Impulse Mathematik

Handreichung für den Mathematikunterricht in der Grundschule, Leitidee Daten und Zufall

Lernumgebungen zum Bildungsplan 2011

Hamburg

Impressum

Herausgeber:
Behörde für Schule und Berufsbildung
Referat Mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Unterricht
Hamburger Straße 31, 22083 Hamburg

Leitung: MINT-Referat und PriMa: Werner Renz,
Redaktion: Brigitta Hering, Fachreferentin Mathematik Grundschule und Koordination PriMa
Druck: September 2012
Layout: Anja v. Zitzewitz
Hamburg, September 2012
Auflage 2500

Impulse Mathematik

Handreichung für den Mathematikunterricht in der Grundschule, Leitidee Daten und Zufall

Referatsleiter MINT-Referat: Werner Renz, Amt für Bildung, B 52-3

Fachreferentin Mathematik Grundschule: Brigitta Hering, B 52-39

Verfasser: Brigitta Hering,

Lernumgebungen zusammengestellt von Mathematik-Moderatorinnen

und Mathematik-Moderatoren aus der Maßnahme PriMa

– Kinder auf verschiedenen Wegen zur Mathematik

Behörde für Schule und Berufsbildung
Hamburg, September 2012

Inhalt Leitidee Daten und Zufall

Vorwort

Sehr geehrte Kolleginnen und Kollegen,

das MINT-Referat der Behörde für Schule und Berufsbildung überreicht Ihnen mit der vorliegenden Aufgabensammlung eine weitere Handreichung zu Hinweisen und Erläuterungen zum Bildungsplan 2011. Sie ist Bestandteil der „Impulse für den Mathematikunterricht der Grundschule“, einer Reihe von Unterrichtshilfen, die zur Entwicklung und Implementation des Rahmenplans Mathematik für die Grundschule erarbeitet werden. Als eine der Säulen der Maßnahme PriMa (Kinder der Primarstufe auf verschiedenen Wegen zur Mathematik) zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in der Grundschule wurde die Qualifizierung von Mathematikmoderatorinnen und Mathematikmoderatoren eingerichtet. In einer zweijährigen Qualifizierung erhalten die Kolleginnen und Kollegen Einblick in die aktuelle Mathematikdidaktik und erwerben Kompetenzen als Mathematikfortbildnerinnen und -fortbildner. Im Rahmen dieser Qualifizierung und der anschließenden Tätigkeit im Rahmen von PriMa wurden Lernumgebungen und Unterrichtsvorhaben entwickelt und erprobt.

Die vorliegende Handreichung ist ein Ergebnis dieser Zusammenarbeit der Moderatorinnen und Moderatoren. Die Autorin hat dazu Aufgabenstellungen, die in PriMa-Fortbildungen entwickelt, diskutiert und in den PriMa-Schulen erprobt wurden, ausgewählt, aufbereitet und gegebenenfalls ergänzt unter den Fragestellungen: „Worum geht es? und „Wie kann man vorgehen?“, um Hinweise zur Gestaltung von Unterricht zu geben.

Die Sammlung von Lernumgebungen zur Leitidee Daten und Zufall ist so angelegt, dass möglichst früh Erfahrungen zum Zufall im Mathematikunterricht ermöglicht und aufgegriffen werden können. Über Realkontexte zu ersten kombinatorischen Fragestellungen aus dem kindlichen Umfeld wie auch über den spielerischen Zugang in Würfelexperimenten bis hin zu sprachförderlichen Erfahrungen zum Zufall in sprachsensiblen Momenten im Spiel werden Kinder langsam an Begriffe und Vorstellungen zur Wahrscheinlichkeit herangeführt. Die Aufgaben sollen die Kinder zur Selbsttätigkeit und zu forschend-entdeckendem Lernen anregen, das sowohl individuell als auch im Austausch mit anderen Kindern stattfinden kann. Eigene Lösungsansätze werden mit denen anderer Kinder verglichen, gemeinsam eingeordnet und bewertet. Von daher werden Arbeitsweisen und die Entwicklung mathematischer Kompetenzen gefördert, deren Entwicklung auch der neue Rahmenplan Mathematik für die Grundschule 2011 vorsieht. Zudem finden sich in der Handreichung Planungsinstrumente zur Gestaltung von Mathematikunterricht, wie z.B. Kompetenzraster, Lernberichte und Selbst-/ Fremdeinschätzungsbögen, um Kindern bereits in der Grundschule einen Teil der Verantwortung im Lernprozess zu übertragen.

Ich möchte alle Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer der Grundschule ermuntern, Zieltransparenz und Feedbackstrukturen zum Lernen unter Fragestellungen wie z.B. „Wo sind deine Stärken? Woran musst du weiter arbeiten? Was brauchst du im Unterricht zusätzlich? Deine offenen Fragen…?“ und Feststellungen wie „Ich kann .....!“ zunehmend in die Unterrichtsplanung dieser noch recht neuen Leitidee für die Grundschule aufzunehmen.
Wir würden uns freuen, wenn wir aus den Schulen Rückmeldungen mit Hinweisen oder Anregungen für den Einsatz der hier vorgelegten Handreichung im Unterricht erhielten.

Allen Kolleginnen und Kollegen, die in den vergangenen Jahren Angebote im Rahmen von PriMa vorgelegt haben oder im laufenden Schuljahr zum ersten Male für PriMa tätig werden, danke ich herzlich für ihr Engagement bei der Weiterentwicklung des Hamburger Mathematikunterrichts in der Grundschule. Mein besonderer Dank gilt Brigitta Hering, der Koordinatorin PriMa und Autorin dieser Handreichung.

Werner Renz	Brigitta Hering
Leitung PriMA	Koordination PriMa

Einführung in Kompetenzbereiche

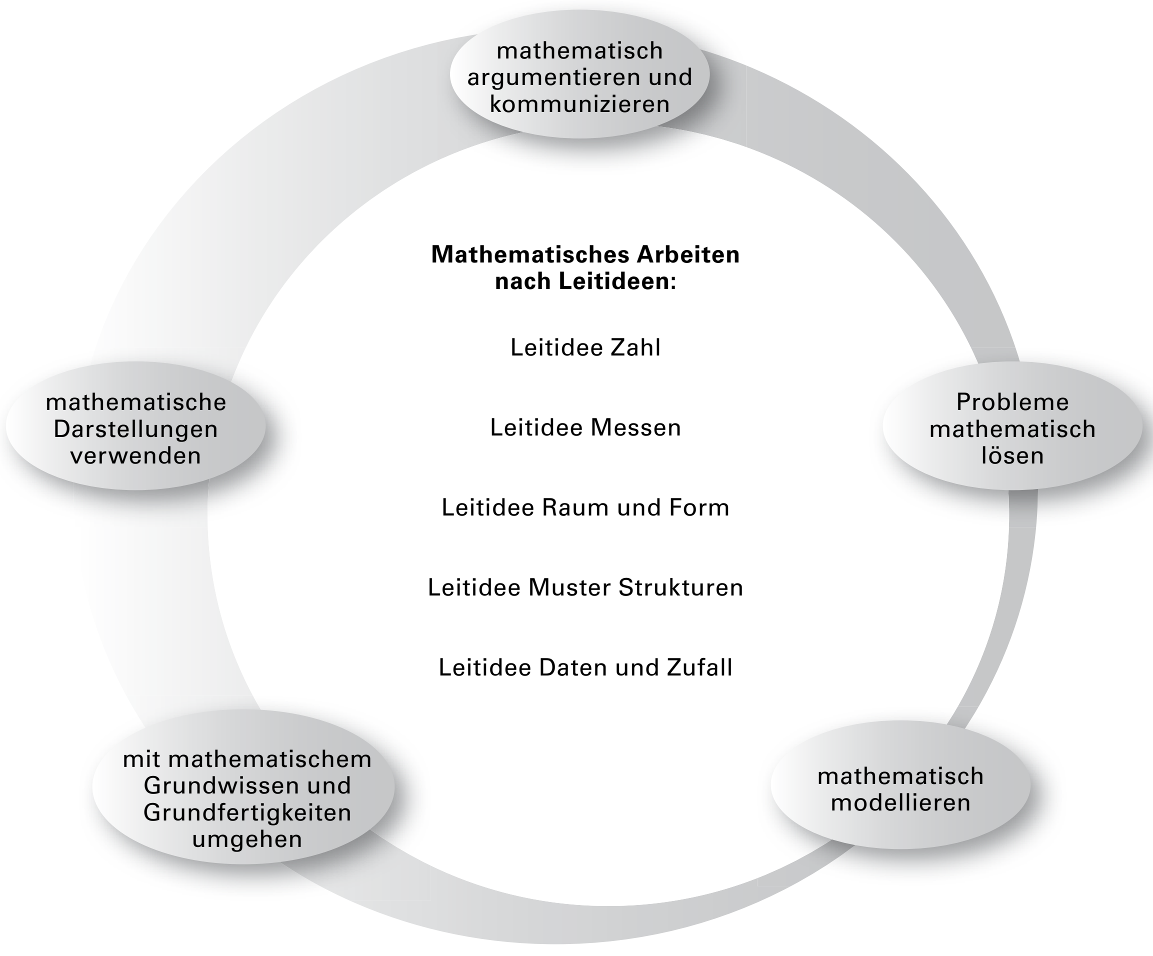
Der Mathematikunterricht trägt zur Bildung der Schülerinnen und Schüler bei, indem er ihnen insbesondere folgende Grunderfahrungen ermöglicht, die miteinander in engem Zusammenhang stehen:

Schülerinnen und Schüler sollen

- technische, natürliche, soziale und kulturelle Erscheiningen und Vorgänge mithilfe der Mathematik wahrnehmen, verstehen und unter Nutzung mathematischer Gesichtspunkte beurteilen,
- Mathematik mit ihrer Sprache, ihren Symbolen, Bildern und Formeln in der Bedeutung für die Beschreibung und Bearbeitung von Aufgaben und Problemen innerhalb und außerhalb der Mathematik altersgemäß kennen und begreifen,
- in der Bearbeitung von Fragen und Problemen mit mathematischen Mitteln zunehmend allgemeine Problemlösefähigkeit erwerben.

Von zentraler Bedeutung sind vor allem die folgenden fünf allgemeinen mathematischen Kompetenzen, welche in der Auseinandersetzung mit den Leitideen erworben werden; wobei die Leitideen nicht additiv zu verstehen sind, sondern an geeigneten Inhalten vernetzt werden.

Kompetenzbereiche Mathematik in der Grundschule



Allgemeine mathematische Anforderungen

Die Kompetenz, mathematisch zu argumentieren und zu kommunizieren
Die Schülerinnen und Schüler
- geben Informationen aus einfachen mathematikhaltigen Darstellungen (Bild, Text, Tabelle) mit eigenen Worten wieder,
- stellen mathematische Sachverhalte und Entdeckungen mit Skizzen und eigenen Worten dar (z.B. operative Beziehungen),
- beschreiben und erläutern Entdeckungen in Partner-/Gruppenarbeit,
- beschreiben ihren Lösungsweg und das Ergebnis und teilen ihre Überlegungen anderen verständlich mit,
- überprüfen mathematische Aussagen auf Korrektheit.

Die Kompetenz, Probleme mathematisch zu lösen
Die Schülerinnen und Schüler
- entwickeln Interesse an inner- und außermathematischen Problemstellungen,
- bearbeiten vorgegebene einfache mathematische Probleme eigenständig,
- kennen und nutzen erste einfache Lösungsstrategien und beschreiben sie (z.B. durch Probieren),
- entwickeln verschiedene Strategien, um ein Ziel zu erreichen, beurteilen einen Lösungsweg nach seiner Eignung, übernehmen Anregungen und setzen diese im Problemlöseprozess um.

Die Kompetenz, mathematisch zu modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
- stellen Rechengeschichten spielerisch, zeichnerisch und schriftlich dar und schreiben Aufgaben dazu,
- beschreiben Sachsituationen in der Sprache der Mathematik,
- formulieren Rechengeschichten zu einfachen Termen und bildlichen Darstellungen,
- überprüfen mathematische gewonnene Lösungen im Hinblick auf die reale Sachsituation.

Die Kompetenz, mathematische Darstellungen zu verwenden
Die Schülerinnen und Schüler
- stellen mathematische Objekte und einfache Situationen auf verschiedenen Ebenen dar (handelnd, bildhaft, symbolisch),
- finden zu Handlungen eine bildliche Darstellung,
- wechseln von einer bildlichen Darstellung in eine passende symbolische Darstellung,
- übersetzen eine symbolische Darstellung in ein Bild, eine Handlung oder eine andere symbolische Darstellung.

Die Kompetenz, mit mathematischem Grundwissen und Grundfertigkeiten umzugehen
Die Schülerinnen und Schüler
- kennen und nutzen unterschiedliche Veranschaulichungsmittel (z.B. Zahlenfeld, Rechenstrich) für das Bearbeiten mathematischer Aufgaben,
- wählen und nutzen je nach Lernumgebung Arbeitsmittel,
- verwenden eingeführte mathematische Symbole sachgerecht zur Darstellung von Aussagen,
- gehen sachgerecht mit Lineal und Schablone um.

Inhaltlichsbezogene mathematische Anforderungen

Die KMK-Standards orientieren sich inhaltlich an mathematischen Leitideen, die für den gesamten Mathematikunterricht – für die Primarstufe und für das weiterführende Lernen – von fundamentaler Bedeutung sind. (vgl. Beschlüsse der Kultusministerkonferenz (15.10.2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich)
Für Schülerinnen und Schüler am Ende der 4. Jahrgangsstufe in Hamburg lassen sich aus der Leitidee „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ folgende KMK-Standards für **inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen** ableiten, die im Unterricht aufeinander bezogen und miteinander verknüpft werden.

Leitidee Daten und Zufall

Daten erfassen und darstellen	1. in Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen. 2. Daten mit Hilfe von Strichlisten, Tabellen, Streifendiagrammen u. a. darstellen. 3. aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen. 4. Vor- und Nachteile unterschiedlicher Darstellungen des gleichen Sachverhalts erkennen und beschreiben.
Phänomene des Zufalls	1. Stichproben erheben und auswerten. 2. Wahrscheinlichkeiten abschätzen und vergleichen. 3. sprachliche Formulierungen entwickeln und Grundbegriffe kennen (z.B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich). 4. Häufigkeit von Ereignissen durch kombinatorische Überlegungen begründen. 5. Gewinnchancen bei Spielen und Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen. 6. inhaltliches Verstehen der Gleichwahrscheinlichkeit.

Aufgabenbeispiele

Die zusammengestellten und erprobten Lernumgebungen dienen der Konkretisierung der Standards. Eine Vielzahl von Möglichkeiten, die mathematischen Kompetenzen zu entwickeln und den Anforderungen zu entsprechen, wird angeboten. Die Aufgabenbeispiele kennzeichnen eine Aufgabenkultur, die den aktuellen didaktischen Erkenntnissen entspricht.
Die Beispiele bilden keine abgeschlossene Aufgabentypologie, sondern sind ergänzend zu den Aufgabenbeispielen der KMK für die Idee „Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeit“ in Hamburger Schulen im Rahmen der Maßnahme „PriMa“ und im Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung entwickelt worden, um Lehrerinnen und Lehrern möglichst konkrete Anregungen zu geben, die Idee umzusetzen.

Anforderungsbereiche

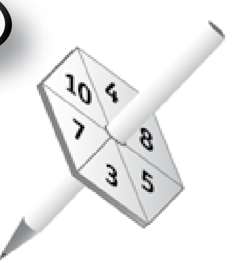
Angelehnt an die KMK-Veröffentlichungen zeigen die Aufgabenbeispiele die Bandbreite unterschiedlicher Anforderungen. Manche Aufgaben bzw. Teilaufgaben lassen sich durch Reproduzieren im Rahmen gelernter und geübter Verfahren in einem abgegrenzten Gebiet lösen. Andere verlangen den selbständigen, kreativen Umgang mit erworbenen mathematischen Kompetenzen. In den KMK-Aufgabenbeispielen wurden so genannte „große Aufgaben“ vorgestellt, die der Leistungsheterogenität von Grundschülern dadurch Rechnung tragen, dass sie im gleichen inhaltlichen Kontext ein breites Spektrum an unterschiedlichen Anforderungen und Schwierigkeiten abdecken. Diesem Ansatz entsprechen ebenfalls die in Hamburg entwickelten Aufgaben. Die Aufgabenbeispiele fungieren zugleich als Muster für das Lernen im individualisierten Unterricht, in dem alle Kinder zu derselben Lernsituation arbeiten, aber diese auf unterschiedlichen Kompetenzstufen lösen.

Bei den Aufgabenbeispielen lassen sich folgende Anforderungsbereiche unterscheiden:

AB	Anforderungsbereich	Das Lösen der Aufgabe erfordert...
AB I	*Reproduzieren*	Grundwissen und das Ausführen von Routinetätigkeiten.
AB II	*Zusammenhänge herstellen*	das Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen.
AB III	*Verallgemeinern und Reflektieren*	komplexe Tätigkeiten wie Strukturieren, Entwickeln von Strategien, Beurteilen und Verallgemeinern.

Es wurde versucht, die Aufgaben den Anforderungsbereichen zuzuordnen. Wenn die Beispielaufgaben als Repräsentanten eines bestimmten Anforderungsbereichs definiert und entsprechend gekennzeichnet sind, so handelt es sich hierbei um eine vorläufige Zuordnung, die nicht immer eindeutig zu treffen ist.

Mathematische Grundlagen



„Dieses Los muss eine Gewinnnummer in sich tragen, schließlich waren die anderen vorab geöffneten neun Lose bereits Nieten

„Das Glücksrad hat schon lange nicht mehr meine Glückszahl angezeigt, nun ist es sicher, als nächstes erscheint die `7´! Immerhin ist sie öfter auf dem Rad markiert.“

„Die Sechs muss doch jetzt beim Würfeln kommen! Schließlich ist sie schon lange nicht mehr gefallen.“

Kennen Sie nicht auch den Wunsch, dass beim Gesellschaftsspiel nun aber unbedingt eine Sechs fallen soll? Und gerade dann, in dieser herbei gewünschten Situation macht man die Erfahrung, wie selten gerade dann die Sechs fällt.
Der Mathematikunterricht der Grundschule sollte für Schüler und Schülerinnen Impulse setzen und ausreichend (Spiel-) Raum geben, neue, andere und bewusste **Erfahrungen mit dem Zufall** zu machen. Zu häufig verfestigen sich bereits bei Kindern Fehlvorstellungen im Umgang mit dem Zufall, die oft emotional geprägt und dadurch tief verwurzelt und meist unbewusst zu falschen Vorstellungsbildern und Einstellung führen.

„Phänomene des Zufalls kennen die Schülerinnen und Schüler der Primarstufe ansatzweise aus ihrem Alltag, beispielsweise aus Spielsituationen. Sie beobachten und lernen, dass die Ergebnisse von Alltagsvorgängen zufällig sein können und erleben und begreifen die Messbarkeit von Wahrscheinlichkeiten (Eintreffen von Ereignissen in Experimenten / langen Versuchsreihen).“(vgl. HH Rahmenplan Mathematik Grundschule 2008, S.32)
Der Bildungsplan fordert, dass der Unterricht den Kindern Lernumgebungen bietet, die sie darin schulen, Gewinnchancen bei Spielen mit zufälligem Ergebnis (Würfel, Glücksrad, Lostrommel) einschätzen zu können und Wahrscheinlichkeiten abzuleiten und sprachlich zu formulieren. Ferner ist zu erreichen, dass das inhaltliche Verständnis von Gleichwahrscheinlichkeit angebahnt wird.
Die im Anschluss aufgeführten Beispiele wenden sich gemäß der Kompetenzbeschreibungen der KMK Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich (2004) an Lehrer/innen des Faches Mathematik für das Lehramt der Primarstufe.

Mit dieser Handreichung und den erprobten Beispielen tragen Mathematik-Moderatoren und Moderatorinnen des PriMa-Projektes an Hamburger Grundschulen Lernumgebungen zusammen, um Anregungen für die noch etwas neue Leitidee der Mathematik zu eröffnen. Ziel ist es, bereits im Anfangsunterricht Schritt für Schritt Grundideen und Grundeinstellungen in der Stochastik zu entfalten. Es erscheint hier sehr bedeutsam, die Vorerfahrungen und somit Vor-Einstellungen der Kinder ernst zu nehmen und ausreichend Anlässe zu schaffen, Erfahrungen mit dem Zufall zu machen, um Erfolg versprechende Grundfertigkeiten zu entwickeln und womöglich schon Fehlvorstellungen zu korregieren.

In einem ersten elementaren Zugang kann man in der Stochastik drei unterschiedliche Bereiche, die miteinander vernetzt sind, ausmachen.
Als **Kombinatorik** bezeichnet man ein Teilgebiet der Mathematik, in welchem man sich mit der Bestimmung der Anzahl möglicher Anordnungen oder von Auswahlen beschäftigt. Dies kann mit oder ohne Beachtung der Reihenfolge erfolgen.
Die Anzahl von Kombinationsmöglichkeiten ist bedingt dadurch, dass...

- die Reihenfolge der Elemente beachtet wird oder nicht beachtet wird.
- mehr Elemente als Plätze zur Verfügung stehen.
- die Elemente zurückgelegt werden oder nicht; also ein wiederholter Einsatz von Elementen zulässig ist.

Eine strukturierte und damit verbundene Vorgehensweise, jede mögliche Anordnung von einer gewissen Anzahl von Elementen, wird als Permutation dieser Elemente beschrieben. Dieser Begriff taucht jedoch im Unterrichtsgespräch der Primarstufe nicht auf.
In der Darstellung von Gesamtübersichten bieten sich Darstellungen der Permutation in Pfaden an. Als weitere heuristische Mittel sind Tabellen (Spalten, Zeilen) und Baumdiagramme einzuführen.

Ein Baumdiagramm ist eine grafische Gesamtdarstellung der Lösungen, in welcher die Beziehungen der einzelnen Elemente durch Verbindungslinien dargestellt werden. Die verästelte Struktur erinnert an einen Baum und liefert die Namensgebung. Am Baumdiagramm können „Entscheidungspfade" interpretiert werden und die Bildung aller Möglichkeiten ermittelt und systematisch dargestellt werden.
In der Kombinatorik geht es um Anzahlbestimmungen. Wie viele Möglichkeiten gibt es? Welche Möglichkeiten gibt es? Allgemeiner: „Zur Kombinatorik zählen alle interessanten Fragen über endliche Mengen:" (Flachsmeier, J.: Kombinatorik. Eine Einführung in die mengentheoretische Denkweise. Berlin 1970, S. 214.)

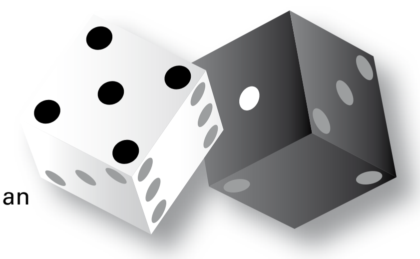
In der **Beschreibenden Statistik** geht es um Messungen, um eine Beschreibung des Ist-Zustandes und um Darstellungen von Daten in Diagrammen. Die durch statistische Messung ermittelten Daten werden miteinander in Bezug gesetzt (Mittelwert, Durchschnitt), ausgewertet und interpretiert. Die Wahrscheinlichkeitstheorie entschlüsselt den Zufall so weit wie möglich durch mathematisches Denken. Sie schafft Modelle zur Bewertung von Statistiken. (vgl.Kütting, 1999 S. 9ff)
In der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird der Zufall untersucht. Zufallsexperimente werden durchgeführt, die Ergebnisse analysiert und die Häufigkeit für ein bestimmtes Ereignis ermittelt. Die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ereignis wird durch mathematisches Denken errechnet. Ein wahrscheinliches Ereignis wird als solches beschrieben, je öfter ein Ereignis eintritt; desto wahrscheinlicher ist es. Mit den Methoden der beschreibenden Statistik verdichtet man quantitative Daten zu Tabellen oder grafischen Darstellungen. In der Primarstufe lernen Kinder Diagramme als grafische Darstellung von Daten und Sachverhalten kennen. Man unterscheidet dabei folgende Diagrammtypen:

- **Strichliste**
  Für jedes Objekt wird ein Strich gemacht. Für die schnelle Erfassung wird eine Fünferstruktur angelegt. Ein ständiger Zählprozess wird somit vermieden.
- **Säulendiagramm**
  Ein Säulendiagramm zeigt Datengrößen oder Messgrößen, welche mit einer senkrecht auf der x-Achse stehenden rechteckigen Fläche abgebildet werden. Ein Säulendiagramm ist ein Achsendiagramm und zeigt den Zusammenhang zwischen zwei abhängigen Werten.
- **Balkendiagramm**
  Zeigt ein um neunzig Grad gedrehtes Säulendiagramm.
- **Tabelle**
  In einer Tabelle sind Daten übersichtlich, geordnet zusammengestellt und in der Gesamtbetrachtung zu lesen. Lesehilfen sind gegeben, wenn Kinder die Zuordnung von Spalten (vertikal) und Zeilen (horizontal) bestimmen können.

Ziel ist es, im Rahmen des Mathematikunterrichts der Grundschule, ein erstes Verständnis für die „Mathematik des Zufalls" zu gewinnen. Der Unterricht verfolgt – wie jeder sprachförderliche Unterricht – zugleich das Ziel der Begriffsbildung.

Mathematisch unterscheidet man die folgenden Begriffe:

- Beim Werfen eines Spielwürfels kann man eine 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 würfeln. Würfelt man einmal, dann führt man ein **Zufallsexperiment** durch.
- Das Ergebnis eines Zufallsexperimentes wird **Ausfall** genannt (z.B. eine 5). Beim Würfeln sind sechs verschiedene Ausfälle möglich.
- Die Menge dieser Ausfälle heißt **Ereignisraum**.
- Die **Wahrscheinlichkeit** für das Eintreten des Ausfalles „5" im Ereignisraum 1 bis 6 ist also 1/6.
- Soll man mit einem Würfel eine 5 oder eine 6 würfeln, dann ist die Wahrscheinlichkeit 2/6.
- Führt man die Zufallsexperimente sehr oft durch, dann kann man mit der Wahrscheinlichkeit der Ausfälle rechnen.
- Ein sicheres Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 1 (z.B. beim Werfen eines Würfels eine Zahl von 1 bis 6 zu bekommen).
- Ein unmögliches Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 0 (z.B. beim Werfen einer Münze Zahl und Bild zu bekommen).



(vgl. Radatz/Schipper, 1999, S. 118)

1 Kombinatorik

Häufigkeit von Ergebnissen durch einfache kombinatorische Überlegungen bestimmen und begründen

Der Hamburger Bildungsplan fordert, dass ....“ Schüler/innen erfahren, sich handlungsorientiert mit einem Thema auseinanderzusetzen. So lässt sich die Fragestellung“ Wie viele Möglichkeiten gibt es, um eine bestimmte Anzahl von Kindern in Reihen anzuordnen?“ durch konkretes und spielerisches Probieren beantworten.“ (vgl. RP 2008, S.24) Im Folgenden werden Lernsituationen zur Kombinatorik angeboten, die den Anforderungen entsprechen und im Rahmen von Fortbildung an Hamburger Grundschulen erprobt wurden.
Kombinatorische Fragestellungen bieten auch in der Grundschule eine ganze Reihe von Möglichkeiten für Kinder, um über spielerische Handlungen Lösungsstrategien zu erproben und propädeutisch grundlegende mathematische Begriffe und Beziehungen anzubahnen, die oft in enger Verbindung stehen zu arithmetischen oder geometrischen Themen. (vgl. Radatz / Schipper / Dröge / Ebeling 1999, S.117ff.)

Weitere Argumente für das Angebot kombinatorischer Aufgabenstellungen:

Kombinatorische Fragestellungen...

- treffen das Interesse vieler Kinder unmittelbar von der Sache her, aber auch von der abstrakten Problemstellung,
- dienen der Entwicklung von strategischem Denken,
- sind oft verbunden mit der Aufforderung, eine Problem angemessene, spielerische, zeichnerische oder auch rein symbolische Lösung/Darstellung zu finden,
- gestatten es, allgemeine Ordnungsprinzipien (z.B. den ‚Baum‘, eine Tabelle, ein Pfeildiagramm) zu entwickeln und zu erproben,
- bilden wichtige Grundlagen für ein Verständnis von Wahrscheinlichkeiten.

Als **Kombinatorik** bezeichnet man ein Teilgebiet der Mathematik, in welchem man sich mit der Bestimmung der Anzahl möglicher Anordnungen oder von Auswahlen beschäftigt.
Dies kann mit oder ohne Beachtung der Reihenfolge erfolgen.
Die Anzahl von Kombinationsmöglichkeiten ist bedingt dadurch, dass...

- die Reihenfolge der Elemente beachtet wird oder nicht beachtet wird.
- mehr Elemente als Plätze zur Verfügung stehen.
- die Elemente zurückgelegt werden oder nicht; also ein wiederholter Einsatz von Elementen zulässig ist.

Eine strukturierte und damit verbundene Vorgehensweise, jede mögliche Anordnung von einer gewissen Anzahl von Elementen, wird als **Permutation** dieser Elemente beschrieben. Dieser Begriff taucht jedoch im Unterrichtsgespräch der Grundschule nicht auf.
In der Darstellung von Gesamtübersichten bieten sich Darstellungen der Permutation in Pfaden an. Als weitere heuristische Mittel sind Tabellen (Spalten, Zeilen) und Baumdiagramme einzuführen.

Ein **Baumdiagramm** ist eine grafische Gesamtdarstellung der Lösungen, in welcher die Beziehungen der einzelnen Elemente durch Verbindungslinien dargestellt werden. Die verästelte Struktur erinnert an einen Baum und liefert die Namensgebung. Am Baumdiagramm können **„Entscheidungspfade“** interpretiert werden und die Bildung aller Möglichkeiten ermittelt und systematisch dargestellt werden.
In der Kombinatorik geht es um Anzahlbestimmungen. Wie viele Möglichkeiten gibt es? Welche Möglichkeiten gibt es? Allgemeiner: „Zur Kombinatorik zählen alle interessanten Fragen über endliche Mengen:“ (Flachsmeier, J.: Kombinatorik. Eine Einführung in die mengentheoretische Denkweise. Berlin 1970, S. 214.)

1.1 Anordnung der Augenzahlen auf einem Spielwürfel

Inhaltsbezogene mathematische Anforderungen
In Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen: Zählen, Zahlenmuster Kombinatorische Überlegungen begründen: Entdeckung von Zahlbeziehungen, Ergebnisbilder einschätzen, Kombinatorische Überlegungen, Würfelaugensummen

Beschreibung der Lernsituation

Würfelaufbau eines 6er-Würfels
Der inhaltliche Schwerpunkt liegt darin, Besonderheiten in der Anordnung der Augenzahlen auf einem Spielwürfel zu entdecken. Die Schüler/innen werden aufgefordert einen Spielwürfel zu beschreiben; folgende ‚Detektivfragen' könnten hilfreich sein und zu weiteren Untersuchungen / Beschreibungen auffordern:

- Welche Zahlen sind auf dem Würfel dargestellt?
- Wie viele Flächen (Zahlen) hat der Würfel?
- Welche Zahlen stehen auf den benachbarten Flächen?
- Welche Zahl ist gegenüber von 1 auf dem Würfel?
- Welche Zahl ist gegenüber von 2 auf dem Würfel?
- Welche Zahl ist gegenüber von 3 auf dem Würfel?
- Welche Zahl ist gegenüber von 4 auf dem Würfel?
- Welche Zahl ist gegenüber von 5 auf dem Würfel?
- Welche Zahl ist gegenüber von 6 auf dem Würfel?
- Welche Punktsumme hat der gesamte Würfel?
- Haben alle 6er-Würfel diese Augensumme?
- Kannst du Plusaufgaben zum Würfel formulieren?
- Kannst du Malaufgaben zum Würfel notieren?
- Kannst du eine Skizze vom Würfel anfertigen?
- Kannst du eine Skizze vom Würfelnetz anfertigen?

