestimme** die Zeit, nach der sich die Länge des Wurmes verdoppelt bzw. verfünffacht hat. **(2 P)**

b)
- **Erstelle** eine Funktionsgleichung, die das Wachstum des Wurmes beschreibt.
- **Gib** dabei die Zeit in Stunden **an.**

(Zur Kontrolle: $f(x) = 2^{3x} = 8^x$) **(2 P)**

c)
- **Berechne** die Länge des Wurmes nach fünf Stunden.
- **Gib** dein Ergebnis in einer sinnvollen Einheit **an.** **(4 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2012): Beispielaufgaben für die schriftliche Überprüfung an Gymnasien - Klasse 10 Mathematik

[2] Diese Geschichte vernachlässigt die Tatsache, dass es keine höhere Geschwindigkeit jenseits der Lichtgeschwindigkeit geben kann.

Zunächst bemerkt der unaufmerksame Genforscher nicht, welch verhängnisvollen Fehler er begangen hat. Erst nach fünf Stunden wird ihm klar, dass er es weder schafft, den Wurm zu vernichten, noch dessen verhängnisvolles Wachstum aufzuhalten. Daher sendet er genau fünf Stunden nach Beginn der Katastrophe ein warnendes Funksignal zur einen Lichttag entfernten Erde.
Das Funksignal breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus, also mit 300 000 $^{\text{km}}/_{\text{s}}$.

d) **Gib** die Strecke **an**, die das Funksignal nach einer Stunde bzw. einem Tag zurückgelegt hat. **(3 P)**

e) **Beschreibe**, worin sich das Ausbreitungsverhalten des Funksignals vom Wachstum des Wurmes unterscheidet. **(2 P)**

f) Der Wurm wächst genau in Richtung Erde.

Berechne, wann der aggressive Wurm mit seinem Vorderteil die Erde erreicht. **(5 P)**

g) **Entscheide**, ob das warnende Funksignal die Erde noch vor dem Eintreffen des Wurmes erreicht, damit mögliche Abwehrsysteme aktiviert werden können. **(4 P)**

8. Abbau eines Wirkstoffs [1] Lösung S. 179

Eine Tablette (1 g) eines Medikamentes besteht zu 5% aus dem Wirkstoff „Wirkin“. Die übrigen 95 % bestehen aus unwirksamen und unschädlichen Füllstoffen. Wird die Tablette eingenommen, gelangen 35 % des Wirkstoffes „Wirkin“ ins Blut und somit in den Körper. Der Rest wird ausgeschieden.
Innerhalb eines Tages werden 25 % der (noch) vorhandenen Menge des Wirkstoffes vom Körper abgebaut.
Eine Person schluckt morgens eine Tablette dieses Medikamentes.

a) **Berechne** die Menge des Wirkstoffes in mg, die bei der Einnahme einer Tablette (1 g) ins Blut gelangt. **(2 P)**

b) **Gib** eine Funktionsgleichung einer Funktion f **an**, mit der man die Menge des Wirkstoffes berechnen kann, die nach t Tagen noch im Körper vorhanden ist und **begründe** die Funktionsgleichung. **(4 P)**

c)
- **Berechne** die Menge des Wirkstoffes, die nach 3 Tagen noch vorhanden ist, wenn die Person in diesen Tagen keine weitere Tablette einnimmt.
- **Bestimme** auch, wie viel Prozent der Ausgangsmenge das sind. **(4 P)**

Eine Person nimmt jeden Tag eine Tablette des Medikamentes ein.

d) **Bestimme** die Ansammlung des Wirkstoffes nach 3 Tagen, bevor die Person erneut das Medikament zu sich nimmt. Gehe davon aus, dass vor der ersten Einnahme keine Restmenge des Wirkstoffes im Körper vorhanden ist. **(8 P)**

Eine Person nimmt über einen langen Zeitraum jeden Morgen eine Tablette ein. Die Wirkstoffmenge im Blut vor der Einnahme der neuen Tablette ist an jedem Morgen genau gleich dem Wert vom Vortag.

e) **Ermittle** die Menge des Wirkstoffs, die jeden Morgen vor der Einnahme der Tablette im Blut ist. **(4 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2012): Beispielaufgaben für die schriftliche Überprüfung an Gymnasien - Klasse 10 Mathematik

9. Barometer [1] **Lösung S. 180**

Es ist bekannt, dass die Luft „dünner“ wird, wenn man auf einen Berg steigt. Physiker sagen dazu, dass der Luftdruck sinkt. Mit einem Barometer kann man den Luftdruck messen, also feststellen, wie „dünn“ die Luft ist. Daraus kann man die Höhe berechnen, in der man sich befindet.

Peter möchte einen 3 700 m hohen Berg besteigen. Damit er zu jeder Zeit weiß, in welcher Höhe er sich befindet, hat er ein geeignetes Handy mit einer Barometer-App ausgestattet. Diese App möchte er bei seiner Wanderung testen.
Auf seinem Weg nach oben hat er an drei Orten, an denen ihm die Höhe bekannt war, den Luftdruck gemessen und in der folgenden Tabelle eingetragen.

Höhe h in m über dem Meeresspiegel	0	3 500	3 700
Luftdruck p in hPa	1 013	656	639

Tabelle 1: Luftdruckwerte in hPa, Hektopascal (hPa) ist eine Maßeinheit für Luftdruck. Der Einfluss der Temperatur auf den Luftdruck soll nicht berücksichtigt werden.

a) **Bestätige**, dass der Zusammenhang zwischen der Höhe und dem Luftdruck nicht linear ist. **(6 P)**

Der Luftdruck kann durch die Funktion p mit

$$p(h) = p_0 \cdot 10^{-0{,}000054 \cdot h} = 1\,013 \cdot 10^{-0{,}000054 \cdot h}$$

modelliert werden. Dabei ist $p(h)$ der Luftdruck in der Höhe h. Der Luftdruck wird in hPa und die Höhe in m angegeben. Der Druck p_0 ist der Luftdruck auf Meereshöhe von 0 m.

b) **Bestätige**, dass die Werte in der Tabelle 1 durch die Funktion p annähernd korrekt beschrieben werden. **(6 P)**

Auf dem Weg nach unten macht Peter eine zweistündige Rast.
Dort misst er den Luftdruck 685 hPa.

c) **Bestimme**, in welcher Höhe h sich Peter zu diesem Zeitpunkt befindet. **(5 P)**

Im Laufe seiner Rast verschlechtert sich das Wetter deutlich.
Am Ende der Rast misst Peters Barometer-App nur noch 680 hPa.

d) **Ermittle** anhand dieser neuen Messung den neuen Luftdruck auf Meereshöhe. **(5 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2016): schriftliche Überprüfung Klasse 10 Mathematik, Haupttermin

10. Motorrad [1] **Lösung S. 181**

Emil plant sein Motorrad zu verkaufen. Er informiert sich im Internet auf der Website eines Händlers über den Gebrauchtwert von Motorrädern. Dort findet er folgende Tabelle für seine Silverstar (Neupreis 9000 €).

Alter in Jahren	0	1	3	7	9	11
Gebrauchtwert in €	9 000	7 200	4 608	1 887	1208	773

Tabelle 1

Sein Freund Anton sagt, das könne man mit der Faustformel:

$$\text{Gebrauchtwert} = \text{Neupreis} \cdot 0{,}8^{\text{Jahre}}$$

auch selber ausrechnen. Antons Formel ist in der Funktion

$$f(t) = 9\,000 \cdot 0{,}8^t$$

wiedergegeben. Wobei t das Alter in Jahren und $f(t)$ den Gebrauchtwert in € darstellt (siehe Abbildung 1).

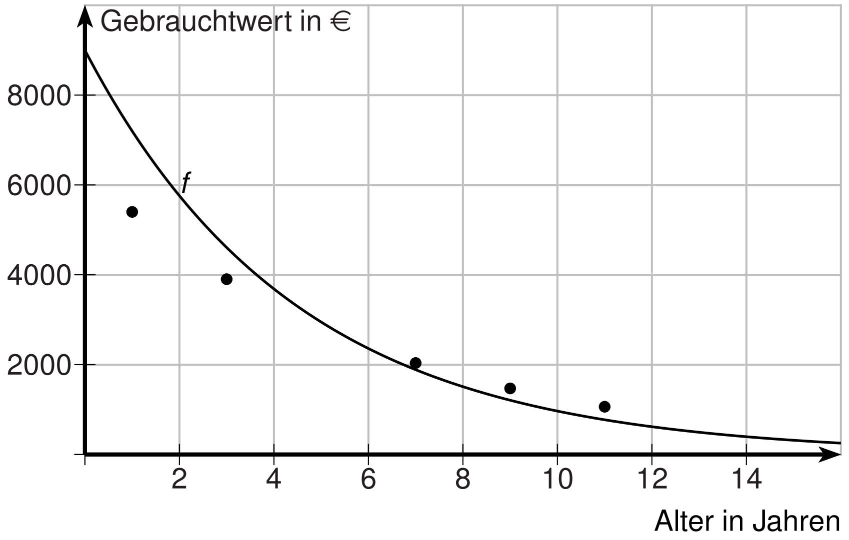


Abbildung 1: Graph der Funktion *f* und Wertepaare zu Tabelle 2.

a) **Bestätige** anhand zweier Wertepaare, dass die Werte in der Tabelle mit den (gerundeten) Funktionswerten übereinstimmen. **(4 P)**

b) **Gib an**, welche Bedeutung die Zahl 0,8 in dem Funktionsterm im Kontext der Aufgabe hat und welche Auswirkung es auf den Gebrauchtwert hätte, wenn diese Zahl im Funktionsterm größer als eins wäre. **(3 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2017): schriftliche Überprüfung Klasse 10 Mathematik, Haupttermin

Emil wundert sich, dass der Wert des Motorrades nach Antons Formel niemals Null ist.

c) **Begründe**, dass der Wert des Motorrades nach der Funktion f niemals Null werden kann. **(3 P)**

Anton erklärt daraufhin, dass die Verschrottung eines Motorrades ca. 150 € kostet. Darum sei die Funktion von diesem Betrag an sowieso hinfällig.

d) **Berechne** den Zeitpunkt, an dem das Motorrad nur noch 150 € wert ist. **(3 P)**

Auf der Website eines anderen Händlers findet Emil eine weitere Tabelle. Für die Silverstar sind dort folgende Werte zu finden, die nur für gebrauchte Motorräder gelten:

Alter in Jahren	1	3	7	9	11
Gebrauchtwert in €	5 400	3 902	2 036	1 471	1 063

Tabelle 2

Diese Wertepaare sind als Punkte in der Abbildung 1 zu finden.

e) **Bestimme** eine Funktion g der Form

$$g(t) = a \cdot b^{\,t},$$

die die Berechnung des Gebrauchtwertes gemäß der Zahlenwerte aus Tabelle 2 ermöglicht. Dabei sollen die Parameter a und b positive Zahlen sein,

t das Alter in Jahren und $g(t)$ der Gebrauchtwert in €.

(Zur Kontrolle: $g(t) \approx 6\,353 \cdot 0{,}85^t$) **(5 P)**

f) **Entscheide**, ab wann der Gebrauchtwert beim zweiten Händler höher ist als beim ersten. **(3 P)**

11. Entwicklung eines Pferdehof-Spiels [1] Lösung S. 182

Die Firma Sgames stellt Computerspiele her. Zurzeit entwickeln sie ein neues Pferdehof-Spiel. Bei diesem Spiel sollen die Pferde durch Sammeln von Erfahrungspunkten ihren Wert steigern und entsprechend höhere Spielstufen erreichen. Die Entwickler diskutieren nun verschiedene Modelle zur Berechnung der Spielstufen. In den folgenden Teilaufgaben steht x jeweils für die Anzahl der Erfahrungspunkte eines Pferdes, die Funktionswerte stehen jeweils für die Spielstufe. Im Spiel wird die Stufe immer als natürliche Zahl angezeigt, wobei immer abgerundet wird. Der Funktionswert 4,87 bedeutet also, dass das Pferd immer noch in Stufe 4 ist. Sobald der Funktionswert 5 ist, ist die fünfte Spielstufe erreicht.
Der erste Vorschlag orientiert sich an der folgenden Funktion:

$$f(x) \quad = 2^{0{,}002x}, \quad x \geq 0$$

a) **Berechne**, in welcher Stufe ein Pferd nach diesem Modell wäre, wenn es 600, 800 bzw. 1100 Erfahrungspunkte hätte. **(3 P)**

b) **Bestimme**, auf einen Erfahrungspunkt genau, die Anzahl der Erfahrungspunkte, die ein Pferd mindestens braucht, um die sechste Stufe zu erreichen. **(4 P)**

Der zweite Vorschlag orientiert sich an einer anderen Funktion:

$$g(x) \quad = 9 - 2^{-0{,}002x+3}, \quad x \geq 0$$

c) **Interpretiere** die Zahl 9 im Funktionsterm der Funktion g im Sachkontext. **(3 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2018): schriftliche Überprüfung Klasse 10 Mathematik, Haupttermin

Die Modelle f und g unterscheiden sich deutlich. Pferde benötigen in beiden Modellen unterschiedlich viele Erfahrungspunkte, um eine bestimmte Stufe zu erreichen (siehe Abbildung 1).

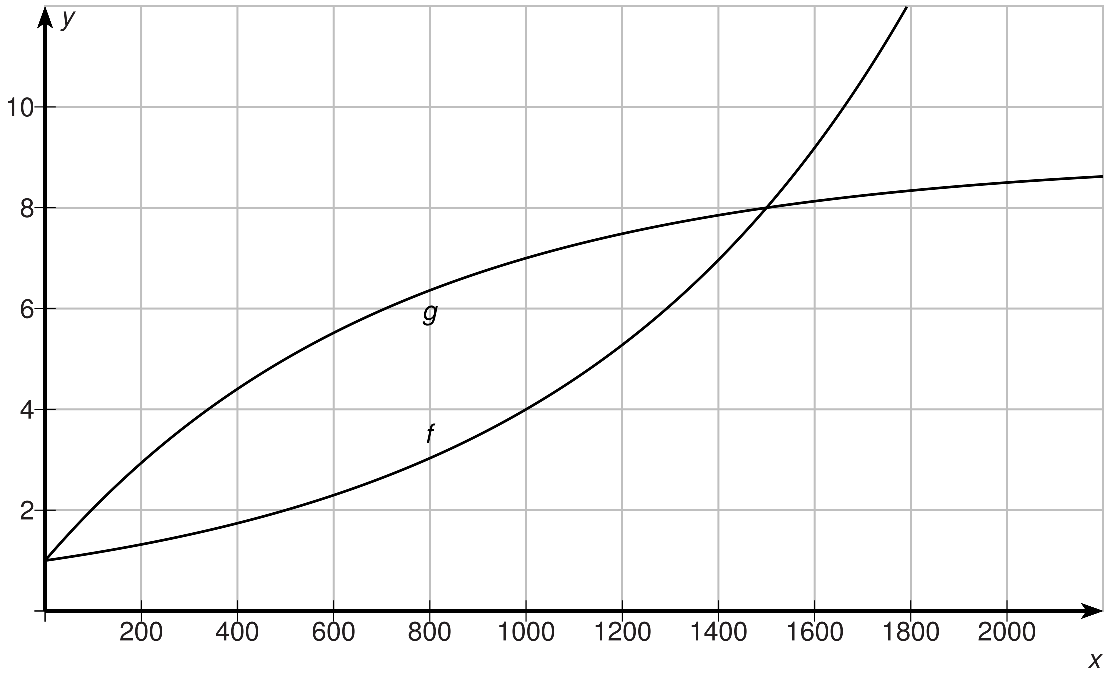


Abbildung 1: Graphen der Funktionen f und g

d) • **Bestimme** graphisch die Schnittpunkte der Funktionen f und g.

• **Interpretiere** das Ergebnis im Sachkontext der Aufgabe. **(4 P)**

Es gibt noch einen dritten Vorschlag der Entwickler:

$$h(x) \quad = 0{,}2 \cdot x^{0{,}5} + 1, \qquad x \geq 0$$

e) **Skizziere** den Graphen der Funktion h in die Abbildung 1. **(3 P)**

Die Spieleentwickler diskutieren die drei Vorschläge. Dem Team ist wichtig, dass das Spiel zwei Dinge berücksichtigt:

- Anfangs führt das Lernen schneller zum Erfolg, d. h. zu Beginn werden weniger Erfahrungspunkte für einen Stufenanstieg benötigt als nach dem Erreichen höherer Stufen.
- Die Anzahl der Stufen soll nach oben nicht begrenzt sein.

f) **Entscheide** begründet, welches der drei Modelle gemessen an den Vorgaben der Spieldesigner das geeignetste ist. **(5 P)**

12. Pudding [1] **Lösung S. 186**

Eine Firma produziert Pudding. Der Pudding wird bei einer Temperatur von 50 °C abgefüllt. Dann kühlt er weiter bis zur Raumtemperatur ab. Diese beträgt konstant 18 °C.
Die Funktion f mit

$$f(t) = 80 \cdot 0{,}95^t + 18$$

beschreibt die Abkühlung des Puddings. Dabei gibt $f(t)$ die Temperatur in °C an und t die Zeit in Minuten ab Beginn der Messung.
Die Firma hat die folgenden Messwerte für den Abkühlprozess aufgenommen:

t in Minuten ab Beginn der Messung	0	5	10
Temperatur in °C	98	80	66

Tabelle 1: Messwerte des Abkühlprozesses

a)
- **Bestätige**, dass die Werte in der Tabelle 1 durch die Funktion f annähernd korrekt beschrieben werden.
- **Berechne**, um wie viel Prozent sich die Temperatur von der fünften bis zur zehnten Minute ändert. **(5 P)**

Beim Nachmessen bemerkt man, dass die Abkühlung etwas anders verläuft als angenommen. Zu Beginn wird der Wert 100 °C gemessen, nach 2 Minuten hat der Pudding eine Temperatur von 84,42 °C.

b) **Bestimme** eine Funktionsgleichung der Form

$$g(t) = a \cdot b^t + 18$$

für $a, b \in \mathbb{R}$, die die Messung beschreibt. Dabei soll t die Zeit in Minuten ab Beginn der Messung und $g(t)$ die Temperatur in °C sein.
(Zur Kontrolle: $g(t) = 82 \cdot 0{,}9^t + 18$) **(5 P)**

c)
- **Berechne** den Zeitpunkt, an dem der Pudding nach den Modellen f und g die gleiche Temperatur hat.
- **Zeichne** den Funktionsgraphen zur Funktion g in das Koordinatensystem der Abbildung 1 in der Anlage **ein**. **(5 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2019): schriftliche Überprüfung Klasse 10 Mathematik, Haupttermin

Ein Experte meint, dass auch die Funktion k mit

$$k(t) = 100 \cdot 0{,}92^t$$

geeignet wäre, um den Abkühlprozess des Puddings zu beschreiben. Dabei ist $k(t)$ die Temperatur in °C und t die Zeit in Minuten ab der ersten Messung. Die Funktion ist in Abbildung 1 in der Anlage abgebildet.

d)
- **Gib** die Bedeutung des Wertes 0,92 im Sachkontext **an**.
- **Ermittle** graphisch den Zeitpunkt, zu dem die Einfülltemperatur gemäß der neuen Funktion k erreicht wird.
- **Beurteile** im Sachkontext der Aufgabe, ob die Funktion k unter den gegebenen Bedingungen geeignet ist, den gesamten Abkühlprozess zu beschreiben.

  Hinweis: Gehe auf den gesamten Verlauf des Graphen von k ein. **(7 P)**

Anlage zur Aufgabe „Pudding“

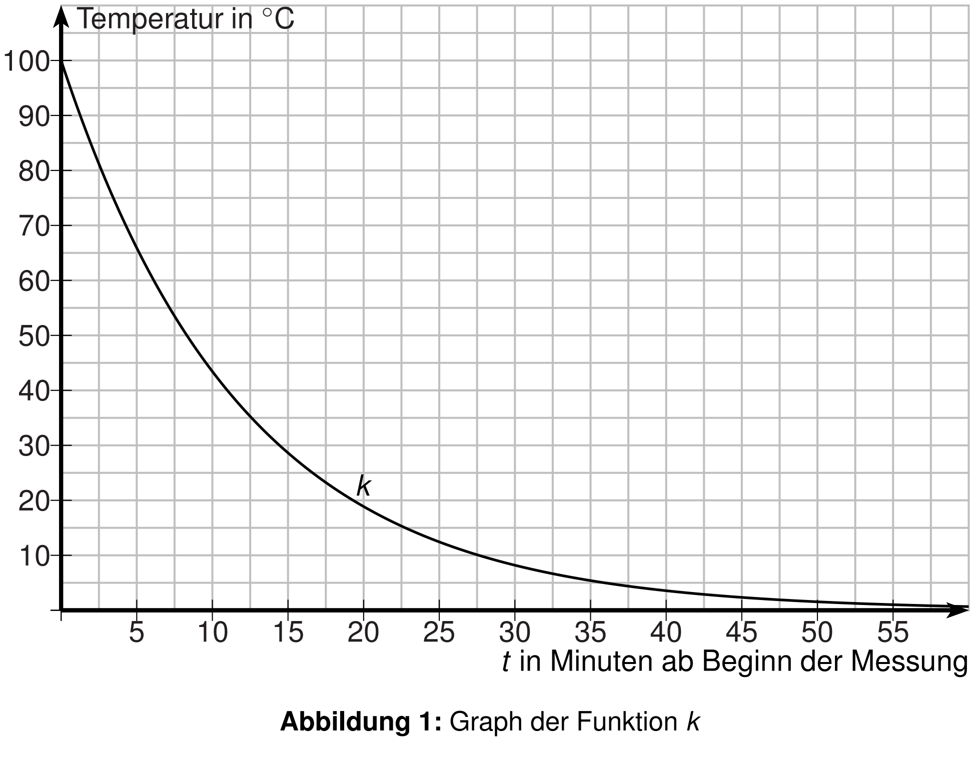


Abbildung 1: Graph der Funktion k

13. Tennistraining [1] Lösung S. 188

Beim Tennis wird ein Ball von den Spielern mit Hilfe eines Schlägers in das Feld des Gegners gespielt (siehe Abbildung 1).
Im Folgenden soll zur Vereinfachung davon ausgegangen werden, dass alle Ballbewegungen parallel zur seitlichen Spielfeldbegrenzung erfolgen, der Ball punktförmig ist und das Netz eine konstante Höhe von 1 m hat. Das gesamte Spielfeld ist 24 m lang und das Netz steht in der Mitte.

Quelle: Bild von Pexels auf https://pixabay.com/de/photos/athleten-publikum-wettbewerb-1866487/

Abbildung 1

Beim Training soll der Ball möglichst genau parallel zur Seitenlinie geschlagen werden. Der Spieler steht 12 m vom Netz entfernt auf der Grundlinie. Er trifft den Ball direkt oberhalb der eigenen Grundlinie und schlägt ihn mit so hoher Geschwindigkeit, dass die Flugbahn durch die Punkte $P(4|2)$ und $Q(14|1)$ als geradlinig angesehen werden kann (siehe Abbildung 2).

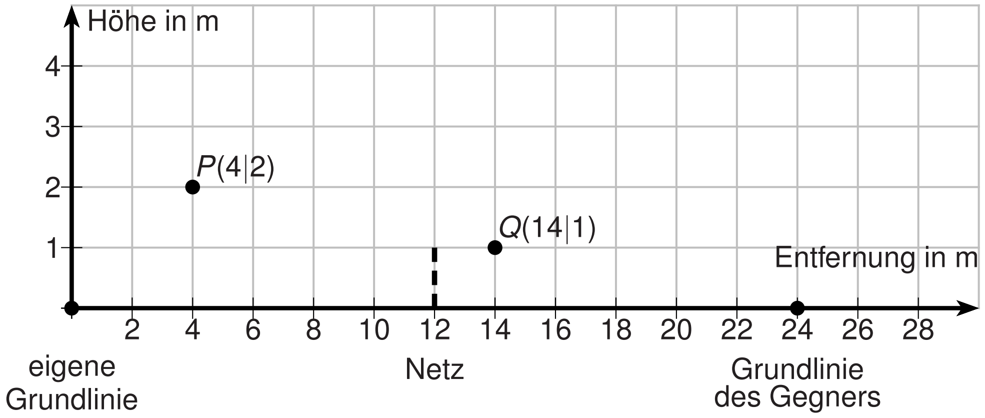


Abbildung 2: Ebene der Flugbahn, seitliche Ansicht des Spielfelds

a)
- **Zeichne** die Flugbahn des Balls in Abbildung 2 ein.
- **Bestätige** durch eine Rechnung, dass für die Steigung m der Flugbahn gilt $m = -0{,}1$.
- **Berechne** die Höhe des Balls über der Grundlinie des Spielers. **(5 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2020): schriftliche Überprüfung Klasse 10 Mathematik, Haupttermin

Einen viel tiefer über der eigenen Grundlinie ankommenden Ball schlägt der Spieler mit geringerer Geschwindigkeit zurück. Die Flugbahn des Balls verläuft in diesem Fall parabelförmig. Sie lässt sich durch die Funktion f mit

$$f(x) = -\frac{1}{50} \cdot (x - 8)^2 + 2{,}5$$

beschreiben. Dabei gibt $f(x)$ die Höhe in Metern über dem Boden und x die horizontale Entfernung des Balls von der eigenen Grundlinie an.

b)
- **Beschreibe**, wie der Graph der Funktion f aus dem Graphen der Normalparabel hervorgeht.
- **Gib** die Koordinaten des Punktes **an**, in dem der Ball seine größte Höhe erreicht. **(4 P)**

c) **Bestimme** die Funktion f in der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$. **(3 P)**

Verändert man die Geschwindigkeit, mit der der Ball geschlagen wird, verändert sich auch die Flugbahn. Die Funktion g mit

$$g(x) = -0{,}016 \cdot x^2 + 0{,}23 \cdot x + 1{,}22$$

beschreibt die Höhe eines Balls bei einer Geschwindigkeit von 18 m/s in Abhängigkeit von der Entfernung x zur eigenen Grundlinie.

d) Für die Funktion g gelten die beiden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} g(12) &> 1 \qquad \text{und} \\ g(24) &< 0 \end{aligned}$$

- **Interpretiere** diese Aussagen im Sachkontext.
- **Ermittle** die Stelle, an der der Ball auf dem Boden aufkommt. **(5 P)**

Die Flugbahn des Tennisballs ist neben der Geschwindigkeit auch vom Schlagwinkel, in dem der Ball geschlagen wird, abhängig. Abbildung 3 veranschaulicht den Zusammenhang zwischen Schlagwinkel und Geschwindigkeit.

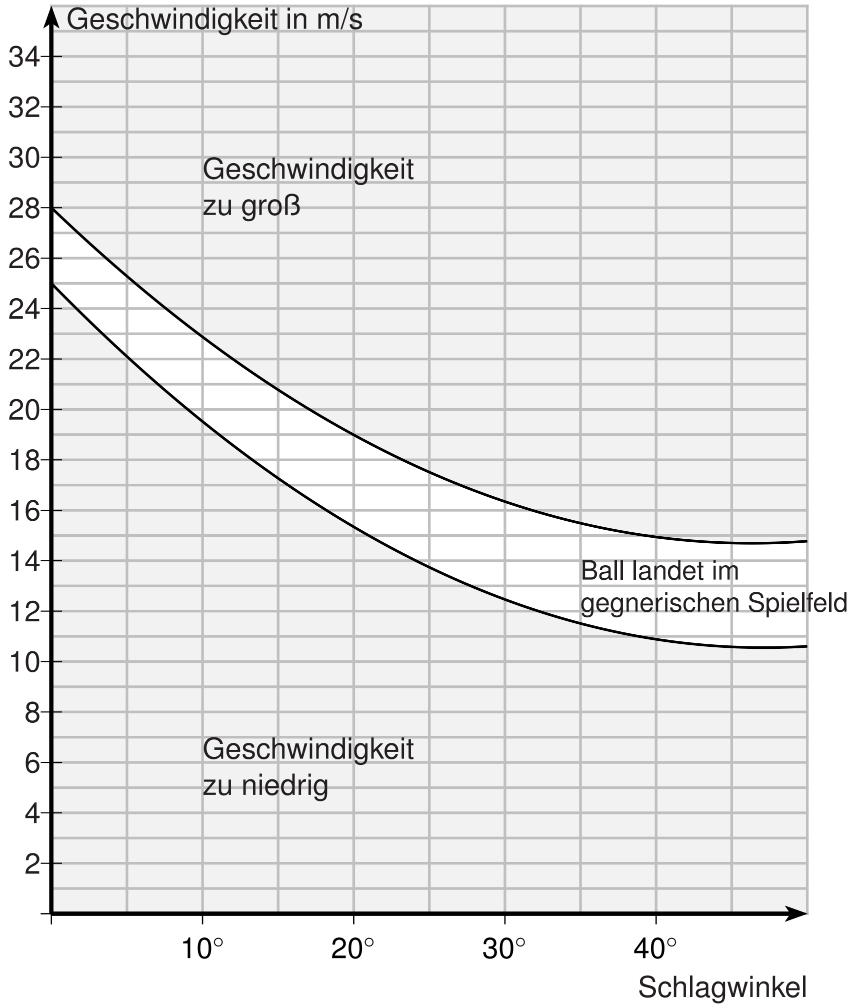


Abbildung 3: Zusammenhang zwischen Schlagwinkel und Geschwindigkeit

e) **Beurteile** begründet mit Hilfe von Abbildung 3 die folgenden Aussagen:

(1) Wird ein Ball in einem Winkel von 20° und einer Geschwindigkeit von 14 m/s geschlagen, landet der Ball im gegnerischen Feld.

(2) Bei einer Geschwindigkeit von 18 m/s kann der Ball in einem Winkelbereich von 13° bis 23° geschlagen werden, damit er im gegnerischen Feld landet.

(3) Je niedriger die Geschwindigkeit des Balls ist, desto größer ist der Winkelbereich, in dem der Ball geschlagen werden kann, damit er im gegnerischen Feld landet.

(5 P)

6.3 Aufgaben zur Leitidee Daten und Zufall

1. Mit und ohne Brille [1] Lösung S. 190

Die Kleinstädte Fielbrück, Fielhausen und Fielwerder haben Folgendes gemeinsam:

- Ein Drittel der Einwohner ist über 50 Jahre alt.
- Die Hälfte der Einwohner trägt eine Brille.

Ein Reporter führt im Auftrag eines bekannten Optikers in den drei Städten eine Befragung durch. In den drei Einwohnermeldeämtern stellt er jeweils folgende Fragen:

1. Wie viel Prozent der über 50-jährigen in Ihrer Stadt tragen eine Brille?
2. Wie viel Prozent der Brillenträger in Ihrer Stadt sind über 50 Jahre alt?
3. Wie viel Prozent der Einwohner Ihrer Stadt sind über 50 Jahre alt und tragen eine Brille?

Erstaunlicherweise erklären die drei befragten Beamten zunächst alle dasselbe:

> *„Ich beantworte Ihnen nur eine der drei Fragen; die anderen Antworten ergeben sich daraus von selbst.“*

Der Beamte in Fielbrück beantwortet Frage 1 mit: 100 %

Der Beamte in Fielhausen beantwortet Frage 2 mit: 40 %

Der Beamte in Fielwerder beantwortet Frage 3 mit: 25 %

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(A) von drei zufällig ausgesuchten Personen aus Fielbrück genau zwei älter als 50 Jahre sind.

(B) vier zufällig ausgesuchte Personen aus Fielhausen alle eine Brille tragen.

(C) von zehn zufällig ausgesuchten Personen aus Fielwerder mindestens einer eine Brille trägt.

(6 P)

b) Ergänze die folgende Tabelle für die 12 000 Einwohner von Fielbrück:

	Brille	keine Brille	gesamt
älter als 50 Jahre			
50 Jahre und jünger			
gesamt			12 000

(4 P)

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2012): Beispielaufgaben für die schriftliche Überprüfung an Gymnasien - Klasse 10 Mathematik

c) **Bestimme** die in den Fragen 2) und 3) von den Einwohnermeldeämtern erbetenen Prozentangaben für Fielbrück. **(4 P)**

d) **Ergänze** die folgende Tabelle für die 9 000 Einwohner von Fielhausen:

	Brille	keine Brille	gesamt
älter als 50 Jahre			
50 Jahre und jünger			
gesamt			

(4 P)

e) **Bestimme** die in den Fragen 1) und 3) erbetenen Prozentangaben für Fielhausen. **(4 P)**

2. Dominosteine [1] **Lösung S. 191**

Anna und Leo haben im Urlaub lange und viel Domino gespielt. Nun möchten sie etwas Abwechslung haben und überlegen, wie sie mithilfe der Dominosteine ein neues Spiel erfinden können.
Anna schlägt vor:

> *„Wir denken uns eine Regel aus, sodass entweder du gewinnst oder ich. Der Gewinner erhält 1 Spiel Euro. Bei jedem Spielzug liegen alle Steine umgedreht auf dem Tisch. Ein Stein wird aufgedeckt und der Gewinner festgestellt. Anschließend wird der Stein wieder umgedreht, wir mischen die Steine und das Spiel geht weiter.“*

Ein Dominospiel besteht aus 55 unterschiedlichen Steinen (siehe Abbildung 1).