Entdeckung

Bei einem Spielwürfel ist die Summe der gegenüberliegenden Augenzahlen stets 7.

Also liegt

3	gegenüber von	4
2	gegenüber von	5
1	gegenüber von	6

Wie könnte man vorgehen?

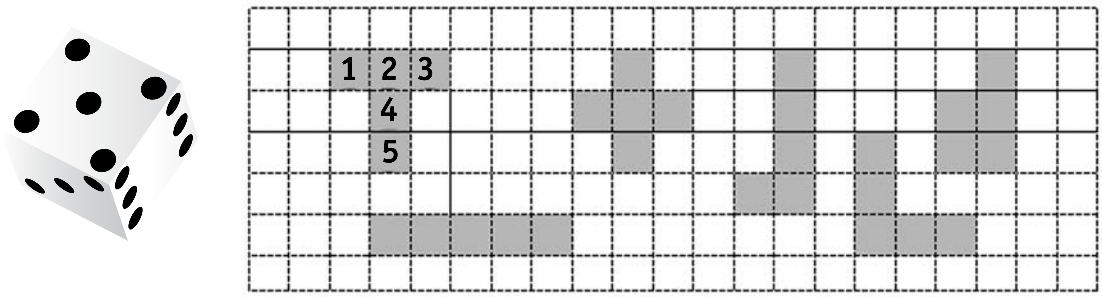
Im Stuhl- / Stehkreis oder in Partnertarbeit können verschiedene Aktivitäten exemplarisch durchgeführt werden. Geeignet ist der Umgang zunächst mit großen Schaumstoffwürfeln und am Platz nachfolgend das Würfeln in kleinen (Plastik-) Würfelbechern auf Teppichfliesen; die Würfel rutschen nicht weg und die akustische Belastung lässt sich reduzieren.

- Entsprechend der gewürfelten Augenzahl werden Gegenstände gelegt.

- Entsprechend der gewürfelten Augenzahl werden Bewegungen (Vor dem Würfeln wird die auszuführende Bewegung gemeinsam unter den Partnern verabredet. z.B.: Hüpf auf einem Bein! / Klatsch in die Hände!/ ...) durchgeführt.

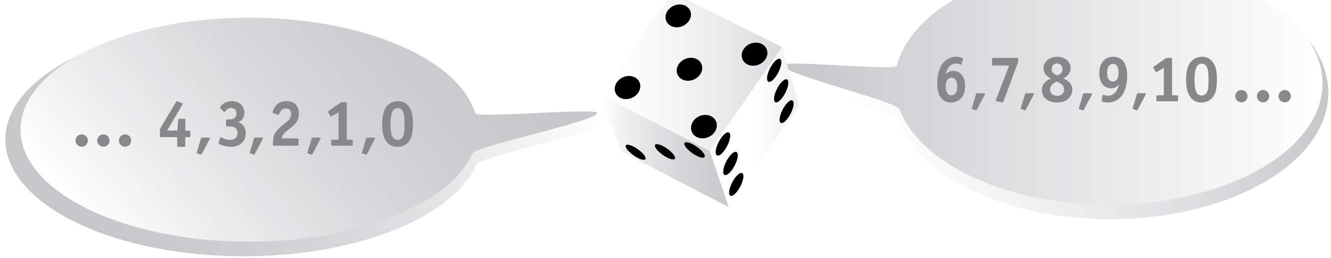
- Auf Kästchenpapier werden entsprechend der gewürfelten Augenzahl verschiedene Zahlenmuster gemalt.

1. Zunächst reduziert nur einen Spielwürfel verwenden.
2. Später sollte die Anzahl der verwendeten Spielwürfel und der entstehenden Zahlenmuster nicht vorgeschrieben werden. Jedes Kind entscheidet nach seinem Können.



- Mit Plättchen werden (strukturierte und unstrukturierte) Muster gelegt.

- Ein Kind zählt von der gewürfelten Augenzahl vorwärts im Zahlenraum bis 10.
(Differenzierung: Zwei Würfel, Zahlenraum des Weiterzählens bis 20.)



- Ein anderes Kind zählt von der gewürfelten Augenzahl rückwärts bis 0.
(Differenzierung: zwei Würfel

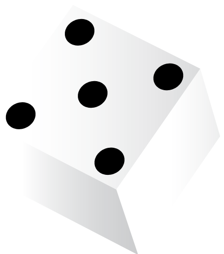
Anordnung der Augenzahlen

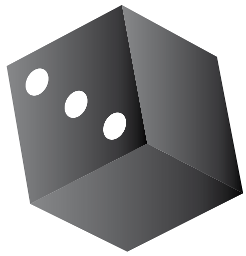
Die Kinder werden angeregt die leeren Würfelbilder zu füllen. Während des Vorgangs ist die Entdeckung der `Augensummenregel´ möglich. Es ist unbedingt Wert darauf zu legen, dass die Schüler/innen ihre Entdeckungen verbalisieren und andere Kinder die Behauptung ebenfalls am Würfel untersuchen können.
Dass die ...“ **gegenüberliegenden Augenzahlen eines Würfels zusammen immer 7 ergeben“**... ist als Besonderheit von den Schülern zu entdecken und im Klassenplenum abschließend hervorzuheben.

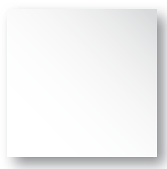
Aus: KMK: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.
Beschluss vom 15.10.2004. Luchterhand. S. 33-34

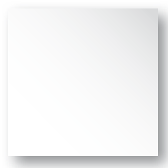
Weitere Literatur:
Müller, G. / Wittmann , E.Ch. (1984)
Der Mathematikunterricht in der Primarstufe, Abschnitt 1.2.9, Braunschweig

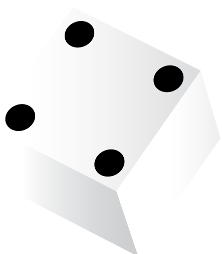
K 1 Zeichne verschiedene Zahlenmuster zur Augenzahl.

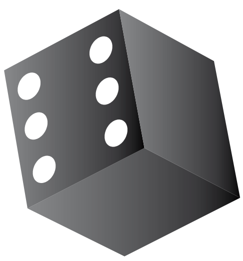


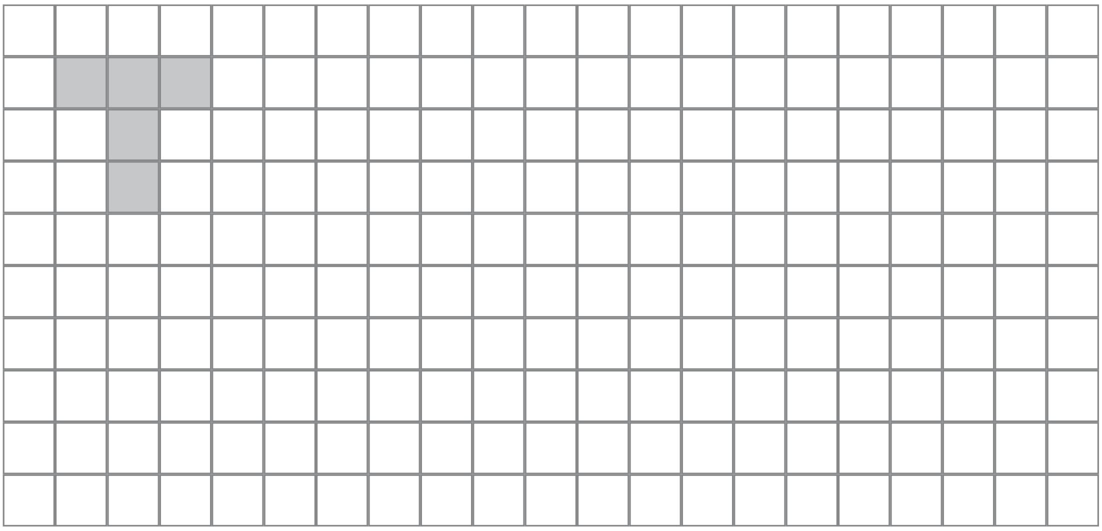






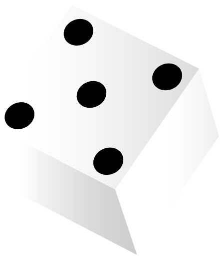


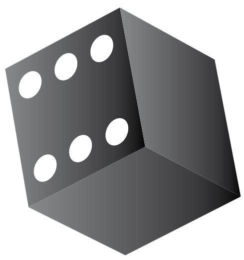




K 2 Würfel mit **einem** Würfel und zeichne **verschiedene Zahlenmuster** zur Augenzahl.

K 3 Zeichne **verschiedene Zahlenmuster** zur Augenzahl der 5 und der 6.





Anschlussproblem

a) Finde alle Möglichkeiten.

b) Tausche dich mit einem Partner aus.

K 4 Würfel mit zwei Würfeln und zeichne **verschiedene Zahlenmuster** zur Augensumme.

K 5 Das „Besondere“ am Würfel.

Wie viele Punkte sind insgesamt auf **deinem** Würfel?

Lösung:

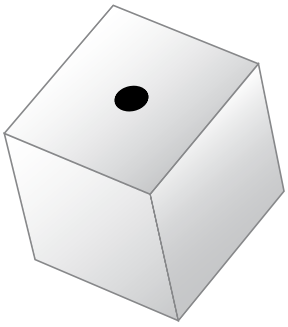
……………………………………

Begründe deine Lösung durch eine Plusaufgabe zu **deinem** Würfel.

Untersuche **verschiedene** 6er-Würfel. **Was fällt dir auf?**

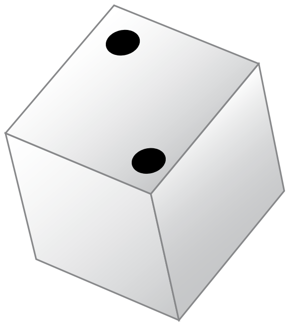
K 6 **Augensummenregel** am 6er-Würfel

Zeichne fehlende Punkte ein.



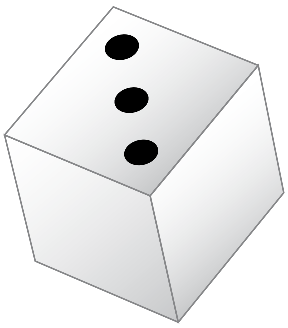
Wenn oben die Eins ist,
ist unten die ....

Zeichne fehlende Punkte ein.



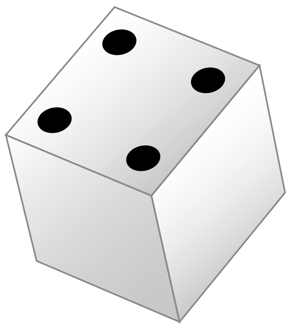
Wenn oben die Zwei ist,
ist unten die ....

Zeichne fehlende Punkte ein.



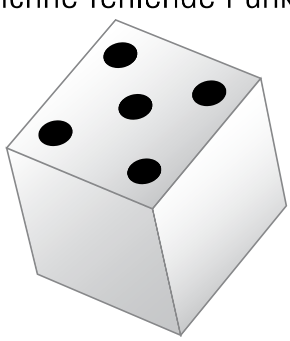
Wenn oben die Drei ist,
ist unten die ....

Zeichne fehlende Punkte ein.



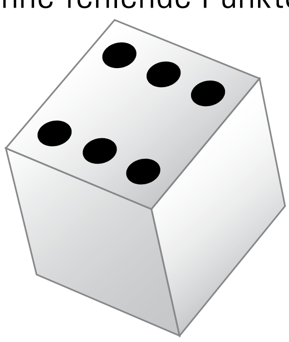
Wenn oben die Vier ist,
ist unten die ....

Zeichne fehlende Punkte ein.



Wenn oben die Fünf ist,
ist unten die ....

Zeichne fehlende Punkte ein.



Wenn oben die Sechs ist,
ist unten die ....

K 7.1 Entdeckerfragen zum Würfel
Partnerspiel mit einem Würfel

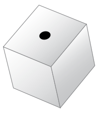
„Detektivfragen“ zum Ausschneiden.

Welche **Zahlenbilder** sind auf dem Würfel?

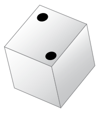
Wie viele **Flächen** hat ein Würfel?

Welche Zahlen stehen auf den **benachbarten** Flächen?

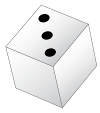
Welche Zahl **ist gegenüber von 1** auf dem Würfel?



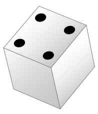
Welche Zahl **ist gegenüber von 2** auf dem Würfel?



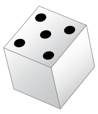
Welche Zahl **ist gegenüber von 3** auf dem Würfel?



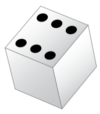
Welche Zahl **ist gegenüber von 4** auf dem Würfel?



Welche Zahl **ist gegenüber von 5** auf dem Würfel?



Welche Zahl **ist gegenüber von 6** auf dem Würfel?

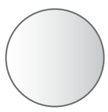


Wie viele **Punkte** sind auf dem gesamten Würfel?

Hat **jeder** Würfel diese Augensumme?

Kannst du **Plusaufgaben** zu einem Würfel nennen?

K 7.2 Partnerspiel mit einem Würfel (Teil 2)

Kannst du **Malaufgaben** zu einem Würfel nennen?	Kannst du **ein Bild** von einem Spielwürfel malen?	Kannst du ein Bild vom **Würfelnetz** zeichnen?
Zähle **rückwärts** bis 0.	Zähle **vorwärts** bis 10.	Zählt **abwechselnd** **vorwärts** bis 20.
Lege  Plättchen auf den Tisch.	**Verdoppel** deine gewürfelte Zahl.	**Wie viele** Zahlenbilder sind auf dem Würfel?

Deine Fragen zum Würfel:

K 8 Entdeckerfragen zum Würfel
Partnerspiel mit zwei Würfeln

„Detektivfragen“ zum Ausschneiden.

Welche **Zahlenbilder** sind auf den Würfeln?	Wie viele **Flächen** hat ein Würfel?	Welche Zahlen stehen auf den **benachbarten** Flächen?
Kannst Du **Malaufgaben** zu zwei Würfeln nennen und lösen?	Kannst Du **alle geraden** **Augensummen** nennen?	Kannst Du **alle ungeraden** **Augensummen** nennen?
Nenne die **größte** **Augensumme!**	Nenne die **kleinste** **Augensumme!**	**Verdoppel** deine Zahl.
Wie viele **Punkte** sind auf beiden Würfeln zusammen?	Haben **beide** Würfel dieselbe Anzahl an Punkten?	Kannst du **Plusaufgaben** zu zwei Würfeln nennen und lösen?
Verdoppel die Augensumme.	Zähle **rückwärts** bis 0.	Zähle **vorwärts** bis 20.

K 9 Entdeckerfragen zum Würfel

1. Entdeckung am Würfel
   Was fällt Dir auf?

	gegenüber von	
	gegenüber von	
	gegenüber von	
	gegenüber von	
	gegenüber von	

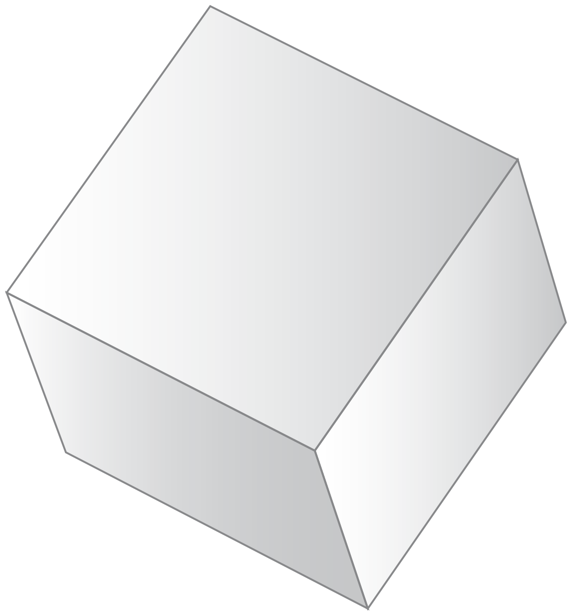
2. Entdeckungen am Würfel

oben						
unten						

Ich behaupte, dass ...

K 10 Bild vom 6er-Würfel

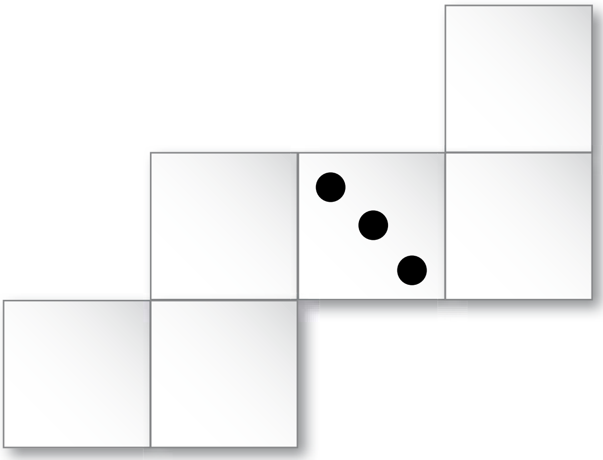
Zeichne ein Bild von **deinem** Würfel.

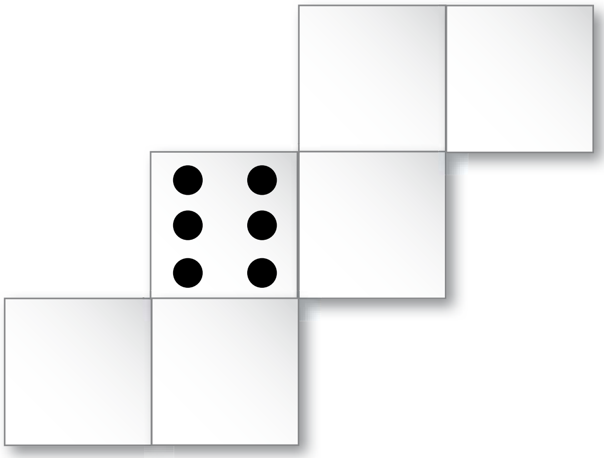


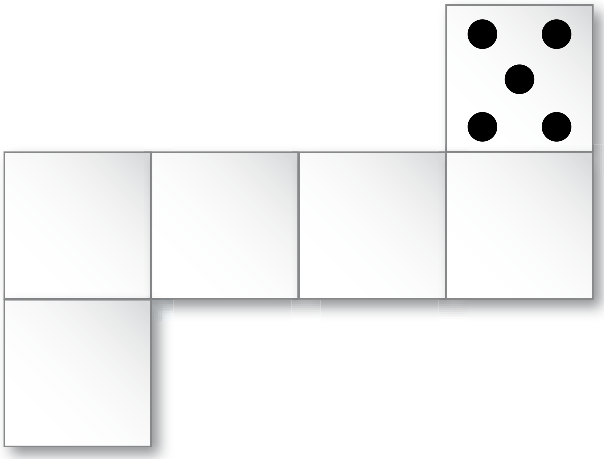
Kannst du deinen Würfel freihand zeichnen?
Es sollen **alle Punkte** zu sehen sein.

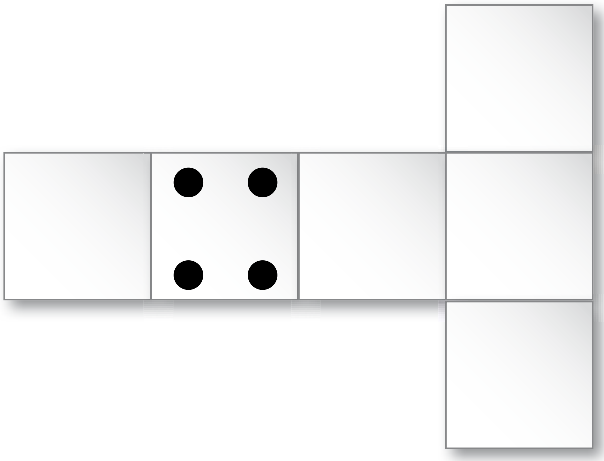
K 11 Würfelsummenregel - Lage der Würfelbilder

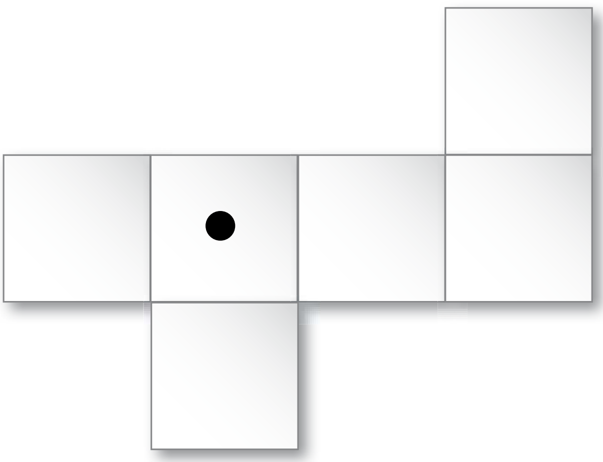
Zeichne die fehlenden Würfelpunkte in die Netze ein.
Erkläre einem Partner deine Entdeckung.

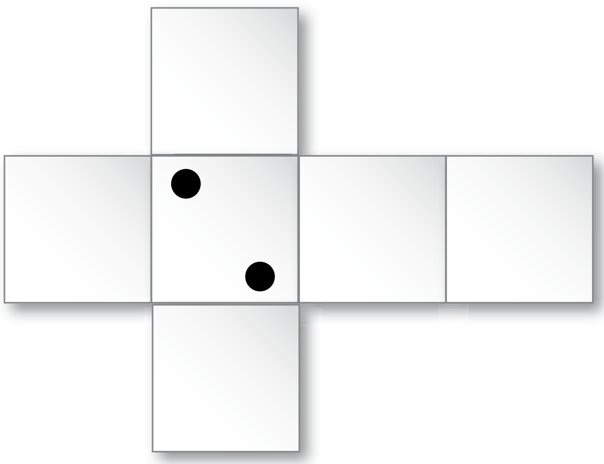












K 12 Rechnen mit Augenzahlen

Finde Rechenaufgaben zu Augenzahlen auf **einem** Würfel.

Plusaufgaben zum Würfel.

Malaufgaben zum Würfel.

1.2 Erste Realkontexte der Kombinatorik

Der Bereich der Kombinatorik verfolgt das Ziel, dass Kinder Erfahrungen machen dürfen und ein erstes Verständnis dafür bekommen, wie man alle Kombinationsmöglichkeiten von unterschiedlichen Sachverhalten ermitteln kann. Bedeutsam ist es, den Kindern heuristische Mittel zu eröffnen, die sie in die Lage versetzen systematisch vorzugehen.
Häufig bearbeiten Grundschulkinder kombinatorische Fragestellungen eher impulsiv. Sie raten oder finden anteilige Lösungen. An dieser Stelle ist es wichtig anzuknüpfen und mit Hilfe ikonischer (bildlicher) als auch mit enaktiver (handelnder) Ebene Einsicht zu verschaffen, um anschließend auf der symbolischen Ebene arbeiten zu können. Es bedarf des häufigen konkreten Ausprobierens. Es empfiehlt sich vielseitige Materialien anzubieten, die es ermöglichen Form und Farbkombinationen in einer Gesamtübersicht zu legen und zu verschieben.

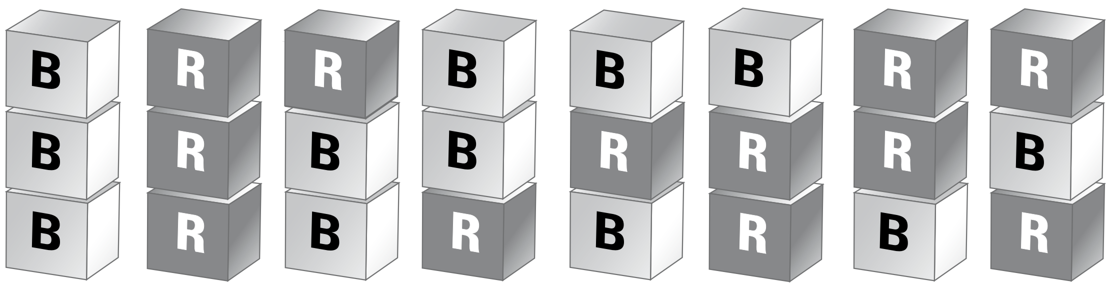
Mögliche Materialauswahl:
- Farbige Plättchen, Spielsteine
- Bildkarten
- Steckwürfel
- Ziffernkarten

Zur Hinführung bietet sich die Reduzierung auf 2-3 Merkmale an.

Kombinatorik: **Bauaktivität Steckwürfel**

TIM hat rote und blaue Steckwürfel.
Er baut verschiedene Türme aus jeweils drei Steckwürfeln.

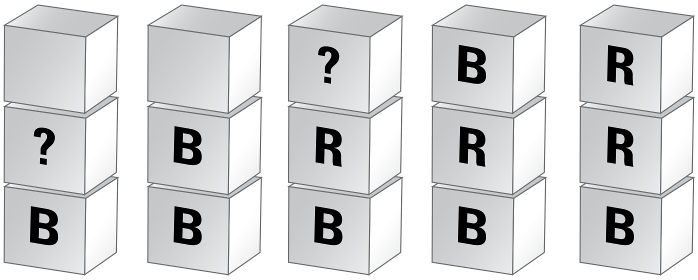
- Baue **alle** Türme, die entstehen können.
- Ordne die Türme.
- Male eine Gesamtübersicht von **allen** Türmen.
- Wie viele Türme kann Tim finden?



B	B	B
B	B	R
R	B	B
B	R	B
B	R	R
R	B	R
R	R	B
R	R	R

Darstellungsmöglichkeiten für die Gesamtübersicht:

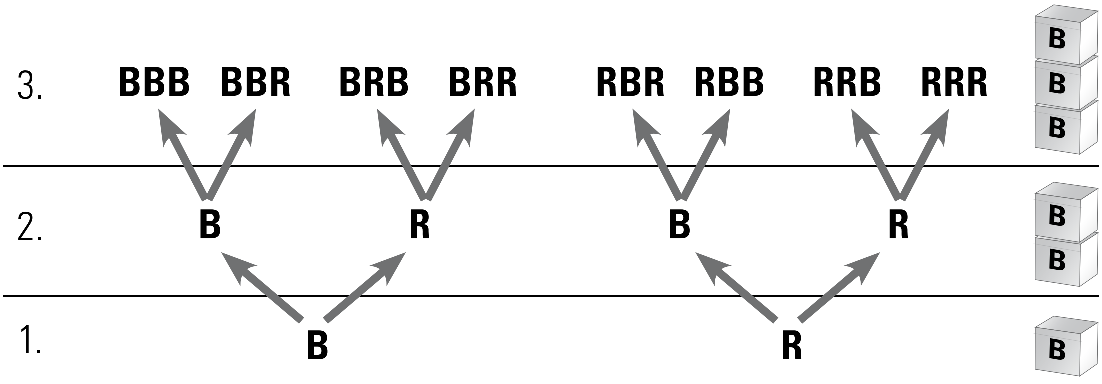
- Produkte der Bauaktivität fotografieren
- tabellarische Übersicht von Plättchen, Würfeln, Buchstaben



Pfade

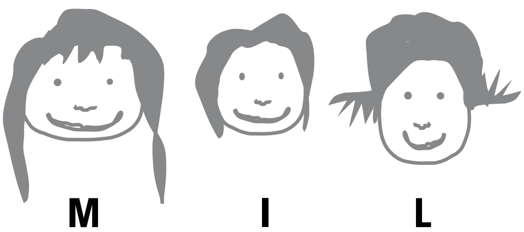
Wenn der untere Steckwürfel blau ist, dann kann der mittlere Steckwürfel rot oder blau sein. Wenn der mittlere Steckwürfel rot ist, dann kann der obere Steckwürfel rot oder blau sein.

Baumdiagramm von Plättchen, Würfeln, Buchstaben



Kombinatorik: **Bild und Buchstaben**

Mona, Iris und Lea wollen ein gemeinsames Photo machen.
Wie könnten sich die Mädchen auf die Bank setzen?



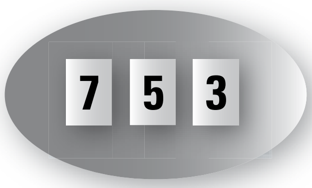
M	I	L
M	L	I
L	M	I
L	I	M
I	L	M
I	M	L

TIPPS: Eine Person wandert! Oder eine Person bleibt sitzen!
Spielt die Situation nach und führt ein „Buchstabenprotokoll“.

Kombinatorik: Vertauschungen - **Auswahlpfade für Ziffernkombinationen**

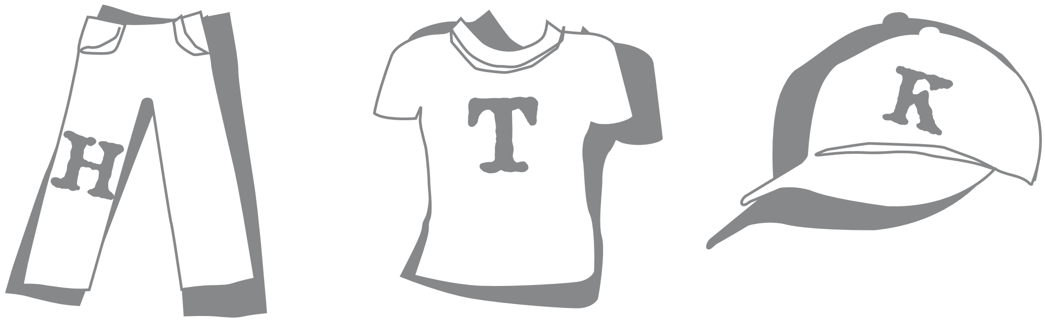
Für dein Zahlenschloss hast du eine Geheimzahl mit drei Ziffern vergessen.
Du erinnerst, dafür die drei Ziffern 7, 5 und 3 ausgewählt zu haben.
Wie kann deine Geheimzahl für das Schloss ausgesehen haben?

Wenn die erste Ziffer die 7 war, dann...oder...



7 → 5 → 3
7 → 3 → 5
5 → 7 → 3
5 → 3 → 7
3 → 5 → 7
3 → 7 → 5

Kombinatorik Kleidung
Du trägst gern eine Hose, ein T-Shirt und eine Kappe.



Male die Vorlagen (K13) an:
Die Kleidungsstücke gibt es in gelb, blau und rot.