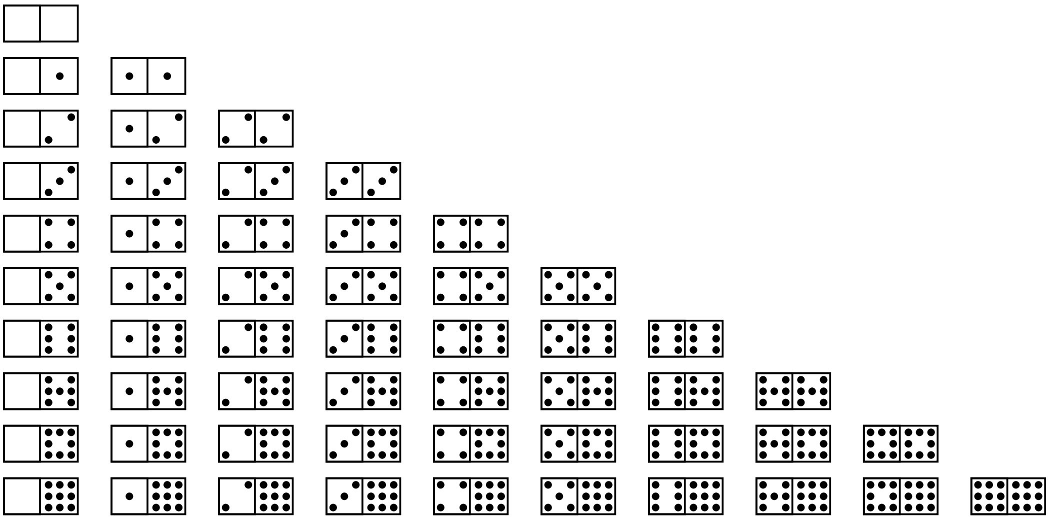


Abbildung 1: Dominosteine

a) Leo meint:

„Lass uns die Regel in Abhängigkeit von der Gesamtaugenzahl auf einem Stein aufstellen.“

Dazu benötigen sie die folgende Tabelle 1.

Gesamtaugenzahl	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Anzahl der Steine mit diesem Augenwert																			

Tabelle 1

Bestimme die jeweiligen Anzahlen und **trage** sie in die Tabelle **ein.** **(3 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2012): Beispielaufgaben für die schriftliche Überprüfung an Gymnasien - Klasse 10 Mathematik

b) Leo schlägt nun die folgende Spielregel vor:

„Hat der aufgedeckte Stein eine einstellige Augenzahl, gewinne ich. Sonst gewinnst du.“

Anna ist damit nicht einverstanden:

„Das Spiel ist nicht fair. Du würdest häufiger gewinnen als ich.“

Entscheide, ob Anna Recht hat. **(3 P)**

c) **Beurteile**, ob mit einer anderen Aufteilung der Steine zwischen Anna und Leo ein faires Spiel möglich ist. **(2 P)**

„Wir müssen den Gewinn verändern“
meint Anna.
„Ich schlage vor, dass du 40 Eurocent bekommst, wenn der aufgedeckte Stein eine einstellige Augenzahl hat, anderenfalls bekomme ich 60 Eurocent.“

d)
- **Beurteile** diesen Vorschlag unter dem Gesichtspunkt eines fairen Spiels.
- **Bestimme**, welcher Gewinn oder Verlust für Leo bei 50 Ziehungen zu erwarten ist. **(5 P)**

Anna und Leo haben sich einen neuen Gewinnplan ausgedacht. Diesmal wollen sie die Frage, ob das Spiel fair ist, nicht durch eine Rechnung beantworten, sondern durch die Durchführung von 50 Spielen.
Nachdem die beiden 50-mal entsprechend dem neuen Gewinnplan gespielt haben, hat Anna viel mehr Spielgeld als Leo.
„Damit haben wir gezeigt, dass unser neuer Gewinnplan nicht fair ist“
meint Leo.
„Das finde ich nicht“
sagt Anna,
„wir haben doch nur 50-mal gespielt. Wir hätten viel häufiger spielen müssen, damit sich die Gewinne und Verluste ausgleichen.“

e) **Entscheide**, wer Recht hat. **(3 P)**

f)
- **Bestimme** einen möglichen Gewinnplan für ein faires Spiel. Damit man viele Gewinnpläne entwickeln kann, wird eine Strategie benötigt.
- **Beschreibe** eine solche Strategie. **(6 P)**

3. Führerscheinprüfung [1] **Lösung S. 192**

In einer Fahrschule wird seit Jahren mit den Fahrschülern probehalber eine Vorprüfung durchgeführt, kurz bevor sie zur theoretischen Führerscheinprüfung ins Verkehrsamt gehen. Unabhängig davon, ob sie diese Vorprüfung bestanden haben oder nicht, können sie dann die theoretische Führerscheinprüfung im Verkehrsamt ablegen.
Ein Fahrlehrer hat die Ergebnisse der letzten Jahre von über 2 000 Fahrschülern als Prozentsätze gerundet in einer sogenannten Vierfeldertafel zusammengefasst:

	Theorieprüfung bestanden	Theorieprüfung nicht bestanden	Summe
Vorprüfung bestanden	76 %	14 %	90 %
Vorprüfung nicht bestanden	4 %	6 %	10 %
Summe	80 %	20 %	100 %

Tabelle 1

Der Fahrlehrer will diese Tabelle 1 nutzen, um seinen neuen Fahrschülern Anhaltspunkte zu geben für den Fall, dass sie sich weder besser noch schlechter vorbereiten als ihre Vorgänger.

a) **Gib** beispielhaft **an**, was der Eintrag 14 % in der ersten Zeile bedeutet. **(3 P)**

b) **Gib** in dem Baumdiagramm an den einzelnen Zweigen die Wahrscheinlichkeiten **an**.

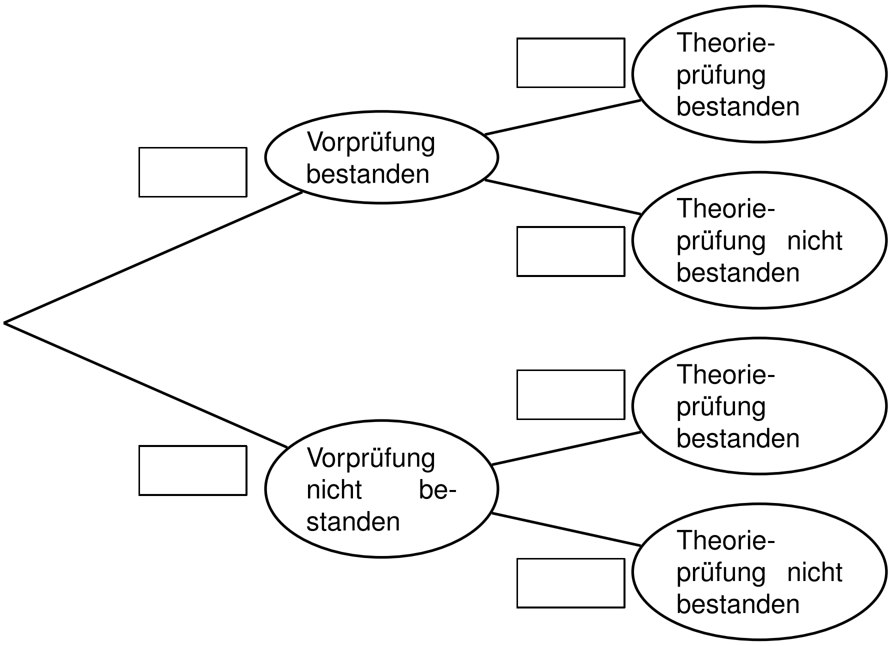


Abbildung 1

(6 P)

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2012): Beispielaufgaben für die schriftliche Überprüfung an Gymnasien - Klasse 10 Mathematik

c) **Bestimme** die Wahrscheinlichkeit, dass

(A) ein Fahrschüler, der die Vorprüfung besteht, die theoretische Führerscheinprüfung nicht besteht,

(B) ein Fahrschüler, der die Vorprüfung nicht besteht, die theoretische Führerscheinprüfung trotzdem besteht,

(C) ein Fahrschüler, der die theoretische Führerscheinprüfung nicht bestanden hat, schon vorher die Vorprüfung nicht bestanden hat.

(6 P)

d) Ein Fahrschüler, der die theoretische Führerscheinprüfung nicht bestanden hat und sie neu versuchen will, rechnet seinem Fahrlehrer vor:

„Die Wahrscheinlichkeit, nicht zu bestehen, ist 0,2; dann muss die Wahrscheinlichkeit, zweimal nicht zu bestehen, $0{,}2 \cdot 0{,}2$ *sein, und das sind* $0{,}04$*, also gerade mal 4 %.*
Meine Chance, dieses Mal die Prüfung zu bestehen, ist also 96 %!“

Begründe, dass der Fahrschüler nicht korrekt argumentiert. **(3 P)**

e) Zum nächsten Kurs haben sich 25 Fahrschüler neu angemeldet.

Die angenommenen Wahrscheinlichkeiten sollen alle unverändert gelten.

- **Bestimme** damit die Wahrscheinlichkeit, dass diesmal mindestens ein Fahrschüler die Vorprüfung nicht besteht.
- **Gib** auch eine Begründung für deine Rechnung **an**. **(4 P)**

4. Auf dem Jahrmarkt [1] **Lösung S. 195**

Das Riesenglücksrad *„Die rote Eins“* ist die besondere Attraktion des diesjährigen Jahrmarktes. Es besteht aus 36 gleich großen Feldern, die entweder blau oder rot sind und außerdem entweder mit der Zahl 1 oder der Zahl 0 gekennzeichnet sind.
Ein Drittel der Felder sind rot, acht der 36 Felder sind mit einer 1 gekennzeichnet.

a) **Ergänze** die folgende Tabelle mit Hilfe der obigen Angaben.

	0	1	gesamt
rot			
blau		6	
gesamt			

Tabelle 1

(5 P)

b) **Berechne** die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(A) bei einmaligem Drehen ein rotes Feld mit der Zahl 0 erscheint.

(B) bei zweimaligem Drehen beide Felder blau sind.

(C) bei zweimaligem Drehen einmal die 0 und einmal die 1 erscheint.

(6 P)

c) Für das Glücksspiel „Dreh

Die Rote Eins“ gelten für die Auszahlungen folgende Bedingungen:

Einsatz für einmaliges Drehen 2 €	
rotes Feld mit 1	10 €
blaues Feld mit 1	6 €
rotes Feld mit 0	1 €
blaues Feld mit 0	1 €

(6 P)

d) Der Glücksradbesitzer verändert das Glücksrad und ersetzt zwei blaue Felder mit 0 durch zwei grüne Felder mit jeweils einem Kleeblatt. Das Glücksrad darf zweimal gedreht werden. Ein Jahrmarktsbesucher behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit bei zweimaligem Drehen mindestens einmal das grüne Feld mit einem Kleeblatt zu erhalten, kleiner als 5 % ist.

Überprüfe die Behauptung rechnerisch und **begründe**. **(5 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2012): Beispielaufgaben für die schriftliche Überprüfung an Gymnasien - Klasse 10 Mathematik

5. Lotterie [1] Lösung S. 196

Eine Klasse möchte auf dem Schulfest eine Lotterie durchführen. Dafür verwenden sie fünf Holzplättchen, auf denen je eine der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 steht (siehe Abbildung).
Diese fünf Plättchen werden nacheinander ohne Zurücklegen aus einer Lostrommel gezogen und in der gezogenen Reihenfolge hintereinander gelegt. Sie bilden dann eine fünfstellige Zahl.

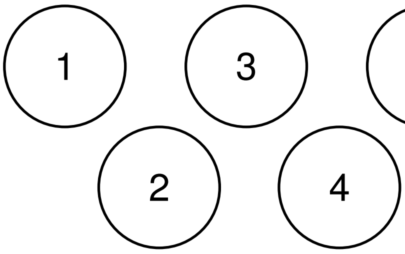


Abbildung 1

a) **Bestimme** die Anzahl der möglichen Zahlen, die gezogen werden können.
(Zur Kontrolle: 120) **(2 P)**

Die Schülerinnen und Schüler stellen dazu nun 1 200 Lose her, auf denen je eine der 120 möglichen Zahlen als Losnummer gedruckt wird. Sie machen das so, dass insgesamt jede Losnummer genau 10 – mal vorkommt (siehe Abbildung 2).

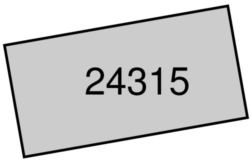


Abbildung 2: Beispiel-Los

Im Laufe des Schulfestes sollen die Lose verkauft werden. Zu einem geeigneten Zeitpunkt findet danach die „Ziehung“ statt, wobei mit den fünf Plättchen – wie beschrieben – die Gewinnzahl gezogen wird.
Die Klasse überlegt sich einen „Gewinnplan“, der als Plakat überall ausgehängt werden soll (siehe Abbildung 3 in der Anlage).

b) **Bestimme** die Wahrscheinlichkeit für den Käufer Tim eines einzigen Loses, dass

(A) er einen Büchergutschein gewinnt.
(B) eine Überraschungsbox gewinnt
(C) er überhaupt etwas gewinnt. **(8 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2012): Beispielaufgaben für die schriftliche Überprüfung an Gymnasien - Klasse 10 Mathematik

Die Schüler planen ein einzelnes Los für 0,50 € zu verkaufen. Material und Druckkosten betragen insgesamt 12 €.
Die Kugelschreiber sind als Werbegeschenk von einem Elternvertreter gestiftet worden.Für eine Überraschungsbox kalkulieren die Schüler 2 € ein und für den Büchergutschein 30 €.

c)
- **Berechne**, wie viel Geld die Schüler bei ihrer Kalkulation übrig behalten werden, wenn sie alle 1 200 Lose verkaufen.
- Bei der staatlichen Lotterie müssen mindestens 50 % der Einnahmen für Gewinne ausgegeben werden.

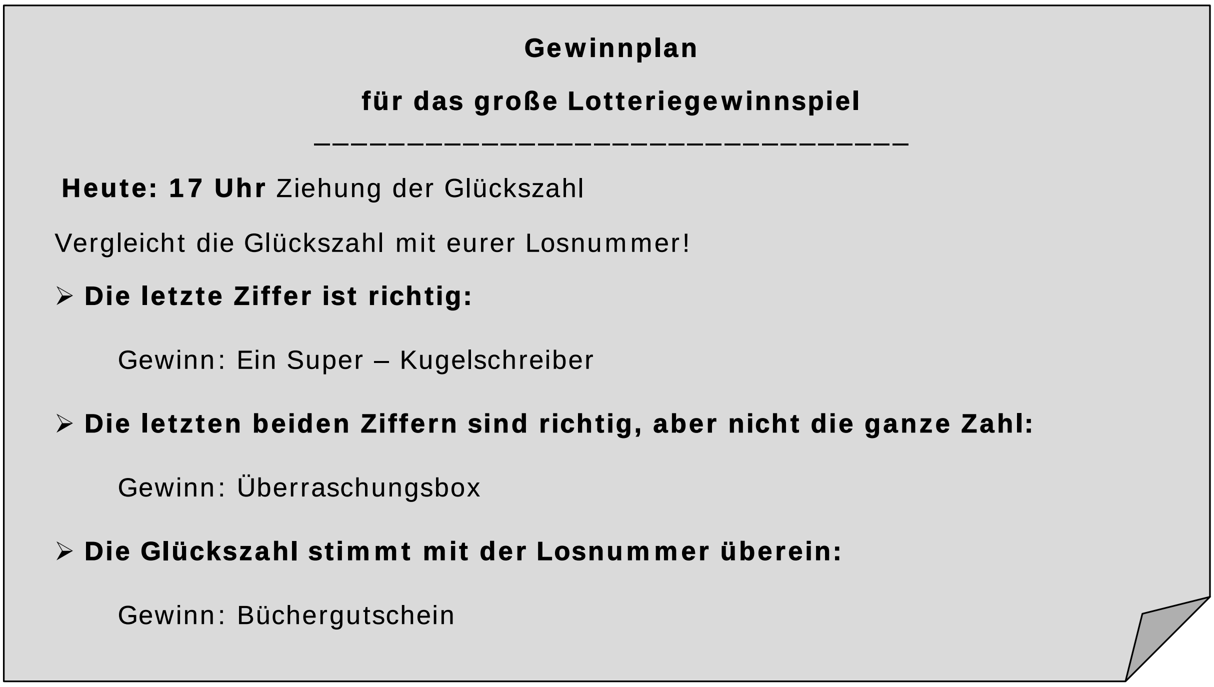
  Entscheide, ob das bei der hier betrachteten Lotterie der Fall ist. **(7 P)**

d) **Bestimme**, wie viel Geld die Schüler bei ihrer Kalkulation mindestens übrig behalten werden und wie viel höchstens, wenn sie nur 1 000 Lose verkaufen werden.

Hinweis: Gutscheine für nicht vergebene Preise brauchen auch nicht bezahlt zu werden.

(5 P)

Anlage zur Aufgabe „Lotterie“



Gewinnplan

für das große Lotteriegewinnspiel

Heute: 17 Uhr Ziehung der Glückszahl

Vergleicht die Glückszahl mit eurer Losnummer!

➢ **Die letzte Ziffer ist richtig:**

Gewinn: Ein Super – Kugelschreiber

➢ **Die letzten beiden Ziffern sind richtig, aber nicht die ganze Zahl:**

Gewinn: Überraschungsbox

➢ **Die Glückszahl stimmt mit der Losnummer überein:**

Gewinn: Büchergutschein

Abbildung 3

6. Mensch ärgere dich nicht [1] Lösung S. 197

Die Spielfigur *B* ist am Zug. Gehe davon aus, dass sie auch beim Werfen einer 6 bewegt wird.

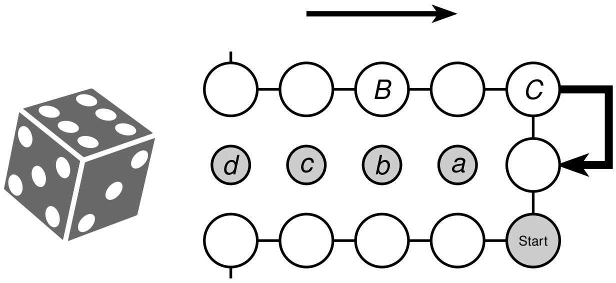


Abbildung 1

a) **Bestimme** die Wahrscheinlichkeit, dass die Spielfigur *B* beim nächsten Wurf

(A) in das Haus, d. h. auf die Felder *a*, *b*, *c* oder *d*, gelangt,

(B) weder die andere Spielfigur *C* schlägt, noch in das Haus gelangt. **(4 P)**

Beim Spielbeginn braucht man eine Sechs, um eine Figur auf das Startfeld stellen zu können. Hat man keine Figur im Feld, so hat man drei Versuche, um eine Sechs zu würfeln. Bekommt man dabei wieder keine Sechs, muss man bis zur nächsten Runde warten.

b) Felix hat im ersten Wurf eine Zwei gewürfelt, im zweiten Wurf eine Fünf.

Gib an, mit welcher Wahrscheinlichkeit er im dritten Wurf eine Sechs würfelt. **(2 P)**

c) Wenn man „Glück hat“, kann man in der ersten Runde (also mit höchstens drei Würfen) seine Figur auf das Startfeld stellen.

- **Beschreibe** die Situation durch ein Baumdiagramm.
- **Bestimme** die Wahrscheinlichkeit dafür, „Glück zu haben“.
- **Interpretiere** „Glück haben“ mithilfe deines Ergebnisses. **(9 P)**

d) Felix hat es schon drei Runden lang nicht geschafft, eine Figur auf das Spielfeld zu bekommen. Den Tränen nahe sagt er:

> *„Das ist so unfair! Das passiert nur in jedem tausendsten Fall, und ausgerechnet bei mir muss das passieren!“*

Entscheide, ob Felix Recht hat. **(3 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2012): Beispielaufgaben für die schriftliche Überprüfung an Gymnasien - Klasse 10 Mathematik

e) Seine Schwester Miriam antwortet:

„Ach was, hab‘ dich doch nicht so!
Schau, wir sind vier Spieler, und da muss man schon davon ausgehen, dass einer von ihnen im ersten Durchgang nicht rauskommt.“

Beurteile Miriams Argumentation und **vergleiche** sie mit der von Felix. **(4 P)**

7. Teilzeitarbeit [1] **Lösung S. 199**

Teilzeitarbeit ist ein neues heutzutage stark diskutiertes Problem unserer Gesellschaft. Derzeit sind nur noch ca. 70 % aller Berufstätigen vollzeitbeschäftigt (Stand: 2018[2]).
Obwohl mehr Männer als Frauen berufstätig sind (52 % der Berufstätigen sind Männer), ist von den Teilzeitbeschäftigten lediglich jeder 5. ein Mann.
Leon behauptet:

> *„Sechs von sieben berufstätigen Frauen sind teilzeitbeschäftigt. Von den berufstätigen Männern dagegen arbeiten etwa 11 % in Teilzeit.“*

a) **Ergänze** die folgende Tabelle mit Hilfe der obigen Angaben.

	Geschlecht		
	weiblich (w)	männlich (m)	gesamt
vollzeitbeschäftigt (v)			
teilzeitbeschäftigt (t)		6 %	
gesamt			

(4 P)

b) **Gib** die Wahrscheinlichkeit dafür **an**, dass

(A) ein zufällig ausgewählter berufstätiger Mann vollzeitbeschäftigt ist,
(B) zwei zufällig ausgewählte Teilzeitbeschäftigte beide Frauen sind,
(C) zwei zufällig ausgewählte berufstätige Frauen beide teilzeitbeschäftigt sind. **(6 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2012): Beispielaufgaben für die schriftliche Überprüfung an Gymnasien - Klasse 10 Mathematik

[2] Quelle: `https://www.bpb.de/nachschlagen/zahlen-und-fakten/soziale-situation-in-deutschland/61705/voll-und-teilzeitbeschaeftigte`, Zugriff vom 27.02.2020

c) **Beschrifte** die Zweige der beiden zur Vierfeldertafel aus a) gehörenden Baumdiagramme mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

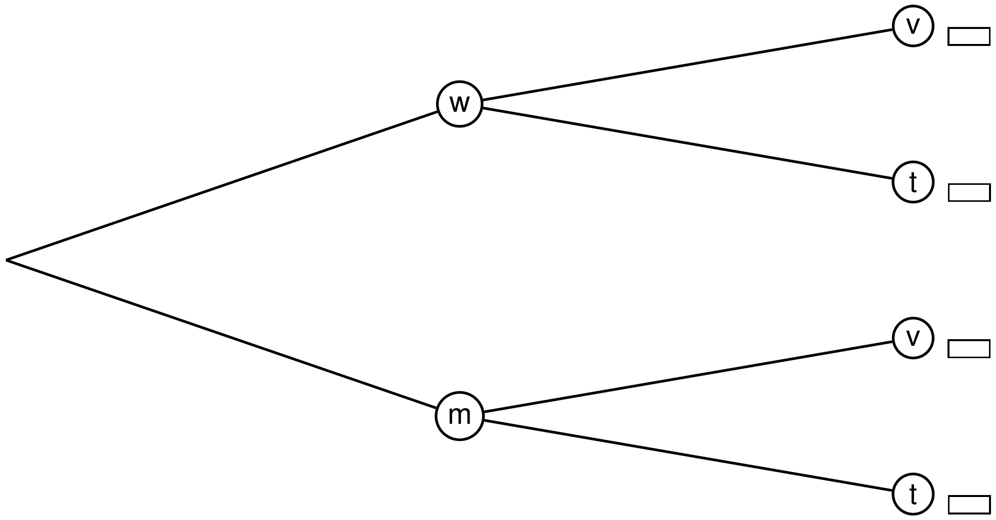


Abbildung 1: Baumdiagramm 1

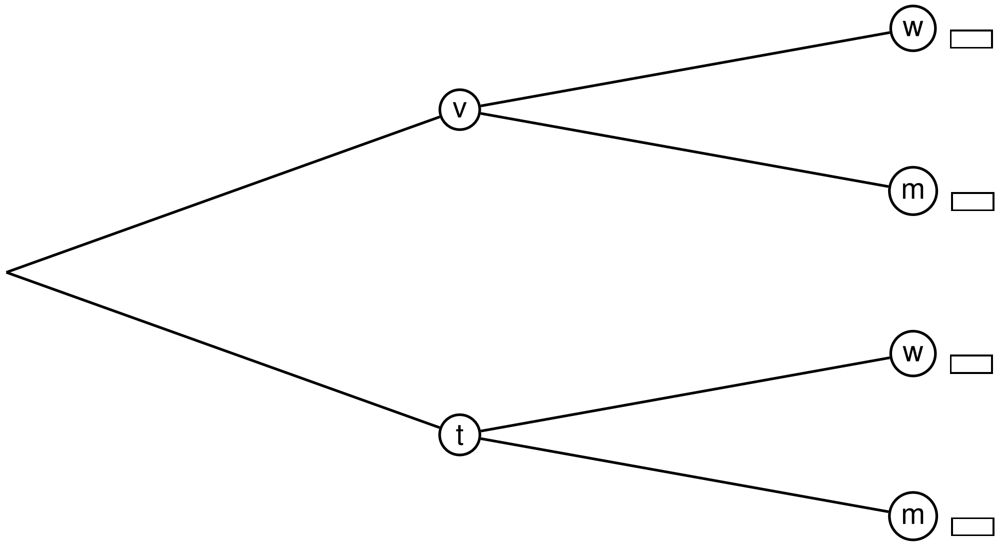


Abbildung 2: Baumdiagramm 2

(8 P)

d) **Beurteile** die beiden Aussagen von Leon. **(4 P)**

8. Parkplatz [1] **Lösung S. 200**

In einer Kleinstadt mit historischem Stadtkern befindet sich nahe am Zentrum ein gebührenpflichtiger Parkplatz. Den Bürgern dieser Kleinstadt ist bekannt, dass nur sehr selten kontrolliert wird, ob ein Parkticket gelöst wurde, deswegen parken auch 75 % von ihnen ohne zu bezahlen. 40 % der Parkplatznutzer sind nicht aus dieser Stadt und kennen die geringe Kontrollquote nicht, so dass von diesen 90 % ein Parkticket lösen. Diese Zahlen stammen aus mehrjährigen Beobachtungen und können als Wahrscheinlichkeiten betrachtet werden.

a) **Bestätige**, dass der Anteil aller Parkplatznutzer, die ein Parkticket lösen, 51 % beträgt. **(4 P)**

b) **Berechne** die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Kontrolle von zwei zufällig ausgewählten Autos

(A) beide ein Parkticket haben.
(B) genau ein Auto ein Parkticket hat.
(C) mindestens eines kein Parkticket hat. **(6 P)**

Es stehen gerade 400 Autos auf dem Parkplatz.

c) **Bestimme** die erwartete Anzahl von Autos, deren Fahrer nicht aus dieser Stadt kommen und kein Parkticket lösen. **(3 P)**

Eine Kontrolle ergibt, dass ein Auto auf dem Parkplatz parkt, ohne dass ein Parkticket gelöst wurde.

d) **Bestimme** die Wahrscheinlichkeit, dass der Fahrer nicht aus dieser Stadt stammt. **(3 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2011): schriftliche Überprüfung Klasse 10 Mathematik, Haupttermin

Durchschnittlich parken 800 Autos täglich auf dem Parkplatz und die durchschnittliche Parkdauer beträgt zwischen einer und zwei Stunden. Pro angefangene Stunde kostet das Parkticket 2 €.

e)
- Es lösen alle Autofahrer ein Parkticket.

  Bestimme, welche durchschnittlichen Einnahmen die Stadt als Betreiber aus diesem Parkplatz täglich erzielen.
- **Bestimme** die erwarteten täglichen Einnahmen, beim oben tatsächlich beschirebenen Parkverhalten.

(Zur Kontrolle: Wenn alle eine Parkticket lösen, nimmt die Stadt 3200 € ein, ansonsten 1632 €.) **(4 P)**

f) **Beurteile**, ob sich die Einstellung und der Einsatz eines Kontrolleurs, der ausschließlich diesen Parkplatz kontrolliert, lohnen würden für die Stadt. **(2 P)**

9. Basketball [1] **Lösung S. 201**

Beim Basketball erhält man für einen Korbtreffer 2 Punkte, wenn man von innerhalb der 2-Punkte-Zone geworfen hat, und 3 Punkte, wenn man von außerhalb dieser Zone geworfen hat.

Eine Basketball-Bundesliga-Mannschaft hatte während der Saison 2011/2012 folgende Wurfstatistik:

	2-Punkte-Versuch	3-Punkte-Versuch	Gesamt
Treffer	709	274	983
Fehlwurf	607	453	1 060
Gesamt	1 319	727	2 043

Für die folgenden Aufgaben werden die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten betrachtet.

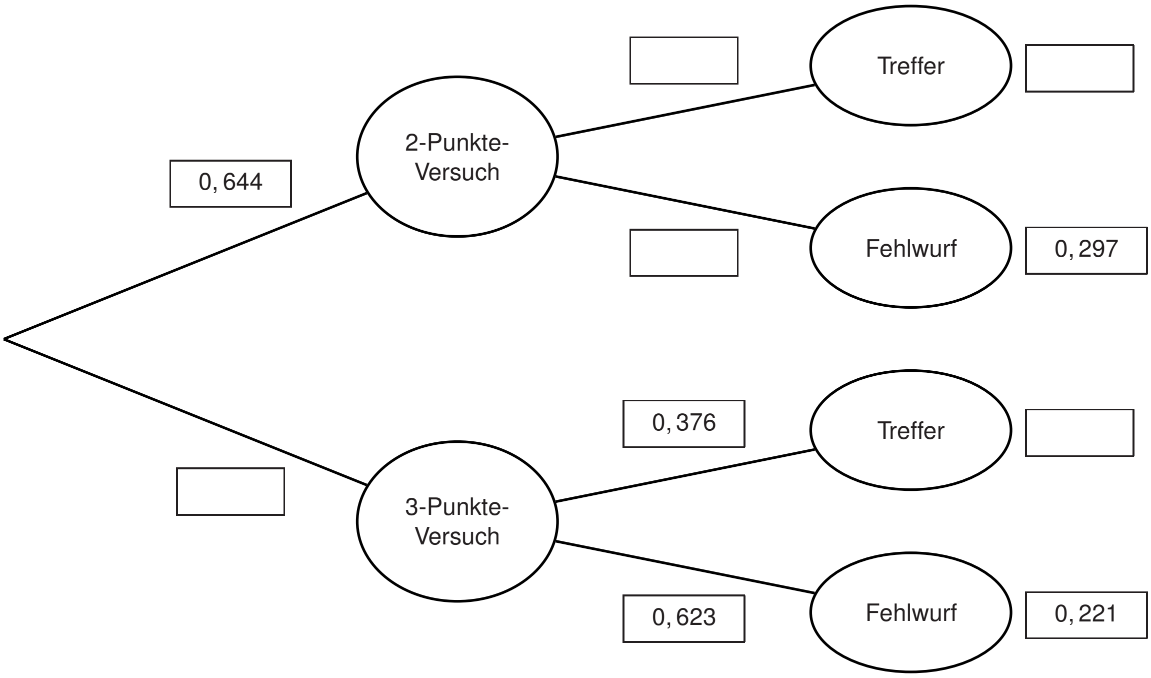


Abbildung 1

a) **Vervollständige** das Baumdiagramm in der Abbildung 1 mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. **(5 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2013): schriftliche Überprüfung Klasse 10 Mathematik, Haupttermin

b) **Berechne**, mit welcher Wahrscheinlichkeit

(A) ein zufällig ausgewählter Wurf ein 3-Punkte-Fehlwurf ist.

(B) es sich um einen Wurf aus der 2-Punkte-Zone handelt, wenn es ein Fehlwurf ist.

(C) vier Würfe aus der 2-Punkte-Zone in Folge erfolgreich sind – also zu 8 erzielten Punkten führen.

(D) vier Würfe aus der 2-Punkte-Zone in Folge zu weniger als 8 Punkten führen. **(10 P)**

c) **Bestimme** die durchschnittliche Punktezahl pro Wurf. **(3 P)**

Der Trainer möchte vor dem letzten Saisonspiel die Mannschaft so trainieren, dass sie möglichst viele Punkte erzielt. Er hat zwei Trainingsprogramme zur Auswahl:

- Bei Programm *A* erhöht sich die Zwei-Punkte-Trefferquote auf 60 Prozent, die Drei-Punkte-Trefferquote bleibt im Vergleich zu vorher gleich.
- Bei Programm *B* erhöht sich die Drei-Punkte-Trefferquote auf 40 Prozent, die Zwei-Punkte-Trefferquote bleibt im Vergleich zu vorher gleich.

Die Verteilung der 2- und 3-Punkte-Versuche bleibt in beiden Fällen gleich.

d) **Beurteile**, welches der beiden Trainingsprogramme besser geeignet ist. **(4 P)**

10. Hörtest [1] Lösung S. 203

Kleine Kinder werden kurz nach der Geburt darauf getestet, ob sie gut hören können oder ob die Hörfähigkeit beeinträchtigt ist. Da die Kinder noch nicht direkt antworten können, treten teilweise falsche Ergebnisse auf. Die Ergebnisse für 500 000 Kinder sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

	Hörproblem	kein Hörproblem	Summen
Test zeigt Hörproblem	989	49 900	50 889
Test zeigt kein Hörproblem	11	449 100	449 111
Summen	1 000	499 000	500 000

Tabelle 1

a) **Verrvollständige** mithilfe der Tabelle 1 die fehlenden Werte im Baumdiagramm in der Abbildung 1 in der Anlage. **(6 P)**

b) **Begründe** mithilfe der Zahlen aus der obigen Vierfeldertafel, dass Eltern, bei dessen Kind der Test ein Hörproblem anzeigte, sich trotzdem keine großen Sorgen wegen eines Hörproblems machen müssen. **(4 P)**

Die Einschätzung der Ergebnisse des Tests ist mithilfe des „umgekehrten“ Baumdiagramms deutlich einfacher (siehe Abbildung 2 in der Anlage).
Drei Kinder, die zufällig im gleichen Zimmer liegen, werden untersucht.

c) **Berechne** die Wahrscheinlichkeit, dass

(A) bei allen drei Kindern der Hörtest kein Problem zeigt,

(B) bei mindestens einem Kind der Hörtest ein Problem zeigt,

(C) bei allen drei Kindern der Hörtest ein Problem zeigt und alle drei Kinder kein Hörproblem haben. **(6 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2013): schriftliche Überprüfung Klasse 10 Mathematik, Zweittermin

Wenn der Test ein Hörproblem ergibt, wird er wiederholt. Es kommen aber nur diejenigen Kinder zum zweiten Test, bei denen der erste Test ein Hörproblem ergeben hat. Dabei ist davon auszugehen, dass die beiden Tests unabhängig voneinander sind und der Test die gleichen Anteile an richtigen und falschen Diagnosen liefert wie der erste Test.

d)
- **Ermittle** die entsprechenden Zahlen für die vollständige Vierfeldertafel in der Tabelle 2 in der Anlage.

  Trage sinnvoll gerundete Zahlen ein.
- **Bestimme** den Anteil der Kinder mit Hörproblemen von allen Kindern, bei denen der zweite Test ein Hörproblem angezeigt hat. **(6 P)**

Anlage zur Aufgabe „Hörtest“

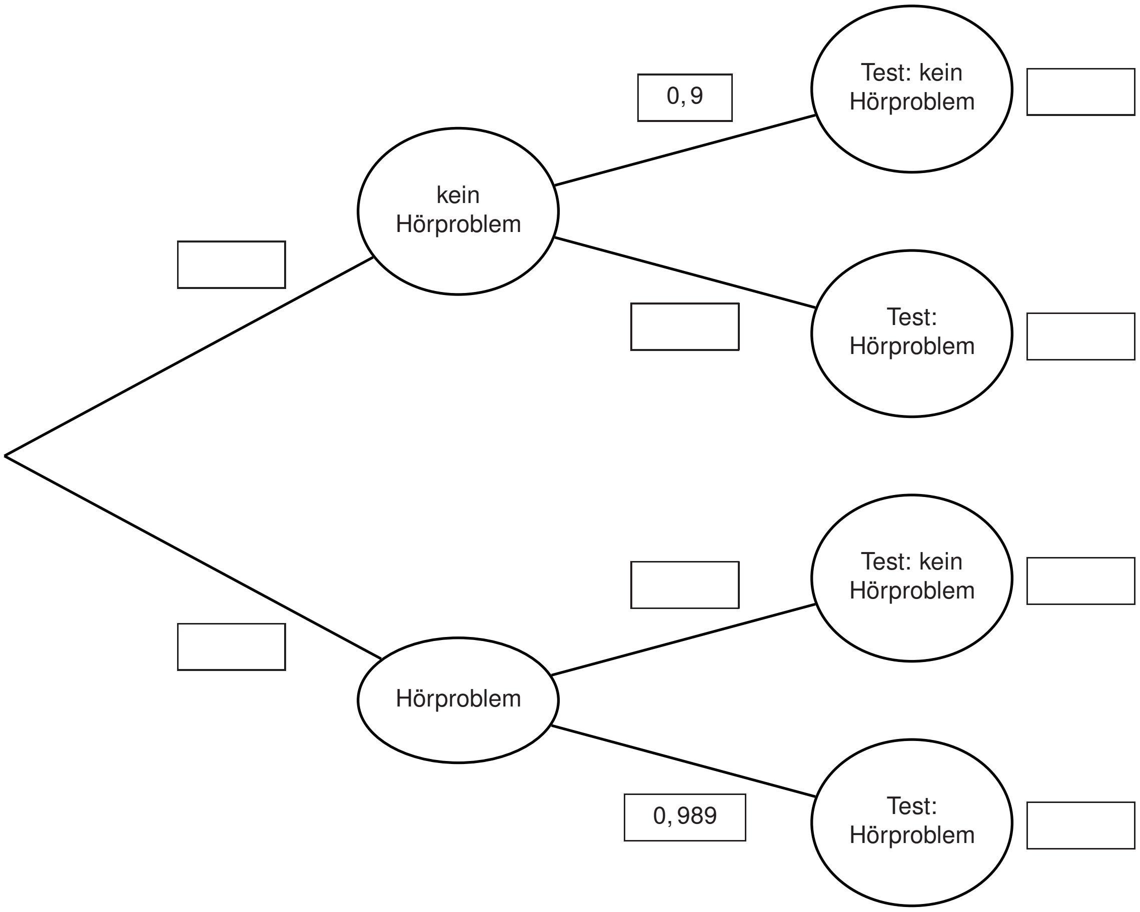


Abbildung 1: Baumdiagramm

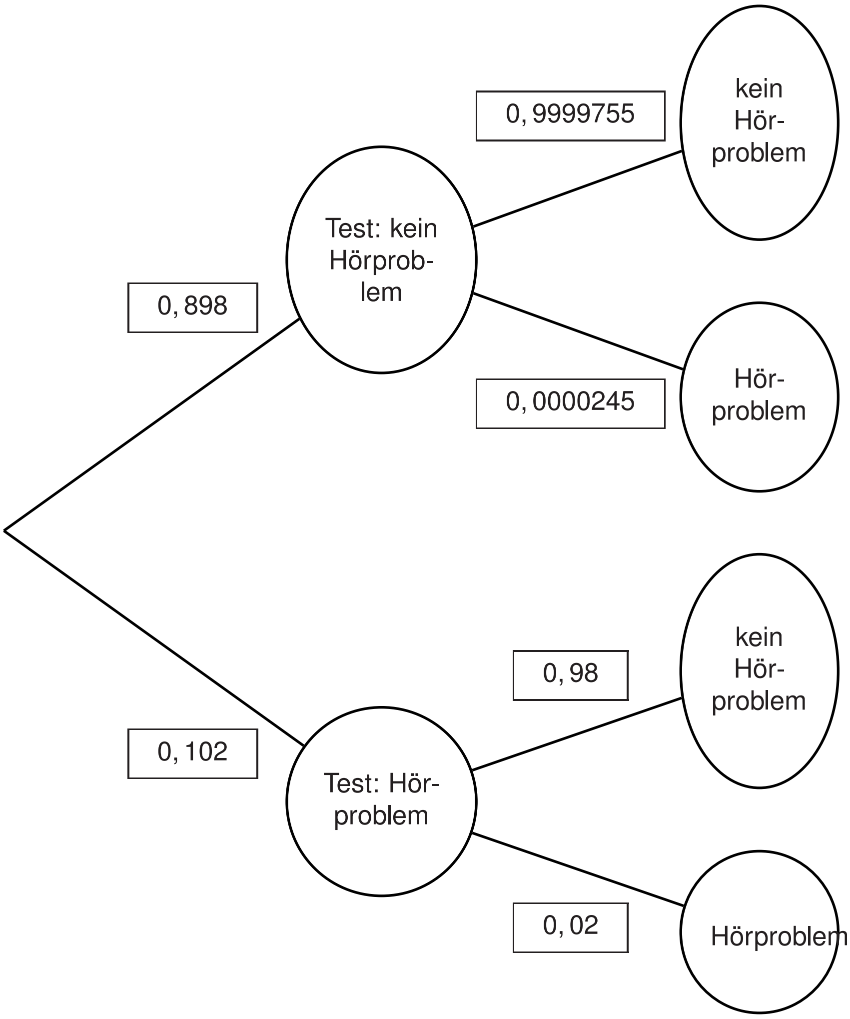


Abbildung 2: umgekehrtes Baumdiagramm

2. Test	Hörproblem	kein Hörproblem	Summen
Test zeigt Hörproblem			
Test zeigt kein Hörproblem			
Summen	989	49 900	50 889

Tabelle 2: Vierfeldertafel für Aufgabenteil d)

11. Marketing für Trek Wars 7 [1] Lösung S. 204

Der neue Science-Fiction-Film Trek Wars 7 (kurz TW 7) soll in die Kinos kommen. Um die benötigten Kinosäle planen zu können, werten Experten zunächst die Daten einer Internetumfrage auf einer allgemeinen Kino-Website aus. Wegen einer Datenpanne ist der Datensatz nicht mehr vollständig erhalten.

	TW-Fan	Nicht-TW-Fan	Gesamt
Hat schon von TW 7 gehört	2 481		
Hat noch nicht von TW 7 gehört		4 958	
Gesamt	3 219		10 730

Tabelle 1

a) Ergänze die in der obigen Vierfeldertafel zusammengetragenen Daten. **(5 P)**

Die Daten sollen nun zur Auswertung in ein Baumdiagramm überführt werden, das die relativen Häufigkeiten unter den Teilnehmern der Internetumfrage darstellt (siehe Abbildung 1 in der Anlage).

b) Berechne die im Baumdiagramm (siehe Abbildung 1 in der Anlage) fehlenden relativen Häufigkeiten als Dezimalzahlen mit drei Nachkommastellen und trage sie dort ein. **(6 P)**

Die Experten gehen davon aus, dass die Daten vom Kinoportal auf die Bevölkerung in Deutschland übertragbar sind.

Zur Planung der Kinosäle wird eine zweite Umfrage unter den Menschen ausgewertet, die schon von TW 7 gehört haben. Sie ergibt, dass von den TW-Fans 74 % beabsichtigen, den Film anzuschauen. Bei Nicht-TW-Fans aus der zweiten Umfrage, beabsichtigen dagegen lediglich 29 %, den Film anzuschauen. Erfahrungsgemäß gehen Personen, die von dem Film zu diesem Zeitpunkt noch nicht gehört haben, auch nicht in den Film.

Aus dem Datensatz der zweiten Umfrage werden fünf TW-Fans zufällig ausgewählt.

c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, mit der

(A) alle fünf TW-Fans vorhaben, in den Film zu gehen.

(B) mindestens einer von den fünf TW-Fans nicht vor hat, in den Film zu gehen.

(C) höchstens einer der fünf TW-Fans vorhat, in den Film zu gehen. **(6 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2014): schriftliche Überprüfung Klasse 10 Mathematik, Haupttermin

d) **Bestimme** rechnerisch den Anteil an der Bevölkerung in Deutschland, von dem im Rahmen der hier genannten Daten zu erwarten ist, dass er den Film sehen wird.

Hinweis: Man kann das vorhandene Baumdiagramm ergänzen. **(5 P)**

Anlage zur Aufgabe „Marketing für Trek Wars 7“

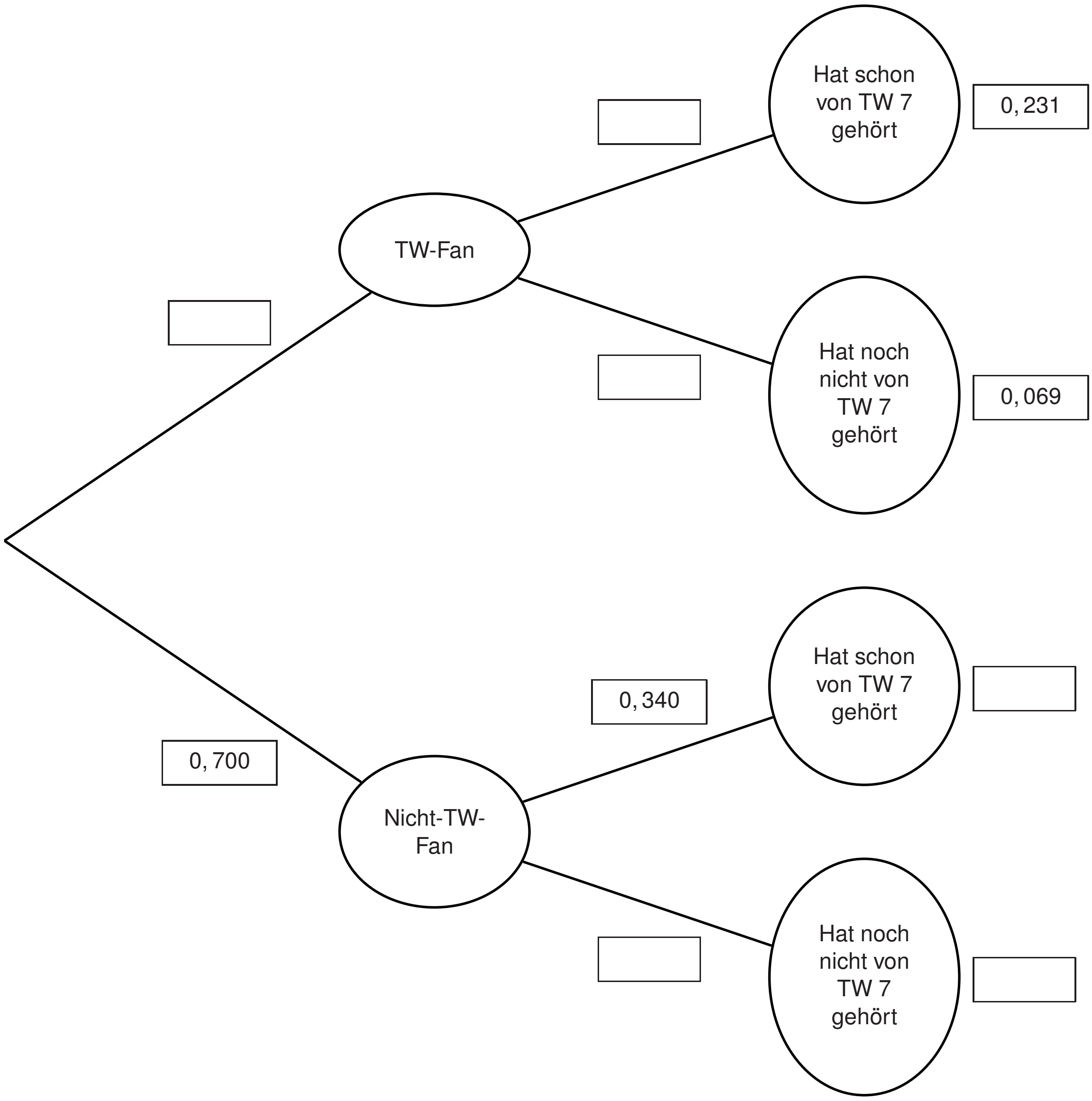


Abbildung 1: Baumdiagramm zu den Aufgabenteilen b) und d)

12. Bluffen beim Poker [1] Lösung S. 206

Große Poker-Turniere werden oft im Fernsehen übertragen. Dabei werden die verdeckten Karten der Spieler mit Hilfe einer Kamera für den TV-Zuschauer sichtbar gemacht. Der Pokerspieler Tom nimmt an solch einem Poker-Turnier teil. Um seine Chancen zu verbessern, schaut er sich später die TV-Aufzeichnungen der Vorrunden an. Er möchte das Bluffverhalten von männlichen und weiblichen Pokerspielern studieren.

> Anmerkung: Das **Bluffen** ist ein Verhalten beim Kartenspiel mit dem Zweck, die Gegner zum eigenen Vorteil in die Irre zu führen. Der Bluffer erweckt durch sein Verhalten den Eindruck, seine Karten seien besser, als es tatsächlich der Fall ist.
>
> Quelle: Wikipedia, leicht verändert

In den folgenden Aufgaben werden die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten betrachtet.

a)
- **Vervollständige** die Vierfeldertafel in der Tabelle 1 in der Anlage mit den fehlenden absoluten Häufigkeiten sowie das Baumdiagramm in der Anlage mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.
- **Nenne** die Bedeutung des Wertes 0,008 (siehe Abbildung 2 in der Anlage) im Sachkontext der Aufgabe. **(7 P)**

b) **Bestätige** anhand der gegebenen Daten, dass ein zufällig ausgewählter Spieler
- mit der Wahrscheinlichkeit von 6,3 % weiblich ist.
- mit der Wahrscheinlichkeit von 8,4 % männlich ist und blufft. **(4 P)**

Tom hat die Endrunden des Turniers erreicht. Er sitzt nun an einem Pokertisch, an dem sechs Männer im Spiel sind. Er selbst ist einer von ihnen. Im Folgenden geht er davon aus, dass er die Informationen der Vorrunde auf die Endrunde übertragen kann und versucht damit das Verhalten der anderen fünf Spieler vorherzusagen.

c) **Berechne**, mit welcher Wahrscheinlichkeit von fünf zufällig ausgewählten Pokerspielern
(A) keiner blufft.
(B) mindestens einer blufft.
(C) genau vier nicht bluffen. **(6 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2017): schriftliche Überprüfung Klasse 10 Mathematik, Haupttermin

Bei einem späteren Spiel sitzt Tom nur noch mit einem Mann und einer Frau am Pokertisch. Er erinnert sich an seine Untersuchungen und sagt sich:

„Frauen sind beim Pokern ehrlicher als Männer, da viel weniger Frauen bluffen.“

Er erinnert sich allerdings auch an eine Aussage seiner Freundin Lilly, die ebenfalls Pokerspielerin ist und sich viele Pokerspiele im Fernsehen angesehen hat. Sie behauptet:

„Wenn ich hier einen Bluff sehe, so ist es wahrscheinlich die Frau, die blufft.“

d) **Entscheide** begründet, ob die jeweiligen Behauptungen richtig sind. **(5 P)**

Anlage zur Aufgabe „Bluffen beim Poker“

	weiblich	männlich	Gesamt
Bluff		549	601
kein Bluff	359		
Gesamt	411	6 109	6 520

Abbildung 1: Vierfeldertafel

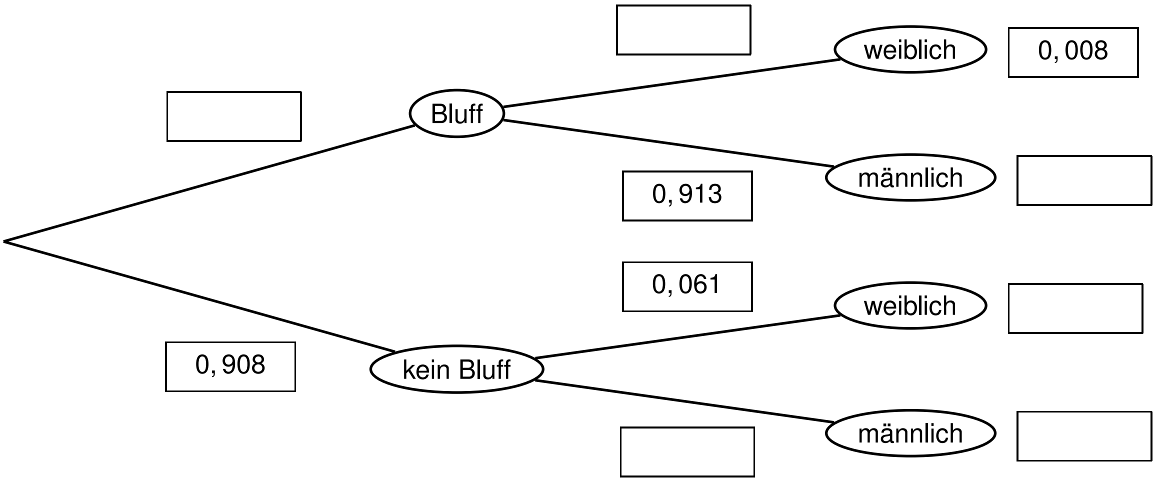


Abbildung 2: Baumdiagramm zum Bluffverhalten weiblicher und männlicher Teilnehmer.

13. Verkaufsstrategie des Computerspiels [1] Lösung S. 207

Die Firma Sgames möchte ihr neues Computerspiel mit folgender Strategie verkaufen:

> *Grundsätzlich ist das Spiel kostenlos, allerdings gibt es regelmäßige Werbeeinblendungen anderer Firmen, mit deren Hilfe die Firma Geld verdient. Spieler, die das stört, können einmalig 10 € bezahlen, womit die Werbung in Zukunft ausgeschaltet wird.*

Die Marketingabteilung schätzt, dass im ersten Monat nach Veröffentlichung etwa 3 000 000 Menschen das Spiel installieren werden. 42 % davon werden weiblich sein. Die Marketingabteilung geht außerdem davon aus, dass 3 % der Spieler und 7 % der Spielerinnen 10 € bezahlen werden, um die im Spiel eingeblendete Werbung abzuschalten.
Die bisherigen Informationen sind in der folgenden Vierfeldertafel enthalten.

	männlich	weiblich	gesamt
Zahlt 10 € für das Abschalten der Werbung			
Zahlt nicht für das Abschalten der Werbung			2 859 600
gesamt			3 000 000

Tabelle 1: Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten für den ersten Verkaufsmonat

Die sich aus den absoluten Häufigkeiten ergebenden relativen Häufigkeiten sollen als Wahrscheinlichkeiten gedeutet werden.

a) **Vervollständige** die Vierfeldertafel in der Tabelle 1. **(7 P)**

b) **Berechne** die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Spieler, dessen Geschlecht nicht bekannt ist, nicht für das Abschalten der Werbung bezahlen wird. **(2 P)**

Ein neuer Mitarbeiter überlegt, ob die Firma Sgames mit diesem Konzept Geld verdienen kann. Für seine Berechnung nimmt er an, dass aus einer Gruppe von Spielerinnen und Spielern fünf beliebige Personen ausgewählt werden.

c) **Berechne**, mit welcher Wahrscheinlichkeit ...

... alle fünf Personen nicht für das Abschalten der Werbung bezahlen werden.

... mindestens eine dieser fünf Personen 10 € für das Abschalten der Werbung bezahlen wird.

Gib diese Wahrscheinlichkeiten in Prozent **an**. **(4 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2018): schriftliche Überprüfung Klasse 10 Mathematik, Haupttermin

Die Entwicklungskosten für das Computerspiel betrugen 825 000 €.
60 % der Einnahmen über das Abschalten der Werbung gehen an die Firma SGames.

d) **Beurteile**, ob die Entwicklungskosten nach den Schätzungen der Marketingabteilung bereits nach einem Monat gedeckt sein könnten. **(4 P)**

Eine Marketingkampagne soll die Einnahmen durch das Bezahlen von 10 € für das Abschalten der Werbung steigern. Zwei Strategien werden diskutiert, deren Wirkungen die Marketingexperten wie folgt abschätzen:

Strategie *A*:

Durch die Werbung für das Computerspiel werden gezielt Frauen angesprochen. Damit soll, bei gleichbleibender Gesamtzahl von Spielerinnen und Spielern der Frauenanteil auf 56 % steigen.

Die Abschaltquoten der Werbung im Spiel ändern sich nicht.

Strategie *B*:

Die Werbung für das Computerspiel wird so gestaltet, dass beide Geschlechter angesprochen werden.

Dadurch soll sich die Gesamtzahl der Spielerinnen und Spielern erhöhen, so dass im ersten Monat mit einer Gesamtzahl von 3 300 000 gerechnet wird.

Das Verhältnis von Spielerinnen zu Spielern und die Abschaltquoten der Werbung im Spiel ändern sich aber nicht.

e) **Entscheide**, welche Marketingstrategie die vielversprechendere ist, wenn man nur den Umsatz durch das Abschalten der Werbung berücksichtigt. **(5 P)**

14. Vorliebe für Schokolade [1] Lösung S. 209

Ein Meinungsforschungsinstitut soll im Auftrag eines Schokoladenherstellers untersuchen, ob Kinder mit Geschwistern lieber Schokolade mögen als Einzelkinder. Dazu wurden an mehreren Schulen insgesamt 2500 Schülerinnen und Schüler unter 14 Jahren gefragt, ob sie Einzelkinder sind und ob sie eine Vorliebe für Schokolade haben, d.h. ob sie Schokolade lieber als andere Süßigkeiten mögen. Ein Teil der Daten wurde in der folgenden Tabelle festgehalten:

	Vorliebe für Schokolade	Keine Vorliebe für Schokolade	Gesamt
Einzelkind	380	490	870
Kein Einzelkind			
Gesamt	1 110		2 500

Tabelle 1

In den folgenden Aufgaben werden die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten betrachtet.
Zu der Tabelle gehört das folgende Baumdiagramm:

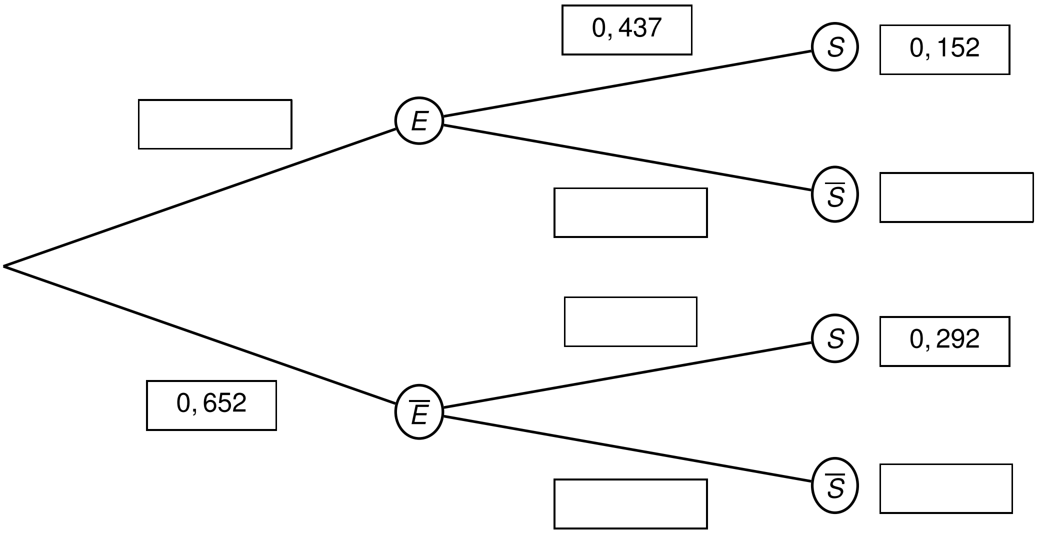


Abbildung 1: Baumdiagramm mit den Abkürzungen:
E: Einzelkind
$\overline{E}$: kein Einzelkind
S: Vorliebe für Schokolade
$\overline{S}$: Keine Vorliebe für Schokolade

a)
- **Vervollständige** die obige Vierfeldertafel und das Baumdiagramm in der Abbildung 1.
- **Nenne** die Bedeutung des Wertes 0,152 im Baumdiagramm. **(7 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2019): schriftliche Überprüfung Klasse 10 Mathematik, Haupttermin

b) **Bestätige** rechnerisch, dass ein zufällig ausgewähltes Kind mit einer Wahrscheinlichkeit von 44,4 % eine Vorliebe für Schokolade hat. **(2 P)**

c) **Bestimme** die Wahrscheinlichkeit, mit der

(A) ein zufällig ausgewähltes Kind ein Einzelkind ist und keine Vorliebe für Schokolade hat.

(B) ein zufällig ausgewähltes Kind, das angibt, eine Vorliebe für Schokolade zu haben, ein Einzelkind ist.

(C) von drei zufällig ausgewählten Kindern keines ein Einzelkind ist. **(6 P)**

d) **Interpretiere** die Bedeutung des Terms $1 - (0{,}444)^5$ im Sachkontext. **(3 P)**

Der Leiter der Werbeabteilung des Schokoladenherstellers wirft einen Blick auf die Daten und meint:

„ Die Sache ist ganz klar. Einzelkinder bevorzugen häufiger Schokolade als Kinder mit Geschwistern!“

e) **Beurteile** seine Aussage. **(4 P)**

15. Autoversicherung [1] Lösung S. 210

Als Autofahrer muss man eine Haftpflichtversicherung abschließen. Diese trägt die Kosten, wenn man durch einen Unfall Schäden bei Anderen verursacht.
Die Versicherungsgesellschaften machen dabei einen Unterschied zwischen Autofahrern, die bis zu 25 Jahre alt sind und denen, die über 25 Jahre alt sind. In Tabelle 1 sind die Anzahlen der Autofahrer und ihrer Unfälle innerhalb eines Jahres in der jeweiligen Altersklasse zusammengestellt.

Altersklasse	bis zu 25	älter als 25
Autofahrer	4 227 032	33 006 464
Autofahrer, die einen Unfall verursacht haben	41 000	162 296
Anteil der Unfallverursacher innerhalb der Altersklasse in Prozent		

Tabelle 1: Aus: Statistik 2017 (Auszug), Statistisches Bundesamt

a)
- **Vervollständige** die Tabelle 1.
- Es wird behauptet, dass junge Autofahrer (bis zu 25 Jahre) häufiger Unfälle verursachen als die älteren Autofahrer.

Beurteile diese Aussage unter Verwendung der Angaben in Tabelle 1. **(4 P)**

Der Sachverhalt ist mit gerundeten Werten im folgenden Baumdiagramm dargestellt. Die angegebenen relativen Häufigkeiten können als Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden.

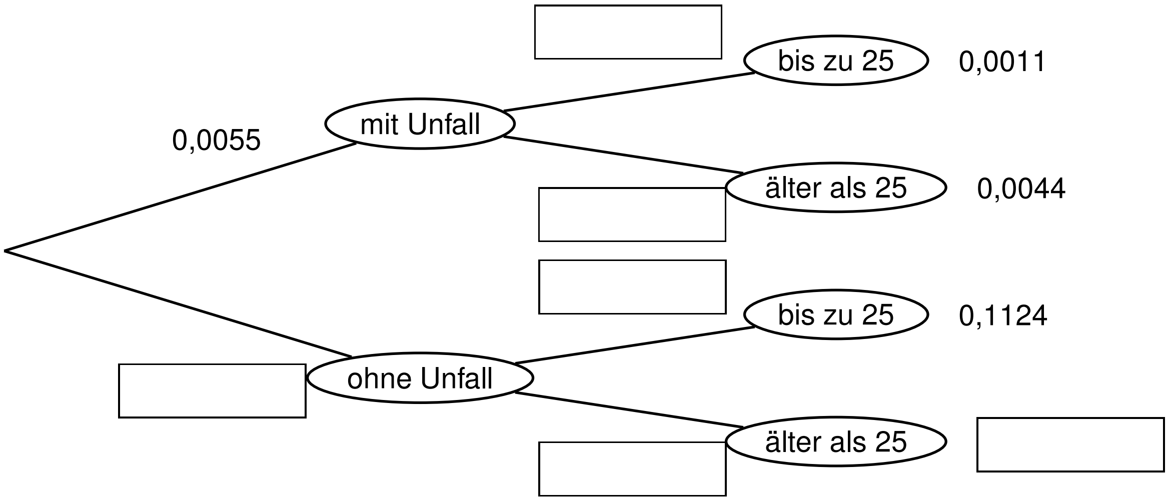


Abbildung 1: Baumdiagramm

b) **Vervollständige** das Baumdiagramm auf vier Stellen nach dem Komma gerundet. **(5 P)**

---

[1] Quelle: Behörde für Schule und Berufsbildung (2020): schriftliche Überprüfung Klasse 10 Mathematik, Haupttermin

c) **Interpretiere** die Bedeutung der Zahl 0,0011 im Baumdiagramm im Sachkontext. **(2 P)**

Mit Hilfe der oben angegebenen Werte sollen die folgenden Wahrscheinlichkeiten berechnet werden.

d)
- **Bestimme** die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Autofahrer über 25 Jahre alt ist und im letzten Jahr einen Unfall verursacht hat (in %).
- Ein Unfall hat stattgefunden.

  Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich beim Unfallverursacher um einen Autofahrer handelt, der über 25 Jahre alt ist (in %).
- Ein Autofahrer ist unter 25 Jahre alt.

  Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er einen Unfall verursacht hat (in %).

(6 P)

Der Beitrag, den man für eine Versicherung zu bezahlen hat, ist abhängig davon, ob man als Autofahrer in den vergangenen Jahren Unfälle verursacht hat oder nicht.
Ein Versicherungsunternehmen möchte überprüfen, ob es eine Beitragserhöhung für seine Autoversicherung durchführen muss. In Tabelle 2 sind die Jahre der Unfallfreiheit, die Anzahl der Autofahrer sowie die Beiträge dargestellt, die jeweils an die Versicherung pro Jahr bezahlt werden müssen.