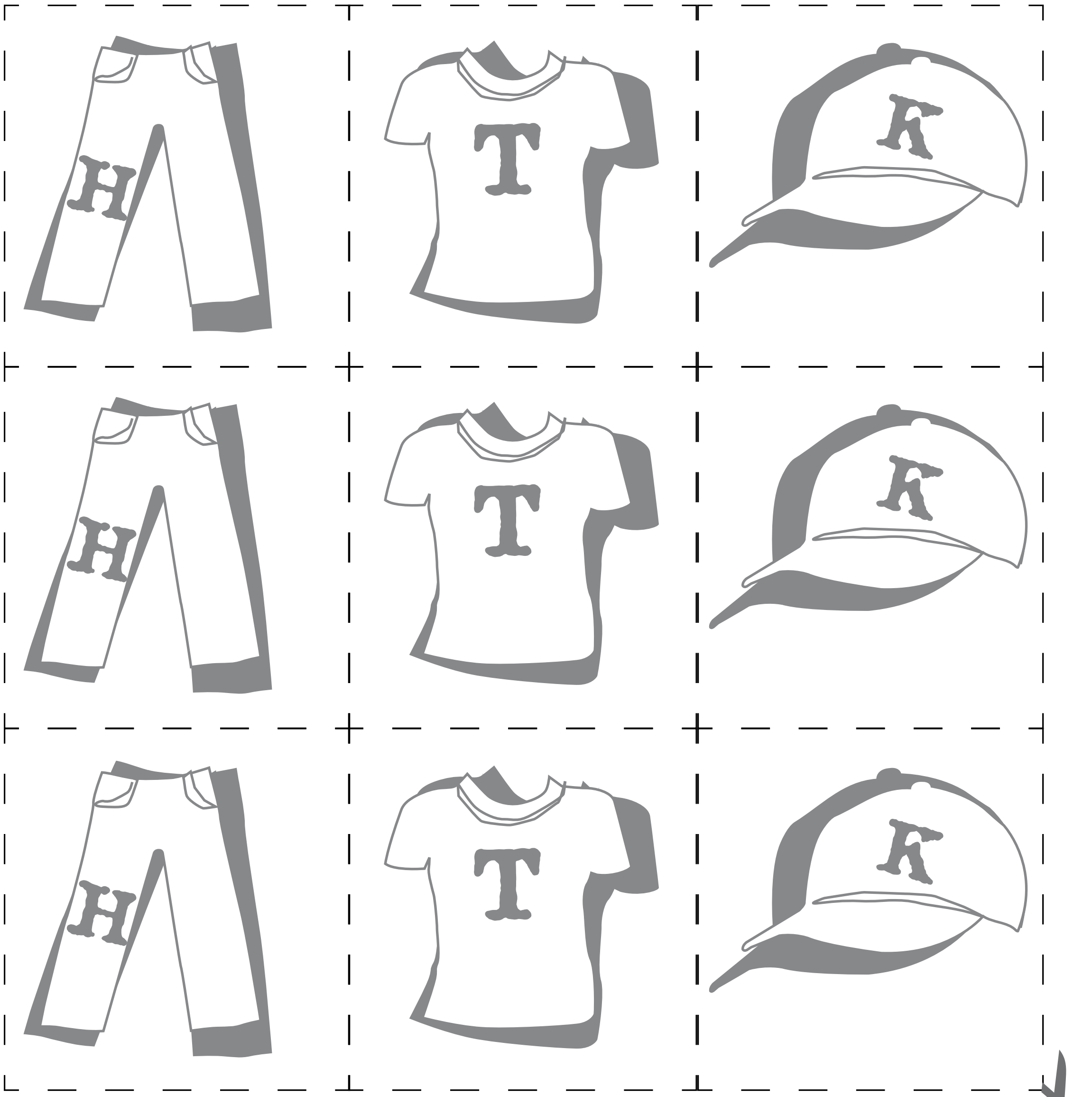
Welche und wie viele Möglichkeiten hast du dich verschieden anzuziehen?

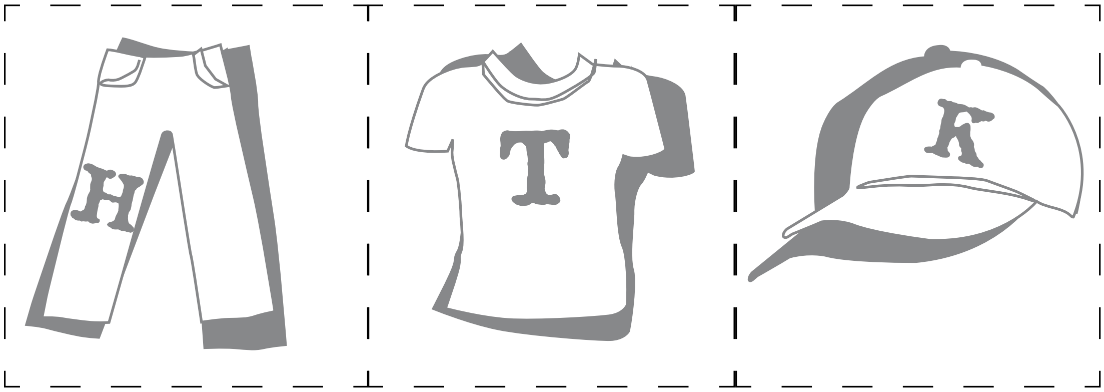
TIPP: Lege deine Lösungen zunächst mit den Karten und schreibe alle Kombinationen auf.

Welche Möglichkeiten hast du,
wenn du zusätzlich braune Kleidungsstücke kombinieren kannst?
Wie viele Möglichkeiten gibt es insgesamt?

K 13 **Kombinatorik** Kleidung

Male die Vorlagen an. Die Kleidungsstücke gibt es in gelb, blau und rot.



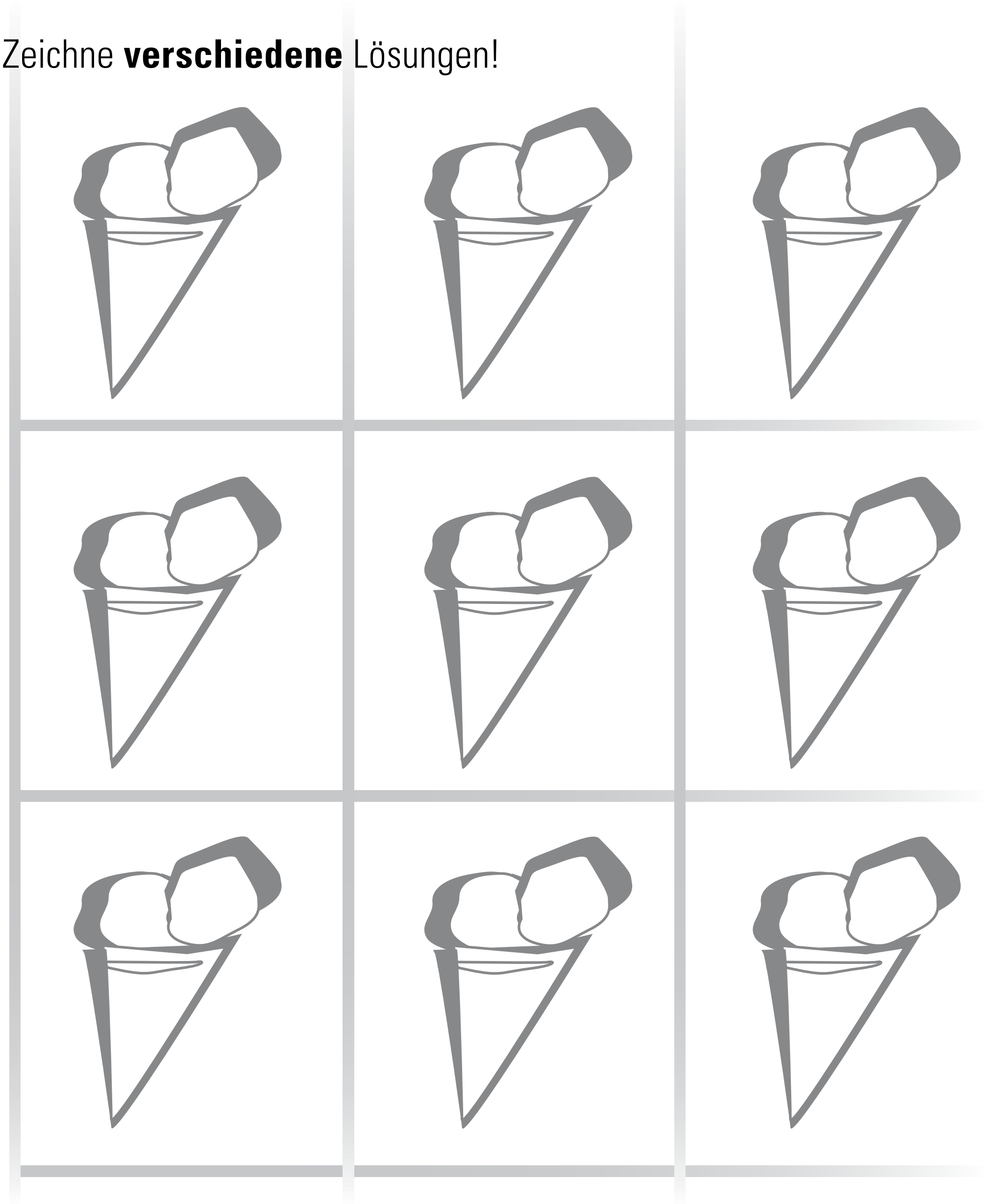


Zum Einfärben und Ausschneiden.

K 14 **Kombinatorik** Eis

Du kaufst **zwei** Kugeln Eis.
Du hast die Wahl zwischen: Erdbeere, Vanille, Schokolade.
Wie sieht dein Eis aus?

Zeichne **verschiedene** Lösungen!



Zwei Kugeln Eis

Stelle **alle** Möglichkeiten in der Tabelle dar, **oder** zeichne eine Tabelle in dein Heft.

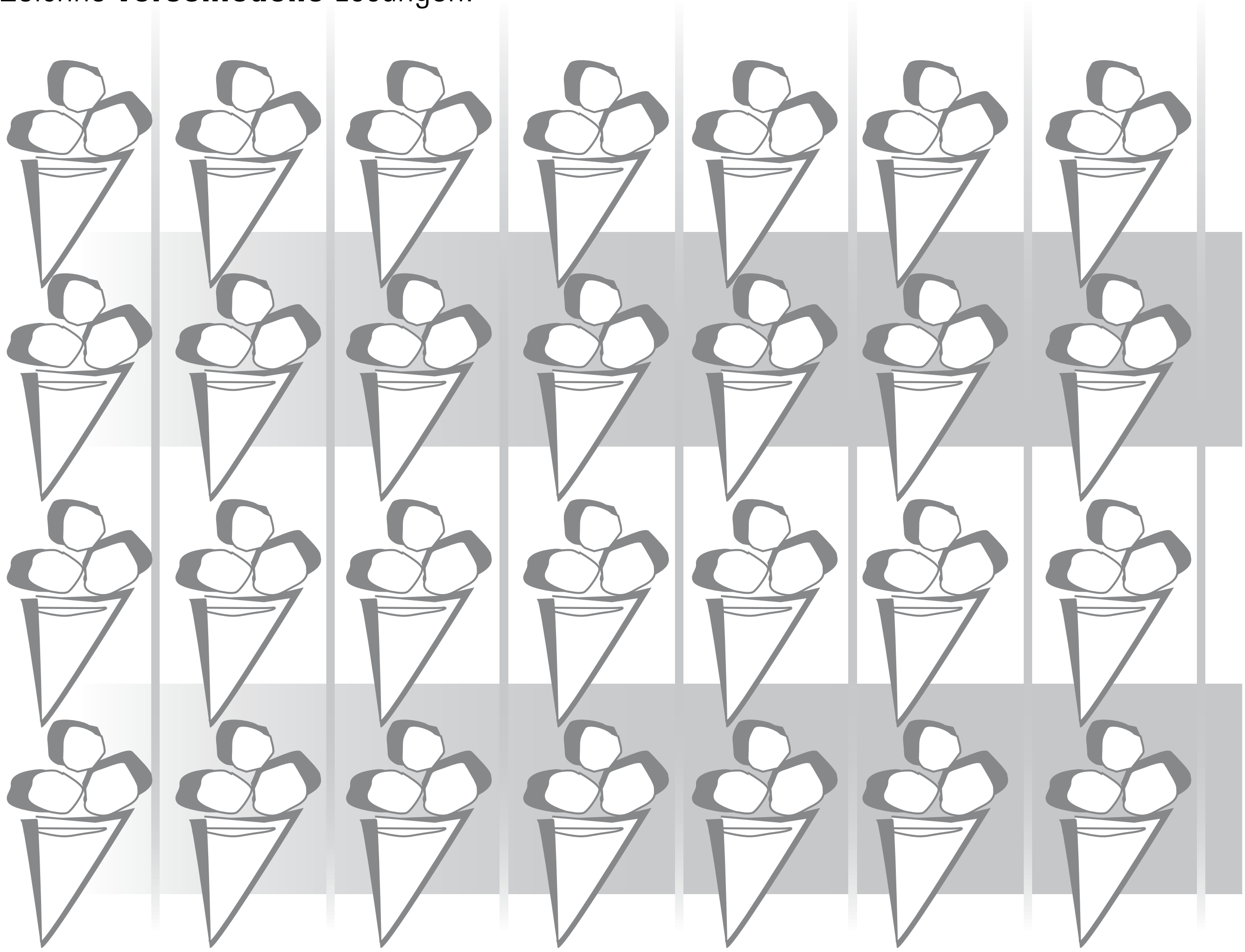
	Erdbeere = **E**	Vanille = **V**	Schokolade = **S**
Erdbeere			
Vanille			
Schokolade			

Finde alle Lösungen!
Tipp: Lege alle Lösungen mit bunten Plättchen.

K 15 **Kombinatorik** Eis

Du kaufst **drei** Kugeln Eis.
Du hast die Wahl zwischen: Erdbeere, Vanille, Schokolade.
Wie sieht dein Eis aus?

Zeichne **verschiedene** Lösungen!



Drei Kugeln Eis

Erdbeere = **E**	Vanille = **V**	Schokolade = **S**
E E E	**-**	**-**
E E	**V**	**-**
E E	**-**	**S**
E	**V**	**S**
...	**...**	**...**

Übertrage die Tabelle in dein Heft.
Setze die Tabelle fort, bis du **alle** Kombinationen gefunden hast.

Tipp: Lass dir zeigen, wie du ein Baumdiagramm anlegen kannst.

2 Experimente

Bildungsplanbezug
„Phänomene des Zufalls kennen die Schülerinnen und Schüler aus ihrem Alltag, beispielsweise aus Spielsituationen. Sie lernen, dass die Ergebnisse von Alltagsvorgängen zufällig sein können und erleben und begreifen die Messbarkeit von Wahrscheinlichkeiten (Eintreffen von Ereignissen in Experimenten / langen Versuchsreihen).“(vgl. Rahmenplan Mathematik Grundschule, S.32)
Der Bildungsplan fordert, dass der Unterricht den Kindern Lernsituationen bietet, die sie darin unterstützen, Gewinnchancen bei Spielen mit zufälligem Ergebnis (Würfel, Glücksrad, Lostrommel) einschätzen zu können und Wahrscheinlichkeiten abzuleiten. Ferner ist zu erreichen, dass das inhaltliche Verständnis von Gleichwahrscheinlichkeit angebahnt wird.
Die im Anschluss aufgeführten Beispiele orientieren sich an den Anforderungen des Bildungsplans „Mathematik Grundschule“ und sind für Lehrer/innen des Faches Mathematik für das Lehramt der Primarstufe geschrieben. Die Aufgaben wurden zum Teil von Mathematik-Moderatoren/innen des PriMa-Projektes entwickelt und an Hamburger Grundschulen erprobt. Den Mitwirkenden sei an dieser Stelle nochmals gedankt.

Sachanalyse
Bei der `Idee Daten und Zufall´ handelt es sich um relativ neue Aufgabeninhalte und Zielsetzungen für das Unterrichten in der Grundschule. Einige sachdienliche Hinweise: „In einem ersten elementaren Zugang kann man in der Stochastik drei unterschiedliche Bereiche ausmachen: Kombinatorik, Beschreibende Statistik, Wahrscheinlichkeitstheorie/Mathematische Statistik, die natürlich miteinander vernetzt sind.

In der **Kombinatorik** geht es um Anzahlbestimmungen. Wie viele Möglichkeiten gibt es? Welche Möglichkeiten gibt es? Allgemeiner: „Zur Kombinatorik zählen alle interessanten Fragen über endliche Mengen:“ (Flachsmeier, J.: Kombinatorik. Eine Einführung in die mengentheoretische Denkweise. Berlin 1970, S. 214.)

In der **Beschreibenden Statistik** geht es um Messungen, um eine Beschreibung des Ist-Zustandes und um Darstellungen von Daten in Diagrammen. Die durch statistische Messung ermittelten Daten werden miteinander in Bezug gesetzt (Mittelwert, Durchschnitt), ausgewertet und interpretiert.

Die **Wahrscheinlichkeitstheorie** entschlüsselt den Zufall so weit wie möglich durch mathematisches Denken. Sie schafft Modelle zur Bewertung von Statistiken. (vgl.Kütting,1999 S. 9ff) In der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird der Zufall untersucht. Zufallsexperimente werden durchgeführt, die Ergebnisse analysiert und die Häufigkeit für ein bestimmtes Ereignis ermittelt. Die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ereignis wird durch mathematisches Denken errechnet. Ziel ist es im Rahmen des Mathematikunterrichts der Grundschule, ein erstes Verständnis für die „Mathematik des Zufalls“ zu gewinnen.

Mathematisch unterscheidet man die folgenden Begriffe:
- Beim Werfen eines Spielwürfels kann man eine 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 würfeln. Würfelt man einmal, dann führt man ein Zufallsexperiment durch.
- Das Ergebnis eines Zufallsexperimentes wird **Ausfall** genannt (z.B. eine 5).
- Beim Würfeln sind sechs verschiedene Ausfälle möglich.
- Die Menge dieser Ausfälle heißt **Ereignisraum**.
- Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ausfalles „5“ im Ereignisraum 1 bis 6 ist also 1/6. Soll man mit einem Würfel eine 5 oder eine 6 würfeln, dann ist die Wahrscheinlichkeit 2/6.
- Führt man die Zufallsexperimente sehr oft durch, dann kann man mit der Wahrscheinlichkeit der Ausfälle rechnen.
- Ein **sicheres Ereignis** hat die Wahrscheinlichkeit 1 (z.B. beim Werfen eines Würfels eine Zahl von 1 bis 6 zu bekommen).
- Ein **unmögliches Ereignis** hat die Wahrscheinlichkeit 0 (z.B. beim Werfen einer Münze Zahl und Bild zu bekommen).

(vgl. Radatz/Schipper, 1999, S. 118)

2.1 Experiment: Augensummen mit zwei Würfeln

Inhaltsbezogene mathematische Anforderungen
Häufigkeit von Ereignissen durch kombinatorische Überlegungen begründen: Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z.B. systematisch probieren) sowie mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln.
Gewinnchancen bei Spielen und Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen: Grundbegriffe kennen (z.B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich)

Beschreibung der Lernsituation:

Augensummen werfen

- Den Vorgang mit zufälligem Ergebnis - einmaliges Werfen zweier regulärer 6er-Würfel, wobei die Augensumme beobachtet wird – mehrfach ausführen.
- Erfassen aller Möglichkeiten, eine bestimmte Augensumme zu erhalten.
- Erkennen, dass nicht alle möglichen Augensummen beim Würfeln mit zwei Würfeln gleichhäufig auftreten.

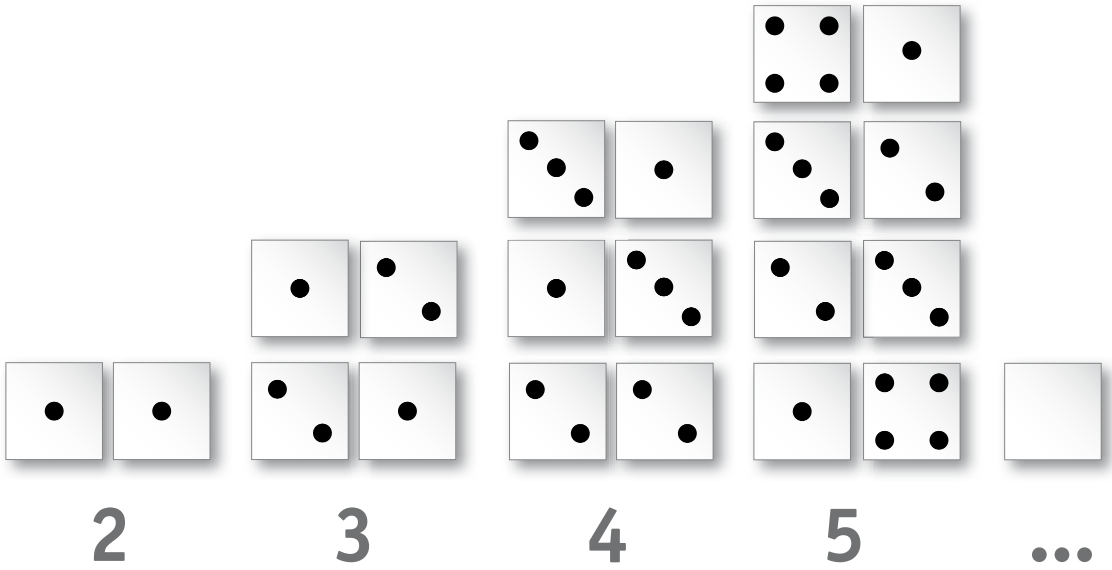
Zusatz

- Schlüsse für das Auftreten der einzelnen Augensumme ziehen.
- Gewinnen der Erfahrung, dass man den Zufall in gewisser Weise berechnen kann.
- Quantitative Auswertung der Ergebnisse.

Die schrittweise kombinatorische Ermittlung der Augensummen sollte durch eine kurze Demonstration mittels zwei großer Schaumstoffwürfel und einer begleitenden Veranschaulichung an der Tafel / im Sitzkreis für die gesamte Klasse erfolgen.

Mögliche Veranschaulichung:

Die Schüler ermitteln mit zwei gleichzeitig geworfenen Würfeln mögliche Kombinationen der Augensummen und stellen eine Übersicht in Partner-/ Gruppenarbeit dar.



Aus: Bennett, Nelson, 1992

Augensumme	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Anzahl der Kombinationen		1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	

Lösungen: Der Ereignisraum liegt von 2 – 12. 1 und 13 können nicht fallen.
Es gibt 36 Fälle.
Einige Augensummen treten gleichhäufig auf.
Einige Augensummen treten häufiger / seltener auf.
Es gibt Augensummen oder auch *„Gewinnzahlen“* mit großer Häufigkeit.
Der Vorgang produziert im Ereignisraum zufällige Ergebnisse.

Ein wesentliches Ziel ist es,
Fehlvorstellungen im Umgang mit einem Würfel...

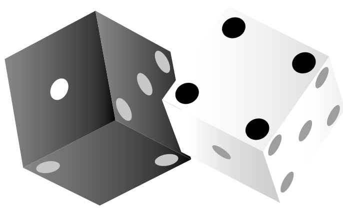
- „...eine Zahl kommt häufiger vor“, „...die 6 kommt nie, die 3 kommt öfter...“ durch einfache Experimente zu korrigieren: die Gleichwahrscheinlichkeit der Augenpunkte von 1, 2, 3, 4, 5, und 6.
- Einschätzung der Häufigkeit im Umgang mit zwei Würfeln durch Veranschaulichung der Augensummen zu begreifen.

Material / Hilfsmittel: 6er-Würfel, Applikationen der Würfelbilder für die Tafel
Weitere Literatur: Wittmann, E.Ch./Müller,G.N.: Zahlenbuch 1, Klett Verlag Käpnick,F.(u.a.): Das Mathehaus 4, S. 102, Cornelsen Verlag

K 16 **Würfelexperiment:** Zerlegung

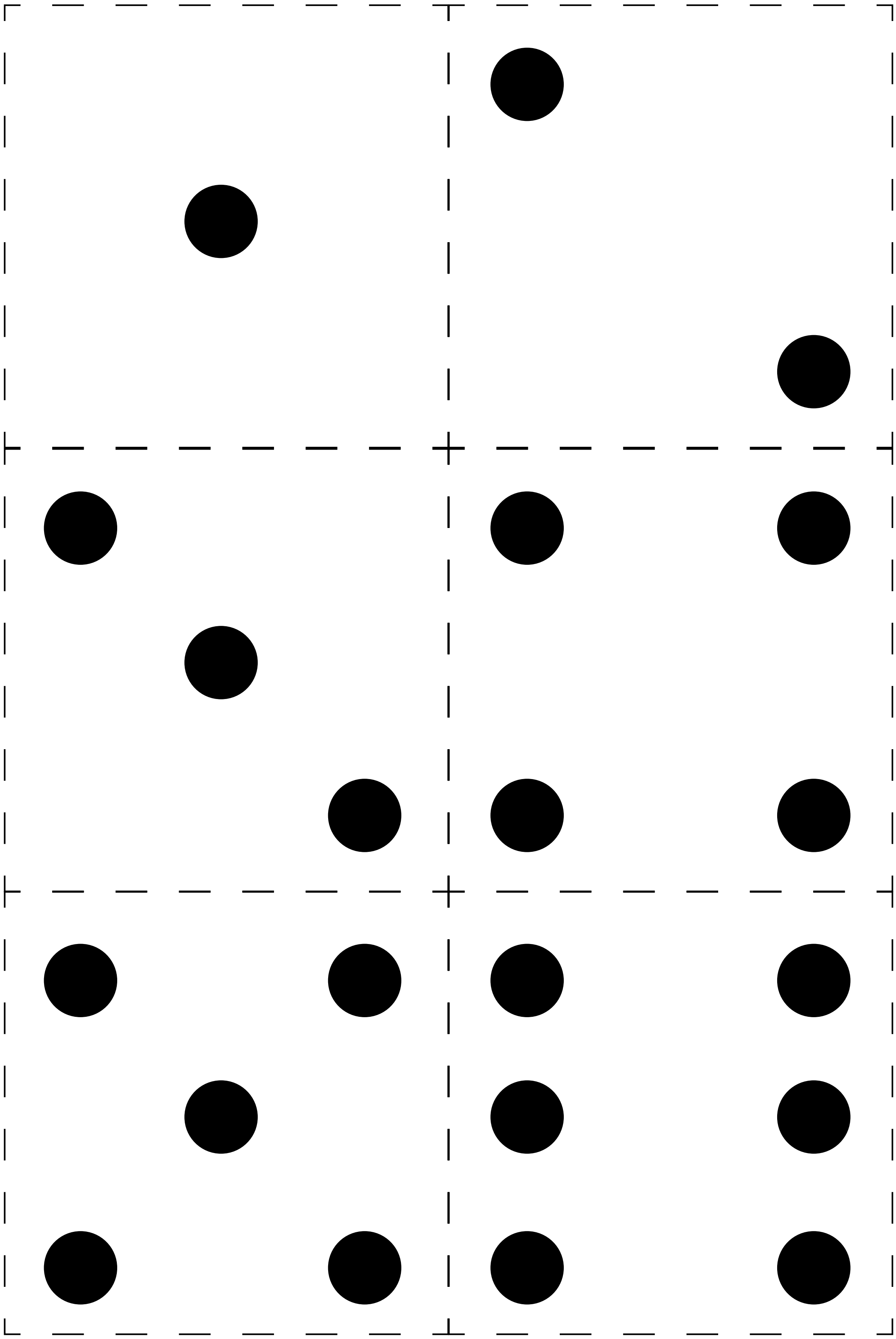
Beim Würfeln mit zwei Spielwürfeln gibt es .... Möglichkeiten,
die Augenzahlsumme zu bilden.
Finde alle Möglichkeiten und lege eine Übersicht an.

Augenzahl-summe	Möglichkeiten	Anzahl
2	**1+1**	**1**
3	**1+2, 2+1**	**2**
4		

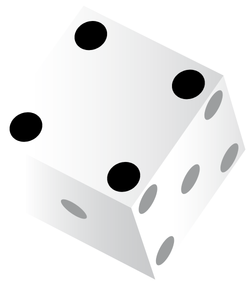


Was fällt auf?

K 17



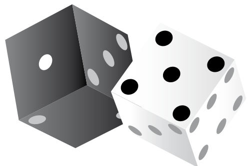
K 18 **Würfelexperiment:** besondere Augensummen



1. Stell dir vor, du würfelst mit **einem** Spielwürfel fünfmal und addierst die Zahlen.

Die **kleinstmögliche** Summe ist: ____________

Die **größtmögliche** Summe ist: ____________



2. Du spielst mit Freunden ein neues Spiel mit **zwei** Spielwürfeln. Bei jedem Wurf addierst du die gewürfelten Augenzahlen der beiden Würfel. Welche **Summen** sind möglich?

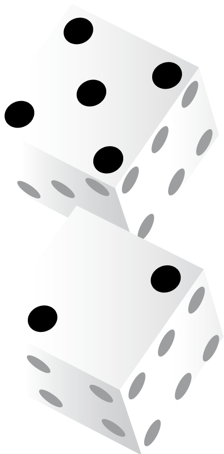
Schreibe alle Möglichkeiten auf.

3. Beim Würfeln mit **zwei** Spielwürfeln wird die Summe 7 wesentlich häufiger gewürfelt als die Summe 12.

Woran liegt das?

K 19 **Würfelexperiment:** Strichliste

Würfel 30 mal mit zwei Würfeln.
Notiere die gewürfelten Augensummen in einer Strichliste oder fertige eine eigene Tabelle an.



1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	

Kreuze an. Was ist richtig?

☐ Alle Augensummen **treten gleichhäufig** auf.

☐ Alle Augensummen **treten nicht gleichhäufig** auf.

K 20 **Würfelexperiment:** Strichliste

Protokoll **„Würfelexperiment“**

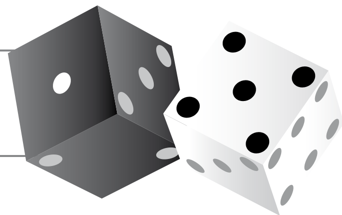
Experimentiergruppe Namen: ____________________

Zahl der Würfe:

Datum: ____________________

Augenzahlsumme											
Häufigkeit											

Was fällt euch auf?



Protokoll **„Würfelexperiment“**

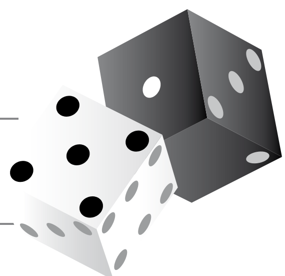
Experimentiergruppe Namen: ____________________

Zahl der Würfe:

Datum: ____________________

Augenzahlsumme											
Häufigkeit											

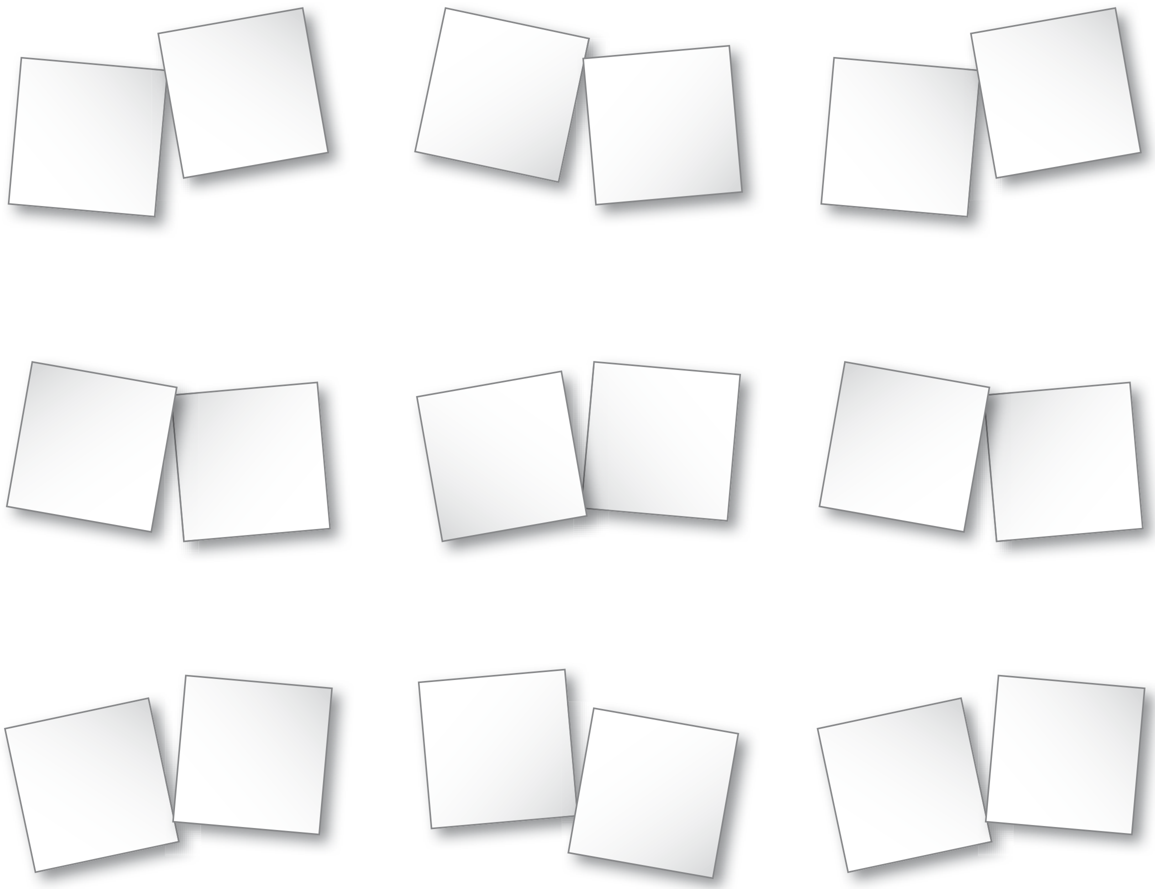
Was fällt euch auf?



K 21 **Würfelexperiment:** Finde alle Möglichkeiten

Benutze zwei Würfel.

Finde alle Möglichkeiten, für die Augensumme ____________ .

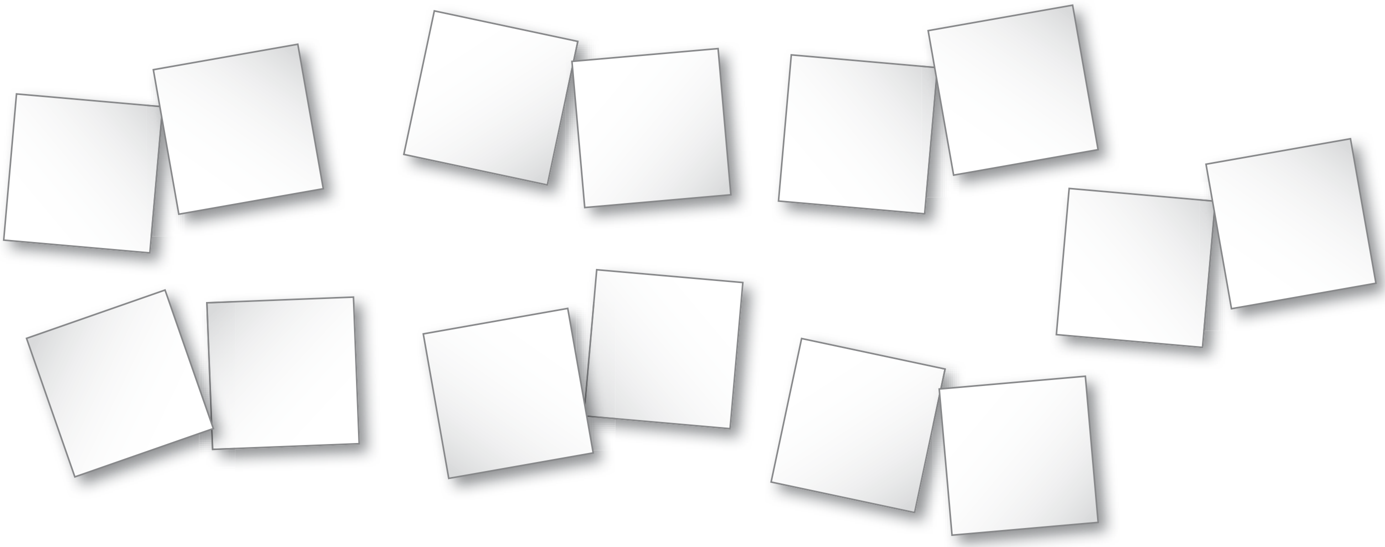


Was fällt dir auf?

Tausche dich mit einem Partner aus.

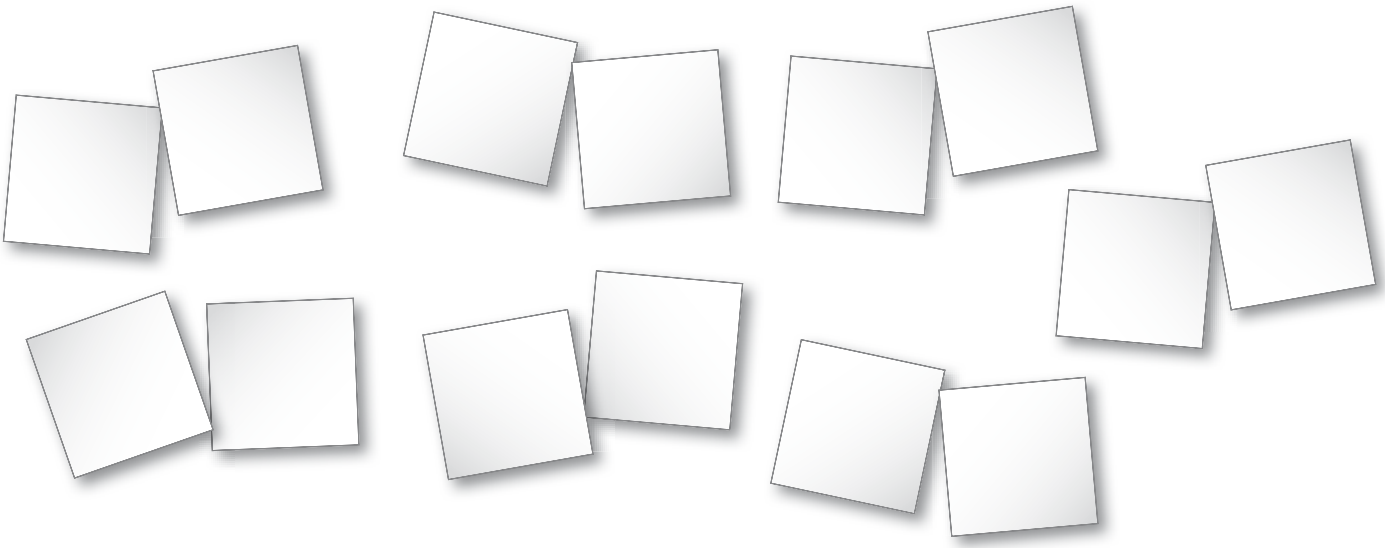
K 22

Benutze zwei Würfel.
Finde alle Möglichkeiten für die Augensumme.



Es gibt ________ Möglichkeiten.

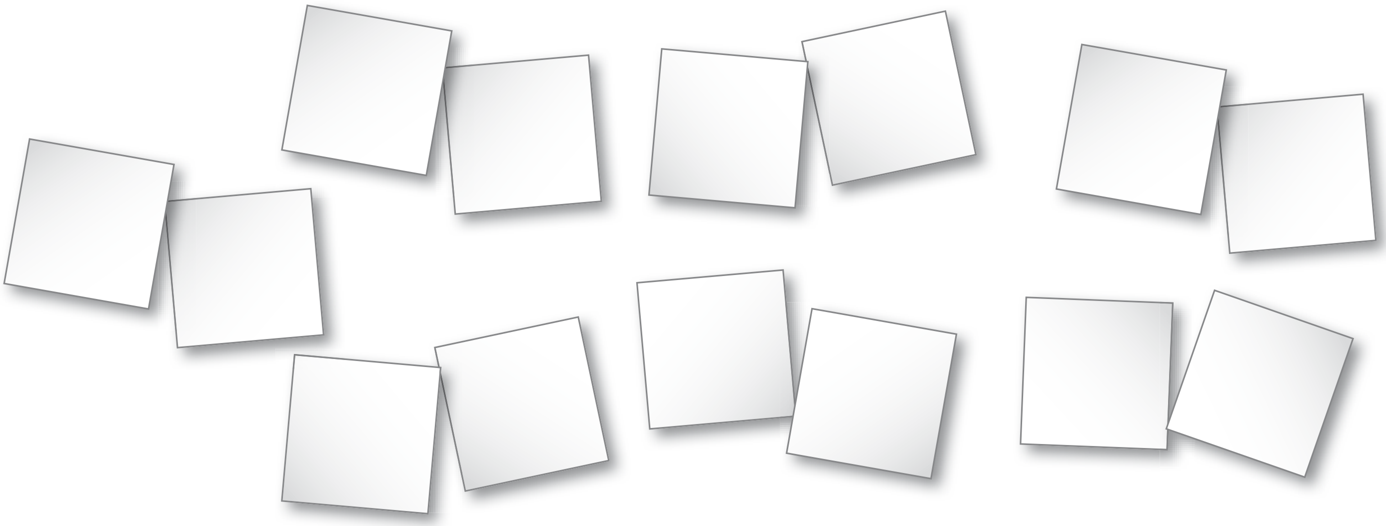
Benutze zwei Würfel.
Finde alle Möglichkeiten für die Augensumme.



Es gibt ________ Möglichkeiten.

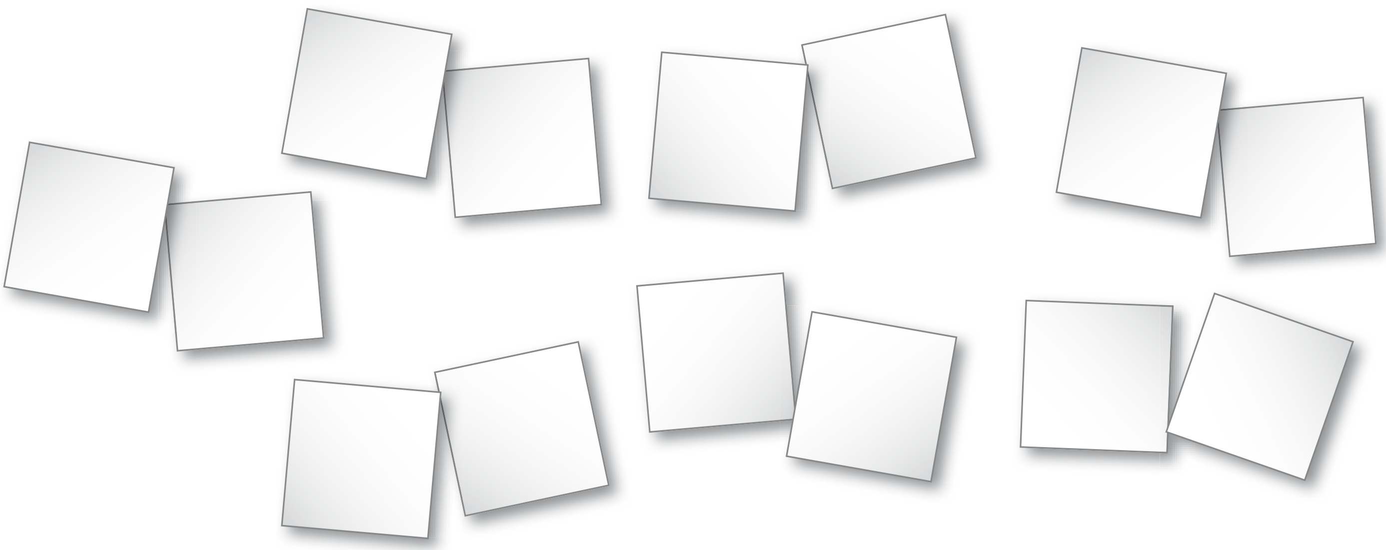
K 23

Benutze zwei Würfel.
Finde alle Möglichkeiten für die Augensumme .



Es gibt __________ Möglichkeiten.

Benutze zwei Würfel.
Finde alle Möglichkeiten für die Augensumme .



Es gibt __________ Möglichkeiten.

K 24 **Würfelexperiment:** Seltene und häufige Ereignisse

Fülle die Tabelle mit den Würfelbildern. Trage die Augensummen ein.

+	•					
•	2					

Beschreibe, was dir auffällt!

Tausche deine Entdeckungen mit einem Partner aus.

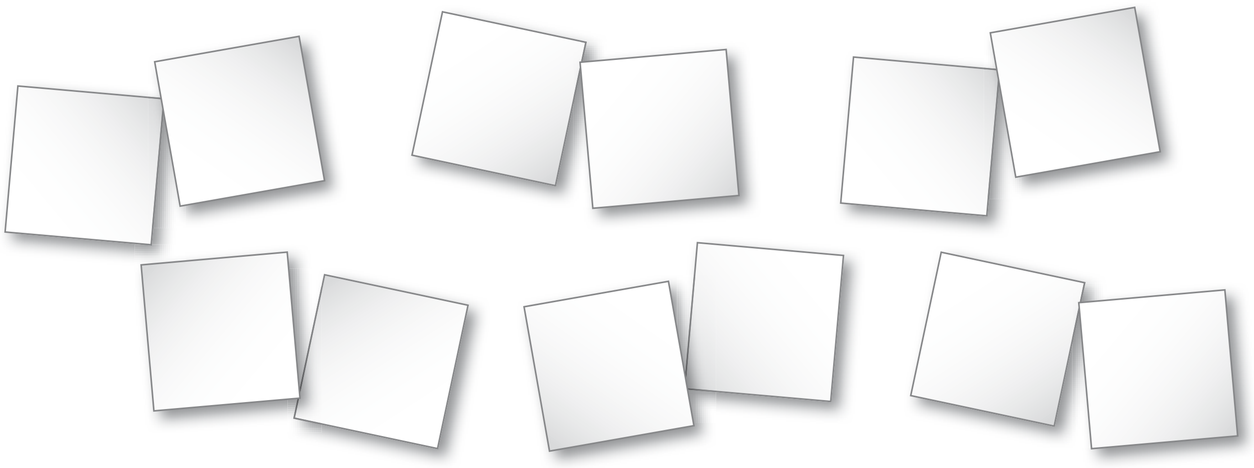
K 25 **Würfelexperiment:** Seltene und häufige Ereignisse

Benutze zwei Würfel.
Welche Augensummen sind am schwersten zu bekommen?

Male diese.

Begründe!

Welche Augensummen sind am leichtesten zu bekommen?
Male diese.

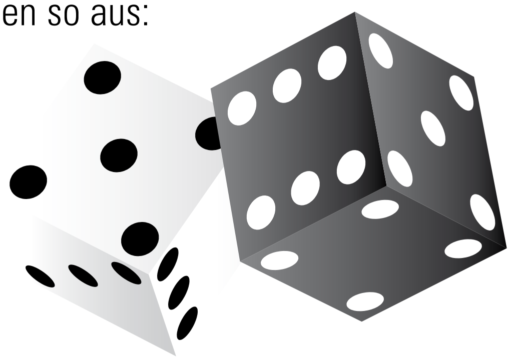


Begründe!

Tausche dich mit einem Partner aus.

K 26 **Würfelexperiment:** Seltene und häufige Ereignisse

Eure zwei Würfel pro Gruppe sehen so aus:



1. Tragt in die Tabelle **alle Möglichkeiten ein**, die Augensummen 2 bis 12 zu würfeln. Arbeitet mit zwei Würfelfarben!

2. Würfelt **10 Minuten** abwechselnd in der Gruppe. Legt eine **Strichliste** an, welche Augensummen ihr wie gewürfelt habt. (siehe K 27/ 28)

	☐ + ☐	☐ + ☐
3		

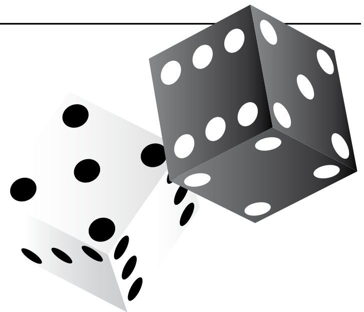
3. Welche Augensummen habt ihr am häufigsten gewürfelt? Welche am seltensten? Ordnet sie! Beginne mit der häufigsten Augensumme:

4. Welche Augensummen waren am schwersten zu würfeln?

☐ + ☐ ☐ + ☐

Warum?

K 27 **Würfelexperiment:** Seltene und häufige Ereignisse



Führt eine Strichliste pro Gruppe.
Wie zeigte sich die Augensumme?

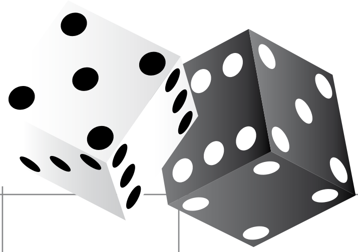
							Gesamtanzahl
2	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	
3	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	
4	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	
5	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	
6	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	
7	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	
8	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	
9	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	
10	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	
11	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	
12	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	

Vergrößern auf Din A3

Zählt am Ende die Striche aus.
Vergleicht die Tabelle mit anderen Gruppenergebnissen.

K 28 **Würfelexperiment:** Seltene und häufige Ereignisse

Wie erschien die Augensumme?



							Gesamtanzahl
2	❑+❑						
3	❑+❑	❑+❑					
4	❑+❑	❑+❑	❑+❑				
5	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑			
6	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑		
7	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	
8	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑		
9	❑+❑	❑+❑	❑+❑	❑+❑			
10	❑+❑	❑+❑	❑+❑				
11	❑+❑	❑+❑					
12	❑+❑						

Vergrößern auf Din A3

Vergleicht die Tabelle mit anderen Gruppenergebnissen.

K 29 **Würfelexperiment:** Daten im Diagramm

Würfel mit zwei Spielwürfeln 50-mal.
Addiere pro Wurf die Augenzahlen.

a) Welche Augensummen sind möglich? Kreise die Zahlen ein.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

b) Vermute, welche Augensumme du am häufigsten erhältst.

c) Prüfe deine Vermutung, indem du das Experiment durchführst.
Lege während des Experiments ein Diagramm an.
Färbe pro Augensumme ein Kästchen ein.

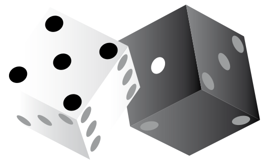
Anzahl der Ereignisse

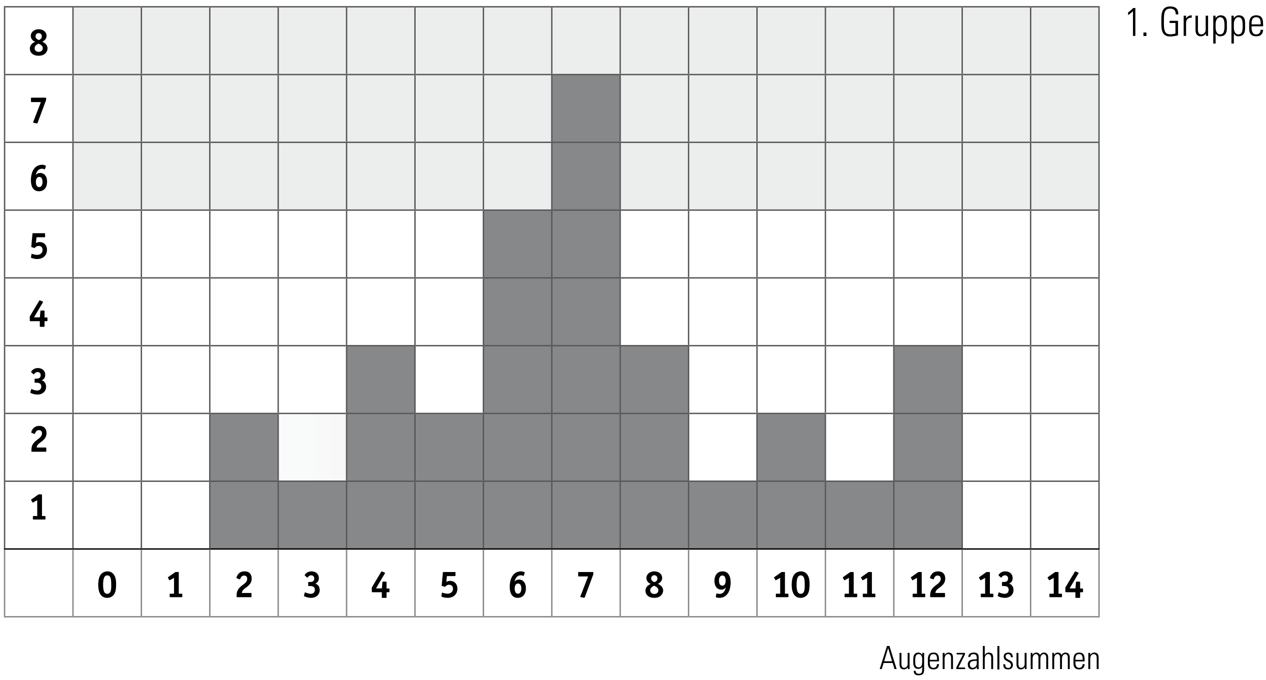
30															
29															
28															
27															
26															
25															
24															
23															
22															
21															
20															
19															
18															
17															
16															
15															
14															
13															
12															
11															
10															
9															
8															
7															
6															
5															
4															
3															
2															
1															
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

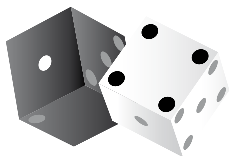
Augenzahlsummen

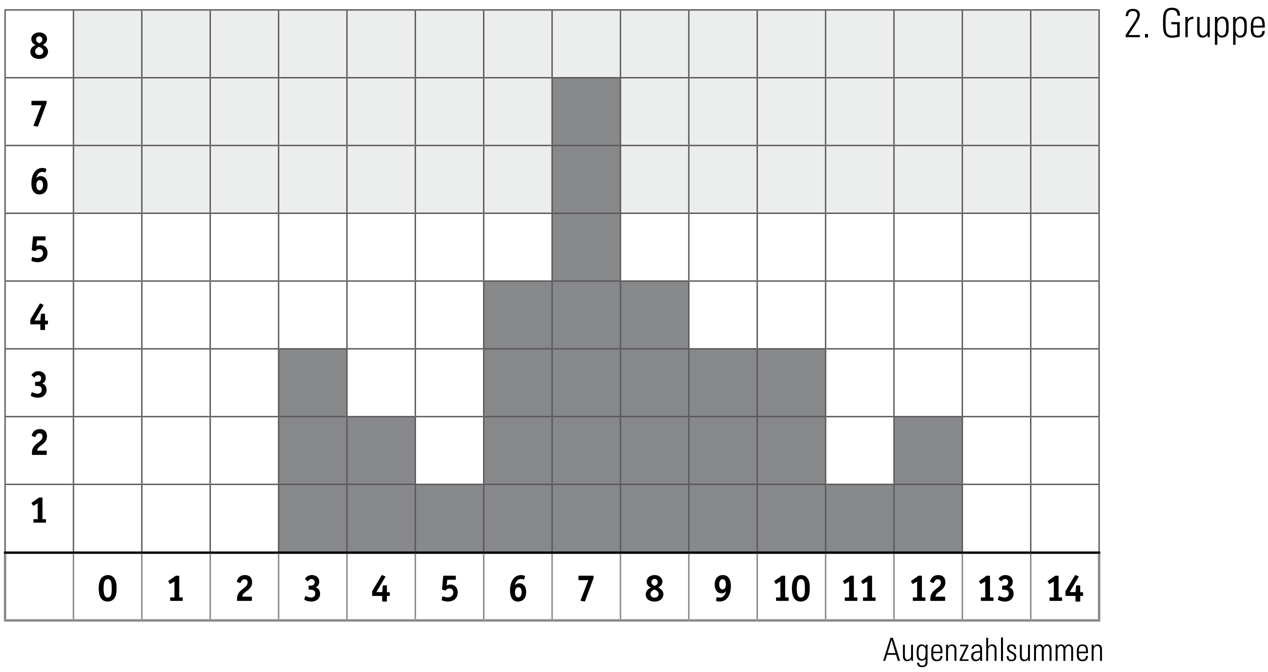
K 30 **Würfelexperiment:** Säulendiagramme im Vergleich

Es wurde mit zwei Spielwürfeln 30-mal gewürfelt und
beide Augenzahlen jeweils addiert.
Vergleicht die Diagramme. Was fällt auf?









2.2 Experiment: Münzwurf `Kopf oder Zahl?´

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen
In Beobachtungen und einfachen Experimenten Daten sammeln und in Tabellen darstellen, mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln.
Wahrscheinlichkeiten abschätzen und vergleichen.
Sprachliche Formulierungen entwickeln und Grundbegriffe kennen (z.B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich).

Beschreibung der Lernsituation
Besonders häufig tritt ein Münzwurf im Sport und im Spiel auf. Typische Fragestellungen „Wer beginnt?", „Welche Mannschaft spielt zuerst gegen die Sonne?", „Welche Mannschaft hat zuerst den Ball zum Start des Spiels?" werden mit dem einmaligen Werfen einer Münze ausgelotet.

Dieses Zufallsexperiment gilt als faires Spiel, denn beide Ereignisse (hier: Kopf oder Zahl) haben die gleiche Gewinnchance. (1:1)
Ein Münzwurf kann bereits im 1. Schuljahr viele Möglichkeiten des handelnden Entdeckens von mathematischen Beziehungen bieten.
Dieses einfache Experiment zur Wahrscheinlichkeit dient nicht dem Selbstzweck, es dient vielmehr dem Ziel des Umweltverständnisses auch schon von Grundschulkindern, des realistischen Einschätzen von Vorgängen oder Ereignissen als nur über „Glück" und „Zufall".

Das Zufallsexperiment sollte von den Kindern in Partnerarbeit durchgeführt und protokolliert werden. In Kleingruppen kann die zunächst aufgestellte Vermutung verfestigt oder eine neue Behauptung formuliert werden.

Wirf eine Münze 30-mal.
Halte jeden Wurf über einen Strich in einer Tabelle fest.

- Wird wohl häufiger Bild oder Zahl kommen?
- Was sagt dein Tischnachbar dazu?
- Ist das bei verschiedenen Geldstücken auch so?
- Wie sind die Ergebnisse der anderen Kinder?

Die Kinder werden durch ein gemeinsam beginnendes Zufallsexperiment im Sitzkreis angeregt,

- eine Vermutung zu äußern.
- das Zufallsexperiment durch das Anfertigen einer 5er-Strichliste zu begleiten.
- die Strichliste am Ende des Experimentes zu deuten.
- ein 2. Experiment durchzuführen.
- unter Umständen die formulierte Vermutung zu korrigieren oder diese zu bestätigen.

Bild (Kopf)	~~IIII~~ I
Zahl	III

K 31 **Strichliste:** Kopf oder Zahl?

Wirf ein Geldstück. Was ist zu sehen?
1. Welches sind die möglichen Ereignisse?
2. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Wirf das Geldstück 30-mal.
3. Glaubst du, dass die Zahl häufiger oben liegen wird?

Überprüfe deine Vermutung.

Fertige eine Strichliste an.

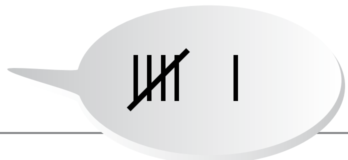
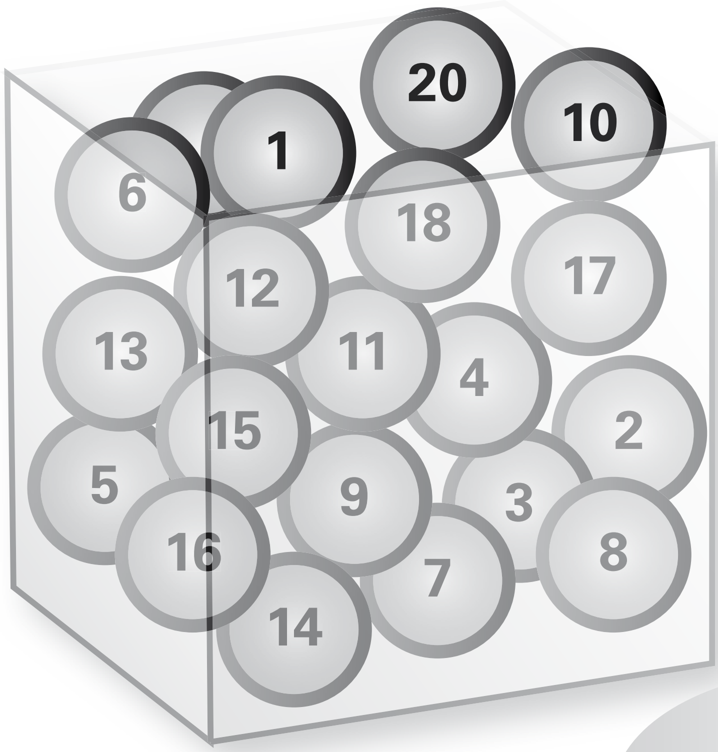


	Bild	
	Zahl	

Sprich mit den anderen.
4. Tausche dich mit anderen Kindern über deine Entdeckung aus.

2.3 Experiment: Kugel ziehen



Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen
Häufigkeiten von Ergebnissen einfacher Experimente in verschiedenen Darstellungen darstellen und vergleichen, Daten aus Beobachtungen oder aus einfachen Experimenten sammeln und darstellen. Interpretation von Säulendiagramm, Tabelle, Wahrscheinlichkeiten abschätzen und vergleichen.
Sprachliche Formulierungen entwickeln und Grundbegriffe kennen (z.B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich, zufällig).

Beschreibung der Lernsituation
Ziehen einer geraden Zahl aus einer **blickdichten** Box mit Zurücklegen.

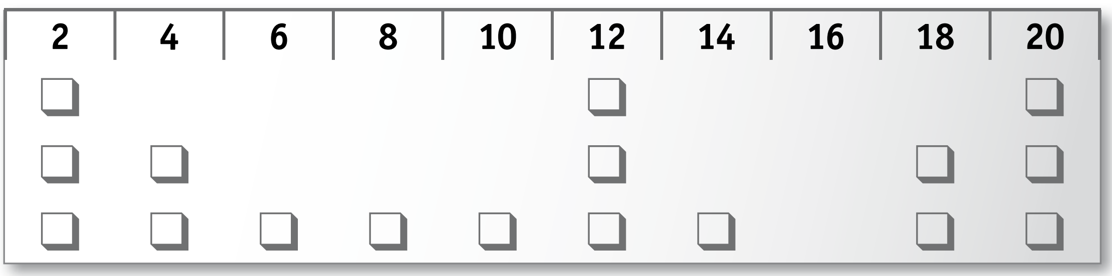
Unterscheiden gerader / ungerader Zahlen im Zahlenraum 1 bis 20 (32)

Feststellen und Darstellen von absoluten Häufigkeiten

Ausführen eines Vorgangs mit zufälligem Ergebnis

Voraussetzungen:
Die Schüler/innen kennen die Zahlen von 1 – 20 (32) und deren Darstellung mittels Ziffern.

Zunächst wird das Experiment im Stuhlkreis mit der ganzen Klasse durchgeführt. Anschließend führen die Kinder dieses in Gruppen-/ Partnerarbeit durch. Eine gemeinsame erste Einschätzung bezogen auf die Häufigkeit sollte formuliert und als Behauptung notiert werden. Ebenso sollte ein Experiment im Plenum koplett durchgeführt und gemeinsam ‘protokolliert‘ werden. Eine Möglichkeit der Auswertung ist ein Säulendiagramm an der Tafel nach x (17) Zügen:



In einer Kiste befinden sich Tischtennis-Bälle / Karten, auf denen jeweils eine der Zahlen von 1 bis 20 (32) steht. Dabei kommt jede Zahl genau einmal vor. Vorab sollte festgelegt werden, wie oft der Vorgang des Ziehens wiederholt werden sollte (Empfehlung: 50-mal). Die Schüler/innen ziehen nacheinander (Klassen-/Partnerspiel) einen Ball / eine Karte, entscheiden, ob die Zahl gerade ist und legen den Ball / die Karte wieder zurück.
Wurde bei der Einführung des Experimentes eine (gerade Zahl) gezogen, so nahm sich der Schüler eine zugehörige Pappkarte (mit der entsprechenden Zahl beschriftet) und heftete diese an die Tafel. In Partnerarbeit ist an dieser Stelle nun das Säulendiagramm im Heft durch Einfärbung von Kästchen zu erstellen. Dabei werden gleiche Zahlenkästchen (Zahlkarten) als Säule übereinander angeordnet. Ist der Ereignisraum zu groß, kann er eingeschränkt werden.