Jahre ohne Unfall	0-2	2-4	4-8	mehr als 8
Anzahl der Autofahrer	1 250	980	5 455	7 315
Beitrag für den Autofahrer in €	600	530	450	390

Tabelle 2

Die Versicherung hat im abgelaufenen Geschäftsjahr Ausgaben für Unfallschäden in Höhe von 4 950 000 € gehabt.

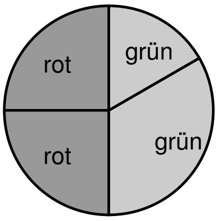
e) **Beurteile**, ob eine Erhöhung der Beiträge notwendig ist. **(5 P)**

Erwartungshorizonte

7 Erwartungshorizonte zu Aufgaben, die ohne Einsatz des Taschenrechners bearbeitet werden

1. Erstes Beispiel zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil

Lösungsskizze			Zuordnung Bewertung		
			I	II	III
1.	**a)**	0,006, **B**	1		
	b)	$\frac{31}{12}$, **C**	1		
	c)	20cm^3, **D**	1		
	d)	64, **B**	1		
	e)	$3x^{-\frac{3}{2}}$, **A**	1		
	f)	900 €, **B**		1	
	g)	120, **B**		1	
	h)	$\frac{4}{216} = \frac{1}{54}$, **D**			1
	i)	$49b^4$, **A**		1	
	j)	sin(120°), **A**	1		
	k)	eine Nullstelle bei $x = 2$, **C**	1		
	l)	135°, **C**		1	
	m)	Die Lösung ist eine natürliche Zahl (4)., **D**			1
	n)	$\frac{a}{g} = \frac{f}{h}$, **C**			1

<table>
<tr><th colspan="3" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2.</td><td>a)</td><td>Es ist
$x \cdot \left(x^2 - 3x\right) = 0$
$x^2 \cdot (x - 3) = 0$
$x_{1,2} = 0 \quad \vee\, x_3 = 3$</td><td></td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>b)</td><td>Es ist
$\sqrt{\frac{x}{4} + 13} = 7$
$\frac{x}{4} + 13 = 49$
$\frac{x}{4} = 36$
$x = 144$</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>c)</td><td>Es ist
$\frac{x^2-25}{x-5} = 0$
$x^2 = 25$
$x = 5 \quad \vee\, x = -5$
Da für $x = 5$ der Nenner nicht definiert ist, ist die einzige Lösung $x = -5$</td><td></td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3.</td><td></td><td><table><tr><td>f_1</td><td>f_2</td><td>f_3</td><td>f_4</td><td>f_5</td><td>f_6</td><td>f_7</td><td>f_8</td><td>f_9</td><td>f_{10}</td></tr><tr><td></td><td>C</td><td></td><td>E</td><td>A</td><td></td><td></td><td>D</td><td>B</td><td></td></tr></table></td><td></td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>a)</td><td>Das Glücksrad:

Der Öffnungswinkel des kleineren, grünen Feldes sollte in der Schülerskizze etwa 60° betragen.</td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>b)</td><td>Die Wahrscheinlichkeiten sind:
• $P(g_{gross}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
• $P(g) = \frac{1}{2}$</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>c)</td><td>Es ist
$P(r,g) + P(g,r) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$
$= \frac{1}{2}$</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Insgesamt 34 BWE</td><td>8</td><td>19</td><td>7</td></tr>
</table>

2. Zweites Beispiel zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil

Lösungsskizze			Zuordnung Bewertung		
			I	II	III
1.	**a)**	0,049, **B**	1		
	b)	3400000 ml, **A**	1		
	c)	$2x^2 + 18x + 28$, **D**		1	
	d)	$\frac{22}{15}$, **C**	1		
	e)	4, **C**		1	
	f)	$\frac{1}{8}$, **B**		1	
	g)	14280 €, **C**		1	
	h)	720, **D**		1	
	i)	8, **C**			1
	j)	$\frac{1}{12}$, **B**		1	
	k)	die beiden Nullstellen -2 und 2, **A**		1	
	l)	314 cm^2, **B**		1	
	m)	$x = -2$, **A**			1
	n)	7,5 cm, **B**		1	
2.	**a)**	Aus der ersten und der dritten Klammer folgen unmittelbar die Lösungen: $x_1 = 3$ und $x_3 = -4$. Aus der zweiten Klammer folgt: $2x_2 + 10 = 0$ $2x_2 = -10$ $x_2 = -5$		3	

		Lösungsskizze	**Zuordnung Bewertung**		
			I	II	III
	b)	Es ist $\begin{aligned} -4x^2+32x-60 &= 0 \\ x^2-8x+15 &= 0 \\ x_{1,2} &= 4 \pm \sqrt{16-15} \\ x_{1,2} &= 4 \pm 1 \\ x_1 &= 3, \quad x_2 = 5 \end{aligned}$		3	
	c)	Es ist $\begin{aligned} 2^{2x}-8 &= 0 \\ 2^{2x} &= 8 \\ 2x &= 3 \\ x &= 1{,}5 \end{aligned}$			3
3.		$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|} \hline f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 \\ \hline & a & & & b & \\ \hline f_7 & f_8 & f_9 & f_{10} & f_{11} & f_{12} \\ \hline d & & & c & & \\ \hline \end{array}$	4		
4.	**a)**	$P(b,b) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$		2	
	b)	Es ist $P(\text{gleichfarbig})$ $\begin{aligned} &= P(b,b)+P(r,r)+P(g,g) \\ &= \frac{1}{15}+\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{15}+\frac{2}{9}+\frac{1}{45} \\ &= \frac{3}{45}+\frac{10}{45}+\frac{1}{45} = \frac{14}{45} \end{aligned}$		3	
	c)	Es ist $P(\text{mindestens 1. grün})$ $= 1-\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9} = 1-\frac{56}{90} = \frac{34}{90} = \frac{17}{45}$			2
		Insgesamt 34 BWE	7	20	7

3. Drittes Beispiel zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil

Lösungsskizze			**Zuordnung Bewertung**		
			I	II	III
1.	**a)**	2,75 min, **C**	1		
	b)	$7{,}6 \cdot 10^3$ mm, **B**	1		
	c)	30, **C**		1	
	d)	$\frac{19}{12}$, **B**	1		
	e)	$21x^2 - 4x - 32$, **A**		1	
	f)	$\frac{1}{64}$, **B**		1	
	g)	121 €, **C**		1	
	h)	$\frac{6}{6 \cdot 6 \cdot 6}$, **C**		1	
	i)	2, **C**			1
	j)	120, **D**			1
	k)	die Nullstelle 2, **A**		1	
	l)	$297{,}5 \cdot \frac{19}{119}$, **A**		1	
	m)	40 %, **D**		1	
	n)	(2|2), **B**		1	
2.	**a)**	Es ist $2x^2 - 8x - 120 = 0$ $x^2 - 4x - 60 = 0$ $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+60}$ $x_{1,2} = 2 \pm 8$ $x_1 = -6, \quad x_2 = 10$		4	

Lösungsskizze			Zuordnung Bewertung		
			I	II	III
	b)	Die Lösungen sind: $x_1 = 5$, $x_2 = -3$, $x_3 = 3$.		3	
	c)	Es ist $\frac{16}{x} = x^3$ $16 = x^4$ $x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$		3	
3.		Es ist $a(x) = \cos(4 \cdot x)$ und $b(x) = 2\sin(x)$.	4		
4.	**a)**	Der Flächeninhalt des Quadrates beträgt $4r \cdot 4r = 16r^2$. Der Flächeninhalt der markierten Fläche beträgt $4 \cdot \pi \cdot r^2$. Der gesuchte Anteil beträgt somit $\frac{4 \cdot \pi \cdot r^2}{16 \cdot r^2} = \frac{\pi}{4}$		1	5
		Insgesamt 34 BWE	7	20	7

4. Viertes Beispiel zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil

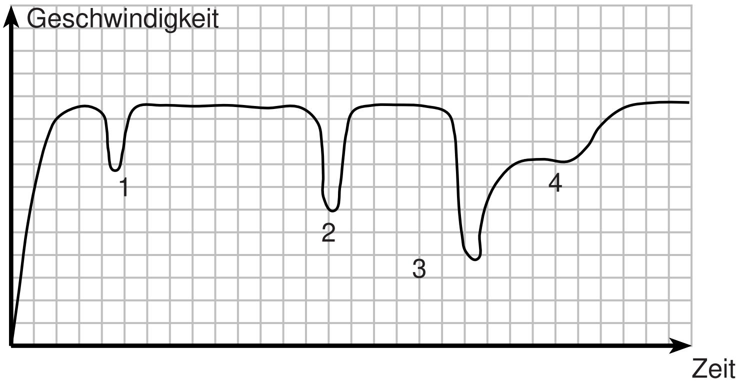
Lösungsskizze			Zuordnung Bewertung		
			I	II	III
1.	**a)**	0,03, **B**	1		
	b)	1, **C**	1		
	c)	$\frac{1}{4}\,\ell$, **A**	1		
	d)	625, **C**	1		
	e)	$-4x^{2,5}$, **B**	1		
	f)	A: 5000 € B: 25000 €, **D**	1		
	g)	12 %, **A**		1	
	h)	0,5, **D**		1	

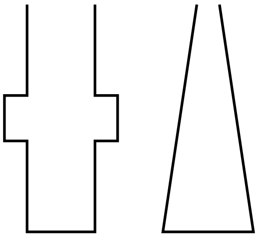
<table>
<tr><th colspan="3" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>i)</td><td>$p = \frac{1}{15}$, D</td><td></td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>j)</td><td>$p = \frac{3}{8}$, B</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>k)</td><td>$24a^3b^2$, C</td><td></td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>l)</td><td>2, B</td><td></td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>m)</td><td>nirgends, D</td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>n)</td><td>$x = 1$
$y = 1$
$z = 1$, A</td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>a)</td><td>Es ist
$12x^4 + 9x^3 = 0$
$3x^3 \cdot (4x + 3) = 0$
Die Lösungen sind
$x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{3}{4}$.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>b)</td><td>Es ist
$3x^2 + 12x - 11 = 4$
$3x^2 + 12x - 15 = 0$
$x^2 + 4x - 5 = 0$
$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+5}$
$x_{1,2} = -2 \pm 3$
$x_1 = 1; \quad x_2 = -5$</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>c)</td><td>Es ist
$\sqrt{\frac{4}{x}} = 3$
$\frac{4}{x} = 9$
$x = \frac{4}{9}$</td><td>2</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td></td><td><table><tr><td>f_1</td><td>f_2</td><td>f_3</td><td>f_4</td></tr><tr><td>B</td><td></td><td></td><td>C</td></tr><tr><td>f_5</td><td>f_6</td><td>f_7</td><td>f_8</td></tr><tr><td>D</td><td>A</td><td></td><td></td></tr></table></td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
</table>

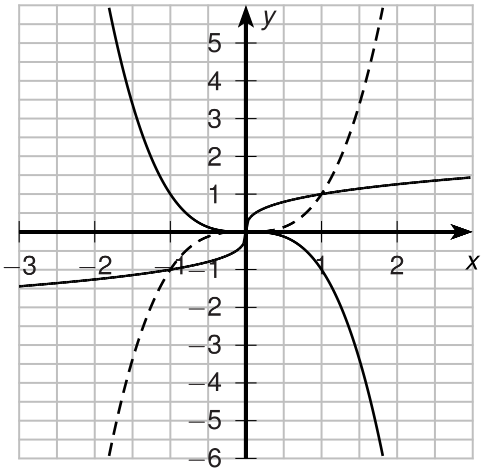
Lösungsskizze			Zuordnung Bewertung		
			I	II	III
4.	**a)**	Der Abstand zwischen den Punkten A und B muss der Radius r der beiden Kreise sein. Entsprechend sind auch die Abstände $\lvert AC\rvert$ und $\lvert BC\rvert$ genauso groß wie der Radius r, womit das Dreieck gleichseitig ist. In gleichseitigen Dreiecken haben alle drei Innenwinkel den Wert 60°.			3
	b)	Die Längen $\lvert CE\rvert$ bzw. $\lvert CD\rvert$ entsprechen dem Durchmesser, also dem zweifachen Radius des jeweiligen Kreises. Die Dreiecke ABC und EDC sind ähnlich, da sie einen gemeinsamen Winkel haben und das Verhältnis der anliegenden Seiten gleich ist. Da die Dreiecke ähnlich sind, ist die dritte Seite im gleichen Verhältnis verlängert. Also hat die Strecke $\lvert ED\rvert$ die Länge des Durchmessers der Kreise, also $2r$.		3	
		Insgesamt 34 BWE	9	20	5

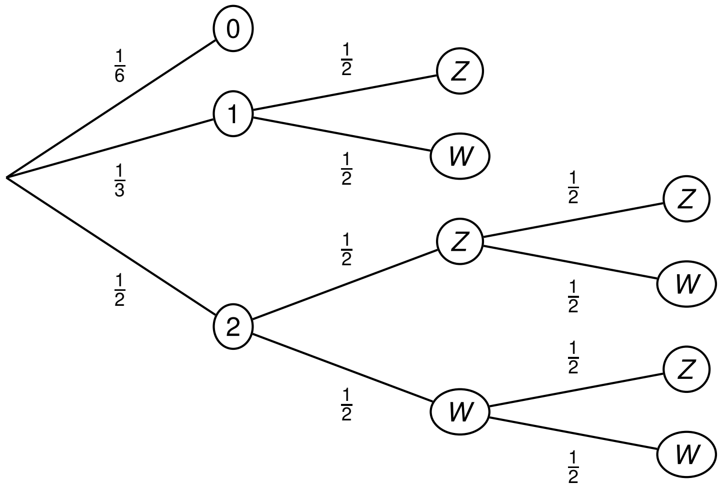
5. Weitere typische Aufgabe im hilfsmittelfreien Prüfungsteil

		Lösungsskizze	**Zuordnung Bewertung**		
			I	II	III
1.	**a)**	Im gleichseitigen Dreieck haben alle Winkel die Größe 60°. Im rechtwinkligen Dreieck ergeben sich 30° aus der Winkelsumme im Dreieck.	1		
	b)	Die Schüler können selbstständig eine Seitenbezeichnung wählen. $\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$; $\sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, denn $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$	2	4	
2.		$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 9 = 4{,}5\pi$		3	
3.		Es ist $A = (3a)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot a \cdot 2a = 9a^2 - 4a^2 = 3a^2$.		2	3
4.	**a)**	100 km	1		
	b)	35 ℓ		2	
	c)	5 ℓ und 3,75ℓ		1	1
	d)	$(5 + 15 + 15) : 7 = 35/7 = 5$ Der Benzinverbrauch auf 100 km ist 5 ℓ.		2	

Lösungsskizze			Zuordnung Bewertung		
			I	II	III
5.		 Moderne Formel 1-Wagen können innerhalb von wenigen Sekunden auf ihre Höchstgeschwindigkeit beschleunigen. Nach dem Start beschleunigt der Rennwagen bis zur Höchstgeschwindigkeit. Kurz vor der Kurve (1) wird abgebremst, um gegen Ende der Kurve wieder auf die auf Höchstgeschwindigkeit zu beschleunigen. Dann fährt der Rennwagen eine längere Strecke geradeaus, um dann vor der nun engeren Kurve (2) stärker abzubremsen. Nach einer Beschleunigung wiederum auf die Höchstgeschwindigkeit wird der Wa-gen aufgrund der engsten Kurve (3) am stärksten abgebremst. In der weiten Kurve (4) kann der Wagen nicht mit seine Höchstgeschwindigkeit fahren. Die Höchstgeschwindigkeit erreicht er erst wieder auf der Zielgeraden.		5	2
6.	**a)**	Es ist $\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$ $a \cdot (a+b) = b^2$ $a^2 + ab = b^2$		2	
	b)	Es ist $a^2 + ab = b^2$ $a^2 + ab - b^2 = 0$ $a = -0{,}5b + \sqrt{0{,}25b^2 + b^2}$ $a = \frac{b}{2}(-1 + \sqrt{5})$ Zulässig ist auch der Nachweis durch Einsetzen des gegebenen Terms.		2	1

<table>
<tr><th colspan="3" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>7.</td><td></td><td>
Wichtig ist, dass die Hauptmerkmale der Gefäße deutlich werden.</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>8.</td><td></td><td>(a) + E: gleichmäßige Füllung, deshalb linearer Verlauf des Füllgraphen,
(b) + A: je höher der Füllstand, desto größer der Querschnitt, Füllhöhe wächst langsamer,
(c) + B: bis zum Flaschenhals gleichmäßige Füllung, dann schnellere gleichmäßige Füllung,
(d) + C: erst größer werdender Querschnitt und langsamer steigender Graph, dann kleiner werdender Querschnitt und schneller steigender Graph, am Hals konstant steigender Graph.</td><td></td><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>9.</td><td></td><td>
<table>
<tr><td>Funktions-term</td><td>$\frac{2}{3}x - 2$</td><td>$\sin(x)$</td><td>$\frac{1}{x+2}$</td><td>$x^2 - 3$</td><td>3</td><td>$-(x+2)^2 + 2$</td></tr>
<tr><td>Zugeh. Graph</td><td>B</td><td></td><td>D</td><td>A</td><td>F</td><td>I</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>Funktions-term</td><td>$\frac{1}{x^2}$</td><td>$(\frac{1}{2})^x$</td><td>$\frac{3}{2}x - 2$</td><td>2^x</td><td>$-(x-2)^2 + 2$</td><td>$\cos(x)$</td></tr>
<tr><td>Zugeh. Graph</td><td>E</td><td>H</td><td></td><td></td><td>G</td><td>C</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>Funktions-term</td><td>$x^2 + 3$</td><td>$\frac{1}{x+1}$</td><td>$-(x+2)^2 - 2$</td><td>$\frac{1}{x^3}$</td><td>$-\frac{2}{3}x - 2$</td><td>-3</td></tr>
<tr><td>Zugeh. Graph</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td><td></td><td>9</td><td></td></tr>
<tr><td>10.</td><td>a)</td><td>$f(x) = x + 2$; $g(x) = -2x + 3$; $h(x) = -\frac{1}{4} * x$; $k(x) = -2{,}5$</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>b)</td><td>z. B. $x = 3$</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>c)</td><td>Es handelt sich nicht um den Graphen einer Funktion, da dem x-Wert (hier z. B. 3) mehr als genau ein (sogar unendlich viele) y-Wert zugeordnet wird.</td><td></td><td>1</td><td></td></tr>
</table>

Lösungsskizze			Zuordnung Bewertung		
			I	II	III
11.		Graph 1 ist richtig. Die Geschwindigkeit der Kugel nimmt zu.			2
12.	**a)**	*g*	1		
	b)	Die Graphen:  		4	
	c)	*h* ist die Umkehrfunktion zu *f*.		2	
	d)	Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.		2	
13.	**a)**	6 Wege	1		
	b)	Es gibt zwei Fächer E, auf die man jeweils auf 4 Wegen mit gleicher Wahr-scheinlichkeit gelangen kann: $P(E) = 2 \cdot 4 \cdot 0{,}5^4 = 0{,}5$.		2	
	c)	$P(N) = 1 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}0016$; bei 10 000 Kugeln würde man 16 im Fach *N* erwarten.		2	
	d)	$P(B) = 6 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^2$.		2	

		Lösungsskizze	**Zuordnung Bewertung**		
			I	II	III
14.		Der Baum:  A: Genau einmal Zahl $P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{12}$ B: Mindestens einmal Zahl $P(B) = P(A) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{24}$. C: Keinmal Wappen $P(C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$ Oder: $P(C) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{13}{24} = \frac{11}{24}$.	1	7	
15.	**a)**	A: Es wird eine „1“ gewürfelt, dann eine helle Kugel gezogen. $P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$.		2	
	b)	Nur wenn eine helle Kugel gezogen wird, macht Martin Gewinn. Da Martin beim Ziehen einer dunklen Kugel genauso viel Geld (1 €) zusätzlich auszahlt, wie der Einsatz beträgt, macht er beim Ziehen einer dunklen Kugel 1 € Verlust. B: Es wird eine dunkle Kugel gezogen. $P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{9}$, d. h. $P(B)$ ist größer als 50 %.		4	1
		Insgesamt 97 BWE	11	72	14

8 Erwartungshorizonte zu Aufgaben, die mithilfe des Taschenrechners bearbeitet werden

8.1 Erwartungshorizonte zu Aufgaben der Leitidee Raum und Form sowie zur Leitidee Messen

1. Wassertank

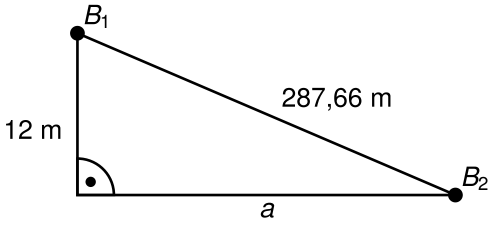
Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Oberfläche des zylinderförmigen Teils: $O \;= \pi \cdot r^2 + 2\pi rh$ $O \;\approx 31{,}4$ Farbmenge: 31,4 : 8 = 3,925 Man braucht ca. 4 ℓ Farbe.	4	2	
b)	Der zylindrische Teil des Tanks hat ein Volumen von $V_1 \approx 14$, der den Tank umschreibende Zylinder hat ein Volumen von $V_2 \approx 18$. Da sicher $V_1 < V_{Tank} < V_2$ gilt, muss das Tankvolumen also etwa 15 m^3 betragen.	2	2	
c)	Aus „bis zur halben Höhe“ ergibt sich $r = 0{,}5$ und $h = 0{,}75$. Dann ist $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}75 \approx 0{,}196$ Das Wasservolumen beträgt ca. 0,2 m^3.		5	2

Lösungsskizze		**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
d)	Graph *B* stellt den Sachverhalt richtig dar. Bei der Begründung muss jeweils der zeitliche Verlauf der Füllhöhe in Beziehung zur Form des Körpers gesetzt werden. **Graph** *A***:** Zunächst linearer Anstieg, dann Verlauf parallel zur Zeitachse. Der zugehörige Körper ist prismenförmig (z. B. Quader, Zylinder usw.), der nach Zufluss einer gewissen Wassermenge überläuft. **Graph** *C***:** Ausschließlich linearer Verlauf, der bei der Form des aus Kegel und Zylinder zusammengesetzten Körpers nicht zutreffen kann. **Graph** *D***:** Zunächst langsame Erhöhung des Flüssigkeitsstandes, zugehöriger Körper verjüngt sich von unten nach oben, Widerspruch zur Form des Wassertanks. **Graph** *E***:** Graph verläuft zunächst in Rechtskurve mit nachlassendem Anstieg (passt zum unteren Teil des Wassertanks) und anschließend waagerechtem Verlauf und damit Widerspruch zur Form des Wassertanks.		3	2
	Insgesamt 22 BWE	6	12	4

2. Paranussbaum

Lösungsskizze		**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
a)	$d \cdot \pi = 16$ $d \approx 5{,}09$ Der Durchmesser beträgt etwa 5,1 m.	2		

Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
b)	Einsetzen in die Volumenformel für den Zylinder ergibt: $V \;= \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot 43$ $V \;\approx 875{,}99$ Wird mit $r = 2{,}55$ m gerechnet, so erhält man $V \approx 878{,}41\ \text{m}^3$. $0{,}8\ ^{\text{g}}/_{\text{cm}^3} = 0{,}8\ ^{\text{t}}/_{\text{m}^3}$ Daraus folgt für die Masse: $m_{\text{Stamm}} \;= V_{\text{Stamm}} \cdot 0{,}8$ $m_{\text{Stamm}} \;\approx 700{,}79$ Wird mit $V = 878{,}41\ \text{m}^3$ gerechnet, erhält man $m \approx 702{,}73$ t. Der Stamm wiegt gut 700 t.	4		
c)	Ein möglicher Weg geht über die zweimalige Anwendungen des Sinussatzes mit anschließender Anwendung des Kosinussatzes: 1. Berechnung von $\overline{PB_1}$ im Dreieck PQB_1. 2. Berechnung von $\overline{PB_2}$ im Dreieck PQB_2. 3. Berechnung von $\overline{B_1B_2}$ im Dreieck PB_1B_2. Nach dem Winkelsummensatz im Dreieck PQB_1 gilt: $\gamma = 180° - 69° - 36° - 49° = 26°$. Nun lässt sich die Länge der Strecke $\overline{PB_1}$ über den Sinussatz ermitteln: $\frac{\overline{PB_1}}{\sin(49°)} \;= \frac{100}{\sin(26°)}$ $\overline{PB_1} \;= \frac{100 \cdot \sin(49°)}{\sin(26°)}$ $\overline{PB_1} \;\approx 172{,}16$ Nach dem Winkelsummensatz im Dreieck PQB_2 gilt: $\delta = 180° - 36° - 80° - 49° = 15°$ Berechnung der Strecke $\overline{PB_2}$ über den Sinussatz: $\frac{\overline{PB_2}}{\sin(80°+49°)} \;= \frac{100}{\sin(15°)}$ $\overline{PB_2} \;= \frac{100 \cdot \sin\ (129°)}{\sin\ (15°)}$ $\overline{PB_2} \;\approx 300{,}27$ Berechnung der Länge von $\overline{B_1B_2}$ über den Kosinussatz: $\overline{B_1B_2}^2 \;= \overline{PB_1}^2 + \overline{PB_2}^2 - 2 \cdot \overline{PB_1} \cdot \overline{PB_2} \cdot \cos\alpha_1$ $\overline{B_1B_2} \;\approx 287{,}66$ Die Punkte B_1 und B_2 sind ca. 288 m voneinander entfernt.		11	

Lösungsskizze		**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
d)	 Zunächst muss der Abstand a der Baumstämme bestimmt werden. Die Differenz der Höhen beträgt: $61 - 49 = 12$ Damit ergibt sich mit Pythagoras: $a^2 = 287{,}66^2 - 12^2$ $a \approx 287{,}41$ Die Differenz zwischen beiden Abständen beträgt $287{,}66 - 287{,}41 = 0{,}25$. Da die Differenz zwischen dem durch das Vorwärtseinschneiden ermittelten Wert und dem tatsächlichen Wert nur ca. 25 cm (also eine Abweichung von weniger als 0,1 %) beträgt, ist die Methode in diesem Fall gut geeignet, um den Abstand der beiden Bäume zu bestimmen.			5
	Insgesamt 22 BWE	6	11	5

3. Pfadfinderzelt

Lösungsskizze		**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
a)	Der 7 m lange Teil einer Zeltstange, die Strecke vom Fußpunkt dieser Stange zum Zeltmittelpunkt und die Zelthöhe bilden ein rechtwinkliges Dreieck, auf das man den Satz des Pythagoras anwenden kann: $h = \sqrt{49 - s^2}$. Mit $s = 5$ ergibt sich: $h = \sqrt{24} \approx 4{,}9$. Die Höhe des Zeltes beträgt ca. 4,9 m.	4		

Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
b)	Der Zeltboden besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken jeweils mit der Seitenlänge $s = 5$ m. Für die Höhe dieser Dreiecke gilt nach dem Satz von Pythagoras: $h_\Delta^2 + (\frac{5}{2})^2 = 5^2$ $h_\Delta^2 = 25 - 6{,}25 = 18{,}75$ $h_\Delta = \sqrt{18{,}75} \approx 4{,}33$ Insgesamt ergibt sich für die Bodenfläche folgender Flächeninhalt: $A = 6 \cdot A_\Delta$ $A = 6 \cdot \frac{h_\Delta \cdot s}{2}$ $A = 6 \cdot \frac{\sqrt{18{,}75} \cdot 5}{2} = 15 \cdot \sqrt{18{,}75} \approx 64{,}95$ Der Flächeninhalt des Zeltbodens beträgt ca. 65 m^2. Bei variabler Länge s wird zunächst die Höhe des Dreiecks in Abhängigkeit von s bestimmt. $h_\Delta^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = s^2$ $h_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s$ Es ergibt sich für die Bodenfläche folgender Flächeninhalt: $A(s) = 6 \cdot A_\Delta = 6 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s \cdot s}{2} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s^2.$	3	2	
c)	Die Zeltplanen zur Bespannung setzen sich zusammen aus sechs gleichschenkligen Dreiecken mit jeweils der Basislänge $s = 5$ m und den Schenkeln der Länge 7 m. Wieder mit dem Pythagoras erhält man für jedes dieser Dreiecke als Basishöhe h_B: $h_B = \sqrt{49 - 6{,}25} = \sqrt{42{,}75} \approx 6{,}54.$ Für die Gesamtfläche der Zeltaußenwände ergibt sich $A_B = 6 \cdot \frac{5 \cdot \sqrt{42{,}75}}{2} = 15 \cdot \sqrt{42{,}75} \approx 98{,}08.$ Es werden ca. 98 m^2 Zelttuch benötigt.		5	
d)	Das Zelt ist – mathematisch gesehen – eine Pyramide (mit sechseckiger Grundfläche). Für das Volumen einer Pyramide gilt die Formel: $V = \frac{\text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}}{3}$ Mit den Ergebnissen aus a) und b) erhält man: $V = \frac{15 \cdot \sqrt{18{,}75} \cdot \sqrt{24}}{3} = 5 \cdot \sqrt{450} \approx 106{,}07.$ Das Zelt hat ein Volumen von ca. 106 m^3.		3	

Lösungsskizze		**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
e)	Die Stehhöhenfläche am Boden ist kongruent zu der Fläche, die entstehen würde, wenn man in 1,80 m Höhe ein „Dach“ einziehen würde. Die Stehhöhenfläche ist also auch ein regelmäßiges Sechseck mit einem „Radius“ (Eckenabstand zum Mittelpunkt) s', den man mit Hilfe eines Strahlensatzes berechnen kann (vgl. Skizze neben der Aufgabenstellung): $\frac{x}{5} = \frac{1{,}8}{h}$ h kennen wir aus a): $h = \sqrt{49 - 25} = \sqrt{24} \approx 4{,}9$ Außerdem gilt: $s' = 5 - x = 5 - 1{,}84 \approx 3{,}16$. und damit können wir nun den zur Strecke s' gehörende Flächeninhalt des Sechsecks nach der allgemeinen Formel aus b) ausrechnen: $A(s') = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (s')^2 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3{,}16^2 \approx 25{,}94$ Das Zelt hat ca. 25,94 m^2 Bodenfläche mit Stehhöhe.			5
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

4. Vom Stern zur Pyramide

Lösungsskizze		**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
a)	Der Stern hat vier Symmetrieachsen (jeweils zwei durch gegenüberliegende Spitzenpunkte und zwei durch gegenüberliegende Basispunkte).	2		
b)	Es gibt mehrere Konstruktionsmöglichkeiten. Zum Beispiel kann eine Konstruktionsbeschreibung aus folgenden Abschnitten aufgebaut sein: • Konstruktion des Quadrats *ACEG* • Konstruktion der vier gleichseitigen Dreiecke auf den Quadratseiten.		4	

	Lösungsskizze	**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
c)	Das Quadrat *ACEG* ist Grundfläche der Pyramide. Weiterhin sind die zur Bestimmung des Volumen erforderlichen Teile zu benennen: • Quadratseite a • Dreieckshöhe h_D • Pyramidenhöhe h_P Erstellen des Hilfsdreiecks aus $\frac{a}{2}$, h_D und h_P. $h_D = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$, $h_P = \sqrt{\left(\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a$ Für die Kantenlänge $a = 5$ cm folgt: $h_D = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{3} \approx 4{,}33$ $h_P = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 5 \approx 3{,}54$ $V_P = \frac{1}{3}G \cdot h_P = \frac{1}{3}a^2 \cdot h_P = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2}} \cdot a^3$ $V_P = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2}} \cdot 5^3 \approx 29{,}46$ Die Pyramide mit der Länge $a = 5$ cm hat ein Volumen von $V \approx 29{,}5\ \text{cm}^3$.	3	6	
d)	Angabe einer der beiden Bedingungen: • Die Länge der Basishöhe h_D des gleichschenkligen Dreiecks muss größer sein als die halbe Seitenlänge des Quadrats: $h_D > \frac{a}{2}$ • Die Länge eines Dreiecksschenkels ist größer als die Hälfte der Diagonalenlänge des Quadrats.			3
e)	Das Volumen der Pyramide würde sich bei gleich bleibender Grundfläche dann verdoppeln, wenn sich die Pyramidenhöhe h_P verdoppeln würde. Da sich (siehe c)) $h_P = \sqrt{h_D - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ und da $h_D = \sqrt{4a - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}a$ weit mehr als verdoppelt hat, ist das neue h_P deutlich mehr als das Doppelte der ursprünglichen Höhe: Das Volumen ist also größer als das doppelte Volumen.		2	2
	Insgesamt 22 BWE	5	12	5

5. Partyzelt

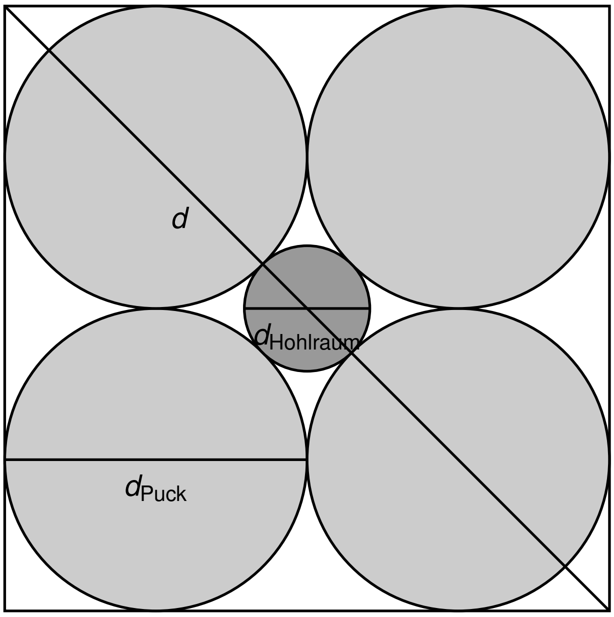
Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Das Zelt besteht aus einem Würfel und einer aufgesetzten quadratischen Pyramide. Der Würfel hat eine Höhe von 5 m. Die Höhe h der Pyramide kann mit folgender Idee berechnet werden: Ein Eckpunkt des Grundquadrats der Pyramide, der Mittelpunkt der Diagonalen d des Grundquadrats und die Spitze der Pyramide bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Die Hypotenuse hat die Länge $a = 5$ m. Nach dem Satz des Pythagoras gilt: $a^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$. Die Diagonale des Quadrats hat die Länge $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a \cdot \sqrt{2}$. Also ergibt sich mit $h^2 \quad = a^2 - \left(\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2$ die Pyramidenhöhe von $h \approx 3{,}54$ m. Damit ist die Gesamthöhe tatsächlich etwa 8,54 m, also gut 8,5 m.	2	3	
b)	Das Volumen setzt sich aus dem Volumen des Würfels und dem der aufgesetzten Pyramide zusammen: $V = a^3 + \frac{1}{3}a^2 \cdot h$ Mit dem gegebenen a und dem aus dem in a) berechneten Wert für die Pyramidenhöhe h ergibt sich ein Volumen von etwa 154,5 m^3.	2	3	
c)	Die Umhüllung besteht aus vier Quadraten mit der Kantenlänge a und aus vier gleichseitigen Dreiecken mit der Kantenlänge a. Die Höhe h_s eines gleichseitigen Dreiecks bestimmt sich mit dem Satz des Pythagoras zu $h_s \quad = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}$ $\quad\;\; = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ Somit ergibt sich die nötige gesamte Planenfläche zu $A = 4a^2 + \frac{4}{2} \cdot a \cdot h_s = (4 + \sqrt{3})a^2$ Mit dem gegebenen a sind das etwa 143,3 m^2 und damit weniger als 150 m^2.		4	

Lösungsskizze		**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
d)	Sei E ein Eckpunkt der Pyramide. Dann bilden E, S und M ein Dreieck, bei dem der Winkel ε bei E $\varepsilon = 135°$ beträgt und für die Längen der Seiten $\overline{ES}$ und $\overline{ME}$ gilt: $\|ES\| = a$ und $\|ME\| = \frac{a}{2}$ Nach dem Kosinussatz gilt dann: $\|MS\|^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos 135°$ Eingesetzt und ausgerechnet ergibt sich die Länge der Girlande zu etwa 6,99 m.			4
e)	Sei M der Mittelpunkt einer vertikalen Stange, S der Spitzenpunkt des Zeltes. Die Strecke $\overline{MS}$ entspricht der Girlande und bildet die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Eckpunkten M, S und H. H liegt senkrecht unter S in einer Höhe von 2,5 m, also 6,04 m unterhalb von S. Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck HMS mit dem rechten Winkel in H. Für die Strecken $\overline{HS}$ und $\overline{MH}$ gilt $\|HS\| = h + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{a}{2}$ und $\|MH\| = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$ Der Winkel α bestimmt sich z. B. über den Tangens: $\tan\alpha = \frac{\|HS\|}{\|MH\|}$ $= \frac{\frac{a}{2}\cdot\sqrt{2}+\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\cdot\sqrt{2}}$ Danach ist der Winkel α knapp 60° groß.		4	
	Insgesamt 22 BWE	4	14	4

6. Eishockeypucks

Lösungsskizze		**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
a)	Der Puck hat die Form eines Zylinders. Damit ist das Volumen bestimmbar mit $V_{Zyl} = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Die Höhe und der Radius als halber Durchmesser sind in der Aufgabenstellung gegeben. Also: $V_{Puck} = \pi \cdot 3{,}81^2 \cdot 2{,}54 \approx 115{,}83$ Das Volumen eines Pucks beträgt tatsächlich ungefähr 116 cm^3.	3		

Lösungsskizze		**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
b)	Um die Frage zu beantworten, muss zunächst das Gesamtvolumen der Schachtel V_S bestimmt werden: Die Schachtel ist ein Quader mit quadratischer Grundfläche. Dessen Volumen bestimmt sich mit $V_S = a^2 \cdot h$.Die Seitenlänge des Quadrats entspricht dem doppelten Durchmesser der Pucks; damit ist $a = 15{,}24$ cm. Da drei Pucks übereinander liegen, beträgt die Höhe $h = 3 \cdot 2{,}54 = 7{,}62$. Innenvolumen der Schachtel: $V_S = 15{,}24^2 \cdot 7{,}62 \approx 1\,769{,}8$. Die Schachtel hat ein Innenvolumen von ca. 1 770 cm^3. Von diesem Volumen muss das Volumen der Pucks abgezogen werden.Volumen der 12 Pucks: $V_{12} = 12 \cdot V_{Puck} \approx 1\,389{,}99$ Das Gesamtvolumen der 12 Pucks beträgt ca. 1 390 cm^3. Damit ist das Volumen der Luft $V_{Luft} = V_S - V_{12} \approx 379{,}8$. Etwa 380 cm^3 Luft sind in der Schachtel enthalten. Prozentanteil der Luft: $\frac{V_{Luft}}{V_{Schachtel}} = 0{,}2146$. Der Luftvolumenanteil der Schachtel beträgt ca. 21,5 %.	2	7	

	Lösungsskizze	**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
c)	 Sei d die Diagonalenlänge der quadratischen Schachtel. Die Kantenlänge der Schachtel istder doppelte Durchmesser eines Pucks; damit ist a = 15,24 cm. Somit gilt: $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ $d^2 = 2 \cdot 15{,}24^2$ $d = \sqrt{464{,}5152}$. $d \approx 21{,}55$ Die Diagonale d setzt sich zusammen aus zwei Durchmessern des Pucks und zwei Durchmessers des Hohlraums – zum einen im eingezeichneten Hohlraum selbst, zum anderen in den Ecken der Schachtel. Somit gilt: $d = 2 \cdot 7{,}62 + 2 \cdot d_{Hohlraum}$ $\sqrt{464{,}5152} = 2 \cdot 7{,}62 + 2 \cdot d_{Hohlraum}$ $2 \cdot d_{Hohlraum} = \sqrt{464{,}5152} - 2 \cdot 7{,}62$ $d_{Hohlraum} \approx 3{,}156$ Also kann der Dorn einen maximalen Durchmesser von etwa 3,16 cm aufweisen.		2	4

Lösungsskizze		**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
d)	Weg über Ausnutzen der Abbildungen: 1 Kreis im Quadrat: $\frac{A_{Kreis}}{A_{Quadrat}} = \frac{\pi\cdot r_1^2}{(2r_1)^2} = \frac{\pi\cdot r_1^2}{4r_1^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785 \approx 78{,}5\%$. Der nicht bedeckte Anteil des Quadrats beträgt ca. 21,5 %. 4 Kreise im Quadrat: $\frac{4\cdot\pi\cdot r_4^2}{(4r_4)^2} = \frac{4\cdot\pi\cdot r_4^2}{16r_4^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785 \approx 78{,}5\%$ Der nicht bedeckte Anteil des Quadrats beträgt auch ca. 21,5 %. Die Rechnung führt analog für neun Kreise bzw n^2 Kreise im Quadrat zu dem selben Anteil. Dieser Weg lässt sich auch zu einem einzigen Gedanken verdichten: $Anteil = 1 - n\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2n}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}215$.		2	2
	Insgesamt 22 BWE	5	11	6

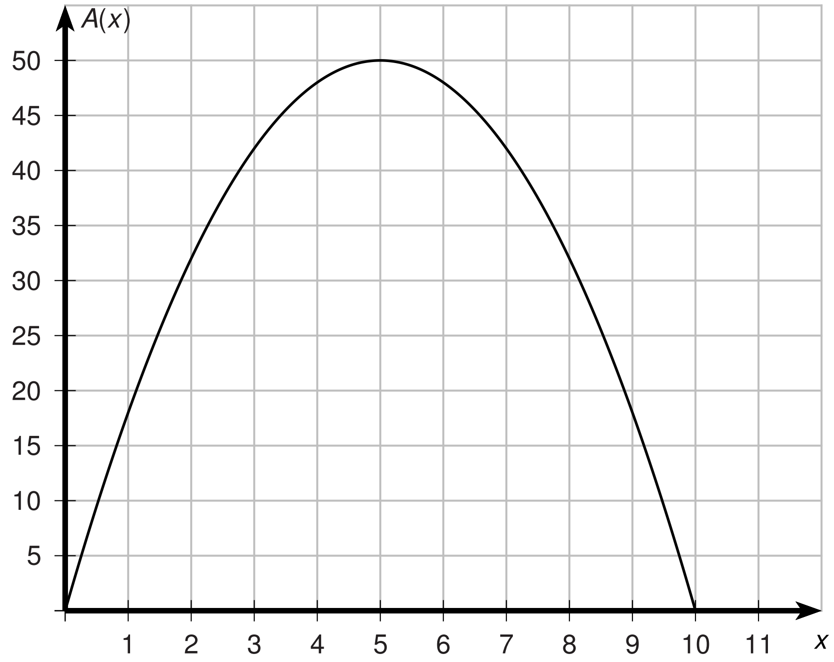
7. Kaffeefilter

Lösungsskizze		**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
a)	Das Volumen des Kaffeefilters ergibt sich aus der Summe der Volumen des dreiseitigen Prismas und der beiden halben Kreiskegel. Das Volumen des dreiseitigen Prismas lässt sich mit den gegebenen Größen berechnen: $V_{\mathrm{Pr}} = \frac{1}{2}\cdot\lvert BC\rvert\cdot h\cdot\lvert AB\rvert$ Es ergibt sich $V_{\mathrm{Pr}} = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 9\cdot 6 = 324$. Die beiden Halbkegel werden zu einem vollständigen Kreiskegel zusammengesetzt. Dessen Höhe ist wieder h, der Radius $r = \frac{1}{2}\cdot\lvert BC\rvert = 6$. Somit ergibt sich mit $V_K = \frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h$, d. h. $V_K = \frac{1}{3}\pi\cdot 6^2\cdot 9 \approx 339{,}29$. Der ganze Filter hat also ein Volumen von etwa 663 cm^3.	4	2	

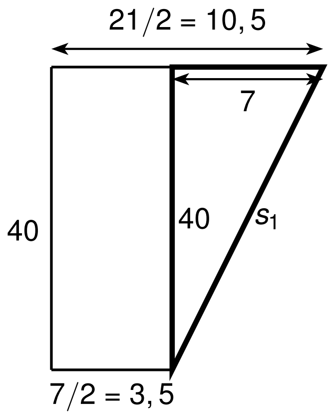
Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
b)	Für die Berechnung der Masse des Filters wird dessen Oberfläche benötigt. Die Oberfläche lässt sich zerlegen in zwei Rechtecke und den Mantel des zusammengesetzten Kreiskegels. Hierbei sind die Mantelhöhe des Kreiskegels und die lange Seite $\overline{AF}$ der Rechtecke gleich.Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich $\overline{AF} = \sqrt{\left(\frac{\lvert BC\rvert}{2}\right)^2 + h^2}$ $= \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 + 9^2}$ Die Formel für die Mantelfläche des Kreiskegels – angewendet auf diese Situation – ergibt $A_K = \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AF}$. Damit erhält man die gesamte Oberfläche zu $A = 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{117} + \pi \cdot 6 \cdot \sqrt{117} \approx 333{,}69$. Für einen Filter werden ca. 334 cm^2 Papier benötigt. Da ein Quadratmeter des verwendeten Filterpapiers 50 g wiegt, hat der Filter eine Masse von etwa 1,67 g.	2	6	
c)	Der Kreisbogen $\widehat{B'H'}$ hat die Länge eines Viertels des Umfangs der Grundfläche des Kreiskegels. Dieser Bogen hat den Radius $r = \overline{AF}$. Zwischen Winkel, Radius und Bogenlänge besteht die Beziehung $\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{\overline{B'H'}}{2\pi r}$ $\alpha = \frac{360^\circ \cdot \overline{B'H'}}{2\pi \cdot \overline{AF}}$. $\alpha = \frac{360^\circ \cdot 3\pi}{2\pi \cdot \sqrt{117}}$ Es ergibt sich $\alpha \approx 49{,}92^\circ$, also ist der Winkel praktisch 50° groß.		2	2
d)	Die Breite der Schachtel ist die im Aufgabenteil b) berechnete Länge $\lvert AF\rvert$. Die Länge ergibt sich aus $\overline{E'H'} = 6 + 2 \cdot \sqrt{117} \cdot \sin\alpha \approx 22{,}55$. Die Schachtel hat also die Mindestmaße von 10,9 cm und 22,6 cm.		2	2
	Insgesamt 22 BWE	6	12	4

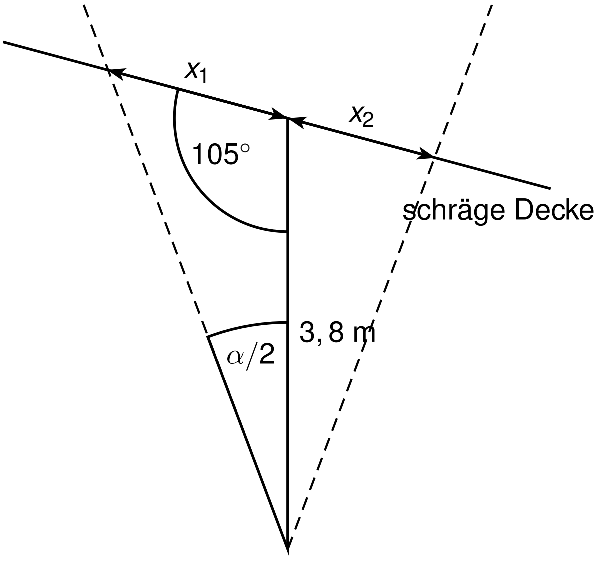
8. Neuee Rosenbeet

Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Fläche der beiden kleinen Dreiecke beträgt jeweils 4,5 m^2, die der beiden großen jeweils 24,5 m^2. Das ist leicht ersichtlich, wenn man die jeweils gegenüberliegenden Dreiecke zu einem Quadrat zusammenfügt. Der Inhalt der restlichen Rasenfläche beträgt also 58 m^2. Die Fläche des Rosenbeets ergibt sich aus der Subtraktion des Inhalts der restlichen Rasenfläche von der Quadratfläche zu 42 m^2.	2	1	
b)	Für den Nachweis muss gezeigt werden, dass die Winkel rechtwinklig und dass die Seitenlängen des Rosenbeetes nicht gleich lang sind. Die Rechtwinkligkeit des Rosenbeets kann anhand einer Ecke vom Rosenbeet begründet werden. Jede Ecke liegt wird von zwei Basiswinkeln der anliegenende Dreiecke eingeschlossen. Da die anliegenden Dreiecke jeweils rechtwinklig sind, sind ihre Basiswinkel jeweils 45°. Ein gestreckter Winkel ist 180°. Folglich ist der eingeschlossene Winkel des Rosenbeets ein rechter Winkel. Für die Seitenlängen benötigen wir den Satz des Pythagoras: Die Breite b des Rosenbeetes entspricht der Länge der Hypotenuse des Dreiecks mit den Kantenlängen von 3 m. Daraus folgt: $b = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} \approx 4{,}24$ Die Länge a des Rosenbeetes entspricht der Länge der Hypotenuse des Dreiecks mit den Kantenlängen von 7 m. Daraus folgt: $a = \sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{98} \approx 9{,}9$ Somit ist gezeigt, dass die Seitenlängen des Rosenbeets nicht gleich lang sind.		3	1
c)	x liegt zwischen 0 und 10.	1	1	
d)	Je zwei gegenüberliegende Rasendreiecke lassen sich zu je einem Quadrat zusammensetzen; diese Quadrate haben die Flächen x^2 bzw. $(10 - x)^2$. Diese Flächen müssen von der Gesamtfläche von 100 m^2 subtrahiert werden: $A(x) = 100 - x^2 - (10 - x)^2$ $= -2x^2 + 20x$ wie angegeben.	2	2	

	Lösungsskizze	**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
e)	Der Graph dieser Funktion ist eine nach unten geöffnete Parabel, deren eine Nullstelle bei Null und deren zweite Nullstelle bei 10 liegt. Hier ist die quadratische Gleichung $45 = -2x^2 20x$ zu lösen. Die Lösungen sind $x_1 = 5 + \sqrt{2{,}5}$ und $x_2 = 5 - \sqrt{2{,}5}$. Genähert sind das $x_1 \approx 6{,}58$ und $x_2 \approx 3{,}42$.		3	
f)		2		
g)	Durch Symmetrieüberlegungen, Kenntnis der Koordinaten des Scheitels einer Parabel, Anwendung von Verschiebungen oder durch die Anwendung der Scheitelpunktsform $A(x) = -2(x-5)^2 + 50$ ergibt sich das Maximum für $x = 5$. Die maximale Fläche ist dann $A(5) = 50$. Bei $x = 5$ ist $(10 - x) = 5$, also sind die vier Rasendreiecke kongruent und die vier Rechteckseiten damit gleich lang.			4
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

9. Designerlampe

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Es ist $V = 40 \cdot 40 \cdot 20 = 32000$. Für die elektrischen Bauteile stehen 32000 cm^3 zur Verfügung.	3		
b)	Es ist das folgende dick gezeichnete Dreieck zu betrachten.  Dann ergibt sich: $s_1 = \sqrt{7^2 + 40^2} = 40{,}61...$ Damit ist die Länge von s_1 bestätigt.	2	2	
c)	Der Lampenschirm ist aus vier Trapezflächen aufgebaut. Für eine Trapezfläche gilt $A = \frac{21+7}{2} \cdot s_1 = \frac{21+7}{2} \cdot 40{,}6 = 568{,}4$. Dann ist die Gesamtfläche $A_{ges} = A \cdot 4 = 2273{,}6$. Damit benötigt man für den Lampenschirm 0,227 m^2 Material.	2	2	
d)	• Es ist $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{10{,}5}{40}$ und damit $\alpha = \tan^{-1}(\frac{10{,}5}{40}) \cdot 2 = 29{,}42^\circ$ • Das Gemälde befindet sich in einer Höhe von 3,8 m über der Lichtquelle. Bei einem Öffnungswinkel von 29,42° kann ein Gemälde der Breite $2 \cdot \tan(29{,}42^\circ/2) \cdot 3{,}8 = 1{,}995$ ausgeleuchtet werden. Der Öffnungswinkel der Lampe ist also ein bisschen zu klein, um das Gemälde komplett auszuleuchten. *Wenn durch runden eine positive Aussage getroffen wird, ist dies ebenfalls als richtig zu bewerten.*		3	2

	Lösungsskizze	**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
e)	Mithilfe des Sinussatz berechnet man zunächst die Seite x_1: $\frac{x_1}{\sin(\frac{\alpha}{2})} = \frac{3{,}8}{\sin(180^\circ-105^\circ-\frac{\alpha}{2})}$ $x_1 = 3{,}8 \cdot \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\sin(180^\circ-105^\circ-\frac{\alpha}{2})} = 1{,}11$ und dann die Seite x_2: $\frac{x_2}{\sin(\frac{\alpha}{2})} = \frac{3{,}8}{\sin(180^\circ-75^\circ-\frac{\alpha}{2})}$ $x_2 = 3{,}8 \cdot \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{sin(180^\circ-75^\circ-\frac{\alpha}{2})} = 0{,}96$ Somit wird bei einer schrägen Decke 1,11 m + 0,96 m = 2,07 m an der Decke angestrahlt. Damit hat der Designer recht. 		3	3
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

10. Industrieroboter

Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Das Volumen des Oberarms berechnet sich aus der Differenz vom Außen- und Innenvolumen. $V_O = V_a - V_i = \pi \cdot h \cdot (r_a^2 - r_i^2) = \pi \cdot 260 \cdot (9^2 - 6{,}5^2) = 31651{,}55...$ Der Oberarm hat ein Volumen von 31651,55 cm^3 und damit eine Masse von $m_0 = V_o \cdot 7{,}85 = 248464{,}64....$ Der Oberarm wiegt also 248,46 kg. Der Unterarm hat dann ein Gewicht von $m_U = m_O \cdot 0{,}81 = 248{,}46 \text{ kg} \cdot 0{,}81 = 201{,}26 \text{ kg}$.	5		
b)	Zunächst muss das Volumen der Kugel bestimmt werden $V = 7700 : 7{,}85 = 980{,}89...$ Danach berechnet man den Radius: $V \;=\; \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ $r \;=\; \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi}} \;=\; \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 980{,}891...}{4 \cdot \pi}} \;=\; 6{,}163...$ Der Radius der Kugel beträgt 6,16 cm. Die Kugeloberfläche berechnet sich zu: $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 6{,}16...^2 = 476{,}838...$ Desweiteren ist die Mantelfläche des Unterarms zu berechnen. Dabei ist $M_U = 2 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 210 = 11875{,}22....$ Die zu streichende Fläche hat einen Flächeninhalt von rund 12352,1 cm^2. Es müssen also 24704,2 cm^2 $\approx$ 2,5 m^2 gestrichen werden. Somit braucht man zwei Dosen für 28 €.		6	
c)	Zur Lösung wird der Satz des Pythagoras bzw. der Tangens verwendet. Es ist $e = \sqrt{4{,}4^2 + 1{,}9^2} = 4{,}792... \approx 4{,}8$ und $\alpha = \tan^{-1}(\frac{1{,}9}{4{,}4}) = 23{,}355... \approx 23$ Damit beträgt $e \approx 4{,}8$ m und $\alpha \approx 23°$. *Andere Lösungswege sind möglich, etwa zuerst die Bestimmung des Winkels und anschließend die Längenbestimmung von r mit Hilfe von Sinus oder Kosinus.*	2	4	
d)	Um die maximale Länge des Roboterarms zu bestimmen, kann man mithilfe des Kosinussatz die maximale Länge d inklusive der Roboterhand berechnen. $d = \sqrt{2{,}6^2 + (2{,}1 + 0{,}44)^2 - 2 \cdot 2{,}6 \cdot (2{,}1 + 0{,}44) \cdot \cos(158°)} = 5{,}05...$ Der markierte Bereich ist für den Fall $\alpha = 23°$ nicht groß genug. *Andere Lösungswege – etwa über den Sinussatz – sind möglich.*			5
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

11. Kettenanhänger

Lösungsskizze		**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
a)	Die Länge des Golddrahtes ist der Umfang des Kreises, also $l = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 2 = 12{,}566 \approx 12{,}6$ Der Golddraht hat eine Länge von 12,6 cm.	3	1	
b)	Mit dem Strahlensatz gilt: Es ist $\frac{\overline{DE}}{b} = \frac{1}{3}$ $\overline{DE} = \frac{b}{3} = 0{,}9$ Die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche beträgt 0,9 cm.		3	1
c)	Es gilt der Kosinussatz $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$ und somit $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3{,}4^2 - 2{,}7^2 - 3{,}8^2}{-2 \cdot 2{,}7 \cdot 3{,}8}\right) \approx 60{,}29...^\circ$. Der Winkel α in der Schablone beträgt gerundet 60°.	4	1	
d)	Der Preis des Golddrahtes beträgt $1{,}26 \cdot 371 = 467{,}46$ € Das Volumen des Dreiecksprismas berechnet sich mit $V = A \cdot h = A \cdot 0{,}1$ cm. Es ist $A = \frac{c \cdot h_c}{2}$, dabei ist $h_c = b \cdot \sin(60^\circ) = 2{,}338.. \approx 2{,}34$. *Hinweis: Beim Einsetzen des genauen Wertes für* α *erhält man* 2,345. Somit ist $A = \frac{3{,}8 \cdot 2{,}34}{2} = 4{,}446 \approx 4{,}4$ Also ist $V = 4{,}4 \cdot 0{,}1 = 0{,}44$. Das Dreiecksprisma hat ein Volumen von 0,44 cm^3 und damit berechnet sich das Gewicht zu $m = 0{,}44 \cdot 19{,}32 = 8{,}5$. Der Materialpreis ergibt sich zu $467{,}46 + 340 + 32{,}80 = 840{,}26$ Der Materialpreis beträgt 840,26 €. Der Gesamtpreis ist dann $(840{,}26 + 120) \cdot 1{,}19 = 1142{,}71$ Der minimale Preis des Anhängers beträgt 1142,71 €.		5	4
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

12. Schwimmbecken

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	• Die Länge des mittleren Beckenteils berechnet sich aus $l_b = l - b = 7 - 3 = 4$. Die Länge des mittleren Beckenteils ist also 4 m. Die Wasseroberfläche O setzt sich zusammen aus einem Kreis und einem Rechteck. $O = \pi \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 + l_b \cdot b = 1{,}5^2 \cdot \pi + 4 \cdot 3 \approx 19{,}07$ Die Wasseroberfläche beträgt rund 19 m^2	4	2	
	• Es ist $V = O \cdot t = 19{,}07 \cdot 1{,}8 \approx 34{,}32$. Das Schwimmbecken hat ein Fassungsvermögen von rund 34 m^3.			
b)	Es sind die zwei Katheten in einem rechtwinkligen Dreieck gegeben. Die eine Kathete ist die Höhe des Podests h_P, die andere ist die Länge des Rechtecks l_b, so kann über den Tangens der Winkel berechnet werden: $\tan\alpha = \frac{h_P}{l_b} = \frac{0{,}8}{4} = 0{,}2$ $\alpha = \tan^{-1}(0{,}2) \approx 11{,}31°...$ Der Winkel zwischen Rampe und Boden beträgt 11,31°, damit ist der Winkel größer als 10°. Es muss Antirutschfarbe benutzt werden.	3	2	
c)	Zunächst kann über den Satz des Pythagoras die Länge der Rampe berechnet werden. $s = \sqrt{4^2 + 0{,}8^2} \approx 4{,}08$ $A = s \cdot b = 4{,}08 \cdot 3 \approx 12{,}24$ Die Fläche A der Rampe beträgt also rund 12,24 m^2 Über die Ergiebigkeit der Antirutschfarbe kann nun die Anzahl der Eimer berechnet werden $N = \frac{12{,}24}{1{,}5 \cdot 3} = \frac{12{,}24}{4{,}5} \approx 2{,}72$ Die Familie Meier muss also 3 Eimer Farbe kaufen.		6	
d)	Um r zu bestimmen, kann der Kosinussatz angewendet werden. $r = \sqrt{3{,}3^2 + 1{,}8^2 - 2 \cdot 3{,}3 \cdot 1{,}8 \cdot \cos(62°)} \approx 2{,}92$ Die Rutschlänge r ist demnach nur rund 2,9 m lang. Der Wunsch der Kinder wäre also nicht erfüllt.			5
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

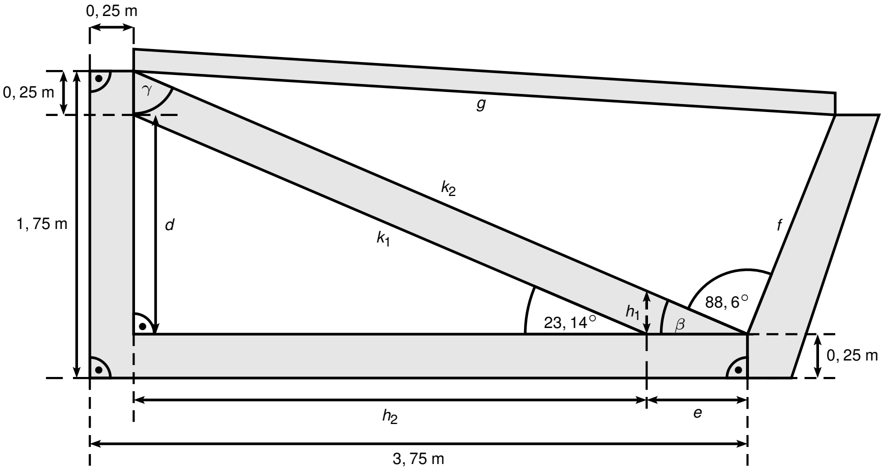
13. Dachgaube

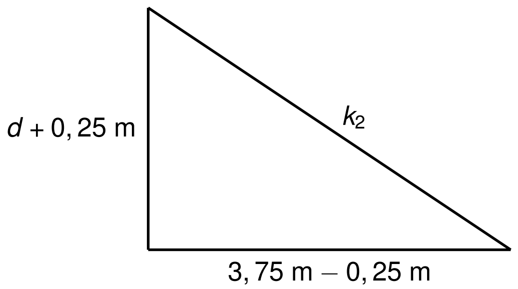
Lösungsskizze		**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
a)	• Die Höhe der Dachgaube an der Fensterseite ist die Differenz zwischen der Gesamthöhe h_2 und der Höhe über dem Fußboden des Arbeitszimmers h_1. $h = h_2 - h_1 = 2{,}25 - 0{,}75 = 1{,}5$ Die Höhe der Dachgaube beträgt $h = 1{,}5$ m. • Die vordere Fläche ist ein Rechteck mit den Seitenlängen $b = 1{,}75$ m und $h = 1{,}5$ m. $A = h \cdot b = 2{,}625$ Damit beträgt die Größe der Fläche um die Fenster herum $2{,}625\ \text{m}^2 - 1{,}43\ \text{m}^2 \approx 1{,}2\ \text{m}^2$.	3		
b)	Der Dachneigungswinkel und der Gaubenwinkel müssen sich zu 90° ergänzen. $\beta = 90° - 40° = 50°$ Die Dachneigung beträgt $\beta = 50°$.		2	
c)	Um die Größe der Seitenflächen zu berechnen, muss die Höhe h_l des Seitendreiecks der Gaube berechnet werden. Dazu wird die Definition des Sinus im rechtwinkligen Dreieck angewendet. $\sin(40°) = \frac{h_l}{h}$ $h_l = h \cdot \sin(40°)$ $h_l = 1{,}5 \cdot \sin(40°) \approx 0{,}96$ Damit ergibt sich die Seitenfläche A_S zu: $A_S = \frac{1}{2} \cdot h_l \cdot l \approx 1{,}35$ Die Seitenfläche der Gaube ist etwa $1{,}35\ \text{m}^2$ groß.	4		
d)	Es sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel in einem nicht rechtwinkligen Dreieck gegeben (siehe Abbildung 2 in der Anlage). Der Kosinussatz liefert: $t^2 = h^2 + l^2 - 2 \cdot h \cdot l \cdot \cos(40°)$ $t = \sqrt{1{,}5^2 + 2{,}8^2 - 2 \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}8 \cdot \cos(40°)} \approx 1{,}91$ Die Tiefe der Dachgaube t beträgt also 1,91 m.		4	

Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	Die Gaube ist ein Dreiecksprisma mit der Grundfläche A_S und der Höhe b: $V_G = A_S \cdot b$ $V_G = 1{,}35 \cdot 1{,}75 \approx 2{,}363$ $p_V = \frac{2{,}363}{22} \approx 0{,}107$ Damit beträgt der prozentuale Volumenzuwachs $p_V \approx 10{,}7\%$.		4	
f)	Die Größe der Seitenflächen ist bekannt. Der Preis der Schieferplatten berechnet sich zu $Preis_{Schiefer} = 2 \cdot 1{,}35 \cdot 27{,}50 + 1{,}2 \cdot 27{,}50 = 74{,}25 + 33{,}00 = 107{,}25$ Das Dach der Gaube ist ein Rechteck mit den Seiten b und t. Der Preis der Dachziegel berechnet sich mit $Preis_{Dach} = 1{,}91 \cdot 1{,}75 \cdot 19{,}6 = 65{,}51$ Damit ist der Gesamtpreis $Preis_{ges} = Preis_{Schiefer} + Preis_{Dach} = 172{,}76$ Also beträgt der Preis für das Sonderangebot 172,76 €. Damit ist der Baumarkt nicht günstiger als das Angebot der Baufirma.			5
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

14. Hürdenmodell

Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Es ist $d = 1{,}75 - 2 \cdot 0{,}25 = 1{,}25$. Die Strecke d hat eine Länge von 1,25 m. Im unteren rechtwinkligen Dreieck in der Abbildung 3 gilt: $\sin\alpha = \frac{d}{k_1}$ $k_1 = \frac{1{,}25}{\sin(23{,}14°)} \approx 3{,}18$ Die Kante k_1 hat eine Länge von rund 3,18 m.	4		