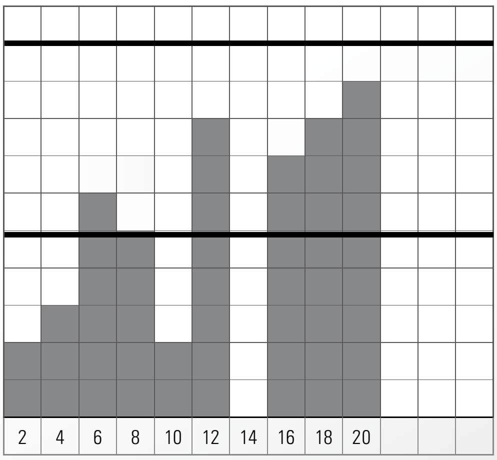
Ziel:
Im Anschluss sollte sich durch die Ergebnisse der Schülergruppen eine Behauptung bestätigen: Die Anzahl der gezogenen (geraden) Zahlen ist zufällig.

Gemeinsame Deutung der Säulen-Darstellung durch mögliche Fragestellungen:
- Wie oft wurden die einzelnen Zahlen gezogen?
- Welche Zahlen wurden nicht gezogen?
- Welche (geraden) Zahlen fehlen noch?
- Wie viele der Zahlen von 1 bis 20 sind gerade?
- Welche Behauptung kannst du aus dem Tafelbild ableiten?
- Bevor du erneut spielst, stelle Vermutungen an.
- Wie sah es in den einzelnen Gruppen aus?

Weiteres Vorgehen:
- Ausführen des gleichen Vorgangs mit zufälligem Ergebnis für die ungeraden Zahlen im Zahlenraum 1 - 30
- Anfertigen eines Säulendiagramms und einer tabellarischen Darstellung einer Strichliste

Einfärben von Feldern im Rechenheft

Säulendiagramm



- Vorteile der verschiedenen Darstellungen vergleichen und hervorheben.
- Die gekennzeichnete Fünfer-Marke unbedingt thematisieren, um die Anzahlen in der Gesamtdarstellung nicht zählend zu ermitteln.

Strichliste

Zahl	
2	II
4	III
6	卌 I
8	卌
10	II
12	卌 III
14	
16	卌 II
18	卌 III
20	卌 IIII

K 32 **Kugelexperiment:** Säulendiagramm/Strichliste

Führe das Experiment in Partnerarbeit durch.
Lege ein **Säulendiagramm** an.

2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

Lege eine **Strichliste** an.

Zahl	
2	
4	
6	
8	
10	
12	
14	
16	
18	
20	

Was fällt euch auf? ______________________________

K 33 **Kugelexperiment:** Säulendiagramm/Strichliste

Erstelle ein **Säulendiagramm.**
Wie oft hast du welche der geraden Zahlen gezogen?

2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32

Fertige eine **Strichliste** an.

Zahl	
2	
4	
6	
8	
10	
12	
14	
16	
18	
20	

Zahl	
22	
24	
26	
28	
30	
32	

Meine Behauptung:

2.4 Experiment: „Fair gespielt mit dem Würfel?“

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen

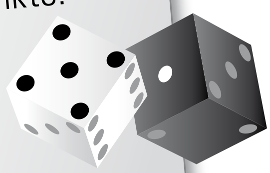
planvolles Vorgehen beim Bearbeiten von offenen Forscheraufgaben, Erstellen von Tabellen, Vermutungen begründen, Bestimmung von Häufigkeiten durch kombinatorische Überlegungen, Gewinnchancen einschätzen: Wahrscheinlichkeiten abschätzen und vergleichen.

Beschreibung der Lernsituation

Die Schüler/innen lernen bei diesem Spiel, Ereignisse nicht nur singulär zu betrachten, sondern über einen längeren Zeitraum und mehrere Versuche hinweg.
Ihnen wird deutlich, wie wichtig eine Dokumentation der einzelnen Ereignisse ist, wenn man anschließend begründete Aussagen über diese längeren Versuchsreihen machen will.

Sven, Tom und Kai würfeln mit zwei Würfeln um den Inhalt einer Tüte Bonbons.
Dafür addieren sie pro Wurf die gewürfelten Augenpunkte.

Ist das Ergebnis 2 oder 3, erhält Sven ein Bonbon.
Ist das Ergebnis 7, erhält Tom ein Bonbon.
Ist das Ergebnis 11 oder 12, erhält Kai ein Bonbon.



„Fair gespielt?“

Zum Start werden Vermutungen und Behauptungen aufgestellt und notiert.
Aussagen wie zum Beispiel ...

- „Was für ein unfaires Spiel!”
- „Das ist eine faire Regel!”
- „Tom gewinnt dann ja immer! Wie langweilig.”

...werden am Ende des Experimentes erneut betrachtet, bewertet und/oder korrigiert.

Die Kinder werden aufgefordert das Zufallsexperiment mit etwa 30 Würfen durchzuführen und jeweilige Ergebnisse in einer Tabelle zu notieren.
Anschließend werden alle möglichen Ergebnisse beim Würfeln mit zwei Spielwürfeln geordnet aufgeschrieben. Dies wird mit dem Ergebnis des Würfelexperiments verglichen.
Die Kinder sollen im Anschluss die Spielregel so verändern, dass es ein faires Spiel wird.

Ziel:
Die Kinder sollen erkennen, dass die Summe 7 wahrscheinlicher ist als die Summe 11 oder 12.

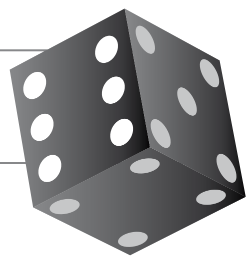
Weitere Literatur:
Mathehaus 3, Handreichungen für den Unterricht, S. 126. Cornelsen Verlag 2005

K 34 Faires Regeln?

Du spielst mit Freunden mit einem Spielwürfel.
Jeder der Spieler darf sich eine Regel aussuchen,
nach welcher er seine Punkte bekommt.

Du möchtest möglichst viele Punkte bekommen.
Welche Regel würdest du wählen?

Warum?



Formuliere selbst eine Gewinnerregel.

Aus: KMK Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.
Beschluss vom 15.10.2004.
Luchterhand. S. 33-34

Weitere Literatur:
Mathehaus 4. Lehrerhandbuch S. 199-200. Cornelsen Verlag

3 Sprachförderliche Erfahrungen zur Wahrscheinlichkeit

In der **Beschreibenden Statistik** geht es um Messungen, um eine Beschreibung des Ist-Zustandes und um Darstellungen von Daten in Diagrammen. Die durch statistische Messung ermittelten Daten werden miteinander in Bezug gesetzt (Mittelwert, Durchschnitt), ausgewertet und interpretiert. Die Wahrscheinlichkeitstheorie entschlüsselt den Zufall so weit wie möglich durch mathematisches Denken. Sie schafft Modelle zur Bewertung von Statistiken. (vgl.Kütting, 1999 S. 9ff) In der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird der Zufall untersucht. Zufallsexperimente werden durchgeführt, die Ergebnisse analysiert und die Häufigkeit für ein bestimmtes Ereignis ermittelt. Die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ereignis wird durch mathematisches Denken errechnet. Ein wahrscheinliches Ereignis wird als solches beschrieben, je öfter ein Ereignis eintritt; desto wahrscheinlicher ist es. Mit den Methoden der beschreibenden Statistik verdichtet man quantitative Daten zu Tabellen oder grafischen Darstellungen. In der Primarstufe lernen Kinder Diagramme als grafische Darstellung von Daten und Sachverhalten kennen. Man unterscheidet dabei folgende Diagrammtypen:

- **Strichliste**
  Für jedes Objekt wird ein Strich gemacht. Für die schnelle Erfassung wird eine Fünferstruktur angelegt. Ein ständiger Zählprozess wird somit vermieden.
- **Säulendiagramm**
  Ein Säulendiagramm zeigt Datengrößen oder Messgrößen, welche mit einer senkrecht auf der x-Achse stehenden rechteckigen Fläche abgebildet werden. Ein Säulendiagramm ist ein Achsendiagramm und zeigt den Zusammenhang zwischen zwei abhängigen Werten.
- **Balkendiagramm**
  Zeigt ein um neunzig Grad gedrehtes Säulendiagramm.
- **Tabelle**
  In einer Tabelle sind Daten übersichtlich, geordnet zusammengestellt und in der Gesamtbetrachtung zu lesen. Lesehilfen sind gegeben, wenn Kinder die Zuordnung von Spalten (vertikal) und Zeilen (horizontal) bestimmen können.

Ziel ist es, im Rahmen des Mathematikunterrichts der Grundschule, ein erstes Verständnis für die „Mathematik des Zufalls“ zu gewinnen. Der Unterricht verfolgt – wie jeder sprachförderliche Unterricht – zugleich das Ziel der Begriffsbildung.

Mathematisch unterscheidet man die folgenden Begriffe:

- Beim Werfen eines Spielwürfels kann man eine 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 würfeln. Würfelt man einmal, dann führt man ein **Zufallsexperiment** durch.
- Das Ergebnis eines Zufallsexperimentes wird **Ausfall** genannt (z.B. eine 5). Beim Würfeln sind sechs verschiedene Ausfälle möglich.
- Die Menge dieser Ausfälle heißt **Ereignisraum**.
- Die **Wahrscheinlichkeit** für das Eintreten des Ausfalles „5“ im Ereignisraum 1 bis 6 ist also 1/6.
- Soll man mit einem Würfel eine 5 oder eine 6 würfeln, dann ist die Wahrscheinlichkeit 2/6.
- Führt man die Zufallsexperimente sehr oft durch, dann kann man mit der Wahrscheinlichkeit der Ausfälle rechnen.
- Ein sicheres Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 1 (z.B. beim Werfen eines Würfels eine Zahl von 1 bis 6 zu bekommen).
- Ein unmögliches Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 0 (z.B. beim Werfen einer Münze Zahl und Bild zu bekommen).

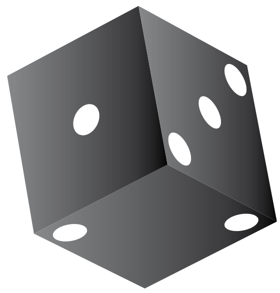
(vgl. Radatz/Schipper, 1999, S. 118)

3.1 Forscheraufgabe Gleichwahrscheinlichkeit

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen
Planvolles Vorgehen beim Bearbeiten von Forscheraufgaben, Erstellen von Tabellen, Vermutungen begründen, Vergleichen, Bestimmung von Häufigkeiten durch kombinatorische Überlegungen, Gewinnchancen: Gleichwahrscheinlichkeit erkennen, sprachliche Formulierungen entwickeln und Grundbegriffe kennen (z.B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich).

Beschreibung der Lernsituation
„Kommt die Sechs häufiger?"
Kreatives Forschen und Experimentieren mit Zahlen und geometrischen Körpern.
Anbahnung der Anwendung erworbener mathematischer Kompetenzen in Verbindung mit Alltagswissen und Alltagserfahrungen der Kinder.
Hinleitung zu planvollem Vorgehen beim Bearbeiten von Forscheraufgaben.

Methodische Hinweise
Die Kinder lernen allmählich sinnvolle Schritte eines komplexen Problemlösens kennen und diese in zunehmenden Maße selbständig anzuwenden.



- Gespräch zu Forscherfragen in der Gruppe oder in Partnerform
- Entwicklung von Behauptungen
- Aufstellen eines Lösungsplans
- Beschaffung notwendiger Materialien
- Gemeinsame Ausführung des Experiments
- Auswertung des Protokolls
- Findung möglicher Anschlussprobleme

Vorstellung des Experiments
Die Kinder prüfen die gegebenen Behauptungen (s. Kopiervorlage K35) oder auch eigene Vermutungen durch Durchführung des Zufallsexperiments. Sie würfeln 30-mal und protokollieren die gewürfelten Ereignisse. Diese werden in der vorgegebenen Tabelle oder in einer selbst gefertigten Tabelle festgehalten. Das Experiment sollte mehrfach (mindestens zweimal) durchgeführt werden. Die Durchführungsform („Wer würfelt? Wer füllt die Tabelle?") wird anfangs der Klasse durch ein 10faches Beispiel vorgemacht: ein Kind würfelt im Stuhlkreis, ein zweites Kind füllt die Tabelle an der Tafel.
Die Klasse formuliert Vermutungen. Anschließend forschen die Kinder in Partnergruppen, indem sie das Würfelexperiment je zweimal durchführen und protokollieren. Bei der Auswertung im Klassenplenum erhalten die Kinder Einsicht in Ergebnisse der anderen Experimentiergruppen.

Ziel
Bei der Auswertung ist der Zufallscharakter des Würfelexperiments herauszustellen und auf besondere Formulierungen einzugehen:
- Alle Zahlen haben die gleiche *Chance* aufzutreten.
- Der *Zufall* sorgt dafür, dass manchmal die eine, manchmal die andere Zahl etwas häufiger vorkommt.
- Es ist *sicher*, dass eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 auftritt.
- Es ist *unmöglich* eine Sieben zu würfeln.
- Das Ereignis 1, 2, 3, 4, 5, 6 ist *gleichwahrscheinlich.*

Die Kinder sollen im Klassenplenum weitere Formulierungen und Aussagen zu ihrem Experiment machen. Hervorzuheben ist, dass auch bei der Abfolge der Augenzahlen der Zufall herrscht: Jede Augenzahl hat bei jedem Wurf die gleiche Chance. Es ist nicht etwa so, dass die Chance für eine weitere „6" unmittelbar nach einer „6" geringer sei – entgegen einer auch bei Erwachsenen häufig verbreiteten Fehlvorstellung.
Betrüger fälschen Würfel jedoch. Dann ist keine Gleichverteilung mehr gegeben.

Weitere Literatur:
Käpnick,F./Fuchs,M. (2003): Mathe für Kleine Asse. Klasse 1 und 2, Berlin Volk und Wissen
Käpnick,F./ Fuchs, M.(2003): Mathebuch Mathehaus 1, Handreichung 1. Cornelsen Verlag, S. 207-208
Wittmann, E.Ch./Müller,G.N.(2000): Das Zahlenbuch 2, Handbuch 2, S. 69, Klett Verlag

K 35 Würfelstrichlisten im Vergleich

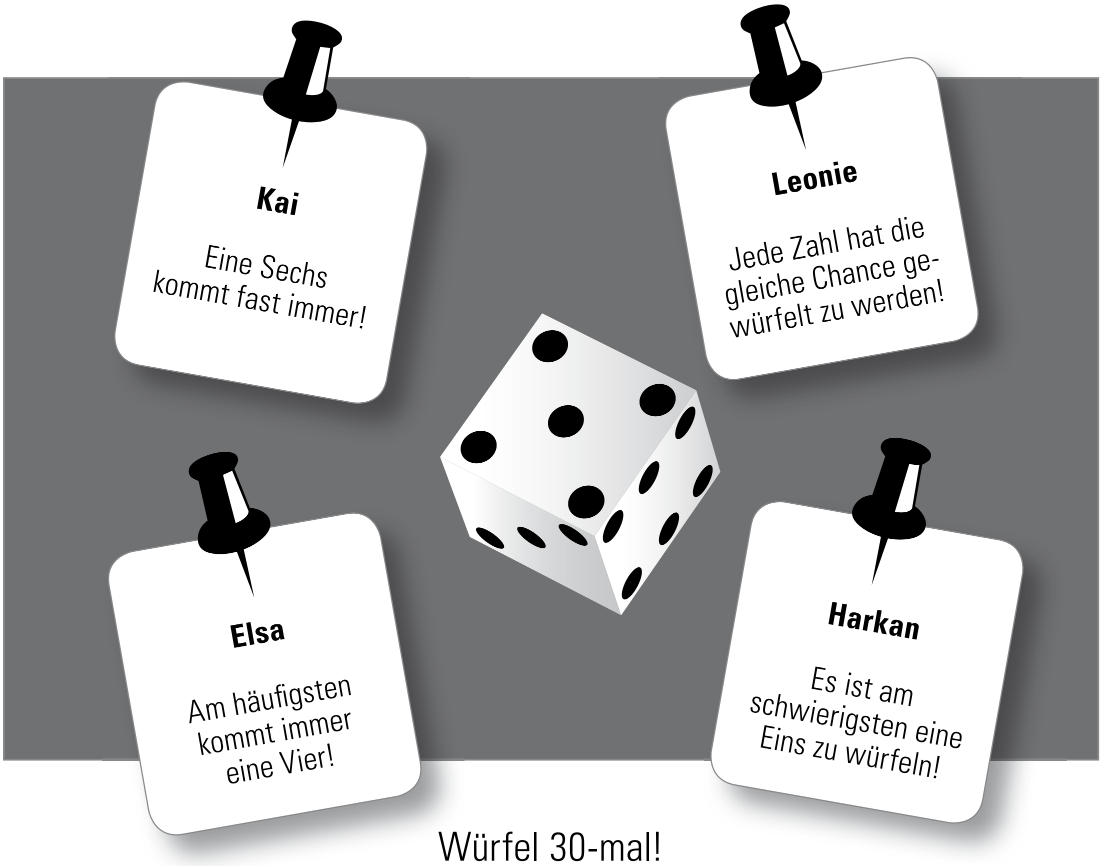
1. Experiment

2. Experiment

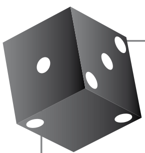
Vergleicht euer Ergebnisprotokoll mit der Tabelle anderer Gruppen.

K 36 Häufigkeit von Würfelbildern im Vergleich

Beschreibe die Häufigkeit mit eigenen Worten.
Forsche mit dem Spielwürfel.



Würfel 30-mal!
Wiederhole das Experiment 2-3 mal.
Was stellst du fest?



3.2 Sprache und Mathematik ‚Schieberfragen'

Inhaltsbezogene mathematische Anforderungen
Stichproben erheben und auswerten, Wahrscheinlichkeiten abschätzen und vergleichen, sprachliche Formulierungen entwickeln und Grundbegriffe kennen (z.B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich), Häufigkeit von Ereignissen durch kombinatorische Überlegungen begründen, Gewinnchancen bei Spielen und Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen.

Beschreibung der Lernsituation
Das Thema der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Grundschule ist ein Bereich, in dem viel gesprochen werden sollte. So gilt es, mit den Schülern bestimmte Begriffe aus dem Alltag auf ihren mathematischen Inhalt und ihre Sinnhaftigkeit hin zu überprüfen.
Erfahrungen aus dem Leben, z.B. Situationen im Spiel, können dazu dienen, gemeinsam eine Sprache zu entwickeln, die sowohl der Sache als aber auch dem Verständnis gerecht wird.
So erscheint es sinnvoll, nicht gleich damit zu beginnen, Versuche zu machen, diese zu analysieren und zu beschreiben, da u.a. das Handwerkszeug – die Sprache – noch nicht geklärt ist. Eine gute Möglichkeit besteht darin, zunächst Einschätzungen der Kinder über bekannte Phänomene der Umwelt als Anlass für Gesprächsrunden zu nehmen.

Vorgehensweise
Die Schüler erhalten einen Zettel mit mehreren „Schiebern“ (K37). Nun werden verschiedene Situationen geschildert, welche implizit oder direkt eine Frage nach Wahrscheinlichkeiten enthalten. Die Schüler sollen zu jeder Frage auf dem dazu gehörigen Schieber einen Strich ihrer Einschätzung machen.

Mögliche Fragen:
- Du würfelst dreimal. Das erste Mal würfelst du eine 6. Auch beim zweiten Mal würfelst du eine 6. Glaubst du, dass beim dritten Mal wieder eine 6 kommt?
- Wir gehen mit der ganzen Klasse in den Zirkus und setzen uns alle in die erste Reihe. Als der Clown auftritt, sucht er sich ein Kind zum Helfen aus der ersten Reihe aus. Glaubst du, dass du ausgewählt wirst?
- Ich denke mir eine Zahl zwischen 1 und 3. Du darfst nur einmal raten. Triffst du die richtige Zahl?
- Jetzt nehme ich eine Zahl zwischen 1 und 50. Wie sieht es jetzt aus?
- In einem spannenden Spiel brauchst du noch acht Felder zum Sieg. Du darfst nur noch einmal würfeln und hast einen normalen Spielwürfel. Glaubst du an den Sieg?

Entsprechend der unterschiedlichen Formulierung der Fragen, ist es notwendig, die Schieberenden mit unterschiedlichen Begriffen zu besetzen (Abb. 3).

Auswertungsrunden
Der Hauptteil dieser Lernsituation liegt im Gespräch über die Antworten bzw. Einschätzungen der Schüler. Es bieten sich verschiedene Möglichkeiten der Visualisierung der unterschiedlichen Antworten an:

- einen riesigen Schieber an der Tafel zum Übertragen,
- ein Folienschieber zum Übertragen (OHP) oder
- statt der Tafel ein großes Blatt in der Mitte eines Stuhlkreises.

Die Schüler sollen im Gespräch mit Begriffen wie „Glück“, „Zufall“, „wahrscheinlich“, „unwahrscheinlich“ und auch „unmöglich“ vertraut werden. Die oft intuitiven Einschätzungen der Schüler und deren Begründungen, die ihrer bisherigen Erfahrungswelt entspringen, sollen im Gespräch mit der konkreten Situation verglichen werden.
Die Schüler sollen so auch lernen, Abstufungen zwischen „ganz“ und „gar nicht“ zu erkennen, einzuschätzen und zu begründen.
Auch Fragen für unmögliche Ereignisse sollten formuliert werden. Diese regen aber oft die Phantasie einiger Schüler extrem an, so dass sie in deren Argumentation nicht mehr unmöglich sind. Dies sollte man im Vorfeld bedenken.

Material / Hilfsmittel: Kopie der Schieber mit entsprechenden Endbeschriftungen

Hinweis
Wir stellten fest, dass die Begriffe „Wahrscheinlichkeit“ oder „wie wahrscheinlich“ behutsam eingeführt werden müssen, da sie dem kindlichen Vorstellungsvermögen noch fremd sind.
Zur Hinführung bieten sich Frageformen mit „Glaubst du, dass...?“ an.

Aus den Schieberfragen können Lesekarten zur Partnerarbeit erstellt werden, so dass wechselseitig vorgelesen und der Schieber eingestellt werden kann.

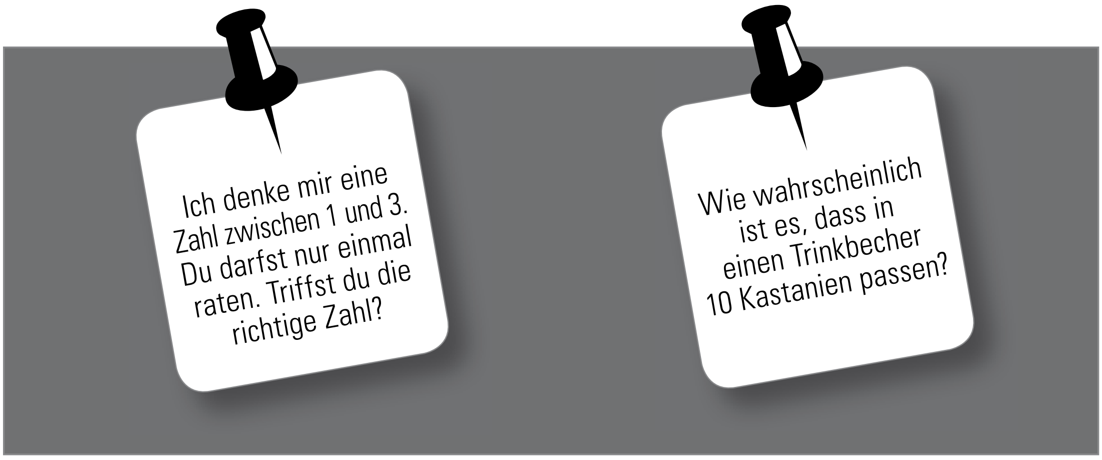


Abb. 1: Beispiel

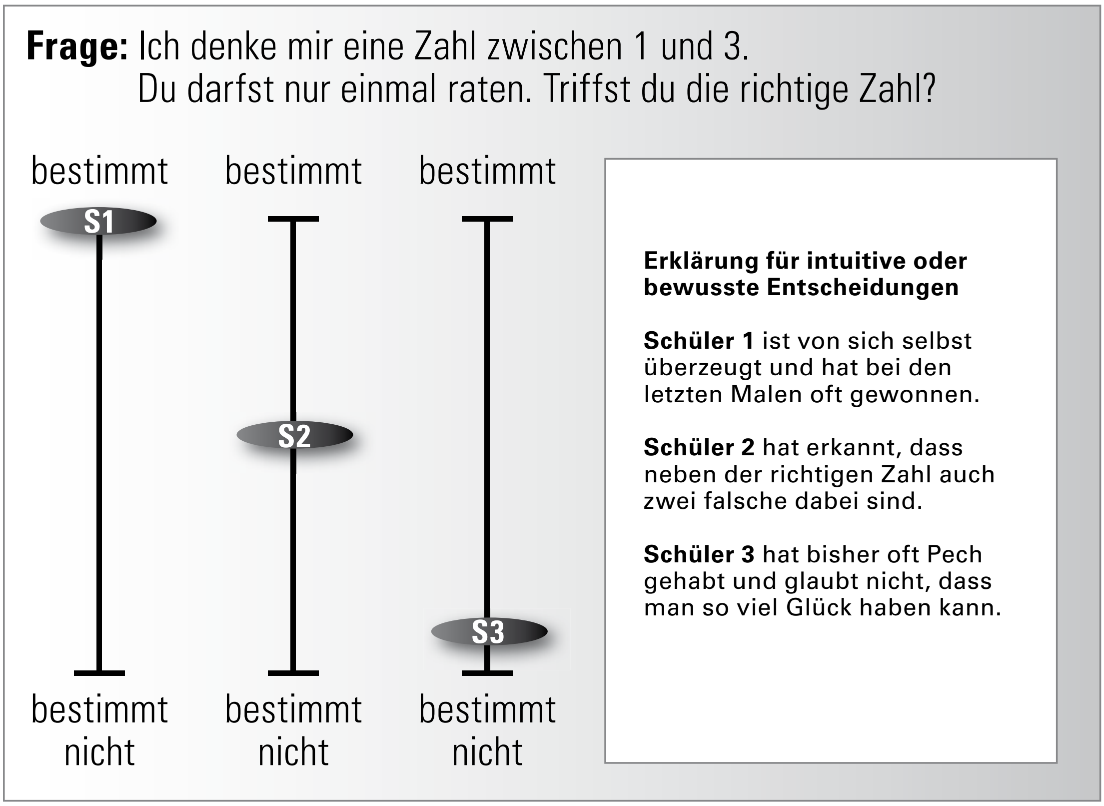


Abb. 2: Beispiel

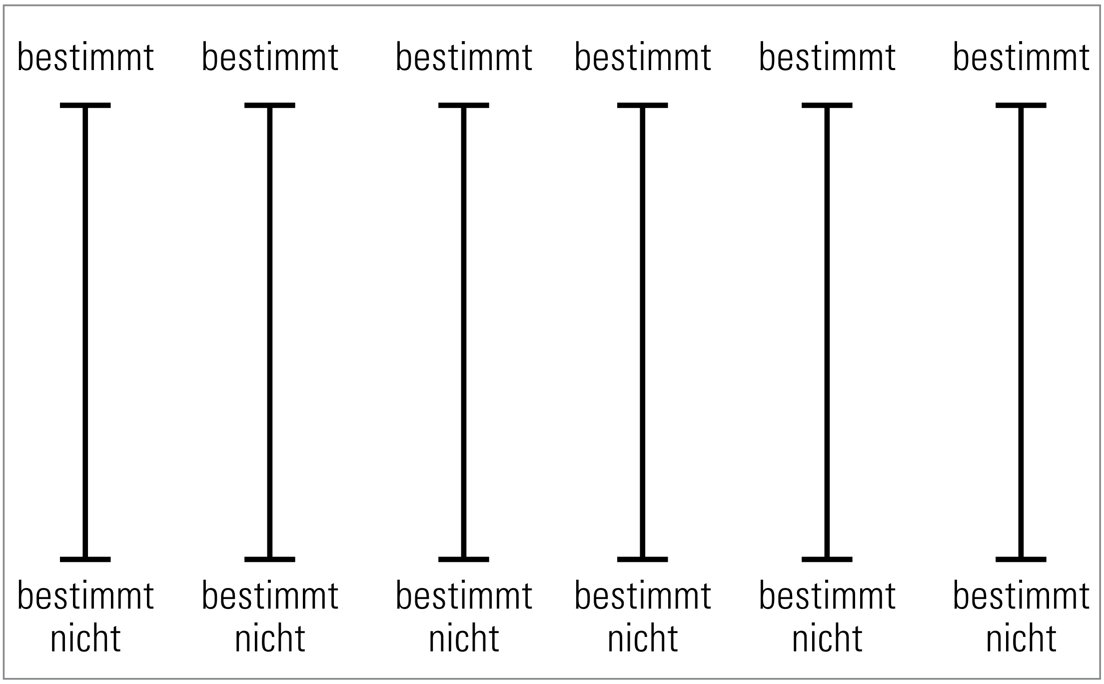
Synonyme 100 %, z.B.:
Sicher, ganz, absolut, bestimmt, sehr wahrscheinlich (bzw. 50% bis 100%)

Synonyme 0 %, z.B.:
Gar nicht, eher nicht, bestimmt nicht, unwahrscheinlich, unmöglich (bzw. 0% bis 50%)

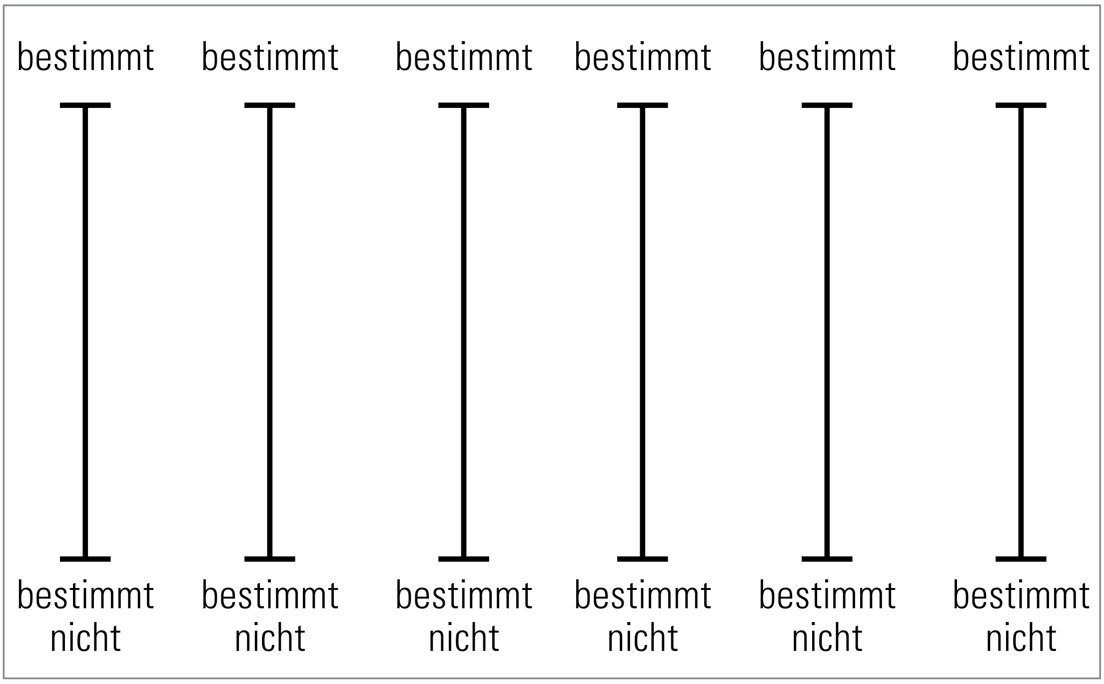
Abb. 3: Beispiele für Schieberenden

K 37

Schieberdarstellungen



Schieberdarstellungen



K 38 Beispiele für Schieberfragen

1) Wie wahrscheinlich ist es, dass in einen Trinkbecher 10 Kastanien passen?

2) Wie wahrscheinlich ist es, dass du morgen eine Taschengelderhöhung bekommst?

3) Wie wahrscheinlich ist es, dass alle Kinder einer Klasse nicht mit dem Auto zur Schule gebracht werden?

4) Wie wahrscheinlich ist es, bis zu den Herbstferien „hitzefrei“ zu bekommen?

5) Wie wahrscheinlich ist es, dass morgen zwei Kinder krank sind?

6) Wie wahrscheinlich ist es, dass in jeder Klasse ein Kind ist, das einen Hund hat?

7) Wie wahrscheinlich ist es, dass in einer Schulklasse gleich viele Mädchen und Jungen sind?

8) Ist es wahrscheinlich, dass ein Kind in den Ferien Geburtstag hat?

9) Wie wahrscheinlich ist es, dass dir morgen ein Zahn ausfällt?

10) Wie wahrscheinlich ist es, mit zwei Würfeln jeweils die gleiche Augenzahl zu würfeln?

11) Wie wahrscheinlich ist es, dass es diese Woche noch hitzefrei gibt?

12) Wie wahrscheinlich ist es, dass es morgen regnet?

13) Wie wahrscheinlich ist es, dass es morgen keinen Streit gibt?

14) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass morgen ein Mädchen/ Junge mit einem Rock in die Klasse kommt?

15) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass morgen Musik, Englisch etc. im Stundenplan steht?

16) Glaubst du, dass wir in diesem Schuljahr noch einen neuen Mitschüler bekommen?

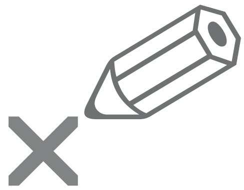
17) Glaubst du, dass du beim Memory-Spielen im ersten Zug ein Paar aufdecken kannst?

18) Glaubst du, dass alle Kinder unserer Klasse auf einer Turnmatte stehen können?

K 39 Schieberfragen

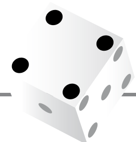
Erstelle mit einem Partner Schieberfragen!

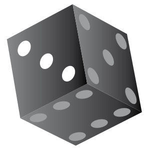
K 40 „Sicher, möglich oder unmöglich?“



Kreuze an.

	sicher	möglich	unmöglich
Beim Würfeln mit zwei Würfeln erhalte ich 13 Augenpunkte.			
Der Januar hat 31 Tage.			
Nina und ihre Freundin haben im selben Monat Geburtstag.			
Marvin kann immer vorhersagen, welche Zahl Tim nun würfelt.			
Alina sagt: „Ich habe sieben mal hintereinander eine 6 gewürfelt“.			
In einer Schulklasse sind doppelt so viele Mädchen wie Jungen.			
In diesem Jahr ist Silvester am 31. Dezember.			
Sarahs Vater ist dreimal so alt wie Sarah.			
Du würfelst zweimal und rechnest: erste Würfelzahl mal zweite Würfelzahl. Du erhältst 21.			





4 Gewinnchancen

Ist es sicher, unmöglich oder wahrscheinlich zu gewinnen?

Bezug zu den Bildungsstandards
Inhaltsbezogene mathematische Anforderungen: Planvolles Vorgehen beim Bearbeiten von offenen Forscheraufgaben, Vermutungen begründen, Gewinnchancen einschätzen, sprachliche Formulierungen für Phänomene des Zufalls verwenden.

Beschreibung der Lernsituation
Im Alltag der Kinder erfahren diese die Enttäuschung des Zufalls und die Freuden des Glücks. Bereits Grundschulkinder grübeln darüber, ob ein erwartetes, gehofftes Ereignis eintreten oder ausbleiben wird. Warum sie mal wieder an der Losbude auf dem Dom so selten gewinnen. Mit einfachen Experimenten, durch Beobachten und Nachdenken können erste grundlegende Erfahrungen mit dem Zufall gemacht werden. Die Kinder üben sich in der Beschreibung zufälliger Phänomene und erlernen die Beschreibungen „sicher – unmöglich – wahrscheinlich“ in Situationen zu gebrauchen. Nachfolgend zwei Beispiele zu Gewinnchancen.

Wer schätzt die Situation richtig ein?
Sicher: Es ist sicher, dass sie ein Los, ohne auf Gewinn oder Niete zu achten, aus der Lostrommel ziehen. Das Los ist entweder ein Gewinn oder eine Niete.
Unmöglich: Es ist unmöglich, in der Gesamtheit der Lose einen Gewinn zu finden. Das Los, welches das Kind hervorholt ist entweder ein Gewinn oder eine Niete.
Wahrscheinlich: Mike behauptet: “Das Los, das ich ziehe, ist wahrscheinlich eine Niete.“ – Annika sagt: „Das Los, das ich greife, ist wahrscheinlich ein Gewinn.“ Beide Aussagen sind unsicher. Ob Mike oder Annika vorhersagen konnten, welches Los sie ziehen würden, muss durch einen Versuch entschieden werden.

Ein Ereignis, das...
- sicher eintritt hat die Wahrscheinlichkeit 1 oder 100%.
- unmöglich eintritt, hat die Wahrscheinlichkeit 0 oder 0%.
- eine Wahrscheinlichkeit größer als 0 und kleiner als 1 (zwischen 0% und 100%) hat, tritt wahrscheinlich ein. Je näher die Zahl an 1 liegt, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis eintritt.

Lose
„Jedes zweite Los gewinnt!“ meint der Losverkäufer auf dem Dom.
„Ob ich vier Lose nehme? Dann habe ich vielleicht zwei Gewinne“, sagt Lukas.
„Es reicht doch, wenn du nur zwei Lose kaufst.
Dann gewinnst du einen Plüschbären“, meint Sarah.
Was meinst du dazu? Tausche dich mit einem Partner aus.

Informationen für eine Rechenkonferenz
Wenn die Behauptung des Losverkäufers stimmt, müsste die Hälfte aller Lose Gewinnlose sein. Wenn an diesem Tag 10 000 Lose zum Verkauf angeboten würden, müssten darunter 5 000 Gewinnlose sein.
Die Wahrscheinlichkeit, ein Gewinnlos zu ziehen, beträgt dann 1 : 2 oder 50%.
Die Lose sind gut gemischt und die Kinder sehen den zusammengerollten Losen nicht an, ob es ein Gewinn ist oder nicht. Selbst wenn Lukas 10 Lose kaufen würde, kann unter den 10 Losen kein Gewinn sein. Andererseits kann Sarah unter 6 Losen, die sie gekauft hat, z.B. 4 Gewinnlose haben.

Die Einsicht, dass auch beim Losen die Wahrscheinlichkeit nichts über den wirklichen Ausgang des nächsten Zuges, des nächsten Ereignisses aussagt, müssen die Kinder durch entsprechende Experimente in der Klasse erfahren.

4.1 Gewinnchancen beschreiben

Inhaltsbezogene mathematische Anforderungen
Wahrscheinlichkeiten abschätzen und vergleichen, sprachliche Formulierungen entwickeln und Grundbegriffe kennen (z.B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich), Häufigkeit von Ereignissen durch kombinatorische Überlegungen begründen, Gewinnchancen bei Spielen und Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen: im einfachen Zufallsexperiment gewonnene Daten in Tabelle und Diagramm aufbereiten, gewonnene Daten vergleichend werten, günstige und ungünstige Regeln für einfache Würfelexperimente bewerten und vergleichen, inhaltliches Verstehen der Gleichwahrscheinlichkeit: Elementares stochastisches Denken.

Beschreibung der Lernsituation
Das Thematisieren von Zufallsexperimenten kann dazu beitragen, dass sich Fehlauffassungen von Kindern über Zufallsphänomene nicht verfestigen. Es ist entsprechend dem Spiralprinzip sinnvoll, dass Grundschüler diesbezüglich erste Erfahrungen sammeln. Die mit dem Thema Stochastik verbundenen Zufallsexperimente sollen spielerischen Charakter haben.

In Einzel- oder Partnerarbeit die Aufgabe bearbeiten, indem zunächst formulierte Behauptungen überprüft werden:
„Sind Gewinnregeln mit Gleichwahrscheinlichkeit vorhanden?“
„Welche Karten bergen echte Gewinner-Regeln?“
Es ist sinnvoll für die Auswertung vorab alle möglichen 36 Fälle für Augenzahlsummen von zwei Spielwürfeln zu finden und systematisch aufzulisten.

Augenzahl-summen	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
mögliche Fälle	1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	6+6
		1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	5+3	5+4	5+5	5+6	
			1+3	2+3	3+3	4+3	4+4	4+5	4+6		
				1+4	2+4	3+4	3+5	3+6			
					1+5	2+5	2+6				
						1+6					

Ziel
Beim gemeinsamen Auswerten unbedingt über Ursachen für verschiedene Häufigkeiten der Summen sprechen: aus der Tabelle ist leicht abzulesen, dass die Summe „7“ am häufigsten möglich ist. Die Summe „7“ tritt bei Würfelexperimenten auch am häufigsten auf. Anhand der Tabelle können weitere Aussagen zu den Gewinnregelkarten formuliert werden.
Zum Beispiel können Aussagen zur *Gleichwahrscheinlichkeit* belegt werden:

- Gerade und ungerade Augenzahlsummen sind gleichwahrscheinlich.
- Die Augenzahlsummen „6“ und „8“ sind ebenfalls gleichwahrscheinlich.
- Die Augenzahlsummen 2 und 12, aber auch 3 und 11 treten selten auf.

Spielvarianten
1.) Gewinnregeln offen auf den Tisch legen und auswählen lassen.
2.) Gewinnregelkarten im Stapel verdeckt anbieten. Es wird abwechselnd gezogen und sortiert nach geringer, guter und hoher Gewinnmöglichkeit.
3.) Gewinnkarten offen auf den Tisch legen und nach Anzahl der Gewinnmöglichkeiten sortieren.
4.) Gewinnkarten mit gleich vielen Gewinnmöglichkeiten zueinander führen.

Zur Übersicht sollte jeweils eine eigene Tabelle angelegt werden, die alle möglichen Fälle während des Spiels überprüfen lässt. Die Kindereinschätzungen gemeinsam diskutieren.

Weitere Literatur:
Käpnick,F./ Fuchs,M.(2005): Mathebuch Mathehaus 4, Handreichung 4. Cornelsen Verlag, , S. 199-200

K 41 **Spielkarten -** Gewinnchancen einschätzen

Spielkarten zum ausschneiden.

Gewinnregel 1

Du erhältst einen Punkt, wenn deine Zahl **ungerade** ist.

Gewinnregel 2

Du erhältst einen Punkt, wenn deine Zahl **gerade** ist.

Gewinnregel 3

Du erhältst einen Punkt, wenn deine Zahl **größer als 10** ist.

Gewinnregel 4

Du erhältst einen Punkt, wenn dein **Zahlenname mit einem „S“** beginnt.

Gewinnregel 5

Du erhältst einen Punkt, wenn deine Zahl **kleiner als 6** ist.

Gewinnregel 6

Du erhältst einen Punkt, wenn deine Zahl **zweistellig** ist.

Gewinnregel 7

Du erhältst einen Punkt, wenn deine Zahl **halbiert werden kann.**

Gewinnregel 8

Du erhältst einen Punkt, wenn deine Zahl **größer als 8** ist.

Gewinnregel 9

Du erhältst einen Punkt, wenn deine Zahl **einstellig** ist.

Gewinnregel 10

Du erhältst einen Punkt, wenn deine Zahl **zwischen 5 und 8** liegt.

Gewinnregel 11

Du erhältst einen Punkt, wenn deine Zahl **zwischen 2 und 5** liegt.

Gewinnregel 12

Du erhältst einen Punkt, wenn deine Zahl **zwischen 9 und 12** liegt.

a) Welche Regeln haben gute Gewinnchancen? Warum?
b) Welche Regel würdest du auf keinen Fall wählen?
c) Welche Regeln haben ähnliche oder gleiche Gewinnchancen?

K 42 **Spielkarten -** Gewinnchancen einschätzen (Rückseite)

Spielkarten zum ausschneiden.

Gewinnregel 1
18 Möglichkeiten
1+2, 2+1, 4+1, 3+2, 2+3, 1+4, 6+1, 5+2, 4+3, 3+4, 2+5, 1+6, 6+3, 5+4, 4+5, 3+6, 6+5, 5+6

Gewinnregel 2
18 Möglichkeiten
1+1, 3+1, 2+2, 1+3, 5+1, 4+2, 3+3, 2+4, 1+5, 6+2, 5+3, 4+4, 3+5, 2+6, 6+4, 5+5, 4+6, 6+6

Gewinnregel 3
3 Möglichkeiten
6+5, 5+6, 6+6

Gewinnregel 4
11 Möglichkeiten
5+1, 4+2, 3+3, 2+4, 1+5, 6+1, 5+2, 4+3, 3+4, 2+5, 1+6

Gewinnregel 5
10 Möglichkeiten
1+1, 1+2, 2+1, 3+1, 2+2, 1+3, 4+1, 3+2, 2+3, 1+4

Gewinnregel 6
6 Möglichkeiten
6+4, 5+5, 4+6, 6+5, 5+6, 6+6

Gewinnregel 7
18 Möglichkeiten
1+1, 3+1, 2+2, 1+3, 5+1, 4+2, 3+3, 2+4, 1+5, 6+2, 5+3, 4+4, 3+5, 2+6, 6+4, 5+5, 4+6, 6+6

Gewinnregel 8
10 Möglichkeiten
6+3, 5+4, 4+5, 3+6, 6+5, 5+6, 6+4, 5+5, 4+6, 6+6

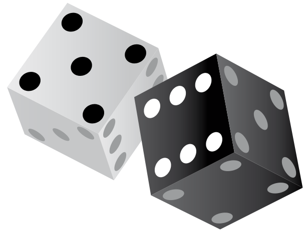
Gewinnregel 9
30 Möglichkeiten
1+2, 2+1, 4+1, 3+2, 2+3, 1+4, 6+1, 5+2, 4+3, 3+4, 2+5, 1+6, 6+3, 5+4, 4+5, 3+6, 1+1, 3+1, 2+2, 1+3, 5+1, 4+2, 3+3, 2+4, 1+5, 6+2, 5+3, 4+4, 3+5, 2+6

Gewinnregel 10
11 Möglichkeiten
5+1, 4+2, 3+3, 2+4, 1+5, 6+1, 5+2, 4+3, 3+4, 2+5, 1+6

Gewinnregel 11
5 Möglichkeiten
1+2, 2+1, 3+1, 2+2, 1+3

Gewinnregel 12
5 Möglichkeiten
6+4, 5+5, 4+6, 6+5, 5+6

K 43 Ereignisse vorhersagen



1. Aufgabe: Augenzahlsummen

Du würfelst mit **zwei** Würfeln und bildest aus den beiden Zahlen die Summe.

a) Die **kleinste mögliche Summe** ist ☐.

b) Die **größte mögliche Summe** ist ☐.

c) Welche Summe wird besonders **häufig** vorkommen? Kreuze an.

- ❑ Die Summe 6, weil 6 die größte Zahl auf dem Würfel ist.
- ❑ Die Summe 7, weil man aus zwei Würfelzahlen die Summe 7 am häufigsten bilden kann.
- ❑ Die Summe 12, weil 12 das größte mögliche Ergebnis ist.
- ❑ Die Summen kommen gleich oft vor.

2. Aufgabe: Augenzahlsummen

Du würfelst mit **einem** Würfel dreimal.
Bilde aus den gewürfelten Zahlen die Summe.

a) Welche Summen sind möglich?
Kreise ein und begründe, wie die Summen möglich sind.

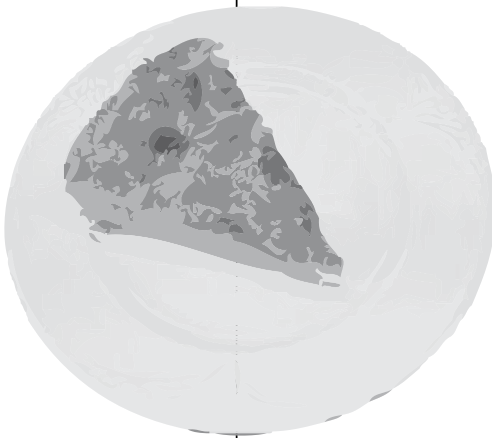
1 13 14 10 15 17 19 20 21

K 44 Faires Spiel?

Das letzte Stück Kuchen

Zwei geschlossene Fäuste: in einer befindet sich eine Kastanie.
Wenn Sonja errät, **in welcher Hand die Kastanie ist**,
bekommt sie den Kuchen.

Wenn sie nicht richtig rät, darf Sven den Kuchen haben.
Ist es eine faire Idee zu losen?
Begründe deine Antwort.



❑ ja

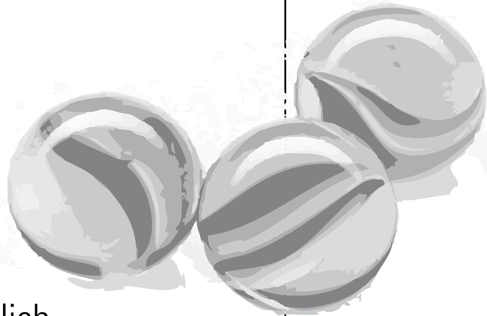
❑ nein

❑ linke und rechte Faust sind gleichwahrscheinlich

Faires Spiel?

Murmeln ziehen

In einem Glas sind 28 Murmeln. 14 rote und 14 weiße Murmeln.
Mit verbundenen Augen ziehen Tina und Maja zehnmal je eine Murmel.
Die Murmeln werden jedes Mal zurückgelegt.
Wer zum Schluss die meisten roten Murmeln gezogen hat, gewinnt ein Eis.
Ist das eine faire Idee? Warum?

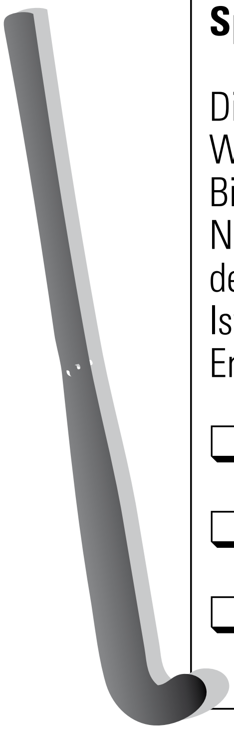


❑ ja

❑ nein

❑ rote und weiße Murmeln sind gleichwahrscheinlich

K 45 Faires Spiel?



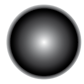
Sportspiel

Die Klasse 3a spielt gegen die Parallelklasse Hockey.
Wer den Ball zum Anstoß bekommt, entscheidet eine geworfene Münze.
Bild oder Zahl wird von den Mannschaftskapitänen vorab gewählt.
Nach dem Wurf entscheidet die sichtbare Münzseite über den Gewinner des Anstoßes.
Ist es eine faire Idee zu losen?
Erkläre einem Mitschüler deine Entscheidung.

❑ ja

❑ nein

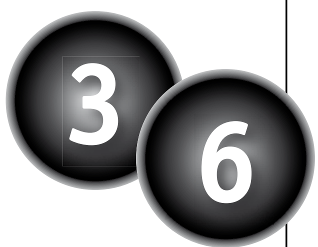
❑ Bild und Zahl sind gleichwahrscheinlich.



Faires Spiel?

Kugelkiste

In einer Holzkiste sind Kugeln.
Auf den Kugeln stehen die Zahlen von 1 bis 20.
Ziehst du eine Kugel mit einer geraden Zahl, gewinnst du ein Bonbon.
Ziehst du eine ungerade Zahl musst du ein Bonbon wieder abgeben.
Die gezogenen Kugeln werden immer sofort in die Kiste zurückgelegt.
Ist das eine faire Gewinnidee? Warum?



❑ ja

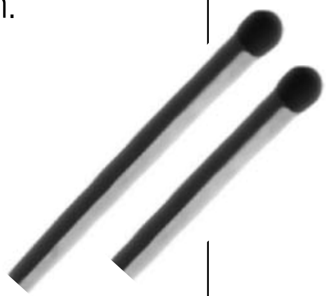
❑ nein

❑ geraden und ungeraden Kugelzahlen sind gleichwahrscheinlich

K 46 Faires Spiel?

Streichholz

Ein langes und ein gekürztes Streichholz werden zwischen Daumen und Zeigefinger eingeklemmt. Heraus schauen zwei gleichlange Teile.
Opa bietet an, den Rasen zu mähen, wenn er das kürzere Hölzchen zieht.
Zieht er das längere Hölzchen, muss Tom die Arbeit erledigen.
Ist das eine faire Gewinnidee?
Erkläre einem Mitschüler deine Entscheidung.

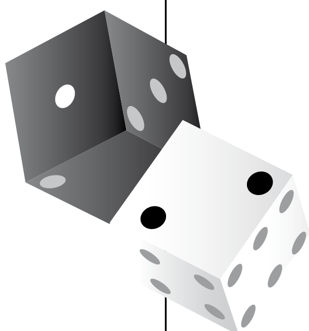


- ❑ ja
- ❑ nein
- ❑ kurzes und langes Streichholz sind gleichwahrscheinlich

Faires Spiel?

Würfel

Die Kinder würfeln mit zwei Würfeln und addieren dann beide Augenzahlen.
Ist das Ergebnis 3, erhält Louis einen Punkt.
Ist das Ergebnis 11, erhält Mona einen Punkt.
Ist das eine faire Gewinnidee? Warum?



- ❑ ja
- ❑ nein
- ❑ Die Augenzahlsumme „3“ und „11“ sind gleichwahrscheinlich.

K 47 Häufigkeiten – Ziehen mit Zurücklegen

Bunte Bonbons

a) In einem Glas sind 50 Erdbeerbonbons und 50 Pfefferminzbonbons.
Du holst mit geschlossenen Augen 20 Bonbons heraus.
Was glaubst du, wie viele Bonbons sind Erdbeerbonbons und wie viele nicht?
Lege die Bonbons wieder in das Glas zurück.

b) Führe das Experiment mehrfach durch
und lege eine Tabelle für die Ergebnisse an.
Was fällt dir auf?

	Erdbeer (rote Plättchen)	**Pfefferminz** (weiße Plättchen)
1. Experiment		
2. Experiment		
3. Experiment		
4. Experiment		

Bunte Perlen

a) In einer Dose sind 100 Perlen.
75 Perlen sind blau und 25 Perlen sind rot.
Karin darf für eine Perlenkette 20 Perlen herausnehmen,
ohne hineinzuschauen.

Wie viele Perlen sind blau, wie viele Perlen sind rot?

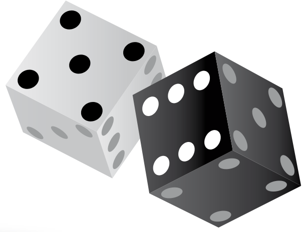
b) Wiederhole das Experiment mehrmals.
Lege eine Tabelle für die Ergebnisse an.
Wie viele Perlen sind durchschnittlich rot?

	blau	**rot**
1. Experiment		
2. Experiment		
3. Experiment		
4. Experiment		

K 48 Faire Gewinnregeln einschätzen

Augenzahlen

Du spielst mit Freunden mit **zwei Spielwürfeln**. Jeder der Spieler darf sich eine Regel aussuchen, nach welcher er seine Punkte bekommt.



a) Du möchtest möglichst viele Punkte haben.
Welche Regel würdest du wählen? Begründe deine Wahl.

Regel ____

b) Erfinde eine eigene Gewinnregel mit einer **fairen** Gewinnchance.

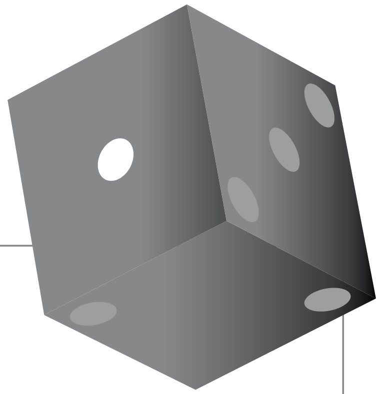
____

____

____

____

K 49 Gewinnchancen in Würfelspielen



Spiel 1 Die böse Eins

Spielt mit einem Würfel (2-4 Kinder).
Du brauchst ein Blatt Papier und einen Stift.

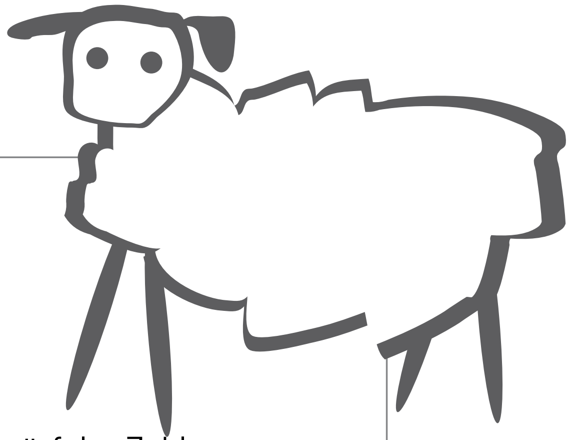
Es wird reihum gewürfelt. Wer an der Reihe ist, darf mehrmals würfeln. Du musst dabei die Augenzahlen addieren, bis du **mindestens** die Augenzahlsumme ‚50' zusammen hast.
Die errreichte Zahl wird dir als Punkte in einer Spieltabelle gutgeschrieben. Wenn Du allerdings eine **‚1'** würfelst, verfallen alle bis dahin gesammelten Punkte. Es wird dann nichts gutgeschrieben und der Würfel geht an das nächste Kind.
Gewonnen hat, wer am nächsten bei über 50 (100) Punkten auf seinem Zettel liegt.
Legt eine Spieltabelle an.
Möglicher Spielverlauf von ‚Malte':

Runde	Augenzahlsumme	Punktestand
1.	3 + 5 + 6 = 14	14
2.	2 + 6 + 4 = 12	26
3.	5 + **1** + ... (Abbruch)	0
4.	2 + 2 + 6 + 3 + 2 = 15	15
5.	6 + 6 + 2 = 14	29
6.	3 + 4 + 3 + 2 + 2 = 14	43
7.	2 + 4 + 3 = 9	52

Wenn Malte in dieser Runde als erster Spieler nahe an der 50 liegt, wäre er der Sieger. Trifft ein Mitspieler in der Runde genau die ‚50', wäre Malte zweiter Sieger.
Hier entscheidet der Zufall oder Glück über den Spielverlauf.

Weitere Literatur
Quak,U./Sterkenburgh,S.(2006): Die Grundschul-Fundgrube für Mathematik. Lehrer-Bücherei: Grundschule, Cornelsen Skriptor, S. 101-109

K 50 Gewinnchancen in Würfelspielen



Spiel 2 Tiermaler

Spielt mit einem Würfel (2-4 Kinder).
Du brauchst ein Blatt Papier und einen Stift.

Jedes Kind würfelt einmal und schreibt die gewürfelte Zahl auf sein Blatt. Danach beginnt das **Würfelmalerspiel**.
Es wird reihum gewürfelt.
Wird die Augenzahl gewürfelt, die auf einem Blatt anfangs notiert wurde, darf je **ein Teil des Schafes** (Körper, Hals, Kopf, Bein, Ohr, Schwanz) dort gezeichnet werden.
Wer als erster sein Schaf gezeichnet hat, ist Sieger.

Erläuterungen für die Lehrkraft

Jedes Kind hat schon mal die Erfahrung gemacht, das beim Spiel die dringend gesuchte „Augenzahl" immer wieder ausbleibt. Dass man dauernd eine „1" würfelt, die man vielleicht nicht gebrauchen kann, dass die erhoffte „2" oder „5" nicht erscheint.

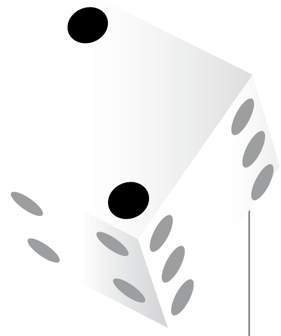
Die Kinder stellen fest,...

- es ist sicher, dass sie eine Augenzahl zwischen 1 und 6 würfeln.
- es ist unmöglich eine Augenzahl zu würfeln, die größer ist als 6.
- es ist wahrscheinlich, dass sie eine der Augenzahlen von 1 bis 6 würfeln.
- dass die Wahrscheinlichkeit für jede Augenzahl gleich ist.
  (Sie beträgt bei einem normalen Spielwürfel ein Sechstel, also etwa 0,167 oder 16,7 %.)
- dass man nicht vorhersagen kann, welche Augenzahl beim nächsten Wurf erscheint.

Weitere Literatur:

Quak,U./Sterkenburgh,S.(2006): Die Grundschul-Fundgrube für Mathematik.
Lehrer-Bücherei: Grundschule, Cornelsen Skriptor, S. 101-109

K 51 Gewinnchancen in Würfelspielen



Spiel 3 Immer der Reihe nach

Spielt mit **einem** Würfel (2-4 Kinder).
Du brauchst ein Blatt Papier und einen Stift.

Der Würfel geht reihum. Jeder darf pro Runde einmal würfeln.
In der ersten Runde muss die ‚1' gewürfelt werden.
Schaffst du die ‚1', schreibe die Zahl auf deinen Zettel.
In der nächsten Runde wird die ‚2', in der dritten Runde die ‚3' gewürfelt, bis in der sechsten Runde die ‚6' gewürfelt wird.
Wer die gesuchte Zahl der Runde nicht schafft, gibt den Würfel an den nächsten Spieler.
Wer zuerst alle sechs Zahlen auf seinem Zettel stehen hat, ist Sieger.

Erläuterungen für die Lehrkraft

Die Kinder stellen fest,...

- es ist sicher, dass sie eine Augenzahl zwischen 1 und 6 würfeln.
- es ist unmöglich eine Augenzahl zu würfeln, die größer ist als 6.
- es ist wahrscheinlich, dass sie eine der Augenzahlen von 1 bis 6 würfeln.
- dass die Wahrscheinlichkeit für jede Augenzahl gleich ist.
  (Sie beträgt bei einem normalen Spielwürfel ein Sechstel, also etwa 0,167 oder 16,7 %.)
- dass man nicht vorhersagen kann, welche Augenzahl beim nächsten Wurf erscheint.