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
b)	k_1 ist, laut Aufgabenstellung, parallel zu k_2. Die Parallelen werden von der Geraden geschnitten, auf der h_2 liegt. 23,14° und β sind Stufenwinkel an Parallelen und damit gleich groß.  $\beta = 23{,}14°$ $\gamma = 180° - 90° - \beta = 180° - 90° - 23{,}14° = 66{,}86°$		3	
c)	Hier bieten sich mindestens zwei Wege an, von denen der Schüler nur einen beschreiben muss. 1. Die gestrichelte Linie h_1 hat wegen der Parallelität von k_1 und k_2 die Länge 0,25 m. $\tan\beta = \frac{h_1}{e}$ Durch Umstellen erhält man $e = \frac{h_1}{\tan\beta}$ womit man die Länge der Strecke e berechnen kann. 2. Zunächst wird die Länge der Hilfslinie h_2 über den Satz des Pythagoras bestimmt. $h_2 = \sqrt{k_1^2 - d^2}$ Dann gilt: $e = 3{,}75 - 0{,}25 - h_2$			5

	Lösungsskizze	**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
d)	In dem folgenden Dreieck gilt:  $k_2 = \sqrt{1{,}5^2 + 3{,}5^2} \approx 3{,}81$ Die Kante k_2 hat eine Länge von rund 3,81 m.	3		
e)	In dem oberen Dreieck in Abbildung 3 gilt mit dem Kosinussatz: $g^2 = k_2^2 + f^2 - 2 \cdot k_2 \cdot f \cdot \cos 88{,}6^\circ$ $g = \sqrt{k_2^2 + f^2 - 2 \cdot k_2 \cdot f \cdot \cos 88{,}6^\circ}$ $g = \sqrt{3{,}81^2 + 1{,}35^2 - 2 \cdot 3{,}81 \cdot 1{,}35 \cdot \cos(88{,}6^\circ)}$ $\approx 4{,}01$ Das zur Verfügung stehende Holzstück ist länger als nötig und daher geeignet die Strecke g zu überspannen.		3	
f)	Der maximal mögliche Zylinder mit einem Radius von 5 cm und einer Höhe von 426 cm hat ein Volumen von: $V_{max} = \pi \cdot 5^2 \cdot 426$ $= 10650\pi$ $\approx 33457{,}96$ Das Gewicht beträgt: $m = V_{max} \cdot 0{,}69$ $= 33457{,}96 \cdot 0{,}69$ $\approx 23085{,}99$ Das ungekürzte Holzstück hat ein Gewicht von rund 23 kg. Es könnte somit von den Halterungen getragen werden. Dies gilt dann auch für das gekürzte Holzstück.		4	
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

15. Eishockey

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	• $m_L = r + b + r = 8 + 10 + 8 = 26$ Die Länge der Mittellinie beträgt 26 m. • Die Fläche A setzt sich aus dem mittleren Rechteck A_{Mitte}, den 2 kleineren Rechtecken an den beiden Enden A_{Ende} und 4 Viertelkreisen A_{Kreis} zusammen. $A_{Mitte} = 40 \cdot 26$ $2 \cdot A_{Ende} = 2 \cdot 8 \cdot 10$ $A_{Kreis} = \pi \cdot 8^2$ $A = A_{Mitte} + 2 \cdot A_{Ende} + A_{Kreis} \approx 1040 + 160 + 201 = 1401$ Die Fläche ist rund 1400 m^2 groß. • Es ist $V = A \cdot d = 1400 \cdot 0{,}055 = 77$ und damit folgt für die Masse $m = 77 \cdot 900 = 69300$. Die Masse des Eises beträgt 69300 kg.	4	2	
b)	• Es ist $s = \sqrt{20^2 + 13^2} \approx 23{,}85$. Die Strecke s beträgt rund 23,85 m. • Es ist $\tan(\alpha) = \frac{13}{20} = 0{,}65$ und damit $\alpha = \tan^{-1}(0{,}65) \approx 33{,}02°$. Der Winkel beträgt rund 33°.	2	3	
c)	Für den Innenwinkel des Dreiecks am Punkt P gilt: $\varepsilon = 180° - 2 \cdot 34° = 112°$ und für den Innenwinkel des Dreiecks am Punkt S_2 gilt: $\beta = 180° - \varepsilon - 40° = 28°$ Dann gilt: $\frac{\overline{S_2P}}{\sin 40°} = \frac{\overline{S_1S_2}}{\sin \varepsilon}$ $\overline{S_2P} = \sin 40° \cdot \frac{\overline{S_1S_2}}{\sin \varepsilon} = \sin(40°) \cdot \frac{22}{\sin(112°)} \approx 15{,}25$ und $\frac{\overline{S_1P}}{\sin \beta} = \frac{\overline{S_1S_2}}{\sin \varepsilon}$ $\overline{S_1P} = \sin \beta \cdot \frac{\overline{S_1S_2}}{\sin \varepsilon} = \sin(28°) \cdot \frac{22}{\sin(112°)} \approx 11{,}14$ Damit beträgt die gesamte Länge $15{,}25 + 11{,}14 = 26{,}39$ und ist somit um 4,39 m länger als der direkte Weg.	1	5	

Lösungsskizze		**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
d)	Man bildet das Lot von Punkt S_2 zur oberen Spielfeldbegrenzung und erhält ein rechtwinkliges Dreieck. In diesem Dreieck ergibt sich die Strecke vom Lotpunkt zu P mithilfe der Strecke $\overline{S_2P}$ und dem Kosinus von 34°. Subtrahiert man nun von der halben Strecke von l die soeben errechnete Strecke vom Lotfußpunkt zu P und den Abstand des Spielers S_2 von der Torlinie, so erhält man den gewünschten Abstand von P zu A.			5
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

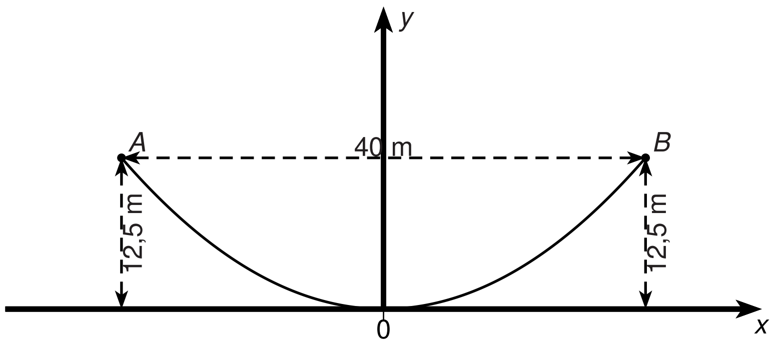
16. Schiefer Kirchturm

Lösungsskizze		**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
a)	Für das Volumen des Quaders gilt: $V_{Quader} = 11 \cdot 11 \cdot 17{,}7 = 2141{,}7$ Für das Volumen des Prismas ergibt sich: $V_{Prisma} = A_{Dreieck} \cdot 11$ $= 0{,}5 \cdot 11 \cdot 9{,}7 \cdot 11$ $= 53{,}35 \cdot 11 = 586{,}85$ Damit ergibt sich für das Gesamtvolumen des Kirchturms: $V = V_{Quader} + V_{Prisma} = 2141{,}7 + 586{,}85 = 2728{,}55$ Der Kirchturm hat ein Volumen von ca. 2730 m^3.	3		
b)	Die graue Dachfläche setzt sich aus zwei gleichen Rechtecken mit der Breite 11 m zusammen. Die Länge des Rechtecks entspricht der Länge s eines Schenkels im Dreieck und lässt sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen: $s = \sqrt{9{,}7^2 + \left(\frac{11}{2}\right)^2}$ $= \sqrt{124{,}34} \approx 11{,}15$ Dann ergibt sich die Dachfläche A_{Dach} als: $A_{Dach} = 2 \cdot s \cdot 11 \approx 245{,}3$ Die Dachfläche ist ca. 245,3 m^2 groß.	4		
c)	• Die Formel gilt für rechtwinklige Dreiecke.		6	

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>• Die Anwendung des Sinussatzes liefert:
$$\begin{aligned}\frac{\sin\gamma}{100} &= \frac{\sin(15{,}6°)}{27{,}3}\\ \sin\gamma &= \frac{\sin(15{,}6°)\cdot 100}{27{,}3}\\ \gamma &\approx 80{,}1°\end{aligned}$$
Also ist $\gamma \approx 80{,}1°$ groß. Da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, ergibt sich für α :
$\alpha = 180° - (15{,}6° + 80{,}1°) = 84{,}3°$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Für den Überstand x gilt:
$\cos\alpha = \frac{x}{27{,}3}$
Damit ergibt sich für x:
$x = \cos(84{,}3°) \cdot 27{,}3 \approx 2{,}7$
Der Kirchturm ist um ca. 2,7 m zur Seite geneigt.</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Der Überstand x ist beim Turm von Pisa mit 4 m größer als der des Kirchturms mit 2,7 m.
Für den Kirchturm in Suurhusen ergibt sich der Neigungswinkel aus der Winkelsumme im Dreieck:
$\delta = 180° - (84{,}3° + 90°) = 5{,}7°$
Der Neigungswinkel des Turms von Pisa ist mit 4° kleiner als der des Kirchturms mit 5,7°.
Je nach Kriterium ist entweder der Kirchturm oder der Turm von Pisa schiefer. Daher kann keine eindeutige Aussage getroffen werden.</td><td></td><td></td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Insgesamt 22 BWE</td><td>7</td><td>10</td><td>5</td></tr>
</table>

8.2 Erwartungshorizonte zu Aufgaben der Leitidee des funktionalen Zusammenhangs

1. Brücken

	Lösungsskizze	**Zuordnung** **Bewertung**		
		I	II	III
a)	Zeichnung z. B. so:  *A*(˘20|12,5) und *B*(20|12,5)	3		
b)	Gleichung 3. ist richtig, denn die Funktion ist gestaucht und nicht entlang der x-Achse und der y-Achse verschoben. Damit kommen f_1, f_2 und f_4 nicht infrage.	1	1	
c)	Aus Symmetriegründen müssen lediglich 3 Einzellängen berechnet werden, da jede Seillänge viermal auftritt. Für die Gesamtlänge der Seile gilt also $4 \cdot (f(5) + f(10) + f(15)) = 4 \cdot (0{,}78125 + 3{,}125 + 7{,}03125)$ $= 4 \cdot 10{,}9375 = 43{,}75$. Bei korrekter Auswahl in Aufgabenteil b) ergeben sich damit 43,75 m.		4	
d)	Da eine Fahrbahnseite nach den Angaben aus der Abbildung 5 m breit ist, ergibt sich die maximale Durchfahrtshöhe zu $\|f(5)\|$ m = 4 m.		2	
e)	Eine Fahrzeughöhe von 3,19 m bedeutet, dass bis zur maximalen Durchfahrts¬höhe noch 0,81 m fehlen. Es ist also die Gleichung $0{,}81 = -0{,}16x^2$ zu lösen. Die negative der beiden Lösungen ist irrelevant, da das Fahrzeug auf der rechten Fahrbahnhälfte fahren muss. Das Fahrzeug darf also maximal 2,25 m breit sein.			4

Lösungsskizze		**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
f)	$c = 45$. Zur Berechnung von a können die Koordinaten des Punktes $P(50\|20)$ genutzt werden: $20 = a \cdot 50^2 + 45$ $20 = 2500a + 45$ $2500a = -25$ $a = -\frac{1}{100}$ Die Gleichung des Brückenbogens lautet damit $y = -\frac{1}{100}x^2 + 45$.	1	3	
g)	Die Fußpunkte der beiden Pfeiler lassen sich durch die Nullstellen der Parabel beschreiben: $-\frac{1}{100} \cdot x^2 + 45 = 0$ $x^2 = 4500$ $x \approx \pm 67{,}08$ Entfernung der Pfeilerfußpunkte: $2 \cdot 67{,}08 = 134{,}16$ Die Fußpunkte der Pfeiler sind etwa 134 m voneinander entfernt.		3	
	Insgesamt 22 BWE	5	13	4

2. ^{14}C

Lösungsskizze		**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
a)	$f(5\,730) = 0{,}5^{\frac{5\,730}{5\,730}} = 0{,}5 = 50\ \%$ $f(11\,500) = 0{,}5^{\frac{11\,500}{5\,730}} \approx 0{,}249 \approx 25\ \%$	2	3	

	Lösungsskizze	**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
b)	Der Graph: 	2	2	
c)	$0{,}53 = 0{,}5^{\frac{x}{5\,730}}$ Erweitern mit dem Logarithmus liefert $\lg 0{,}53 = \frac{x}{5\,730} \cdot \lg 0{,}5$ $x = 5\,248{,}3$ Ötzi starb vor etwa 5 250 Jahren.		2	2
d)	Altersbestimmung: $1\,922 - (-1\,323) = 3\,245$. $f(3\,245) = 0{,}5^{\frac{3\,245}{5\,730}} = 0{,}6753 = 67{,}53\,\%$ In Tutanchamuns Mumie waren noch ca. 67,5 % des ursprünglichen ^{14}C-Anteils vorhanden.	2	2	
e)	Der noch vorhandene Anteil an ^{14}C ist $\frac{0{,}97}{15{,}3} \approx 0{,}0634$. Es gilt $0{,}0634 = 0{,}5^{\frac{x}{5\,730}}$ $x \approx 22802$ Die Höhlenmalereien sind danach etwa 23 000 Jahre alt.		3	2
	Insgesamt 22 BWE	6	12	4

3. Laichplätze

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	$1\,000 \cdot 0{,}97^{11} \approx 715{,}3$. Ungefähr 715 Fische erreichen die Laichplätze.	1		
b)	Nach 5 Gefahrenstufen:$0{,}97^{5} \approx 0{,}858 > 0{,}85$. Nach 6 Gefahrenstufen: $0{,}97^{6} \approx 0{,}832 < 0{,}85$. Also sind nach 6 Gefahrenstufen erstmals weniger als 85 % der ursprünglichen Fischzahl unterwegs.		3	
c)	$\big((1\,000 \cdot 0{,}97^{5} - 250) \cdot 0{,}97^{5} - 250\big) \cdot 0{,}97 \approx 264{,}56$; also ungefähr 264 Fische. Etwa 26,4 % der Lachse erreichen ihr Ziel.	1	2	1
d)	• a) Doppelt so viele Fische am Anfang: ungefähr 1 430 Fische am Ende (doppelt so viele Fische am Ziel). c) $\big((2\,000 \cdot 0{,}97^{5} - 250) \cdot 0{,}97^{5} - 250\big) \cdot 0{,}97 \approx 979{,}86$; also ungefähr 980 Fische. Anteil: $\frac{980}{2\,000} \approx 0{,}49 = 49\%$ Anzahl fast viermal so groß; Anteil fast doppelt so viel. • a) $1\,000 \cdot 0{,}94^{11} \approx 506{,}3$; also ungefähr 506 Fische (mehr als die Hälfte) c) $\big((1\,000 \cdot 0{,}94^{5} - 250) \cdot 0{,}94^{5} - 250\big) \cdot 0{,}94 \approx 98{,}8$; also ungefähr 98 Fische Anteil: $\frac{98}{1\,000} \approx 0{,}098 = 9{,}8\ \%$. Anzahl weniger als die Hälfte; Anteil etwas weniger als ein Drittel.	3	4	1
e)	$\big((1\,000 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}97^{4} - 250) \cdot 0{,}97^{5} - 250\big) \cdot 0{,}97 \approx 139{,}2$. $\big((1\,000 \cdot 0{,}97^{5} - 250) \cdot 0{,}97^{5} - 250\big) \cdot 0{,}8 \approx 218{,}2$. Die Zahl der Fische, die ihr Ziel erreichen, ist größer, wenn die letzte Gefahrenstelle eine Verlustrate von 20 % bewirkt.		2	1

	Lösungsskizze	**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
f)	Das exponentielle Wachstum ist für die Lachswanderung geeignet, da eine konstante prozentuale Abnahme von Stufe zu Stufe angenommen (z. B. 3 %) wird. Allerdings sind die Annahmen idealisiert und es wird in den Teilaufgaben deutlich, dass es in der Umwelt eine Vielzahl an äußeren Faktoren gibt, die auf die Lachswanderung einwirken. Beispiele hierfür sind Nahrung, Fressfeinde, Krankheiten u. ä. Eine Abgrenzung zu anderen Wachstumsarten, wie dem linearen Wachstum ist sinnvoll. Lineares Wachstum ist hier nicht geeignet, da in diesem Fall eine gleichmäßige absolute Abnahme an Lachsen vorliegen müsste.			3
	Insgesamt 22 BWE	5	11	6

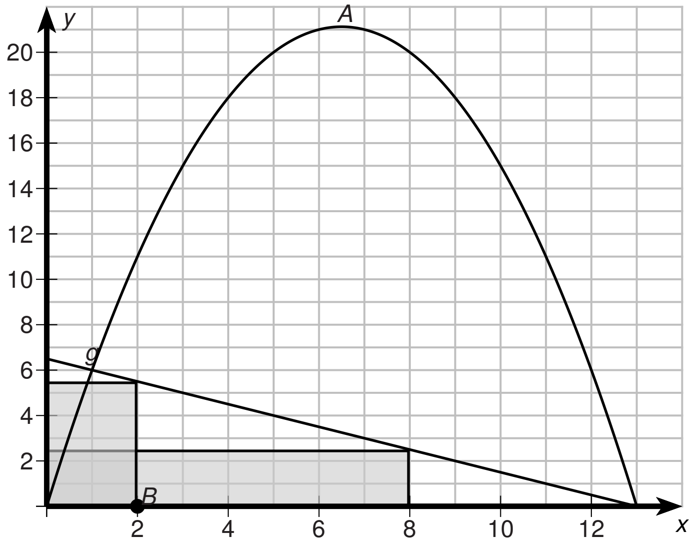
4. Medikamente

	Lösungsskizze	**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
a)	Die Gleichung erfüllt $f(0) = 4$. Die Konzentration soll pro Stunde um 5 % sinken, es bleiben also 95 % noch vorhanden, also $f(x) = 4 \cdot 0{,}95^x$ mit x für die Zeit in Stunden und $f(x)$ für die Konzentration im mg pro Liter Blut.	3		
b)	Nach 1 Stunde: $f(1) = 4 \cdot 0{,}95^1 = 3{,}8$. Nach 4 Stunden: $f(4) = 4 \cdot 0{,}95^4 \approx 3{,}26$. Nach 12 Stunden: $f(12) = 4 \cdot 0{,}95^{12} \approx 2{,}16$. Die Konzentration beträgt nach einer Stunde noch 3,8 mg, nach 4 Stunden etwa 3,26 mg und nach zwölf Stunden etwa 2,16 mg pro Liter.		3	
c)	Konzentration nach 20 Minuten: 20 Minuten sind genau $\frac{1}{3}$ Stunde, daher ist $f(tfrac13) = 4 \cdot 0{,}95^{\frac{1}{3}} \approx 3{,}93$. Nach zwanzig Minuten müsste die Konzentration 3,93 mg pro Liter betragen.		2	

Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	Zu lösen ist folgende Ungleichung: $4 \cdot 0{,}95^x < 0{,}2$ $0{,}95^x < 0{,}05$ $x \cdot \lg\ 0{,}95 < \lg\ 0{,}05$ $x > \frac{\lg\ 0{,}05}{\lg\ 0{,}95}$ $x > 58{,}404$ Nach etwa 58 Stunden und 24 Minuten ist die Unverträglichkeitsgrenze unterschritten.		4	
e)	Der Term wird gebildet aus Bestand – Abnahmerate mal Zeit: $g(x) = 4 - 0{,}2x$.	2		
f)	Exponentielles negatives Wachstum: Die Abnahme (pro Stunde) geschieht proportional zum Bestand: Je kleiner die Konzentration im Blut, desto weniger verringern sich die Werte in mg/l. Theoretisch wird die Substanz nie ganz abgebaut, weil die Exponentialfunktion f niemals Null werden kann. Lineares negatives Wachstum: Die Abnahme geschieht immer um den gleichen Betrag pro Stunde. Das hat auch zur Folge, dass in diesem Modell die Substanz vollständig abgebaut wird, im Beispiel ist dieser Zustand nach 20 Stunden erreicht.		4	
g)	Funktionsgleichung für exponentiellen Abbau nach P: $h(12{,}5) = a = 1{,}5$, also steht a schon fest. $h(32) = 1{,}5 \cdot b^{32-12{,}5} = 0{,}11$. Damit ergibt sich für b: $b^{19{,}5} = \frac{0{,}11}{1{,}5}$ $b = \left(\frac{0{,}11}{1{,}5}\right)^{\frac{1}{19{,}5}}$ $b \approx 0{,}875$ Damit ist $h(x) = 1{,}5 \cdot 0{,}875^{x-12{,}5}$. Interpretation der berechneten Parameter: $a = 1{,}5$ ist der Bestand zum Zeitpunkt 12,5, der pro Stunde um ca. 12,5 % ($b \approx 1 - 0{,}125$) abgebaut wird.			4
	Insgesamt 22 BWE	5	13	4

5. Flächeninhalt eines Rechtecks

	Lösungsskizze	**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
a)	Für das Rechteck *OBCD* ergibt sich: $A_{OBCD} = 2 \cdot 5{,}5 = 11$ und für das Rechteck *OEFG*: $A_{OEFG} = 8 \cdot 2{,}5 = 20$. Der Flächeninhalt des Rechtecks *OBCD* beträgt 11 cm^2, der des Rechtecks *OEFG* 20 cm^2.	2		
b)	$g(x) = -0{,}5x + 6{,}5$		3	
c)	$g(x) = -0{,}5x + 6{,}5$. Eine Möglichkeit ist, $x = -2$ in die Funktionsgleichung einzusetzen. $g(-2) = -0{,}5 \cdot (-2) + 6{,}5 = 1 + 6{,}5 = 7{,}5$. Also liegt der Punkt $(-2 \vert 7{,}5)$ auf der Geraden g. Ersatzlösung: $h(x) = -0{,}5x + 5{,}5$. $h(-2) = -0{,}5 \cdot (-2) + 5{,}5 = 1 + 5{,}5 = 6{,}5 \neq 7{,}5$. Der Punkt $(-2 \vert 7{,}5)$ liegt nicht auf der Geraden h.	3		
d)	$A(x) = x \cdot g(x) = x \cdot (-0{,}5x + 6{,}5) = -0{,}5x^2 + 6{,}5x$		3	
e)	Berechnen der Nullstellen der quadratischen Funktion und anschließend Bestimmung der x-Koordinate des Scheitelpunktes durch Symmetrieüberlegungen: $A(x) = -0{,}5x^2 + 6{,}5x = x \cdot (-0{,}5x + 6{,}5)$ $A(x) = 0$ bedeutet $x = 0$ oder $-0{,}5x + 6{,}5 = 0$. Also: $A(x) = 0$ bedeutet $x = 0$ oder $x = 13$. Die x-Koordinate des Scheitelpunktes liegt in der Mitte zwischen den Nullstellen, d. h. der Scheitelpunkt liegt bei $x = 6{,}5$. Eingesetzt in A ergibt sich: $A(6{,}5) = -0{,}5 \cdot 6{,}5^2 + 6{,}5 \cdot 6{,}5 = -21{,}125 + 42{,}25 = 21{,}125$. Also ist $(6{,}5 \mid 21{,}125)$ der Scheitelpunkt von A. Das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt hat die Längen 6,5 cm und 3,25 cm. Der Flächeninhalt beträgt danach 21,125 cm^2.		5	2

Lösungsskizze		**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
f)	Die Funktion $f(x) = m \cdot x + b$ $(m \neq 0)$ hat die Nullstelle $x_0 = -\frac{b}{m}$. Das Rechteck mit den Seitenlängen x und $f(x)$ mit $f(x) = m \cdot x + b$ $(m < 0$ und $b > 0)$ hat den Flächeninhalt $A(x) = x \cdot f(x)$. Wegen $f(x) = m \cdot x + b$ gilt $A(x) = x \cdot (m \cdot x + b)$ Der Graph der Funktion A ist eine Parabel mit den Nullstellen 0 und $-\frac{b}{m}$. Wegen der Symmetrieeigenschaft von Parabeln quadratischer Funktionen liegt das Maximum der Funktion A in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen und damit an der Stelle $x_{\max} = -\frac{b}{2m} = \frac{1}{2} \cdot x_{Nullstelle}$.  			4
	Insgesamt 22 BWE	5	11	6

6. Herr Sorgenfrei

Lösungsskizze		**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
a)	$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ $93\,649{,}06 = 50000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^{16}$ $93\,649{,}06 = 93\,649{,}06$	2		
b)	Modell (A): Gewinn: $93\,649{,}06 - 50\,000 = 43\,649{,}06$ Steuern: $43\,649{,}06 \cdot 0{,}25 = 10\,912{,}27$ Nettoauszahlung: $93\,649{,}06 - 10\,912{,}27 = 82\,736{,}79$	1	2	

Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	Modell (B): $50000 \cdot 1{,}0325^{16} \approx 83408{,}63$ Das Modell (B) ist trotz niedriger Zinsen wegen der Steuerfreiheit um 671,84 € ertragreicher.	1	1	
d)	$100\,000 = 50\,000 \cdot \left(1 + \frac{3{,}25}{100}\right)^{x}$ $1{,}0325^{x} = 2$ $x \approx 21{,}7$ Herr Sorgenfrei müsste sein Geld etwa 21,7 Jahre anlegen.		2	
e)	Zur Überprüfung ist ein beliebiges Startkapital K_0 gegeben. Entsprechend ist das Doppelte Kapital $2 \cdot K_0$. Wir rechnen den Zeitpunkt wie in Teilaufgabe d) nach: $2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + \frac{3{,}25}{100})^{x}$ $1{,}0325^{x} = 2$ $x = \log_{1{,}0325} 2$ $x \approx 21{,}7$ Er muss das Geld genauso lange anlegen, da der Zeitraum für die Verdoppelung des Kapitals nicht vom Anfangskapital abhängig ist.			2
f)	$93\,649{,}06 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{3{,}25}{100}\right)^{14}$ $K_0 \approx 59\,847{,}03$ Die Schwester von Herrn Sorgenfrei müsste 59 847,03 € anlegen.	1	2	
g)	Nach 16 Jahren: $50000 \cdot \left(1 - \frac{2}{100}\right)^{16} = 50000 \cdot 0{,}98^{16} \approx 36189{,}89$ Nach 16 Jahren ist das Kapital von 50 000 € noch ca. 36 190 € Wert.	1	2	
h)	Modell (A): $82\,736{,}79 \cdot 0{,}98^{16} \approx 59\,884{,}70$ Wert des Vermögens entsprechend dem Modell (A): ca. 59 885 €.	1	1	

Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
i)	Modell (A) setzt voraus, dass das Geld im Anlegezeitraum nicht zur Verfügung steht. Wenn man auf sein Kapital jederzeit zugreifen möchte, ist dieses Modell nicht geeignet. Hinsichtlich des Zinssatzes in Höhe von 4 % ist es jedoch langfristig lohnend, dafür muss das Kapital versteuert werden. Modell (B) hat einen geringeren Zinssatz von 3,25 % und ist steuerfrei. Dadurch ist es für den betrachteten Zeitraum geeigneter als Modell (A). Außerem kann das Geld jederzeit wieder abgehoben werden, wodurch es flexibler an die Lebensumstände angepasst ist. Die Wahl des Modells bei dieser Bank hängt somit von verschiedenen Voraussetzungen ab, die abhängig von individuellen Rahmenbedingungen sind.			3
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

7. Gefahr aus dem Weltall

Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Aus der Zeichnung abgelesen: verdoppelt nach 20 Minuten, verfünffacht nach ca. 45 Minuten.	2		
b)	$f(x) = 2^x$ x in Einheiten von 20 Minuten $w(x) = 2^{3x} = 8^x$ x in Einheiten von Stunden	1	1	
c)	$w(5) = 8^5 = 32\,768$ Nach 5 Stunden beträgt die Länge des Wurms 32 768 mm oder ca. 32,77 m.		4	
d)	$v = 300\,000\ ^{\text{km}}/_{\text{s}} = 1{,}08 \cdot 10^9\ ^{\text{km}}/_{\text{h}}$. $s(1\text{ h}) = 1{,}08 \cdot 10^9\text{ km} = 1\,080\,000\,000\text{ km}$ $s(1\text{ Tag}) = 1{,}08 \cdot 10^9\ ^{\text{km}}/_{\text{h}} \cdot 24\text{ h} = 2{,}592 \cdot 10^{10}\text{ km} = 25\,920\,000\,000\text{ km}$	1	2	
e)	Das Funksignal breitet sich linear aus; das Wurmwachstum hingegen verläuft exponentiell.		1	1

	Lösungsskizze	**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
f)	Es ist $2{,}59 \cdot 10^{10}$ km $= 2{,}59 \cdot 10^{16}$ mm $2{,}59 \cdot 10^{16} = 8^{x}$ $x \approx 18{,}17$ Nach etwas mehr als 18 Stunden (bzw. 13 Stunden nach Absenden des Warnsignals) hat der Wurm die Erde mit seinem Vorderteil erreicht.		3	2
g)	Das Funksignal braucht 24 Stunden, um die Erde zu erreichen, d. h. es erreicht die Erde erst 29 Stunden nach Beginn der Katastrophe. Es kommt damit zu spät auf der Erde an.	2	1	1
	Insgesamt 22 BWE	6	12	4

8. Abbau eines Wirkstoffs

	Lösungsskizze	**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
a)	5 % von 1 g sind 0,05 g 35 % von 50 mg sind 17,5 mg. Es gelangen 17,5 mg des Wirkstoffes in den Körper.	2		
b)	Die allgemeine Gleichung lautet: $f(t) = a \cdot b^{t}$. Da es sich um einen Abbauprozess handelt, ist $0 < b < 1, b = 1 - p\% = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$. Der Anfangswert ist $a = f(0) = 17{,}5$, also $f(t) = 17{,}5 \cdot 0{,}75^{t}$, t in Tagen.	4		
c)	$f(3) = 17{,}5 \cdot 0{,}75^{3} \approx 7{,}383$. Nach drei Tagen sind noch etwa 7,4 mg des Wirkstoffes im Körper vorhanden. $\frac{7{,}383}{17{,}5} \approx 0{,}42$ Dies sind 42 % der Ausgangsmenge.		4	
d)	Nach einem Tag: $17{,}5 \cdot 0{,}75 = 13{,}125$. Nach zwei Tagen: $(13{,}125 + 17{,}5) \cdot 0{,}75 \approx 22{,}969$. Nach drei Tagen: $(22{,}969 + 17{,}5) \cdot 0{,}75 \approx 30{,}352$. Nach drei Tagen befinden sich schon 30,352 mg des Wirkstoffes im Körper.		8	

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>Zu lösen ist folgende Gleichung:
$(x + 17{,}5) \cdot 0{,}75 = x$.
$$\begin{aligned} 0{,}75 \cdot x + 13{,}125 &= x \\ 0{,}25 \cdot x &= 13{,}125 \\ x &= 52{,}5 \end{aligned}$$Die Wirkstoffmenge im Blut vor der Einnahme der neuen Tablette beträgt jeden Morgen 52,5 mg.</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Insgesamt 22 BWE</td><td>6</td><td>12</td><td>4</td></tr>
</table>

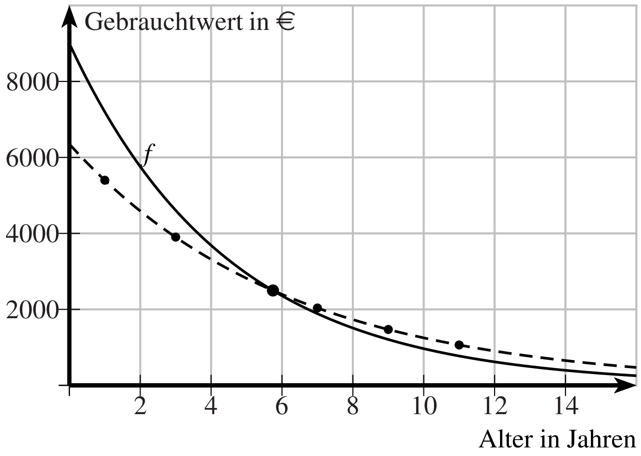
9. Barometer

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Ermittlung der Steigung zwischen dem ersten und dem zweiten Punkt.
$m_{12} = \frac{656-1013}{3500} = \frac{-357}{3500} = -0{,}102$
Ermittlung der Steigung zwischen dem zweiten und dem dritten Punkt.
$m_{23} = \frac{639-656}{3700-3500} = \frac{-17}{200} = -0{,}085$
Da die Steigungen unterschiedlich sind, liegt kein linearer Zusammenhang vor.</td><td>4</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Hier eine Tabelle mit den Funktionswerten:
<table>
<tr><td>Höhe in m</td><td>0</td><td>3500</td><td>3700</td></tr>
<tr><td>gemessener Luftdruck in hPa</td><td>1013</td><td>656</td><td>639</td></tr>
<tr><td>berechneter Luftdruck in hPa</td><td>1013</td><td>655,56</td><td>639,45</td></tr>
</table>
Die Abweichungen der gemessenen Werte von den Funktionswerten sind so gering, dass die Funktion p den Luftdruck gut beschreibt.</td><td>3</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Aus $p(h) = 1013 \cdot 10^{-0{,}000054 \cdot h} = 685$ folgt
$\frac{685}{1013} = 10^{-0{,}000054 \cdot h}$
$\lg\left(\frac{685}{1013}\right) = -0{,}000054 \cdot h$
$h = \frac{\lg\left(\frac{685}{1013}\right)}{-0{,}000054} = 3146{,}65 \approx 3147$
Peter befindet sich in einer Höhe von ungefähr 3147 m.</td><td></td><td>2</td><td>3</td></tr>
</table>