Weitere Literatur

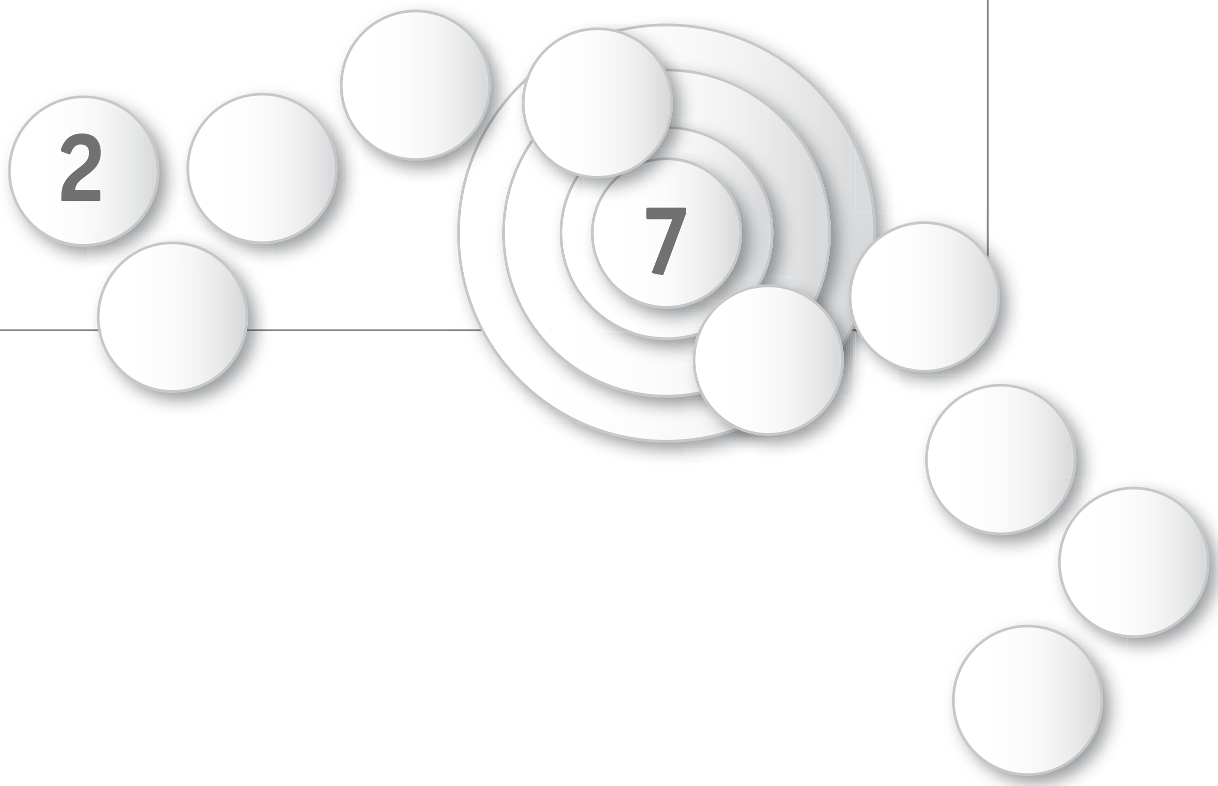
Quak,U./Sterkenburgh,S.(2006): Die Grundschul-Fundgrube für Mathematik.
Lehrer-Bücherei: Grundschule, Cornelsen Skriptor, S. 101-109

K 52 Gewinnchancen in Würfelspielen

Spiel 4 Sieben gewinnt

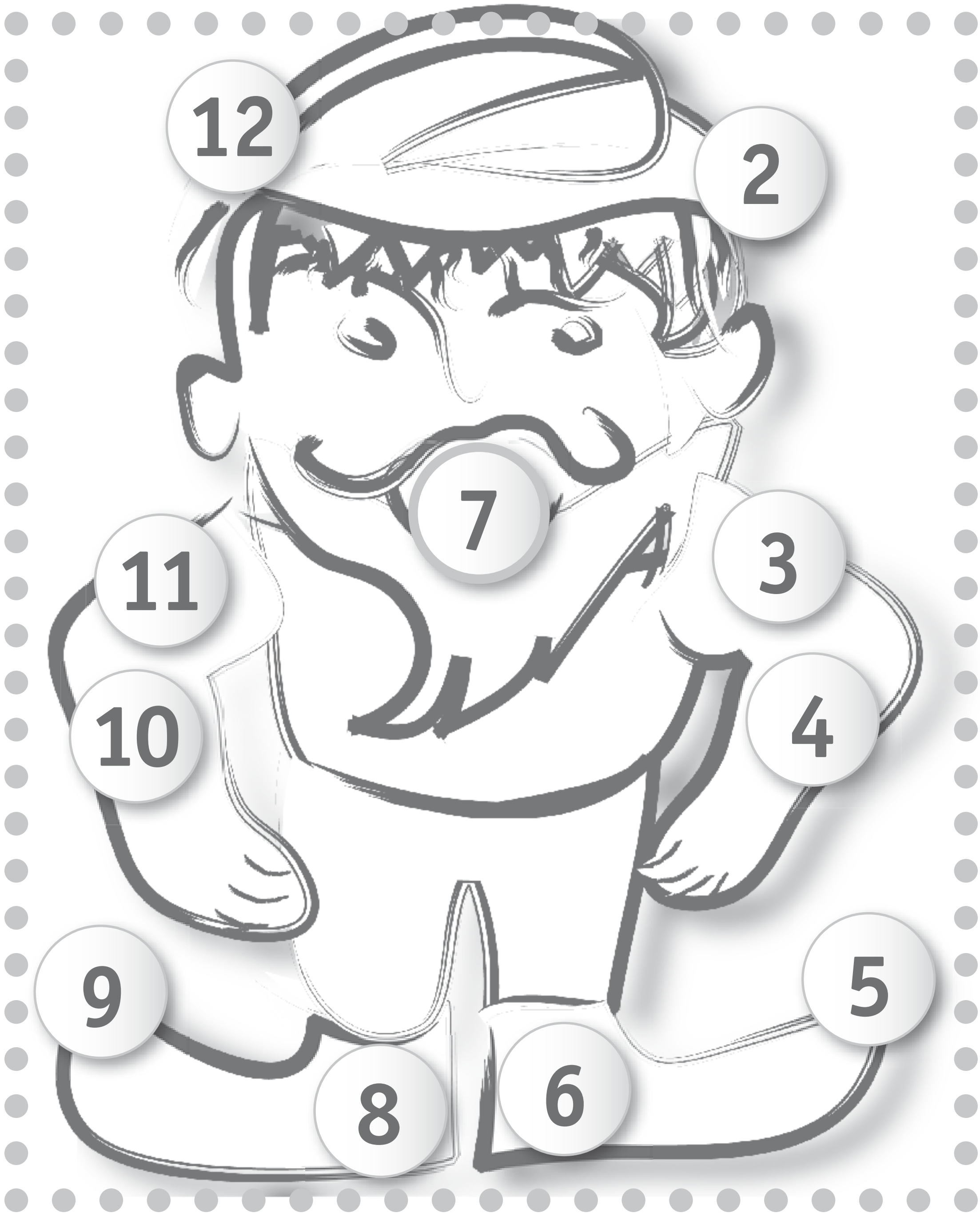
Spielt mit **zwei** Würfeln (2-4 Kinder).
Du brauchst einige Plättchen, ein Blatt Papier und einen Stift.

Jedes Kind schreibt die Zahlen von 2 bis 12 auf sein Blatt.
Nun wird gewürfelt und die erreichte Augenzahl auf dem eigenen Blatt eingefärbt.
Würfelst du eine schon eingefärbte Zahl, kommt das nächste Kind an die Reihe.
Die ‚7' wird nie eingefärbt, dafür bekommt man ein Plättchen.
Wer alle Zahlen eingefärbt hat und die meisten Chips hat, hat das Spiel gewonnen.



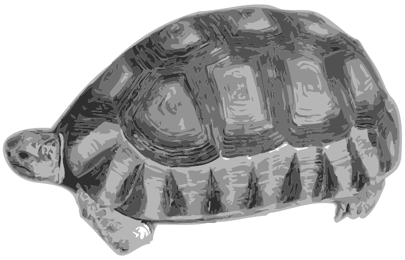
K 53 Gewinnchancen in Würfelspielen

Spiel 5 Spielplan Siebenfresser



Material pro Spieler: 10 Plättchen, 1 Würfel
Es wird reihum gespielt. Jeder Spieler würfelt zweimal. Die gewürfelten Punkte werden addiert und ein Plättchen auf das entsprechende Feld des Siebenfressers gesetzt. Ist das Feld besetzt, darf er sein Plättchen behalten und darf das Plättchen nehmen, welches auf dem Feld liegt (ob dieses von ihm ist oder nicht). Würfelst du eine ‚7' frisst der Siebenfresser das Plättchen sofort auf. (Plättchen bleiben gesammelt auf ‚7' liegen oder werden sofort aus dem Spiel genommen). Wer keine Plättchen mehr hat, scheidet aus. Gewonnen hat der Spieler, der bis zuletzt übrig bleibt. *Idee Praxis Grundschule*

4.2 Hase und Schildkröte – ein faires Spiel?



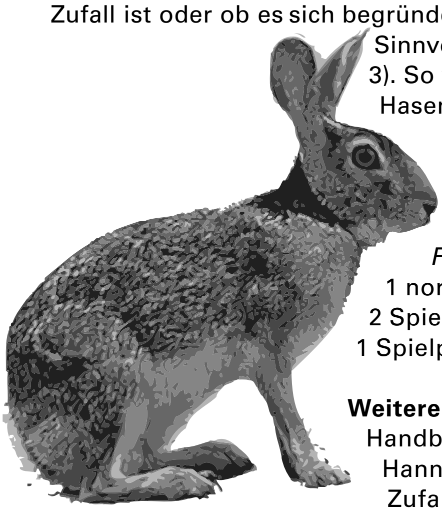
Inhaltsbezogene mathematische Anforderungen
Stichproben erheben und auswerten, Wahrscheinlichkeiten abschätzen und vergleichen, sprachliche Formulierungen entwickeln und Grundbegriffe kennen (z.B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich), Analysieren und Durchdringen von Strukturen, Versprachlichung von beobachteten Prozessen,
Gewinnchancen bei Spielen und Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen, Abstrahieren im Baumdiagramm, Häufigkeit von Ergebnissen durch kombinatorische Überlegungen begründen, inhaltliches Verstehen der Gleichwahrscheinlichkeit.

Beschreibung der Lernsituation
Spielregeln sind in der Welt der Kinder allgegenwärtig. Sie sind jedoch nicht gottgegeben, sondern meist von irgendjemandem ersonnen. Die Schüler/innen sollen dazu angehalten werden, Regeln – nicht generell – aber dennoch kritisch in Frage zu stellen und sie auf ihre Sinnhaftigkeit zu überprüfen.

Vorstellung des Spiels: „Hase und Schildkröte"
Vor Beginn des Spiels entscheidet sich ein/e Schüler/in für den Hasen und ein/e Schüler/in für die Schildkröte. Aufgrund der Punktregelung (siehe unten) kann es günstig sein, die Belegung auszuwürfeln.
Schildkröte und Hase starten in jeder Runde am Startpunkt S des Spielplans (Abb. 1). In jeder Runde würfeln die beiden Schüler/innen nacheinander jeweils 3x mit einem Würfel. Nach jedem Wurf wird der Spielstein bewegt. Wurde eine gerade Zahl gewürfelt, so geht er um ein Feld nach links, wurde eine ungerade Zahl gewürfelt, so geht er ein Feld nach rechts.
Zählung der Punkte (Abb. 2): Nach jeweils 3 Würfen werden Punkte vergeben. Die Schildkröte erhält einen Punkt, wenn sie nach 3 Würfen auf einem der Felder C oder X steht (siehe Spielplan Abb. 1). Der Hase erhält einen Punkt, wenn er nach 3 Würfen auf einem der Felder A, B, S, Y oder Z steht. Im jeweils anderen Fall erhält man in der Runde also 0 Punkte.
Das Spiel endet nach einer vorher vereinbarten Anzahl von Runden. Es hat dann derjenige Schüler gewonnen, der die meisten Punkte hat.

Auswertungsrunde
Bereits vor Beginn des Spiels könnten folgende Fragen aufgeworfen werden:
- Glaubst du, dies ist ein faires Spiel?
- Bevorzugt die Spielregel einen der beiden Spieler?

Es ist aber nicht unbedingt notwendig und kann auch schon zu viel vorwegnehmen.
Haben die Schüler/innen eine vereinbarte Anzahl von Runden gespielt, werden die Ergebnisse der einzelnen Paare zusammengetragen. Sicherlich werden die Schüler/innen bemerkt haben, dass das Spiel nicht fair ist. Entgegen der möglicherweise geäußerten Vermutung, der Hase sei bevorzugt, ist es in Wirklichkeit die Schildkröte. Gemeinsam ist zu überlegen, ob dieses Ergebnis Zufall ist oder ob es sich begründen lässt.
Sinnvoll ist dabei die Verwendung eines Baumdiagramms (Abb. 3). So wird sehr anschaulich deutlich, dass die Gewinnaussicht des Hasen bei B, S und Y leere Gewinne sind. Darüber hinaus sind A und Z nur auf einem Weg, C und X hingegen jeweils auf zwei Wegen zu erreichen.



Material / Hilfsmittel
Für je zwei Schüler/innen:
1 normaler Spielwürfel,
2 Spielfiguren,
1 Spielplan

Weitere Literatur *Schipper, W. u. a.(2000):* Handbuch für den Mathematikunterricht 4.Schuljahr. Hannover: Schroedel *Engel, A./Varga, T./ Walser, W.(1974):* Zufall oder Strategie? Spiele Klett Verlag

Hase und Schildkröte

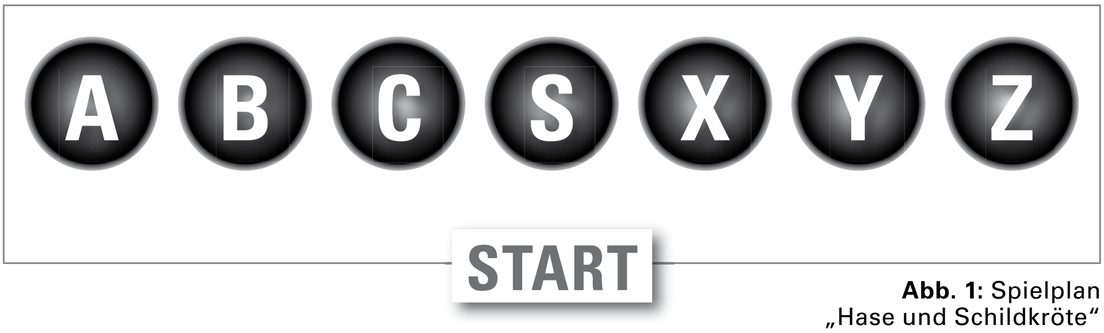


Abb. 1: Spielplan „Hase und Schildkröte"

Runde	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Hase												
Schildkröte												

Abb. 2: Punktetabelle

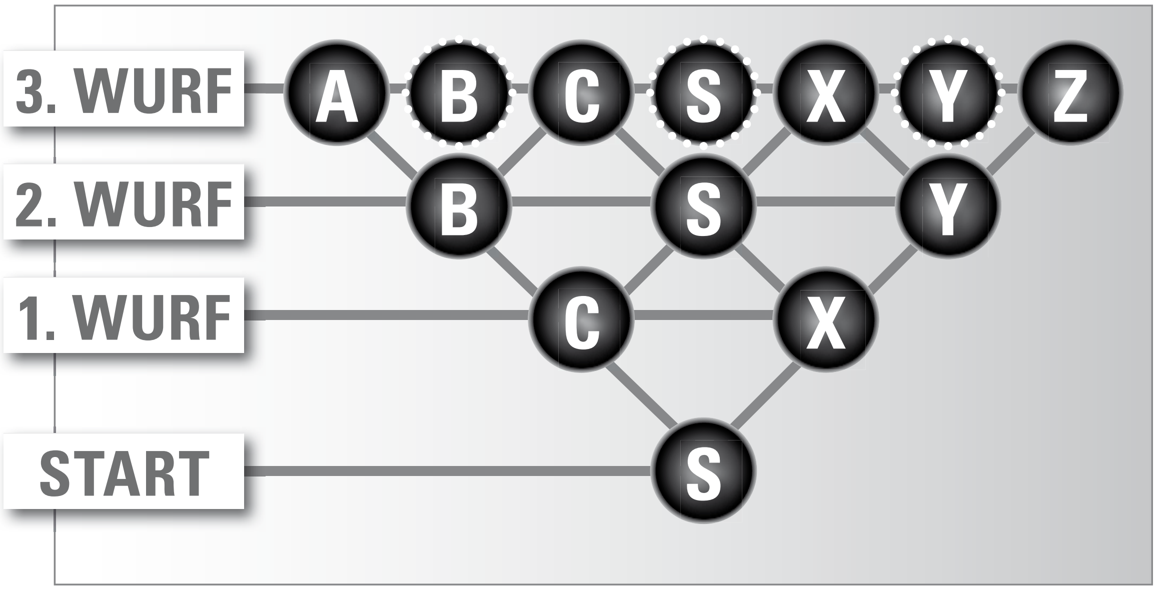


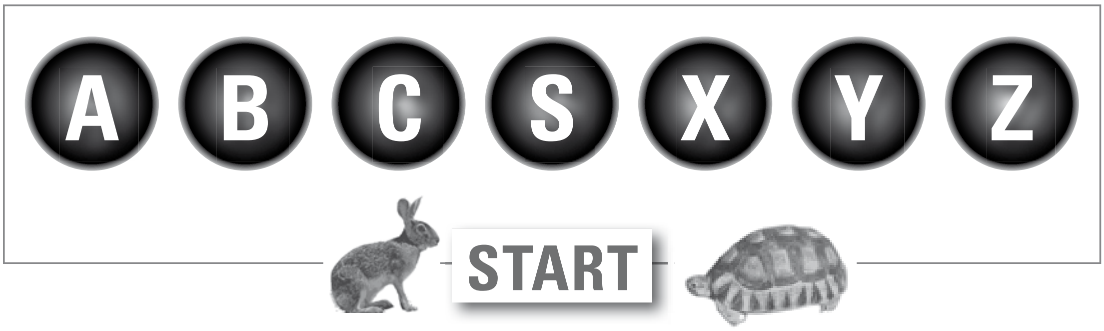
Abb. 3: Auswertungsdiagramm

Variation:
Der Zufallsgenerator kann gewechselt werden. So erfüllt auch eine Münze, ein Wendeplättchen oder auch ein Glücksrad jeder Art mit der Gewinnverteilung 50: 50 den Zweck. Es kann auch der Frage nachgegangen werden, was sich bei 4-maligem Würfeln verändert.

Abb. 4: Variationen

K 54

Hase und Schildkröte



Spielregel
Starte mit Hase und Schildkröte pro Runde am Startpunkt.
In jeder Runde würfelt ihr nacheinander jeweils 3 x mit einem Würfel.

Setzt euren Spielstein entsprechend:
gerade Zahl 1 Feld nach **links**
ungerade Zahl 1 Feld nach **rechts**

Punkteverteilung
Nach drei Würfen werden Punkte vergeben:
Die Schildkröte erhält **einen Punkt**, wenn sie auf C oder X steht.
Der Hase erhält **einen Punkt**, wenn er auf A, B, S, Y oder Z steht.
Im anderen Fall erhältst du null Punkte. Spielt zehn Runden.

Runde	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Hase												
Schildkröte												

Glaubst du, dass dies ein faires Spiel ist? Begründe.

4.3 Gewinnstrategie im „NIM-Spiel"

Inhaltsbezogene mathematische Anforderungen

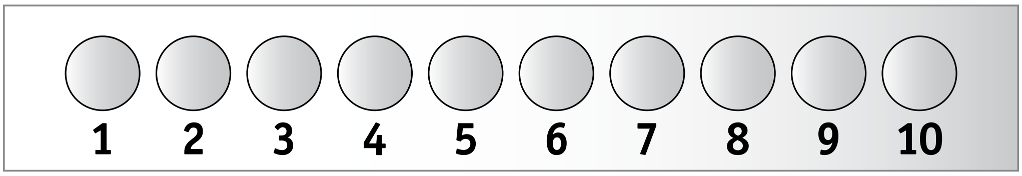
Gewinnchancen bei Spielen mit nicht zufälligem Ergebnis bestimmen, Häufigkeiten von Ergebnissen in verschiedenen Darstellungen bestimmen, gezieltes Spielen, spielerisches Üben, Orientieren im Zahlenraum bis 10 (20), Gewinnstrategien erkennen

Beschreibung der Lernsituation

Vorstellung des Spiels:
Nachdem der Spielplan präsentiert wurde werden die Spielregeln erklärt: Jeweils zwei Schüler/innen spielen mit roten und blauen Plättchen auf der 10er-(20er-) Reihe. Fortlaufend werden ein oder zwei Plättchen auf die Reihe gelegt. Jeder Mitspieler entscheidet, ob ein oder zwei Plättchen für seine Gewinnstrategie zu legen sind. Begonnen wird bei Feld 1. Gewonnen hat der, dem es gelingt genau das Feld 20 zu belegen. Es ist zu empfehlen, dass zwei Kinder für den gemeinsamen Einstieg einen Spielverlauf für alle vormachen; ggf. mit magnetischen Plättchen am Spielfeld an der Tafel. Die Schüler setzen sich in einen Indianerkreis (ohne Stühle, kurze Phase) und der 10-Spielplan (Computerendlospapier) wird ausgerollt. Anschließend werden die Spielregeln erklärt und 2 Kinder spielen gegeneinander. Um sicher zu gehen, dass jeder Spieler die Regeln verstanden hat, sollte dies mehrmals wiederholt werden.

Spielerisches Üben: NIM

Orientierungsübung im Zahlenraum bis 10 (20)
Spielplan und die elementare Variante für das „NIM-Spiel"



Zwei Personen spielen mit roten bzw. blauen Plättchen auf dem abgebildeteten Spielplan mit linear angeordneten (ggf. durchnummerierten) Feldern. Man legt abwechselnd, beginnend bei Feld 1, ein oder zwei Plättchen fortlaufend auf die Felder.
Gewonnen hat, wer das Feld 10 belegen kann.

Aus: Krauthausen, G. (2000): Lernen, Lehren, Lehren lernen. Zur mathematik-didaktischen Lehrerausbildung am Beispiel der Primarstufe. Leipzig : Klett. S. 165 / S. 166

Spielen in Zweiergruppen
Zwei Schüler erhalten jeweils einen Spielplan und entsprechende Wendeplättchen. Die Kinder sollten angeregt werden, Auffälligkeiten zu beobachten und zu überprüfen.

Anschließend provoziert der Lehrer bewusst, indem er behauptet...
„ Ich gewinne immer!" Er klärt die Schüler auf, dass es heute darum geht, diese Strategie gemeinsam herauszufinden." Im Vordergrund steht heute nicht, dass einer von euch öfter gewinnt, sondern, dass ihr gemeinsam die Gewinnstrategie herausfindet. Vor dem Einstieg in die Partnerarbeit ist es sehr wichtig festzulegen, dass Kinder, die meinen die Strategie erkannt zu haben, dreimal gegen andere Partner gewinnen müssen, bevor sie gegen den Lehrer antreten dürfen. Es wird zu diesem Zweck ein Treffpunkt für diese Schüler vereinbart.

Reflexion über Gewinnzahlen

„Gibt es eine Gewinnstrategie?" Die Reflexion über erste Gewinnpositionen sollte während einer begleitenden Spielsituation an der Tafel erfolgen; die Kinder können Spielsituationen an der Tafel herstellen und mögliche Varianten des Spielverlaufs legen und kommentieren. Sollten die Schüler die Lust am Spiel verlieren, so könnte man sie nach einer Zeit zusammenholen und gemeinsam das **Gewinnfeld 7** thematisieren und den Spielplan damit verkürzen. Danach könnte das Spiel in veränderten Gruppen weiter gespielt werden.

Lösungen:

Zielzahl 10: 10, 7, 4, 1 **daraus folgt, der Gewinner muss beginnen.**

Sollten Kinder die Strategie für das Spielfeld 10 sicher beherrschen, so kann für sie der Zahlenraum mit dem erweiterten Spielplan bis 20 unter der Fragestellung nach der neuen Gewinnstrategie angeboten werden. Anschließend knüpft sich auch hier die gemeinsame Reflexion über die Gewinnpositionen an. Gefundene Gewinnfelder, soweit sie von den Schülern gefunden wurden, erhalten eine farbige Markierung. Ferner werden Vermutungen zu weiteren Gewinnstrategien ausgetauscht.

„Wenn Feld 18 vom Partner belegt ist, muss ich zwei Plättchen legen, um zu gewinnen."

„Wenn ich Feld 17 erreicht habe, dann kann ich gewinnen." Die Schülerargumentation erfolgt stets aus der eigenen Position, um das Spiel zu gewinnen.

Lösung: Schüler/innen erkennen die Gewinnposition 17.

Lösungen:

Zielzahl 20: 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2 **Gewinner muss beginnen.**

Zielzahl 15: 15, 12, 9, 6, 3 **Gewinner darf nicht beginnen.**

Zielzahl n: n geteilt durch 3 **Die Restzahl ergibt das erste Gewinnfeld.**

Spielphase in neu gemischten Zweiergruppen zur Überprüfung der Gewinnstrategie und zur Findung weiterer Gewinnpositionen. Spielt doch einmal mit anderen Kindern / Personen!

Bevor man als Lehrer diese Aufgabenstellung in die Klasse gibt, sollte man sich über den mathematischen Hintergrund sicher sein und selber einmal „SPIELEN".
Gewinnfelder bei Zielzahl 10, Zielzahl 20, Zielzahl 15 allgemein: Zielzahl n bestimmen

Material / Hilfsmittel:
Zahlenreihen bis 10-(20) Spielplan, farbige Plättchen, auch als Demonstrationsmaterial in groß (Kreise, bunte Faltblätter)

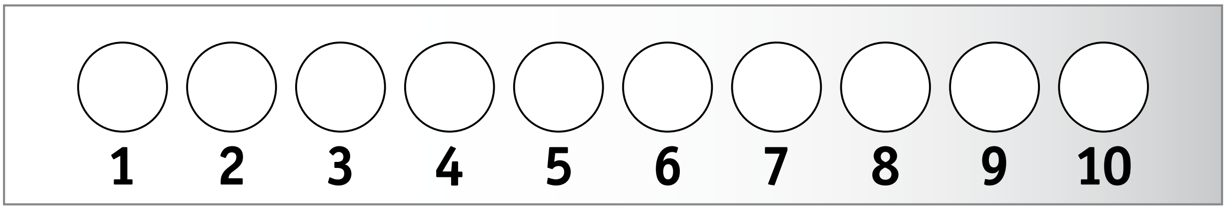
Weitere Literatur:
Scherer, P. (1996): Nim-Spiel. In: Mathematik und Sachunterricht im Primar und Sekundarbereich S. 88-98. Frankfurt /M
Müller, G. / Wittmann, E.Ch. (1984) Der Mathematikunterricht in der Primarstufe, Abschnitt 1.2.9, Braunschweig

K 55 **Strategiespiel** NIM 10

Spielerisches Üben: NIM

Orientierungsübung im Zahlenraum bis 10 (20)

Der Spielplan und die elementare Variante für das „NIM-Spiel"



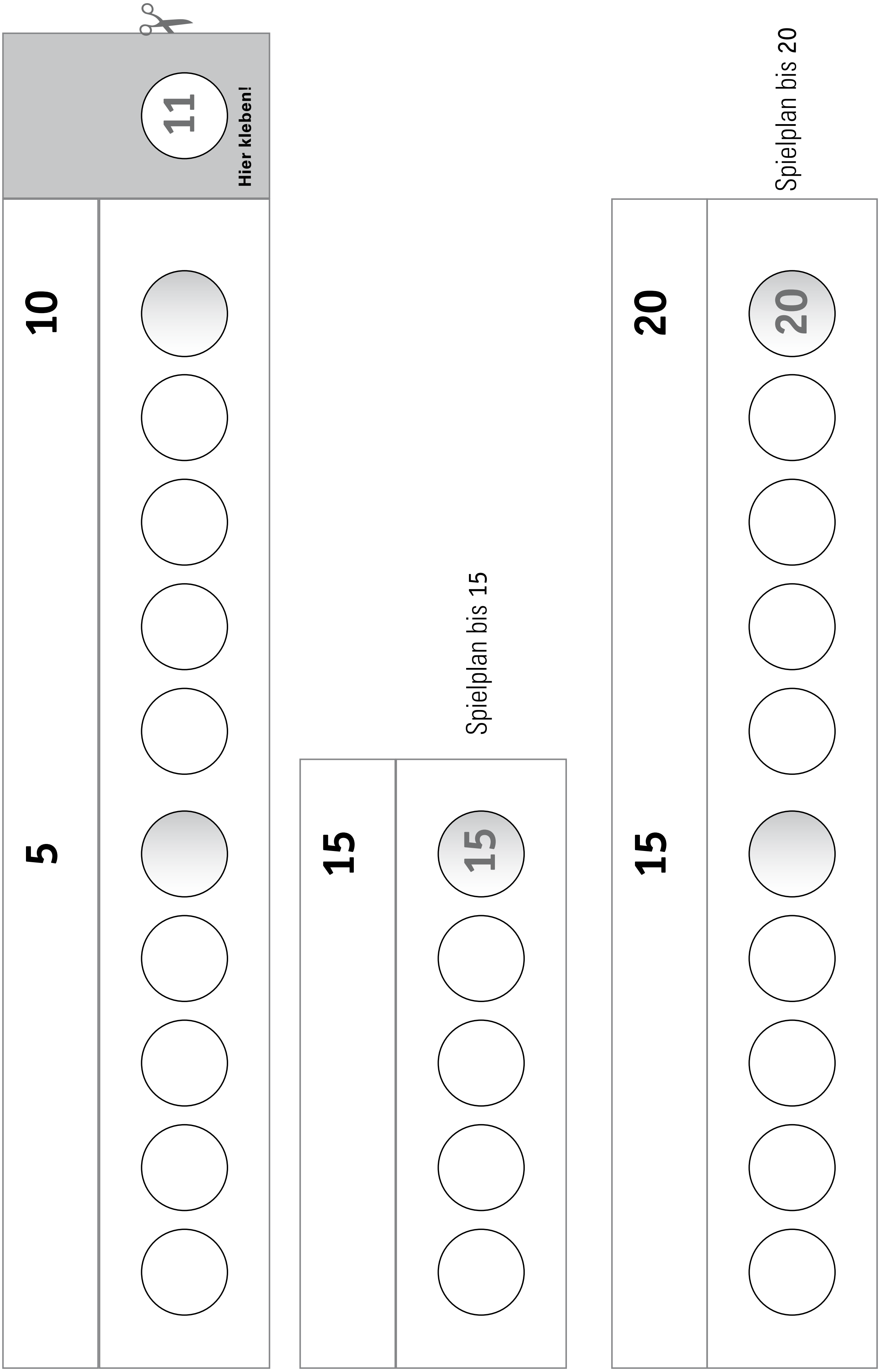
Zwei Personen spielen mit roten bzw. blauen Plättchen auf dem abgebildeteten Spielplan mit linear angeordneten (ggf. durchnummerierten) Feldern.
Man legt abwechselnd, beginnend bei Feld 1, ein oder zwei Plättchen fortlaufend auf die Felder.
Gewonnen hat, wer das Feld 10 belegen kann.

Gibt es eine **Gewinnstrategie?**
Welches sind die **Gewinnzahlen?**
Was fällt dir auf?

K 56 **Strategiespiel** NIM 10 (20)

ausschneiden und zusammensetzen

Spielplan für das NIM - Spiel (bis 10, bis 15, bis 20 wählbar). Auf DIN A3 vergrößern.



K 57 **Strategiespiel** NIM 10

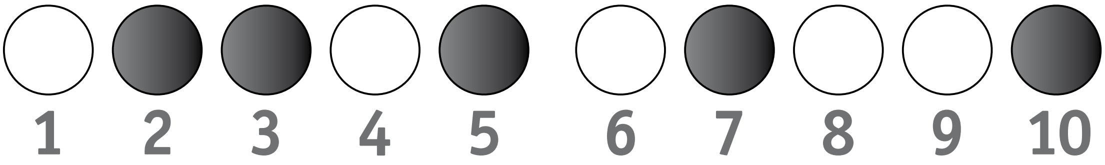
Wer hat gewonnen? Kreuze an.

Spielsteine schwarz: Tom

❑ Tom hat gewonnen.

Spielsteine weiß: Malte

❑ Malte hat gewonnen.



Welcher Spielstein war entscheidend für den Sieg? Warum?

Die Gewinnzahl ist ______ .

Gewinnfelder sind ______ , ______ , ______ , ______ .

K 58 **Strategiespiel** NIM 15

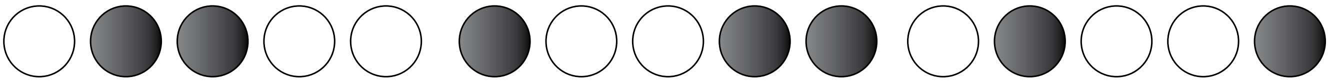
Wer hat gewonnen? Kreuze an.

Spielsteine weiß: Lena

❑ Lena hat gewonnen.