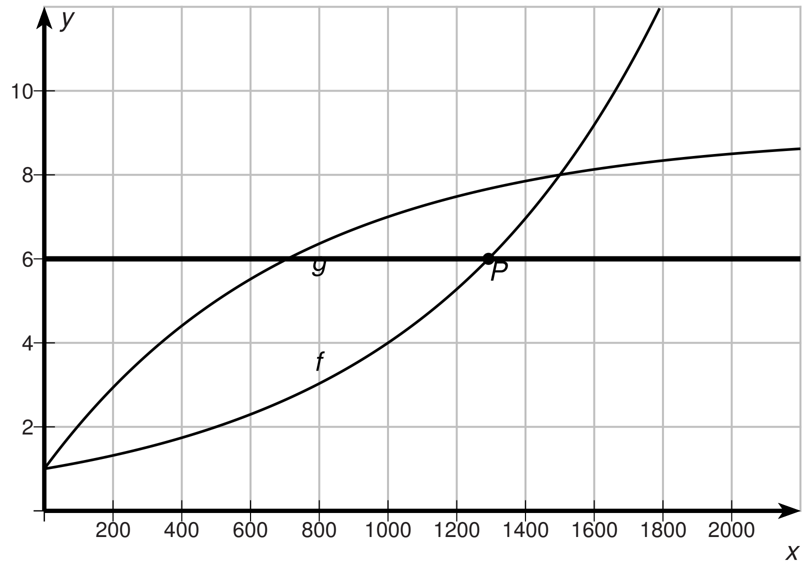
Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	Es muss der neue Wert für p_0 berechnet werden. Am Anfang der Rast auf der Höhe h ist der Luftdruck $p_A(h) = 1013 \cdot 10^{-0{,}000054\cdot h} = 685$ und am Ende der Rast ist auf der Höhe h der neue Luftdruck $p_E(h) = p_0 \cdot 10^{-0{,}000054\cdot h} = 680.$ Damit ergibt sich $\frac{p_0\cdot 10^{-0{,}000054\cdot h}}{1013\cdot 10^{-0{,}000054\cdot h}} = \frac{680}{685}$ $\frac{p_0}{1013} = \frac{680}{685}$ $p_0 = \frac{680}{685} \cdot 1013 \approx 1005{,}6$ Der neue Luftdruck auf Meereshöhe ist rund 1006 hPa.		3	2
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

10. Motorrad

Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Es ist $f(0) = 9000 \cdot 0{,}8^0 = 9000$ $f(1) = 9000 \cdot 0{,}8^1 = 7200$ $f(3) = 9000 \cdot 0{,}8^3 = 4608$ $f(7) = 9000 \cdot 0{,}8^7 = 1887$ $f(9) = 9000 \cdot 0{,}8^9 = 1208$ $f(11) = 9000 \cdot 0{,}8^{11} = 773$ Die Funktionswerte entsprechen den Tabellenwerten. *(Es sind nur zwei Wertepaare gefordert.)*	4		
b)	Der Wert des Motorrades reduziert sich jedes Jahr um 20 %. Er beträgt also lediglich 80 % bzw. das 0,8-fache des letzten Jahres. Es handelt sich hierbei also um einen Abnahmefaktor. Wäre die Zahl größer als eins, so handelte es sich um einen Wachstumsfaktor und der Wert des Motorrades würde jedes Jahr steigen.	3		
c)	Da das Motorrad nach dieser Funktion immer nur einen Anteil seines Wertes verliert, bleibt immer noch ein Gebrauchtwert übrig. Generell nähert sich eine Abnahmefunktion für große Werte der Variablen stets der Abszisse an und wird niemals null.		3	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	Es ist der Zeitpunkt zu bestimmen, an dem die Funktion f den Wert 150 annimmt. Also: $\begin{aligned} 150 &= 9000 \cdot 0{,}8^t \\ \frac{150}{9000} &= 0{,}8^t \\ \log_{0{,}8}\left(\frac{150}{9000}\right) &\approx 18{,}348 \end{aligned}$ Das Motorrad ist nach ca. 18,3 Jahren noch 150 € wert.		4	
e)	Mithilfe der Tabelle erhält man mit $g(1) = 5400$ die Gleichung $a = \frac{5400}{b}$. Einsetzen in z. B. $g(3) = a \cdot b^3 = 3902$ liefert: $\begin{aligned} \frac{5400}{b} \cdot b^3 &= 3902 \\ b^2 &= \frac{3902}{5400} \\ b &= \sqrt{\frac{3902}{5400}} \approx 0{,}85 \end{aligned}$ dann ist $a = \frac{5400}{0{,}85} \approx 6352{,}94$. Es ist also $g(t) \approx 6352{,}94 \cdot 0{,}85^t$.			5
f)	Es gibt die Möglichkeit die Punkte in der Abbildung 1 zu verbinden und dann den Schnittpunkt der beiden Graphen zu ermitteln.  Man erhält dann etwa den Wert 5,7. Rechnerisch ergibt sich: $\begin{aligned} 9000 \cdot 0{,}8^t &= 6353 \cdot 0{,}85^t \\ \frac{9000}{6353} &= \left(\frac{0{,}85}{0{,}8}\right)^t \\ \log_{\left(\frac{0{,}85}{0{,}8}\right)}\left(\frac{9000}{6353}\right) &\approx 5{,}745 \end{aligned}$ Nach ca. 5 Jahren und 9 Monaten ist der Gebrauchtwert beim zweiten Händler höher als beim ersten. *(Von den Prüflingen wird nur eine Variante erwartet.)*		3	
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

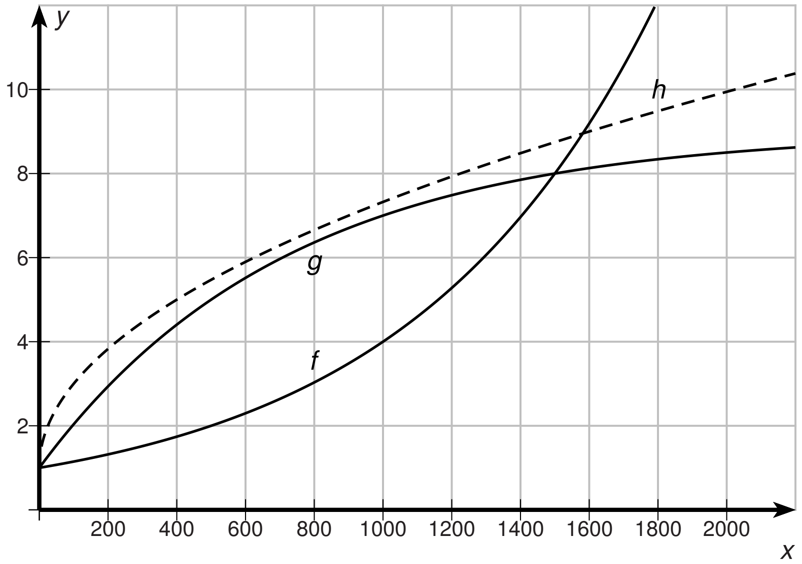
11. Entwicklung eines Pferdehof-Spiels

Lösungsskizze		**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
a)	Durch Einsetzen von x in die Funktion f erhält man: $f(600) = 2^{0{,}002\cdot 600} \approx 2{,}3$ $f(800) = 2^{0{,}002\cdot 800} \approx 3{,}03$ $f(1\,100) = 2^{0{,}002\cdot 1100} \approx 4{,}59$ Mit 600 Erfahrungspunkten erreicht ein Pferd Stufe 2, mit 800 Erfahrungspunkten Stufe 3 und mit 1100 Erfahrungspunkten Stufe 4.	3		
b)	Vom Schnittpunkt P des Graphen von f mit der Geraden $y = 6$ ist die x-Koordinate zu bestimmen. 	4		

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
Durch Einsetzen geeigneter Werte in die Funktion f muss man sich dem gesuchten Wert annähern.
Mit $f(1300) = 6{,}063$ erhält man einen zu hohen Wert und muss sich weiter rantasten. Hier bietet sich eine tabellarische Form an:
<table>
<tr><th>x</th><th>$f(x)$</th></tr>
<tr><td>1 290</td><td>5,979</td></tr>
<tr><td>1 292</td><td>5,996</td></tr>
<tr><td>1 293</td><td>6,004</td></tr>
<tr><td>1 295</td><td>6,021</td></tr>
</table>
Ein Pferd braucht 1293 Erfahrungspunkte, um die 6. Stufe zu erreichen.
<i>Alternative Lösung:</i>
Es ist $f(x) = 6$ nach x aufzulösen:

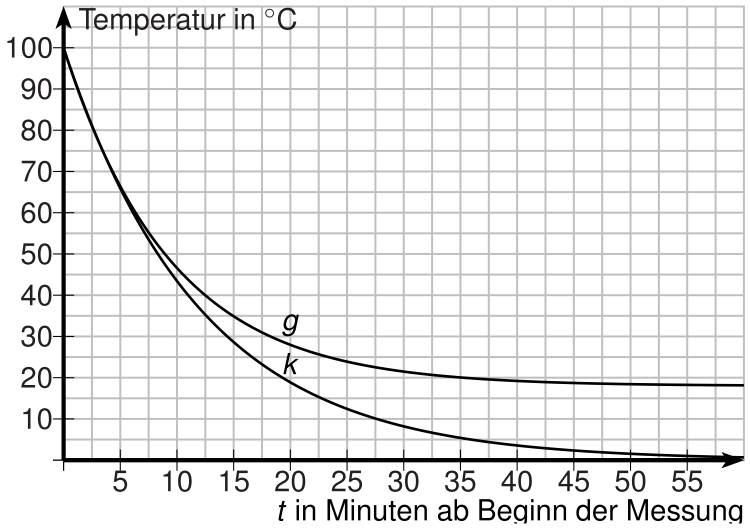
$$\begin{aligned} 6 &= 2^{0{,}002 \cdot x} \\ \log_2 6 &= 0{,}002 \cdot x \\ x &= \frac{\log_2 6}{0{,}002} \\ x &\approx 1\,292{,}48 \end{aligned}$$

Ein Pferd braucht 1293 Erfahrungspunkte, um die 6. Stufe zu erreichen.
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Die 9 gibt die Grenze an, an die sich der Graph der Funktion g anschmiegt. Egal wie groß die Werte für die Erfahrungspunkte werden, die Stufe 9 wird nie erreicht.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Die Graphen der Funktionen f und g schneiden sich bei $(0|1)$ und $(1\,500|8)$.
Der erste Schnittpunkt gibt an, dass man in beiden Modellen f und g mit 0 Erfahrungspunkten bereits in Stufe 1 ist.
Entsprechend zeigt der zweite Schnittpunkt, dass man bei 1500 Erfahrungspunkten zum ersten Mal die Stufe 8 erreicht.</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
</table>

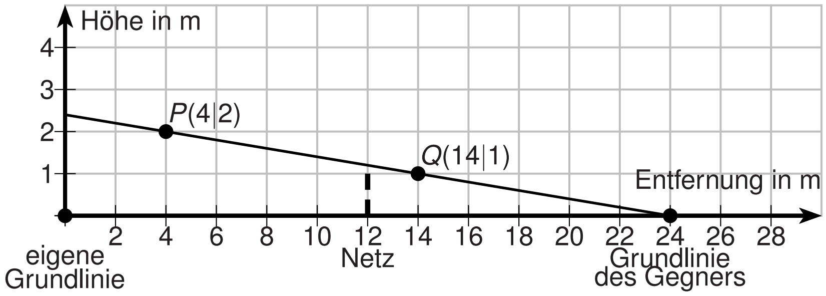
	Lösungsskizze	**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
e)	 Es geht einzig um den groben Verlauf des Graphen der Funktion *h*, wobei der Startwert stimmen soll. Es muss erkennbar sein, dass der Graph nicht gegen einen beschränkenden Wert strebt.		3	
f)	Das erste Modell *f* ermöglicht zwar unbegrenzt viele Erfahrungsstufen, aber der nötige Erfahrungspunktezuwachs, um eine neue Stufe zu erreichen, ist in einer höheren Stufe viel geringer als in einer niedrigen Stufe. Im zweiten Modell *g* werden der Anforderung entsprechend in einer kleinen Stufe weniger Erfahrungspunkte zur Erhöhung der Stufe benötigt wie in einer hohen Stufe, aber es kann maximal Stufe 8berreicht werden, was einem Designerziel widerspricht. Das dritte Modell *h* ist das geeignetste. Es berücksichtigt, dass der Stufenanstieg am Anfang schneller erfolgt, als im höheren Bereich und wächst unbegrenzt, so dass mit ausreichend vielen Erfahrungspunkten immer noch höhere Stufen erreicht werden können.			5
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

12. Pudding

Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	• Einsetzen der Werte 0, 5 und 10 in die Funktion f liefert: $f(0) = 80 \cdot 0{,}95^0 + 18 = 98$ $f(5) = 80 \cdot 0{,}95^5 + 18 \approx 79{,}90 \approx 80$ $f(10) = 80 \cdot 0{,}95^{10} + 18 \approx 66$ Die Funktion f gibt den Abkühlprozess annähernd genau wieder. • Es ist $\frac{f(5)-f(10)}{f(5)} \approx 0{,}175$. Die Temperatur fällt von der fünften zur zehnten Minute um rund 18 %.	3	2	
b)	Man erhält die Gleichungen I) $g(0) = 100$ II) $g(2) = 84{,}42$ Aus I) erhält man $a \cdot b^0 + 18 = 100$, also $a = 82$. Einsetzen in II) liefert $82 \cdot b^2 + 18 = 84{,}42$, also $b = \pm\sqrt{\frac{66{,}42}{82}} \approx \pm 0{,}9$. $b = -0{,}9$ ist auszuschließen. Also ist $g(t) = 82 \cdot 0{,}9^t + 18$.		3	2
c)	• Gleichsetzen der Funktionsterme von g und f liefert: $g(t) = f(t)$ $82 \cdot 0{,}9^t + 18 = 80 \cdot 0{,}95^t + 18$ $82 \cdot 0{,}9^t = 80 \cdot 0{,}95^t$ $\frac{82}{80} \cdot 0{,}9^t = 0{,}95^t$ $\frac{82}{80} = \left(\frac{0{,}95}{0{,}9}\right)^t$ $t = \log_{\frac{0{,}95}{0{,}9}} \left(\frac{82}{80}\right)$ $t \approx 0{,}46$ Nach ca. 0,46 Minuten nach Beginn der Messung hätte der Pudding gemäß beider Funktionen die gleiche Temperatur.	4	1	

Lösungsskizze		**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
	• Der Graph: 			
d)	• Jede Minute sinkt die Temperatur um 8 % ihres aktuellen Wertes. • Durch Ablesen erhält man, dass nach rund 8 Minuten die Einfülltemperatur erreicht ist. • Am Anfang passt die Funktion *k* noch ganz gut zu den Messwerten. Nach ca. 20 Minuten ab Beginn der Messung unterschreitet *k* die Raumtemperatur. Die Funktion *k* ist damit nicht geeignet den gesamten Abkühlprozess richtig zu beschreiben		4	3
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

13. Tennistraining

Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	• Die Flugbahn:  • Es ist $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-2}{14-4} = -\frac{1}{10} = -0{,}1$. • Die Höhe des Balls über der eigenen Grundlinie entspricht dem y-Achsenabschnitt der Geraden. Bisher ist bekannt: $y = -0{,}1 \cdot x + b$ Einsetzen des Punktes P liefert: $2 = -0{,}1 \cdot 4 + b$ Also ist $2 = -0{,}4 + b$ und damit $b = 2{,}4$. Die Höhe des Balls über der eigenen Grundlinie beträgt 2,4 m.	5		
b)	• Der Faktor $-\frac{1}{50}$ staucht die Parabel und bewirkt, dass sie nach unten geöffnet ist. Die -8 bewirkt eine Verschiebung der Parabel um 8 Einheiten in positive x-Richtung (also nach rechts). Die $+2{,}5$ verschiebt den Scheitelpunkt der Parabel um 2,5 Einheiten in positive y-Richtung. • $S(8\|2{,}5)$	2	2	
c)	Man erhält durch Äquivalenzumformung des Funktionsterms: $f(x) = -\frac{1}{50} \cdot (x-8)^2 + 2{,}5$ $= -\frac{1}{50} \cdot \left(x^2 - 16x + 64\right) + 2{,}5$ $= -\frac{1}{50}x^2 + 0{,}32x - 1{,}28 + 2{,}5$ $= -\frac{1}{50}x^2 + 0{,}32x + 1{,}22$ $= -0{,}02x^2 + 0{,}32x + 1{,}22$		3	
d)	• An der Stelle $x = 12$ befindet sich das Netz mit einer Höhe von 1 m. Da $g(12) > 1$ geht der Ball über das Netz. Da $g(24) < 0$ muss der Ball innerhalb des gegnerischen Feldes aufgekommen sein, da an der Auftreffstelle x_A gelten muss $g(x_A) = 0$.		5	

	Lösungsskizze	**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
	• Es ist $g(x) = 0$ nach x zu lösen: $-0{,}016 \cdot x^2 + 0{,}23 \cdot x + 1{,}22 = 0$ $x^2 - 14{,}375 \cdot x - 76{,}25 = 0$ $x_{1,2} = \frac{14{,}375}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{14{,}375}{2}\right)^2 + 76{,}25}$ $x_1 \approx 18{,}50 \quad x_2 = -4{,}12$ Der Ball kommt an der Stelle $x \approx 18{,}50$ auf dem Boden auf.			
e)	Aussage (1) ist falsch, da die Geschwindigkeit zu niedrig ist. Aussage (2) ist richtig, da man bei der Abbildung im weißen Bereich landet. Aussage (3) ist nicht korrekt. Lediglich im Bereich von 10,5 bis 28 m/s verbreitert sich der Winkelbereich. Für Geschwindigkeiten oberhalb von 28 m/s und unterhalb von 10,5 m/s, landet der Ball unabhängig vom Schlagwinkel nicht mehr im Feld. *Bei fehlender Begründung können auch korrekte Markierungen in der Abbildung bepunktet werden.*			5
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

8.3 Erwartungshorizonte zu Aufgaben der Leitidee Daten und Zufall

1. Mit und ohne Brille

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>$P(A) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \approx 0{,}222$
$P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$
$P(C) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1\,023}{1\,024} \approx 0{,}999$</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td><table>
<tr><th></th><th>Brille</th><th>keine Brille</th><th>gesamt</th></tr>
<tr><td>älter als 50 Jahre</td><td>4 000</td><td>0</td><td>4 000</td></tr>
<tr><td>50 Jahre und jünger</td><td>2 000</td><td>6 000</td><td>8 000</td></tr>
<tr><td>gesamt</td><td>6 000</td><td>6 000</td><td>12 000</td></tr>
</table></td><td>3</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$P(\mathit{Frage}\ 2) = \frac{4\,000}{6\,000} = \frac{2}{3} \approx 66{,}7\ \%$
$P(\mathit{Frage}\ 3) = \frac{4\,000}{12\,000} = \frac{1}{3} \approx 33{,}3\ \%$</td><td></td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>d)</td><td><table>
<tr><th></th><th>Brille</th><th>keine Brille</th><th>gesamt</th></tr>
<tr><td>älter als 50 Jahre</td><td>1 800</td><td>1 200</td><td>3 000</td></tr>
<tr><td>50 Jahre und jünger</td><td>2 700</td><td>3 300</td><td>6 000</td></tr>
<tr><td>gesamt</td><td>4 500</td><td>4 500</td><td>9 000</td></tr>
</table></td><td>3</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>$P(\mathit{Frage}\ 1) = \frac{1\,800}{3\,000} = 0{,}6 = 60\ \%$
$P(\mathit{Frage}\ 3) = \frac{1\,800}{9\,000} = 0{,}2 = 20\ \%$</td><td></td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Insgesamt 22 BWE</td><td>6</td><td>12</td><td>4</td></tr>
</table>

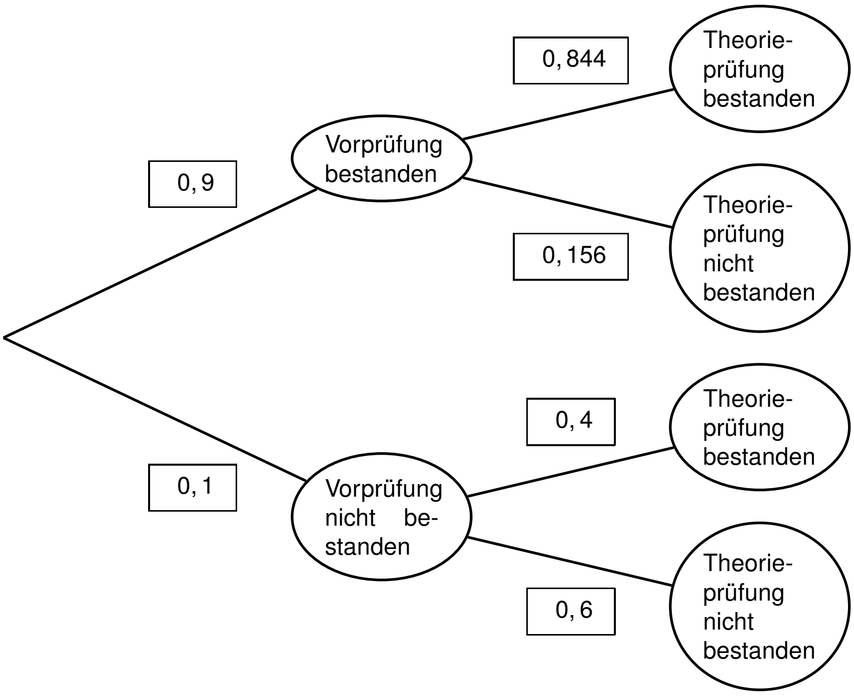
2. Dominosteine

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
<table>
<tr><td>Gesamtaugenzahl</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Anzahl der Steine mit diesem Augenwert</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>4</td><td>4</td><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Ein Spiel ist dann fair, wenn die Wahrscheinlichkeiten für Gewinnen und Verlieren gleich groß, also 50 %, sind.
Von den 55 Steinen haben 30 Steine eine einstellige Augenzahl und 25 Steine eine zweistellige Augenzahl. Die Wahrscheinlichkeit, einen beliebigen Stein zu ziehen, beträgt $\frac{1}{55}$.
Damit ist die Wahrscheinlichkeit, einen Stein mit einer einstelligen Augenzahl zu erhalten, $\frac{30}{55} \approx 0{,}545 \geq 0{,}5$.
Anna hat Recht. Das Spiel ist nicht fair.</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Das Domino-Spiel enthält 55 Steine, das ist eine ungerade Anzahl. Deshalb kann es keine Aufteilung für ein faires Spiel geben. Entweder Anna oder Leo wird immer mindestens ein Stein mehr zugeordnet.</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Auf lange Sicht erhält Leo durchschnittlich
$\frac{30}{55} \cdot 40$ ct = $\frac{240}{11}$ ct $\approx$ 21,82 ct pro Spiel, muss aber an Anna durchschnittlich $\frac{25}{55} \cdot 60$ ct = $\frac{300}{11}$ ct $\approx$ 27,27 ct abgeben.
Er macht also pro Durchführung durchschnittlich einen Verlust von ungefähr $\frac{300}{11} - \frac{240}{11} = \frac{60}{11} \approx 5{,}45$ ct.
Bei 50 Durchführungen macht Leo also einen durchschnittlichen Verlust von $\frac{60}{11} \cdot 50$ ct $\approx$ 273 t. Das sind etwa 2,73 €.</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Auch wenn das Spiel fair ist, sind immer Abweichungen vom Erwartungswert möglich. Deshalb hat Leo nicht Recht. Aus demselben Grund hat aber auch Anna nicht Recht. Selbst wenn sehr häufig gespielt wird, sind Abweichungen vom Erwartungswert immer möglich und sogar zu erwarten.</td><td></td><td>2</td><td>1</td></tr>
</table>

Lösungsskizze		**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
f)	Das Verhältnis der Anzahl der Steine mit einstelligen Augenzahlen zur Anzahl der anderen Steinen ist 30 : 25. Also muss das Verhältnis der Gewinne umgekehrt sein, also 25 : 30. Zum Beispiel kann Leo 25 Eurocent gewinnen und Anna 30 Eurocent. Auf lange Sicht nimmt damit Leo pro Durchführung $\frac{30}{55} \cdot 25$ ct = $\frac{150}{11}$ ct $\approx$ 13,64 ct ein, und für Anna beträgt die durchschnittliche Einnahme $\frac{25}{55} \cdot 30$ ct = $\frac{150}{11}$ ct $\approx$ 13,64 ct. Die Strategie steckt in der obigen Erläuterung. Das Verhältnis der Gewinne muss dem umgekehrten Verhältnis der Anzahl der Steine entsprechen. Damit erhält man beliebig viele Gewinnpläne.		4	2
	Insgesamt 22 BWE	6	11	5

3. Führerscheinprüfung

Lösungsskizze		**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
a)	In der Tabelle stehen (prozentual angegebene) relative Häufigkeiten von Ereignissen. Relative Häufigkeiten kann man dann bei genügend hoher Versuchszahl, d. h. hier Teilnehmerzahl, als Schätzwerte für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten verwenden. So kann man sagen, dass ein Fahrschüler, der sich ähnlich vorbereitet wie seine Vorgänger, ungefähr mit der Wahrscheinlichkeit 14 % die Vorprüfung besteht, aber die eigentliche theoretische Prüfung nicht. Bemerkung: Das Wort aber hat hier die gleiche logische Bedeutung wie das Wort und, es handelt sich hier also um die und-Verknüpfung der beiden Ereignisse „der Schüler besteht die Vorprüfung“ und „der Schüler besteht die eigentliche theoretische Prüfung nicht“. Hier ist in der Formulierung Sorgfalt geboten, denn im Gegensatz dazu handelt es sich auf der zweiten Stufe des Baumdiagramms in b) und im Aufgabenteil c) um bedingte Wahrscheinlichkeiten!	3		

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>b)</td><td>


Abkürzungen im folgenden:

Vb für Vorprüfung bestanden,

Vn für Vorprüfung nicht bestanden

Tb für Theoretische Fahrprüfung bestanden

Tn für Theoretische Fahrprüfung nicht bestanden
</td><td>4</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>
$P(A) = \frac{14}{90} \approx 0{,}156$
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrschüler, der die die Vorprüfung besteht, die theoretische Führerscheinprüfung nicht besteht, ist etwa 15,6 %.
$P(B) = \frac{4}{10} = 0{,}4$
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrschüler, der die Vorprüfung nicht besteht, die theoretische Führerscheinprüfung trotzdem besteht, ist 40 %.
$P(C) = P(Vn|Tn) = \frac{P(Vn \cap Tn)}{P(Tn)} = \frac{0{,}06}{0{,}2} = 0{,}3$
Für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrschüler, der die theoretische Führerscheinprüfung nicht bestanden hat, schon vorher die Vorprüfung nicht bestanden hat, ist 30 %.
</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
</table>

Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	Nach der Voraussetzung, dass die Theorie-Prüfung schon einmal nicht bestanden ist, müsste eine diesbezüglich bedingte Wahrscheinlichkeit angesetzt werden; hierüber sind keine Erfahrungswerte bekannt. Die vorgeführte einfache Quadrierung geht hingegen von Unabhängigkeit bzw. Unbedingtheit aus. Außerdem ist die (bedingte) Wahrscheinlichkeit durch Lernanstrengungen beeinflussbar; die Prüfung ist kein Zufallsexperiment.			3
e)	Die 25 Personen sind „gleichberechtigt“, d. h. für jede beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie die Vorprüfung nicht besteht, 10 %. Man kann auch aus dem Nichtbestehen der Vorprüfung einer Person nicht auf das Bestehen oder Nichtbestehen der anderen Personen schließen. Es ist also sinnvoll, stochastische Unabhängigkeit anzunehmen. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit P, dass alle 25 Personen die Vorprüfung bestehen: $P(Vb) = 0{,}9^{25} \approx 0{,}072$ Die Wahrscheinlichkeit, dass diesmal wenigstens ein Fahrschüler die Vorprüfung nicht besteht, beträgt also 92,8 %.		2	2
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

4. Auf dem Jahrmarkt

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>0</th><th>1</th><th>gesamt</th></tr>
<tr><td>rot</td><td>10</td><td>2</td><td>12</td></tr>
<tr><td>blau</td><td>18</td><td>6</td><td>24</td></tr>
<tr><td>gesamt</td><td>28</td><td>8</td><td>36</td></tr>
</table>
</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$
$P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
$P(C) = \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{81}$</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Um zu untersuchen, ob für den Glücksradbesitzer ein Verlust zu erwarten gewesen wäre, wird der Erwartungswert für die Auszahlung berechnet:
<table>
<tr><td>Ereignis</td><td>rot - 1</td><td>blau - 1</td><td>rot - 0</td><td>blau - 0</td></tr>
<tr><td>P(Ereignis)</td><td>$\frac{1}{18}$</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{5}{18}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td></tr>
<tr><td>Auszahlung</td><td>10 €</td><td>6 €</td><td>1 €</td><td>1 €</td></tr>
</table>
Der Erwartungswert beträgt:
$E = \frac{1}{18} \cdot 10 + \frac{1}{6} \cdot 6 + \frac{5}{18} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{7}{3} \approx 2{,}33$
Da der Einsatz pro Spiel nur 2 € beträgt, macht der Glücksradbesitzer pro Spiel einen durchschnittlichen Verlust von $\frac{1}{3}$ € bzw. etwa 33 ct. Der Verlust war zu erwarten gewesen.</td><td></td><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Die Wahrscheinlichkeit für ein grünes Feld mit einem Kleeblatt beträgt $\frac{1}{18}$.
Um mindestens einmal das grüne Feld zu erhalten, kann die Wahrscheinlichkeit mit dem Gegenereignis berechnet werden:
P(mind. einmal grün) = 1 − P(kein grün) = $1 - \frac{17}{18} \cdot \frac{17}{18} = \frac{35}{324} \approx 0{,}108$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 11 % und ist damit größer als in der Behauptung angegeben. Damit ist die Behauptung widerlegt.</td><td></td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="right">Insgesamt 22 BWE</td><td>7</td><td>12</td><td>3</td></tr>
</table>

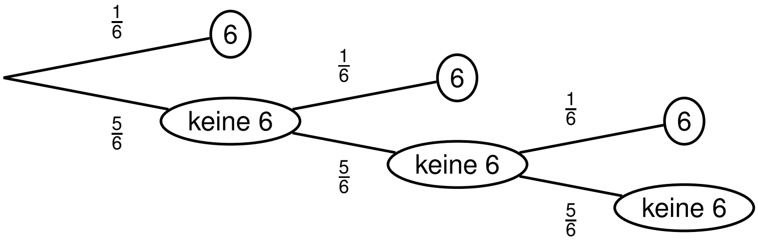
5. Lotterie

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Für die erste Ziffer (das erste Plättchen) gibt es 5 Möglichkeiten, für jede dieser 5 Möglichkeiten gibt es 4 Möglichkeiten für die nächste Ziffer u.s.w. Insgesamt gibt es also $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ verschiedene mögliche fünfstellige Zahlen, die gezogen werden können.	2		
b)	(A) Von den 120 bei der Ziehung gleichwahrscheinlichen möglichen Gewinnzahlen ist für den Käufer (eines einzigen Loses) genau eine günstig. Also ist $P(A) = \frac{1}{120} \approx 0{,}0083 \approx 0{,}83\ \%$. (B) Wenn nur die letzten beiden Ziffern übereinstimmen sollen, können die drei ersten Ziffern bei der Ziehung für den Losbesitzer beliebig sein. Dafür gibt es dann $3! = 6$ Varianten. Insgesamt gibt es von den 120 bei der Ziehung gleichwahrscheinlichen möglichen Zahlen also 6, bei denen die letzten beiden Ziffern mit denen des Losbesitzers übereinstimmen. Eine von diesen 6 Gewinnzahlen würde dem Losbesitzer aber einen Hauptgewinn bringen, so dass genau die verbleibenden fünf Gewinnzahlen zur „Überraschungsbox“ führen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also $P(B) = \frac{5}{120} = \frac{1}{24} \approx 0{,}0417 \approx 4{,}2\ \%$. (C) Genau dann, wenn bei der Ziehung als letzte Ziffer gerade die letzte Ziffer der Losnummer des Losbesitzers gezogen wird, bekommt dieser überhaupt einen Gewinn. Für die ersten vier beliebigen Ziffern gibt es $4! = 24$ Möglichkeiten. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also $P(C) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5} = 20\ \%$.	2	4	2
c)	Die Veranstalter haben 600 € Einnahmen und 12 € Materialkosten. Nachdem die Gewinnzahl gezogen worden ist, gibt es 10 Lose, die zu einem Hauptgewinn, dem Büchergutschein, gehören. Entsprechend der Argumentation von b) gibt es 50 Lose, die zur „Überraschungsbox“ gehören. Also müssen die Veranstalter noch 100 € für Überraschungen und 300 € für Buchgutscheine einkalkulieren. Dann bleiben also 188 € (= 600 − 12 − 100 − 300) als „Gewinn“ für die Veranstalter übrig. Es müssten 300 € ausgegeben werden, das sind als 50 % der Einnahmen von 600 €. Hier ist das nicht der Fall, da der Gewinn viel geringer ist.	2	3	2

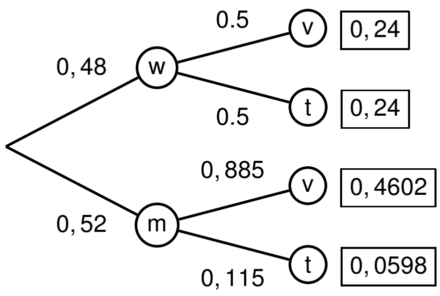
Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	Wenn nur 1 000 Lose verkauft werden, dann haben die Schüler nur noch Einnahmen in Höhe von 500 €. Im für sie ungünstigsten Fall haben sie dabei auch alle 60 Lose verkauft, die durch die Ziehung zu „Ausschüttungskosten“ führen. Dann bleiben als Gewinn gegenüber c) 100 € weniger, also 88 €. Im für die Schüler finanziell günstigsten Fall haben sie keines der 60 Lose verkauft, die durch die Ziehung zu „Ausschüttungskosten“ führen. Dann bleiben als Gewinn 488 €. Bemerkung: Dieser Fall wäre natürlich für die Veranstalter peinlich und würde sie Betrugsvorwürfen aussetzen, glücklicherweise sind die beiden genannten Extremfälle – vor allem der zweite – sehr unwahrscheinlich: $\approx 10^{-5}$ bzw. $5 \cdot 10^{-51}$		3	2
	Insgesamt 22 BWE	6	10	6

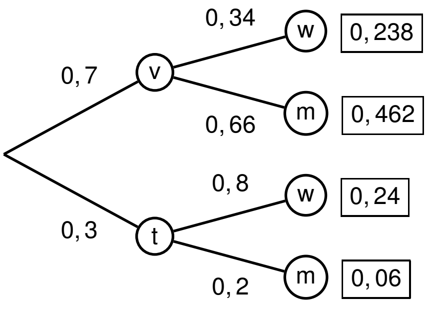
6. Mensch ärgere dich nicht

Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	(A) Eine „4“ führt auf das Feld a, eine „5“ auf das Feld b, eine „6“ auf das Feld *c*. Das Feld *d* ist mit einmaligem Würfeln nicht erreichbar. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „4, 5 oder 6“ beträgt $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. (B) Das Ereignis tritt ein, wenn man eine „1“ oder eine „3“ würfelt. Die Wahrscheinlichkeit für „1 oder 3“ beträgt $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.	4		
b)	Der dritte Wurf ist unabhängig von den beiden vorigen Würfen, also beträgt die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$.		2	

	Lösungsskizze	**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
c)	Dies ist ein mehrstufiger Vorgang. Deshalb ist ein Baumdiagramm nützlich. 1. Wurf 2. Wurf 3. Wurf  Wenn man in der ersten Runde auf das Startfeld rückt, so hat man entweder • im ersten Wurf eine Sechs, oder • man hat im ersten Wurf keine Sechs, aber im zweiten, oder • man zwei Würfe hintereinander keine Sechs und dann, im dritten, eine Sechs. Die Wahrscheinlichkeit nach dem ersten Wurf eine „6“ zu bekommen, ist $\frac{1}{6}$. Der zweite Wurf hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$. Der dritte Wurf hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$. Die Summe dieser drei Zahlen ist die gefragte Wahrscheinlichkeit, also $P(\text{Glück zu haben}) = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216} = \frac{91}{216} \approx 42\%$. Interpretation: Im Mittel in weniger als der Hälfte aller Fälle kann man seine Figur in der ersten Runde auf das Startfeld stellen. Dies hat also schon mit Glück zu tun, ist aber auch nicht unwahrscheinlich.	2	7	
d)	Felix hat neun Mal hinter einander keine Sechs gewürfelt. Dafür ist die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{5}{6}\right)^9 \approx 19{,}38\%$. Wenn etwas mit der Wahrscheinlichkeit von knapp 20 % vorkommt, so passiert es im Mittel in jedem fünften Fall und nicht „in jedem tausendsten Fall“.Felix hat also nicht Recht.		1	2
e)	Die Wahrscheinlichkeit, dass alle vier in der ersten Runde „rauskommen“, beträgt $\left(\frac{91}{216}\right)^4 \approx 3\%$, also beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass „mindestens einer nicht rauskommt“, ca. 97 %, das ist „fast sicher“. Allerdings ist Miriams Aussage richtig, aber keine passende Entgegnung zu Felix’ Unglück, sie hätte wie in d) argumentieren müssen.		2	2
	Insgesamt 22 BWE	6	12	4

7. Teilzeitarbeit

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Geschlecht</td><td rowspan="2">gesamt</td></tr>
<tr><td></td><td>weiblich (w)</td><td>männlich (m)</td></tr>
<tr><td>vollzeitbeschäftigt (v)</td><td>24 %</td><td>46 %</td><td>70 %</td></tr>
<tr><td>teilzeitbeschäftigt (t)</td><td>24 %</td><td>6 %</td><td>30 %</td></tr>
<tr><td>gesamt</td><td>48 %</td><td>52 %</td><td>100 %</td></tr>
</table>
</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$P(A) = \frac{46}{52} \approx 0{,}88$
$P(B) = \frac{24}{30} \cdot \frac{24}{30} = \frac{16}{25} = 0{,}64$
$P(C) = \frac{24}{48} \cdot \frac{24}{48} = \frac{1}{4} = 0{,}25$</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>
Baumdiagramm 1


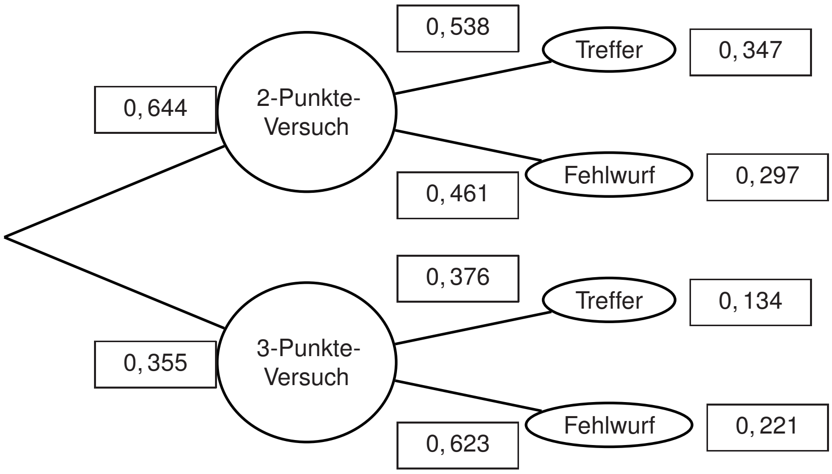
Baumdiagramm 2


</td><td>4</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Aussage 1 ist falsch, denn 50 % aller berufstätigen Frauen sind teilzeitbeschäftigt.Aussage 2 ist wahr, denn von den berufstätigen Männern sind lediglich 6% von 52 % teilzeitbeschäftigt. Das entspricht etwa 11 %.</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Insgesamt 22 BWE</td><td>8</td><td>10</td><td>4</td></tr>
</table>

8. Parkplatz

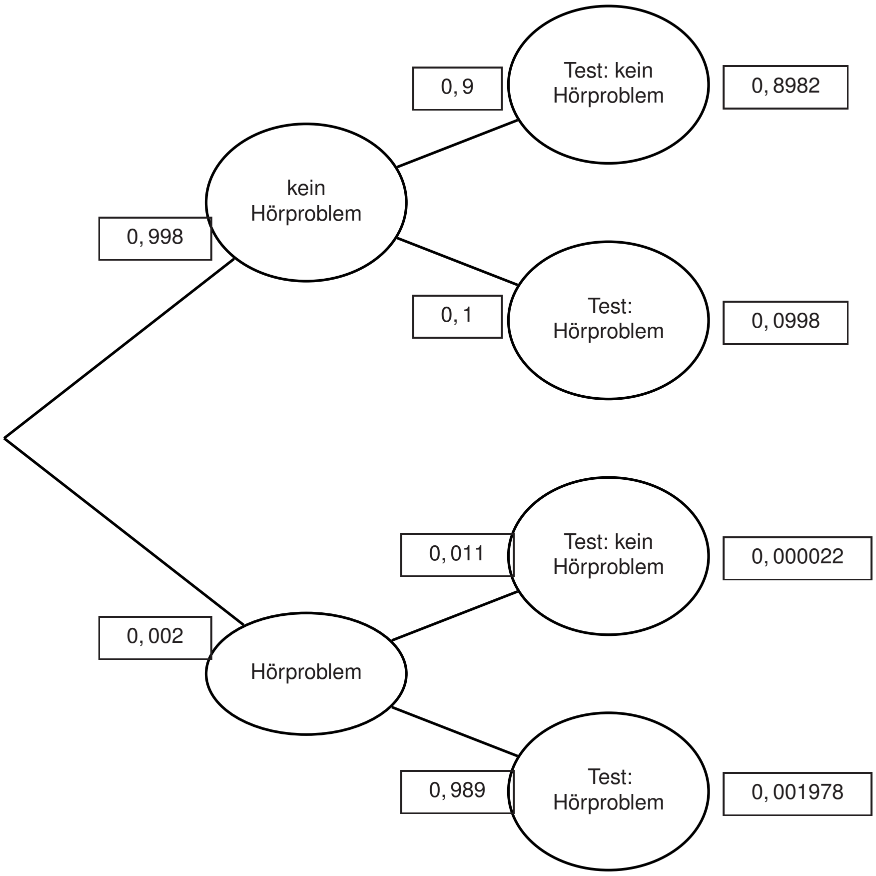
	Lösungsskizze	**Zuordnung Bewertung** I	II	III
a)	*Die Berechnung kann entweder über ein Baumdiagramm oder über eine Vierfeldertafel oder formelmäßig erfolgen:* $0{,}6 \cdot 0{,}25 + 0{,}4 \cdot 0{,}9 = 0{,}51$	4		
b)	$P(A) = 0{,}51^2 = 0{,}2601$ $P(B) = 0{,}51 \cdot 0{,}49 \cdot 2 = 0{,}4998$ $P(C) = 1 - P(A) = 0{,}7399$.	3	3	
c)	Wenn schon zu a) ein Baumdiagramm gezeichnet wurde, kann man direkt ablesen. Sonst muss gerechnet werden: $400 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}1 = 16$. Von 400 Autos erwartet man bei 16 Autos, dass der Fahrer nicht aus der Stadt kommt und kein Parkticket gelöst hat.		3	
d)	Hier geht es um eine bedingte Wahrscheinlichkeit: $P(\text{Fahrer kommt nicht aus Stadt}\mid\text{kein Ticket}) = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}1}{0{,}49} = 0{,}082$ Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass der Fahrer eines Autos ohne Parkticket nicht aus dieser Stadt kommt, 8,2 %.		2	1
e)	• Es ist $800 \cdot 2 \cdot 2 = 3200$ Wenn alle Autofahrer ein Parkticket lösen, nimmt die Stadt 3200 € ein. • Bei dem beschriebenen Parkverhalten kann die Stadt nur 51 % davon erwarten, also 1632 €.		2	2
f)	Sollte die Einstellung eines Kontrolleurs dazu führen, dass alle ein Parkticket lösen, so bekäme die Stadt durchschnittlich täglich 1568 € mehr Einnahmen, damit würde sich die Einstellung lohnen. Wenn weiterhin einige Fahrer kein Ticket lösen, würden die Einnahmen noch höher sein, da dann Strafzettel ausgestellt werden könnten. Es könnte aber auch sein, dass wesentlich weniger Autos hier parken, wenn häufiger kontrolliert wird. Dann würde es kaum erhöhte Einnahmen geben und die Einstellung würde sich nicht lohnen.			2
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

9. Basketball

	Lösungsskizze	**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
a)	Das ausgefüllte Baumdiagramm:  	5		
b)	$P(A) = \frac{453}{2043} = 0{,}2217... \approx 22{,}2\ \%$ $P(B) = \frac{607}{1060} = 0{,}5726... \approx 57{,}3\ \%$ $P(C) = (\frac{709}{1316})^4 = 0{,}0842... \approx 8{,}4\ \%.$ $P(D) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}0842... = 0{,}9157... \approx 91{,}6\ \%$	2	8	
c)	Wahrscheinlichkeit, mit der ein von der Mannschaft abgegebener Wurf ein 2-Punkte-Treffer ist: $P(2P) = \frac{709}{2043} = 0{,}3470... \approx 34{,}7\ \%$ Wahrscheinlichkeit, mit der ein von der Mannschaft abgegebener Wurf ein 3-Punkte-Treffer ist: $p(3P) = \frac{274}{2043} = 0{,}1341... \approx 13{,}4\ \%$ Damit ergibt sich folgender Erwartungswert für die Punkte pro Wurf: erwartete Punkte pro Wurf sind damit: $0{,}3470... \cdot 2 + 0{,}1341... \cdot 3 = 1{,}096...$ Pro Wurf werden durchschnittlich 1,096 Punkte erzielt.		2	1

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	Zuerst müssen die Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden, mit denen bei veränderten Trefferwahrscheinlichkeiten ein Wurf ein 2- bzw. 3-Punktetreffer ist. **Programm** *A***:** $P(2A) = \frac{1316}{2043} \cdot 0{,}60 = 0{,}3864... \approx 38{,}7\ \%$ erwartete Punkte pro Wurf: $0{,}3864... \cdot 2 + 0{,}1341... \cdot 3 = 1{,}175...$ **Programm** *B***:** $P(3B) = \frac{727}{2043} \cdot 0{,}40 = 0{,}1423... \approx 14{,}2\ \%$ erwartete Punkte pro Wurf: $0{,}3470... \cdot 2 + 0{,}1423... \cdot 3 = 1{,}121...$ Nach dem Durchlaufen von Trainingsprogramm *A* ist der erwartete Punktgewinn pro Wurf höher als bei Programm *B*, weshalb Programm *A* zu bevorzugen ist.			4
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

10. Hörtest

Lösungsskizze		Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Das ausgefüllte Baumdiagramm:  	4	2	
b)	Von den 50 889 Kindern, bei denen laut Test ein Hörproblem festgestellt wurde, haben nur 989 ein Hörproblem, aber 49 900 Kinder haben kein Hörproblem. Eltern dürfen also berechtigt hoffen, dass trotz des Testergebnisses das Kind kein Hörproblem hat.		2	2
c)	$P(A) = 0{,}898^3 \approx 0{,}724$ $P(B) = 1 - 0{,}898^3 \approx 0{,}276$ $P(C) = (0{,}102 \cdot 0{,}98)^3 \approx 0{,}001$	3	3	

Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)		3	3

- Es ist zunächst die Tabelle wie folgt auszufüllen:

2. Test	Hörproblem	kein Hörproblem	Summen
Test zeigt Hörproblem	*A*	*B*	*C*
Test zeigt kein Hörproblem	*D*	*E*	*F*
Summen	989	49 900	50 889

Es gilt für A mit der im umgekehrten Baumdiagramm vorgegebenen Wahrscheinlichkeit 0,989: $A = 0{,}989 \cdot 989 \approx 978$.

Dann gilt: $D = 989 - A \approx 989 - 978 = 11$

Es gilt für E mit der im umgekehrten Baumdiagramm vorgegebenen Wahrscheinlichkeit 0,9: $E = 0{,}9 \cdot 49900 = 44910$.

Dann gilt:$B = 49900 - E = 49900 - 44910 = 4990$

Außerdem gilt: $C = A + B \approx 978 + 4990 = 5968$

Und es gilt: $F = D + E \approx 11 + 44910 = 44921$

Somit ergibt sich für die Vierfeldertafel das Folgende:

2. Test	Hörproblem	kein Hörproblem	Summen
Test zeigt Hörproblem	978	4 990	5 968
Test zeigt kein Hörproblem	11	44 910	44 921
Summen	989	49 900	50 889

- Der Anteil beträgt $\frac{978}{5968} = \frac{489}{2984} \approx 0{,}164 = 16{,}4\ \%$

	I	II	III
Insgesamt 22 BWE	7	10	5

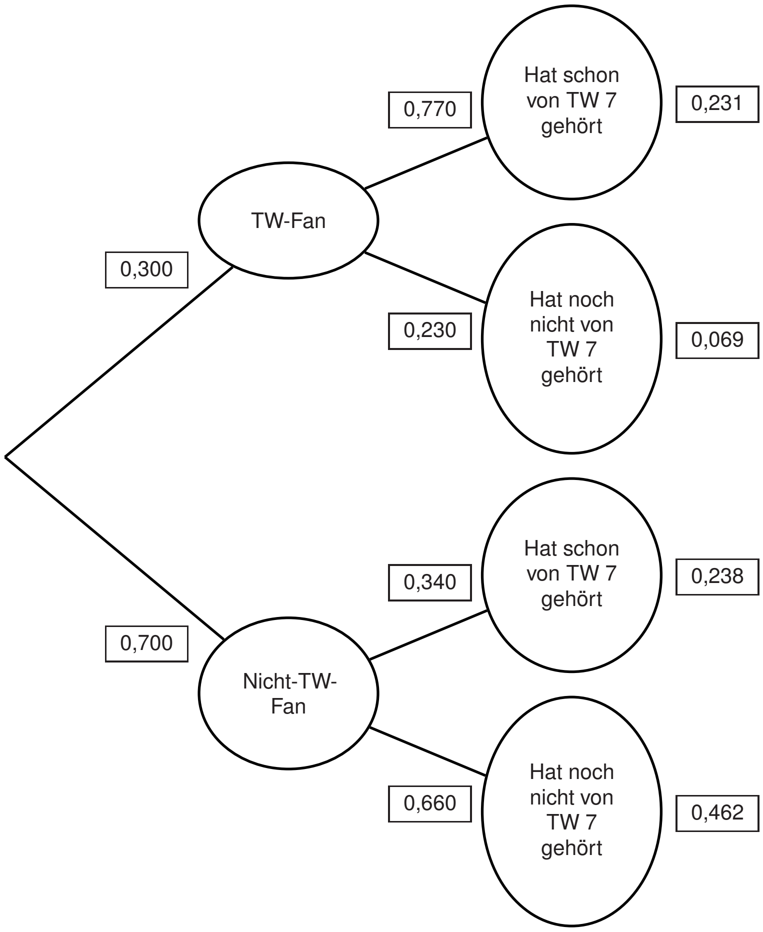
11. Marketing für Trek Wars 7

Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	5		

Die ausgefüllte Tabelle:

	TW-Fan	Nicht-TW-Fan	Gesamt
Hat schon von TW 7 gehört	2 481	2 553	5 034
Hat noch nicht von TW 7 gehört	738	4 958	5 696
Gesamt	3 219	7511	10 730

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>b)</td><td>
Der ausgefüllte Baum:



</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>
$P(A) = (0{,}74)^5 = 0{,}222... \approx 22\ \%$
$P(B) = 1 - (0{,}74)^5 = 0{,}778... \approx 78\ \%$
$P(C) = (0{,}26)^5 + 5 \cdot 0{,}74 \cdot 0{,}26^4 = 0{,}018... \approx 2\ \%$
</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>
Es müssen der Anteil derer, die Fans sind, informiert sind und auch noch in den Film gehen möchten, und der Anteil derer, die keine Fans sind, informiert sind und den Film sehen möchten, addiert werden.
Bevölkerungsanteil aus der Gruppe der Fans:
$0{,}3 \cdot 0{,}77 \cdot 0{,}74 = 0{,}171... \approx 17\ \%$
Bevölkerungsanteil aus der Gruppe der Nicht-Fans:
$0{,}7 \cdot 0{,}34 \cdot 0{,}29 = 0{,}069... \approx 7\ \%$
Insgesamt liegt der Bevölkerungsanteil derer, die voraussichtlich TW7 sehen werden, bei etwa 24 %.
<i>Hinweis: Es können auch Ergebnisse aus dem Baumdiagramm zur Berechnung herangezogen werden.</i>
</td><td></td><td></td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>Insgesamt 22 BWE</td><td>7</td><td>10</td><td>5</td></tr>
</table>

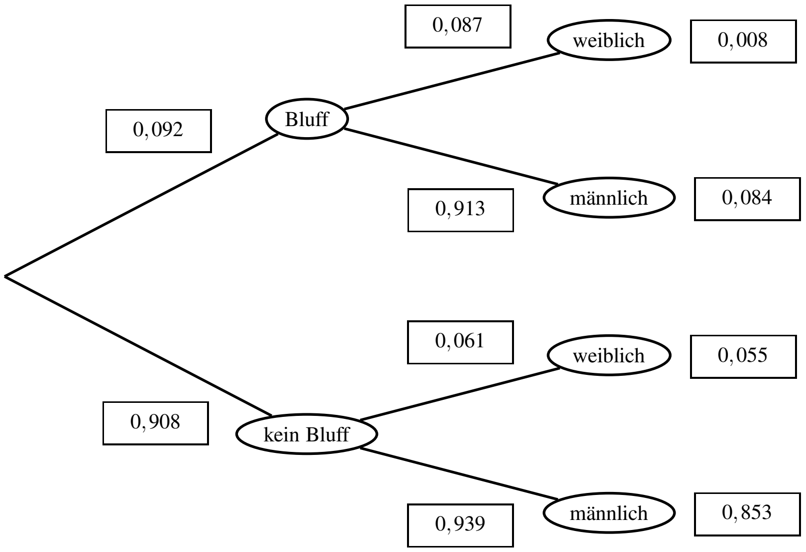
12. Bluffen beim Poker

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

- Die ausgefüllte Tabelle:

	Weiblich	Männlich	Gesamt
Bluff	52	549	601
kein Bluff	359	5560	5919
Gesamt	411	6109	6520

- Das ausgefüllte Baumdiagramm:



Durch unterschiedliches Runden, sind Abweichungen in der 1000stel Stelle möglich.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Pokerspieler weiblich ist und im Turnier blufft, beträgt 0,8 %.

</td><td>7</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

- Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $P = \frac{411}{6520} \approx 0{,}0630 = 6{,}3\ \%$.
- Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $P = \frac{549}{6520} \approx 0{,}0842 \approx 8{,}4\ \%$.

(Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten kann auch das Baumdiagramm zur Hilfe genommen werden.)

</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	**Zuordnung Bewertung** I	II	III
c)	$P(A) = \left(\frac{5560}{6109}\right)^5 \approx 0{,}6245 \approx 62{,}5\ \%$ Die Wahrscheinlichkeit, dass kein Pokerspieler blufft, ist 62,5 % $P(B) = 1 - \left(\frac{5560}{6109}\right)^5 \approx 0{,}375 \approx 37{,}5\ \%$ Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Pokerspieler blufft, ist 37,5 % $P(C) = 5 \cdot \left(\frac{549}{6109}\right) \cdot \left(\frac{5560}{6109}\right)^4 \approx 0{,}3083 = 30{,}8\ \%$ Die Wahrscheinlichkeit, dass genau vier Pokerspieler nicht bluffen, beträgt 30,8 %.		6	
d)	**Tom:** Es ist $P_W(B) = \frac{52}{411} \approx 0{,}1265 \approx 12{,}7\ \%$. Da $P_M(B) = \frac{549}{6109} \approx 9\ \% < 12{,}7\ \%$ hat Tom nicht Recht. **Lilly:** Es ist $P_B(W) = \frac{52}{601} \approx 0{,}0865 \approx 8{,}7\ \%$ und $P_B(M) = \frac{549}{601} \approx 0{,}9134 \approx 91{,}3\ \%$. Somit ist Lillys Aussage falsch. Also sind beide Aussagen falsch.			5
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

13. Verkaufsstrategie des Computerspiels

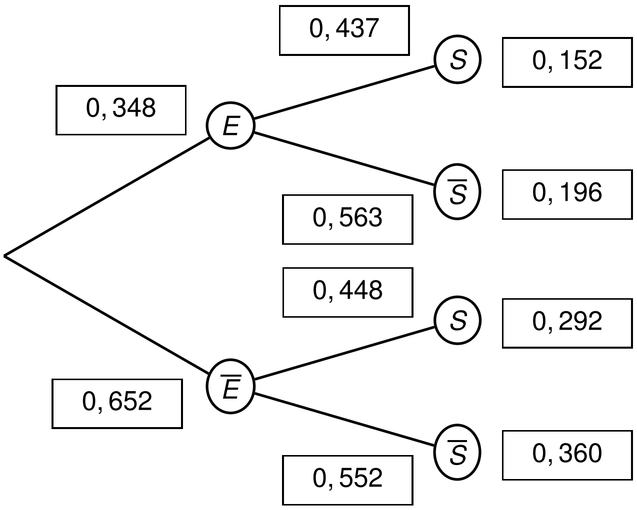
	Lösungsskizze	**Zuordnung Bewertung** I	II	III
a)	Die ausgefüllte Vierfeldertafel:	7		

	männlich	weiblich	gesamt
Zahlt 10 € für das Abschalten der Werbung	52 200	88 200	140 400
Zahlt nicht für das Abschalten der Werbung	1 687 800	1 171 800	2 859 600
gesamt	1 740 000	1 260 000	3 000 000

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>b)</td><td>Es ist $p = \frac{2\,859\,600}{3\,000\,000} \approx 0{,}9532$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Spieler, dessen Geschlecht nicht bekannt ist, für das Spiel kein Geld bezahlen wird, beträgt etwa 95,3 %.</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>• Es ist $p = \left(\frac{2\,859\,600}{3\,000\,000}\right)^5 \approx 0{,}7869$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass alle fünf Spieler, deren Geschlecht nicht bekannt ist, für das Spiel nichts bezahlen werden, beträgt etwa 78,7 %.
• Es ist $p = 1 - 0{,}7869 \approx 0{,}2131$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der fünf Spieler Geld für das Spiel bezahlen wird, beträgt 21,3 %.</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Im ersten Monat werden voraussichtlich 140 400 Menschen jeweils 10 € bezahlen, um die Werbung abzuschalten. Damit macht das Spiel einen Umsatz von 1 404 000 €.
60 % davon sind 842 400 €.
Damit wären die Entwicklungskosten bereits gedeckt.</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Strategie A: Spieler, die Werbung abschalten sind
$3\,000\,000 \cdot (0{,}56 \cdot 0{,}07 + 0{,}44 \cdot 0{,}03) = 157\,200$.
Strategie B: Spieler, die Werbung abschalten sind
$3\,300\,000 \cdot (0{,}42 \cdot 0{,}07 + 0{,}58 \cdot 0{,}03) = 154\,440$.
Da $157\,200 > 154\,440$ ist Strategie A die erfolgversprechendere Strategie, wenn man nur den Umsatz durch das Abschalten der Werbung berücksichtigt.</td><td></td><td></td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="right">Insgesamt 22 BWE</td><td>7</td><td>10</td><td>5</td></tr>
</table>

14. Vorliebe für Schokolade

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
• Die ausgefüllte Vierfeldertafel:
<table>
<tr><th></th><th>Vorliebe für Schokolade</th><th>Keine Vorliebe für Schokolade</th><th>Gesamt</th></tr>
<tr><td>Einzelkind</td><td>380</td><td>490</td><td>870</td></tr>
<tr><td>Kein Einzelkind</td><td>730</td><td>900</td><td>1630</td></tr>
<tr><td>Gesamt</td><td>1110</td><td>1390</td><td>2500</td></tr>
</table>
Das ausgefüllte Baumdiagramm:

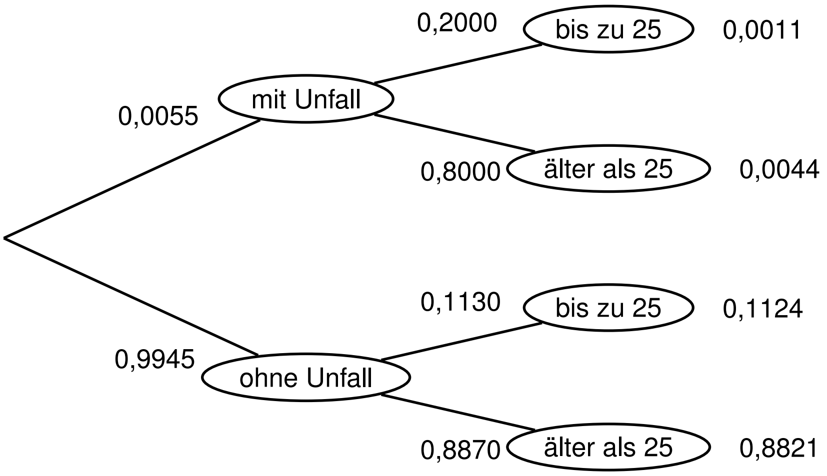


• Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Kind ein Einzelkind ist und eine Vorliebe für Schokolade hat, beträgt 15,2 %.
</td><td>5</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Es ist $P(S) = \frac{1110}{2500} \approx 0{,}444 = 44{,}4\ \%$.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
c)	*Hinweis: Das Ablesen aus dem Baumdiagramm ist gleichwertig. Bitte beachten Sie die Regelungen zu Folgefehlern.* $P(A) = \frac{490}{2500} = 0{,}196$. Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein zufällig ausgewähltes Kind ein Einzelkind ist und keine Vorliebe für Schokolade hat, beträgt 19,6 %. $P(B) = \frac{380}{1110} \approx 0{,}3423$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Kind, das angibt, eine Vorliebe für Schokolade zu haben, ein Einzelkind ist, beträgt 34,2 %. $P(C) = \left(1 - \frac{870}{2500}\right)^3 \approx 0{,}2772$. Die Wahrscheinlichkeit, dass von drei zufällig ausgewählten Kindern keines ein Einzelkind ist, beträgt 27,7 %.		6	
d)	Mit dem Term $1 - (0{,}444)^5$ wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass unter fünf zufällig ausgewählten Kindern mindestens eines ist, dass keine Vorliebe für Schokolade hat.			3
e)	Es müssen die beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(S\|E) = \frac{380}{870} \approx 0{,}4367... \approx 43{,}7\ \%$ und $P(S\|\overline{E}) = \frac{730}{1630} \approx 0{,}4478... \approx 44{,}8\ \%$ verglichen werden. Die Werte können direkt aus dem Baumdiagramm entnommen oder über die Vierfeldertafel berechnet werden. Der Leiter der Werbeabteilung hat nicht recht, da die Wahrscheinlichkeiten nur gering voneinander abweichen, bzw. $P(S\|E) < P(S\|\overline{E})$ ist.		2	2
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

15. Autoversicherung

<table>
<tr><th rowspan="2" colspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
- Die ausgefüllte Tabelle:
<table>
<tr><td>Altersklasse</td><td>bis zu 25</td><td>älter als 25</td></tr>
<tr><td>Autofahrer</td><td>4 227 032</td><td>33 006 464</td></tr>
<tr><td>Autofahrer, die einen Unfall verursacht haben</td><td>41 000</td><td>162 296</td></tr>
<tr><td>Anteil der Unfallverursacher innerhalb der Altersklasse in Prozent</td><td>0,970</td><td>0,492</td></tr>
</table>
</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	**Zuordnung Bewertung**		
		I	II	III
	• Die Aussage trifft zu, da der prozentuale Anteil an den Unfallverursachern bei den jüngeren Autofahrern fast doppelt so hoch ist wie bei den älteren Autofahrern (0,970 % gegenüber 0,492 %).			
b)	Der ausgefüllte Baum:  	2	3	
c)	Der Wert gibt den Anteil von jungen Unfallverursachern an allen Autofahrern an.		2	
d)	• Aus dem Baumdiagramm kann man direkt ablesen: 0,44 % • $\frac{0{,}0044}{0{,}0055} = 0{,}8 = 80\ \%$ Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich beim Unfallverursacher um einen Autofahrer handelt, der über 25 Jahre alt ist, beträgt 80 %. • $\frac{0{,}0011}{0{,}1135} = 0{,}0097 = 0{,}97\ \%$ Die Wahrscheinlichkeit, dass der Autofahrer einen Unfall verursacht hat, ist 0,97 %.	3	3	
e)	Die Gesamteinnahmen sind: 1250 · 600 € + 980 · 530 € + 5 455 · 450 € + 7 315 · 390 € = 6577000 € Diesen stehen Ausgaben von nur 4950000 € entgegen. Da die Einnahmen höher sind als die Ausgaben, ist eine Beitragserhöhung nicht erforderlich.			5
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5