Spielsteine schwarz: Amelie

❑ Amelie hat gewonnen.



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Wer das Spielfeld „12“ erobert, gewinnt. Warum?

Bereits das Feld „9“ entscheidet über den Gewinn. Warum?

Gewinnfelder sind ___ , ___ , ___ , ___ , ___ .

K 59 Strategiespiel NIM 20

Es gewinnt, wer beginnt! Stimmt das?

Spielsteine weiß: Anna **Spielsteine schwarz:** Sarah

○ ● ● ○ ○	● ○ ○ ● ○	○ ● ● ○ ○	● ○ ● ○ ○

_ _ _ _ _ _ _ hat gewonnen. Gewinnfeld:

Spielsteine weiß: Anna **Spielsteine schwarz:** Sarah

○ ○ ● ○ ○	● ○ ○ ● ●	○ ○ ● ○ ●	○ ○ ● ● ○

_ _ _ _ _ _ _ hat gewonnen. Gewinnfeld:

Spielsteine weiß: Anna **Spielsteine schwarz:** Sarah

● ○ ○ ● ○	○ ● ○ ● ○	○ ● ○ ○ ●	○ ○ ● ○ ○

_ _ _ _ _ _ _ hat gewonnen. Gewinnfeld:

Spielsteine weiß: Anna **Spielsteine schwarz:** Sarah

● ● ○ ● ○	● ○ ○ ● ○	○ ● ○ ○ ●	○ ● ○ ○ ●

_ _ _ _ _ _ _ hat gewonnen. Gewinnfeld:

Die Behauptung „Wer beginnt, gewinnt!“

- ❑ stimmt.
- ❑ stimmt nicht.

K 60 Strategiespiel NIM 20

Spiel mit einem Partner. Findet die Gewinnfelder! Begründe.

Spielsteine weiß:_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ **Spielsteine schwarz:** _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

○○○○○	○○○○○	○○○○○	○○○○○

_ _ _ _ _ _ _ hat gewonnen. Gewinnfeld: ☐

Spielsteine weiß:_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ **Spielsteine schwarz:** _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

○○○○○	○○○○○	○○○○○	○○○○○

_ _ _ _ _ _ _ hat gewonnen. Gewinnfeld: ☐

Spielsteine weiß:_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ **Spielsteine schwarz:** _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

○○○○○	○○○○○	○○○○○	○○○○○

_ _ _ _ _ _ _ hat gewonnen. Gewinnfeld: ☐

Spielsteine weiß:_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ **Spielsteine schwarz:** _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

○○○○○	○○○○○	○○○○○	○○○○○

_ _ _ _ _ _ _ hat gewonnen. Gewinnfeld: ☐

Gewinnfeld ☐ , ☐ , ☐ , ☐ , ☐ , ☐ , ☐

4.4 Klassenspiel: `Wer erreicht zuerst das Ziel?´

Inhaltsbezogene mathematische Anforderungen

In Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen.
Daten mit Hilfe von Strichlisten, Tabellen, Streifendiagrammen u. a. darstellen.

Stichproben erheben und auswerten, Wahrscheinlichkeiten abschätzen und vergleichen, Gewinnchancen bei Spielen und Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen.

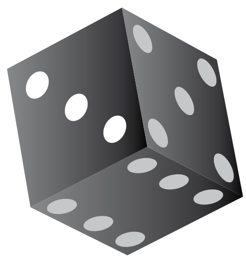
Beschreibung der Lernsituation

Bevor bekannt war, wie sich Häufigkeiten, insbesondere relative Häufigkeiten, berechnen lassen, war es ein gängiges Mittel, sich über längere Versuchsreihen anzunähern. Auch heute werden noch oft umfangreiche Versuchsreihen durchgeführt, um der Frage nachzugehen, wie ein berechnetes Ergebnis mit der „Realität“ zu vereinbaren ist.
Die Schüler/innen lernen bei diesem Spiel, Ereignisse nicht nur singulär zu betrachten, sondern über einen längeren Zeitraum und mehrere Versuche hinweg.
Ihnen wird deutlich, wie wichtig eine Dokumentation der einzelnen Ereignisse ist, wenn man anschließend begründete Aussagen über diese längeren Versuchsreihen machen will.

Vorstellung des Spiels

„Wer erreicht zuerst das Ziel“
Die Schüler/innen erhalten jeder einen Spielplan (Abb.1), auf welchem sie sich bei jedem Spiel für eine – in ihren Augen günstige – Gewinnzahl entscheiden sollen.
Sie setzen ihre Spielfigur auf diese Zahl oder machen Kreuze.
Die Schüler/innen würfeln nun abwechselnd, wobei jeder Wurf aber für beide Spieler gilt. Fällt die jeweilige Gewinnzahl, so darf die Spielfigur ein Kästchen weiter in Richtung Ziel gesetzt bzw. ein Kreuzchen gemacht werden. Die anderen gewürfelten Zahlen sollten in diesem anfänglichen Stadium aber nicht notiert werden.
Wer zuerst oben ankommt, hat die Runde gewonnen. Die Gewinnzahl wird im Gewinnbogen notiert. Die Schüler/innen dürfen sich jeweils neue Gewinnzahlen aussuchen und wieder beginnen.

Auswertungsrunde



In einer Auswertungsrunde erhalten die Schüler/innen die Gelegenheit, ihre Erfahrungen mitzuteilen und ihre Meinung dazu zu äußern.
Die notierten Gewinnzahlen der einzelnen Spielgruppen werden auf der Klassenauswertungstabelle (Abb.2) notiert.

Eine Schlussbetrachtung dieser Klassenauswertungstabelle kann durch folgende Fragen motiviert werden:

- *„Was können wir aus dieser Tabelle erkennen?”*
- *„Was ist mit den übrigen gewürfelten Zahlen?”*
- *„Welche Zahl würdest du dir als nächstes auswählen?” Warum?*
- *„Wie findest du die Regel bei vielen Gesellschaftsspielen, dass man beim Werfen einer 6 noch einmal würfeln darf?” Warum?*

Material / Hilfsmittel: Würfel, Spielfiguren, Spielplan, Auswertungsplan

Weitere Literatur: *Engel,A./Varga,T./Walser,W.(1974):* Zufall oder Strategie? Spiele zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der Primarstufe, Stuttgart: Klett

Beispiel für eine Auswertung

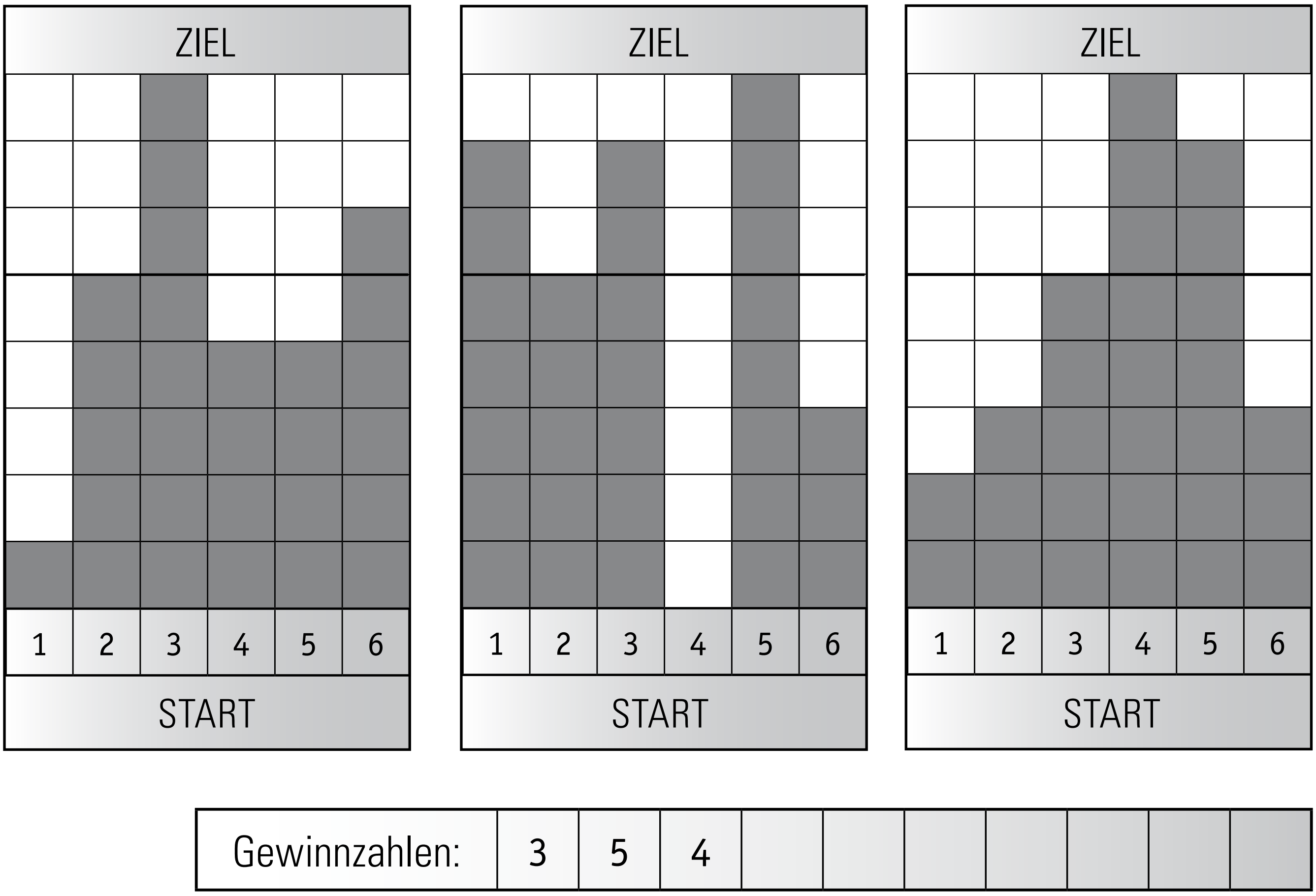


Abb. 1: Spielplan

Beispiel für diese Klassenauswertung

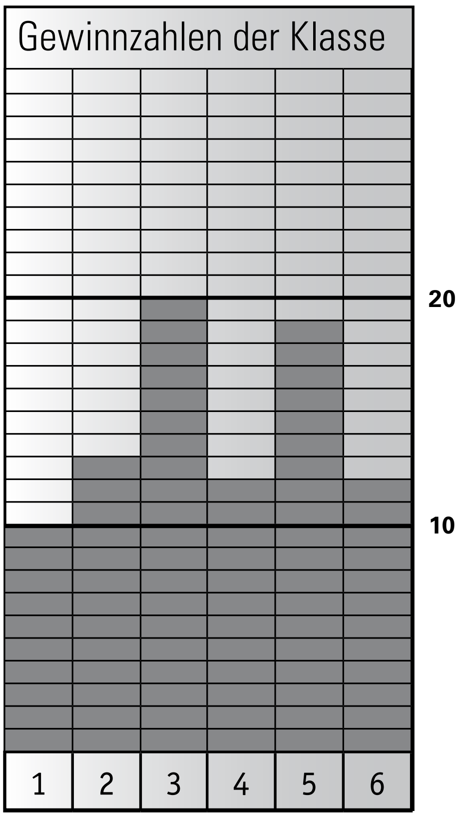


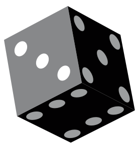
Abb. 2: Verteilung der Gewinnzahlen der Klasse

K 61 Spielplan

ZIEL					
1	2	3	4	5	6
START					

ZIEL					
1	2	3	4	5	6
START					

ZIEL					
1	2	3	4	5	6
START					

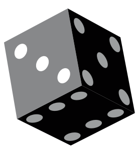


Gewinnzahlen:										

ZIEL					
1	2	3	4	5	6
START					

ZIEL					
1	2	3	4	5	6
START					

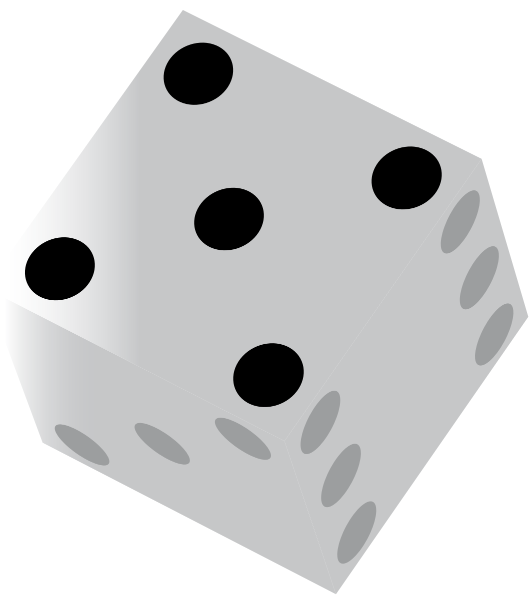
ZIEL					
1	2	3	4	5	6
START					



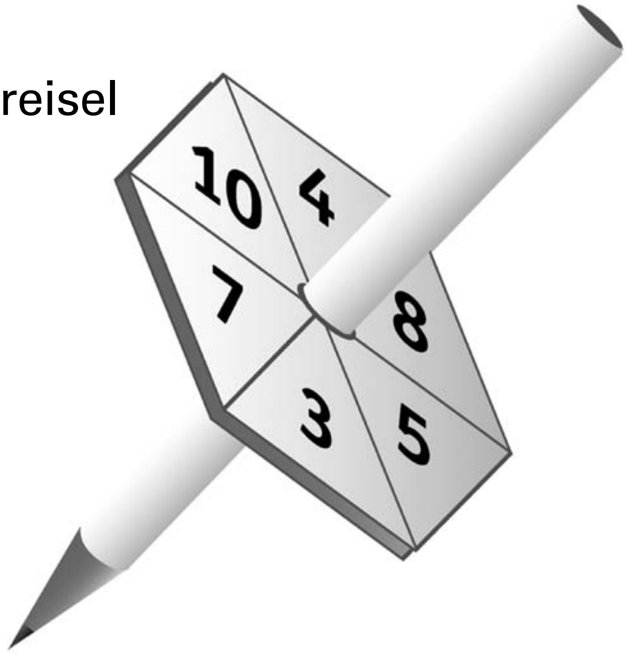
Gewinnzahlen:										

K 62 Spielplan Klassenauswertung

Gewinnzahlen der Klasse							Gewinnzahlen der Klasse					
						20						
						10						
1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6

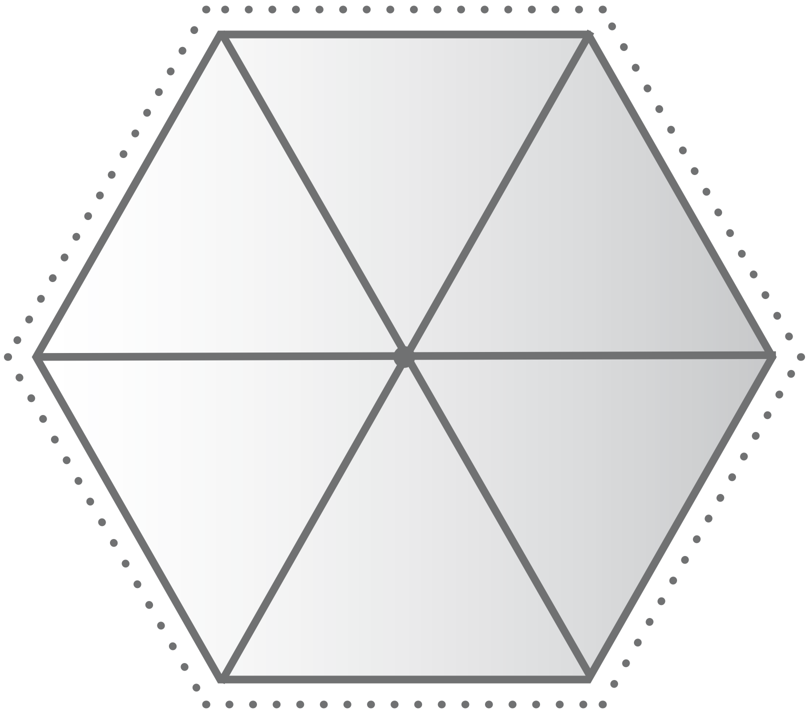


4.5 Bauanleitung Glückskreisel



Bauanleitung

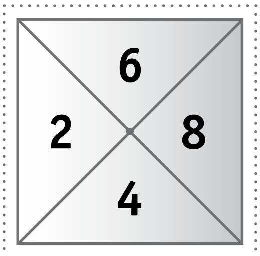
- **Aus einer festen Pappe ein Viereck, Fünfeck, Sechseck zuschneiden,**
- **die Ergebnisfelder einzeichnen und**
- **die Mitte einstechen.**
- **In diese Mitte einen Bleistift stecken. (Halbierung des Stiftes)**



K 63 Glückskreisel

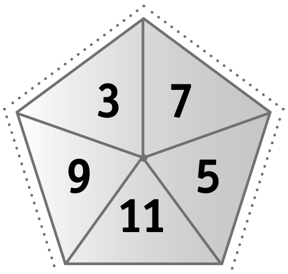
Schätze die Gewinnchancen ein. Kreuze an.
Begründe deinem Tischnachbarn deine Entscheidung.

Aufgabe: Zerschneide die Aufgabenkarten. Sortiere die Glücksräder.



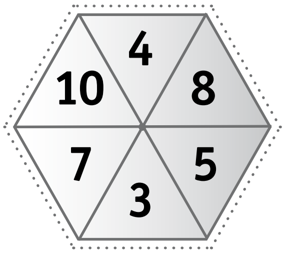
Bei diesem Glückkreisel ein Feld mit einer **geraden** Zahl zu erzielen, ist …

- ☐ sicher
- ☐ gleichwahrscheinlich
- ☐ möglich, aber nicht sicher
- ☐ unmöglich



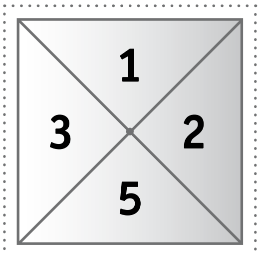
Bei diesem Glückskreisel ein Feld mit einer **geraden** Zahl zu erzielen, ist …

- ☐ sicher
- ☐ gleichwahrscheinlich
- ☐ möglich, aber nicht sicher
- ☐ unmöglich



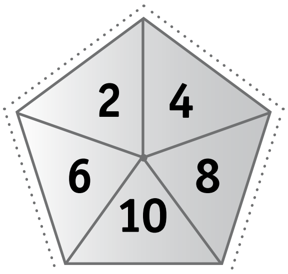
Bei diesem Glückskreisel ein Feld mit einer **ungeraden** Zahl zu erzielen, ist …

- ☐ sicher
- ☐ gleichwahrscheinlich
- ☐ möglich, aber nicht sicher
- ☐ unmöglich



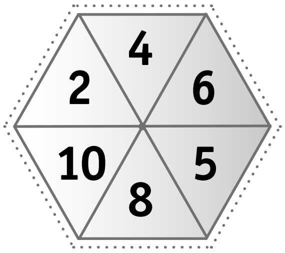
Bei diesem Glückskreisel ein Feld mit einer **geraden** Zahl zu erzielen, ist …

- ☐ sicher
- ☐ gleichwahrscheinlich
- ☐ möglich, aber nicht sicher
- ☐ unmöglich



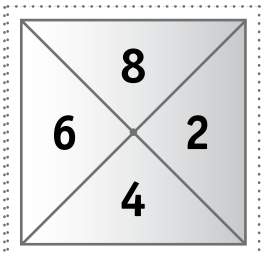
Bei diesem Glückskreisel ein Feld mit einer **geraden** Zahl zu erzielen, ist …

- ☐ sicher
- ☐ gleichwahrscheinlich
- ☐ möglich, aber nicht sicher
- ☐ unmöglich



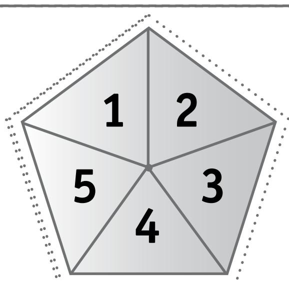
Bei diesem Glückskreisel ein Feld mit einer **geraden** Zahl zu erzielen, ist …

- ☐ sicher
- ☐ gleichwahrscheinlich
- ☐ möglich, aber nicht sicher
- ☐ unmöglich



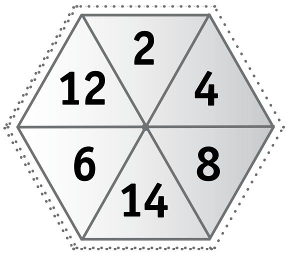
Bei diesem Glückskreisel ein Feld mit einer **ungeraden** Zahl zu erzielen, ist …

- ☐ sicher
- ☐ gleichwarscheinlich
- ☐ möglich, aber nicht sicher
- ☐ unmöglich



Bei diesem Glückskreisel ein Feld mit einer **geraden** Zahl zu erzielen, ist …

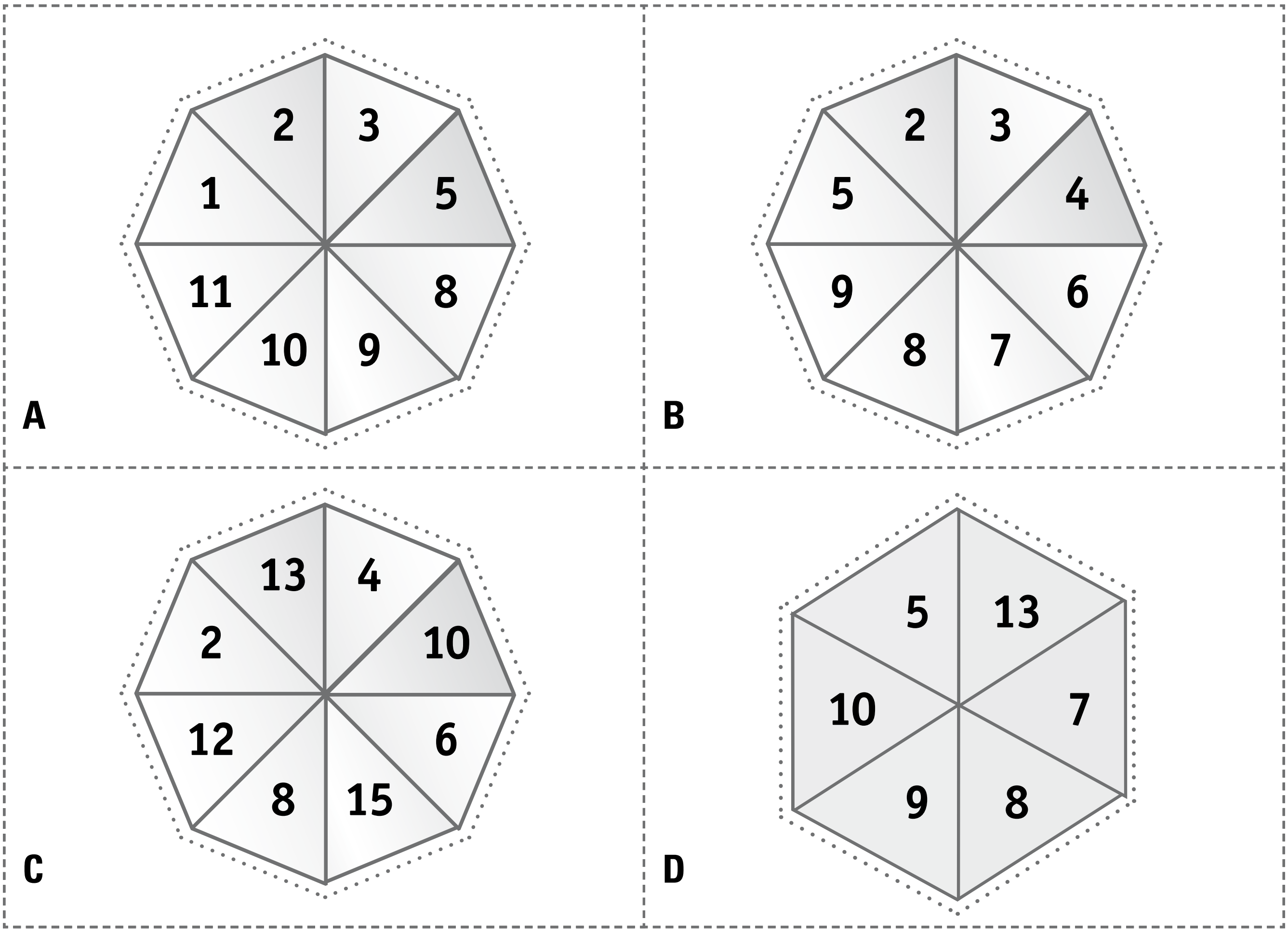
- ☐ sicher
- ☐ gleichwarscheinlich
- ☐ möglich, aber nicht sicher
- ☐ unmöglich



Bei diesem Glückskreisel ein Feld mit einer **geraden** Zahl zu erzielen, ist …

- ☐ sicher
- ☐ gleichwarscheinlich
- ☐ möglich, aber nicht sicher
- ☐ unmöglich

K 64 Glückskreisel



Die Kinder drehen ein Glücksrad.

a) Bei welchem Glücksrad ist die Wahrscheinlichkeit am größten,
eine gerade Zahl zu erspielen?

Bei Rad _______.

b) Bei welchem Glücksrad ist die Wahrscheinlichkeit am kleinsten,
eine gerade Zahl zu erspielen?

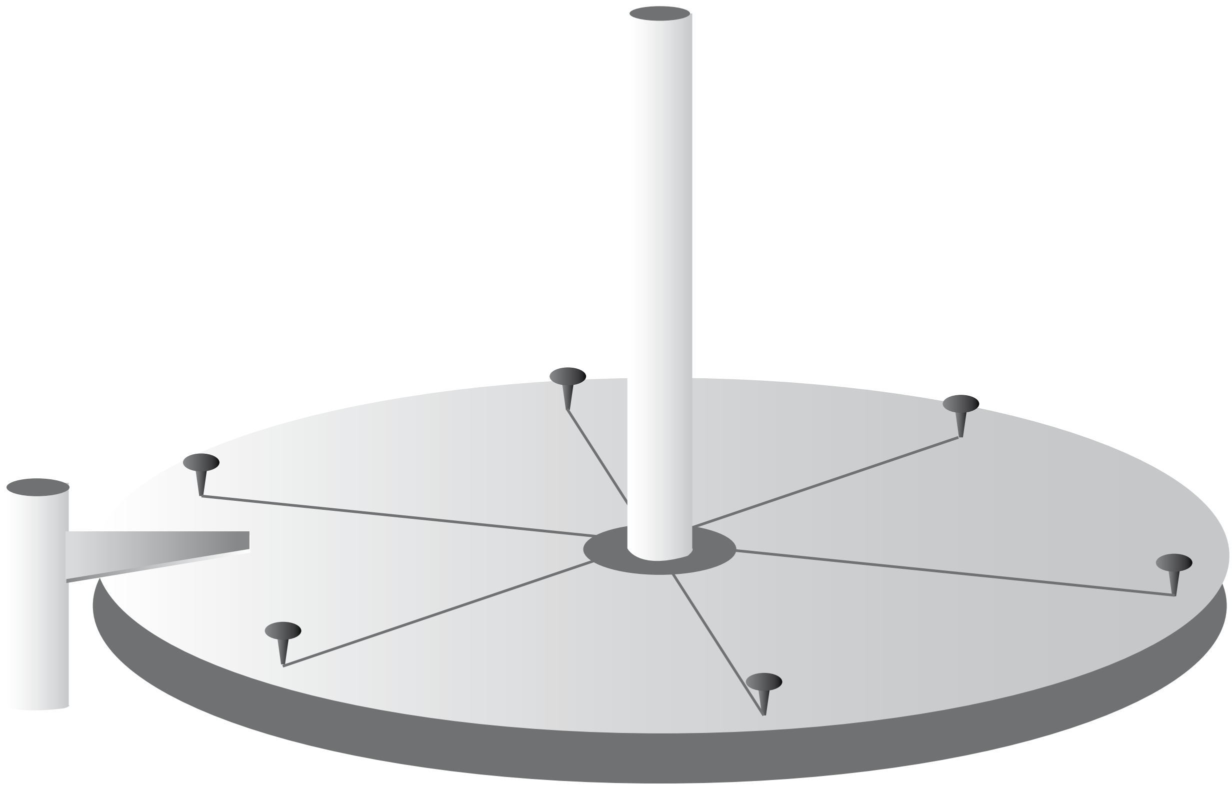
Bei Rad _______.

c) Bei welchem Glücksrad besteht die Gleichwahrscheinlichkeit,
eine gerade oder ungerade Zahl zu erspielen?

Bei Rad _______.

Beschreibe einem Mitschüler deine Entscheidung.

4.6 Bauanleitung Glücksrad



Material:

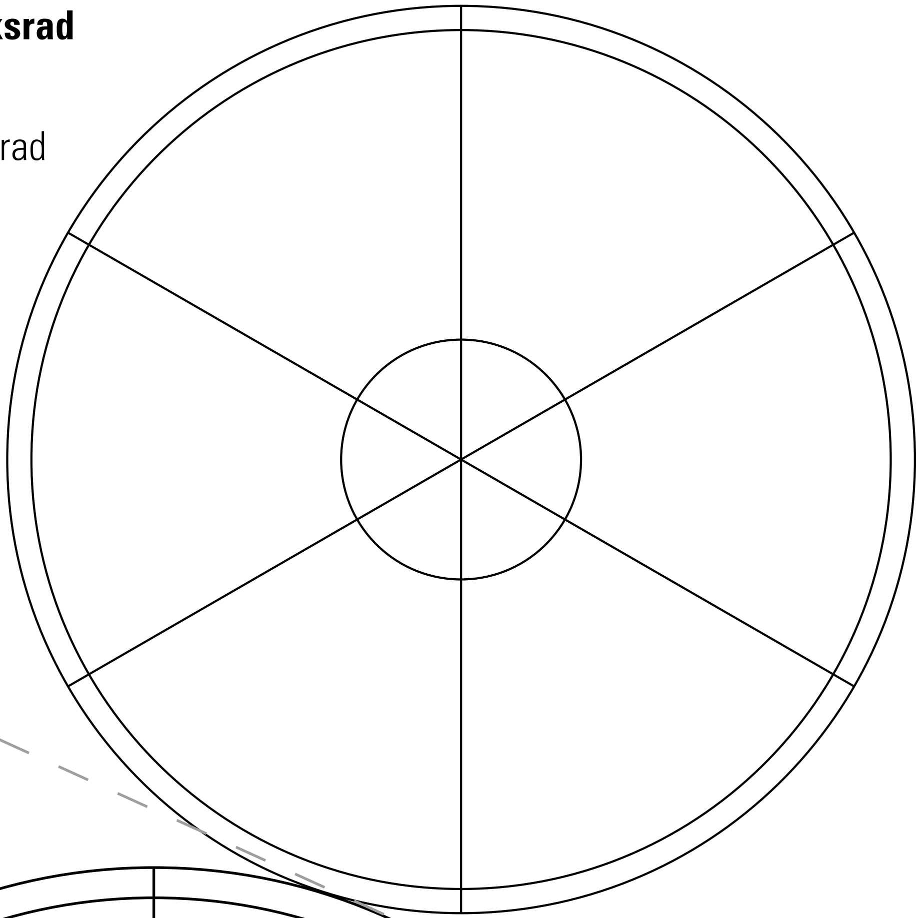
• Grundplatte aus Fichtenholz	18 mm, Größe 20x25 cm
• Spendenholzscheibe	Ø 12-15 cm / 8 mm stark
• Alu-Rohr	Ø 8 mm, Länge 10 cm
• Rundholz	Ø 8 mm, Länge 8 cm
• Rundholz	Ø 8 mm, Länge 5 cm
• 6 Goldkopfnägel,	1,8 x 20 mm
• 1 Plastikstreifen (Heftumschlag)	ca 5 cm lang

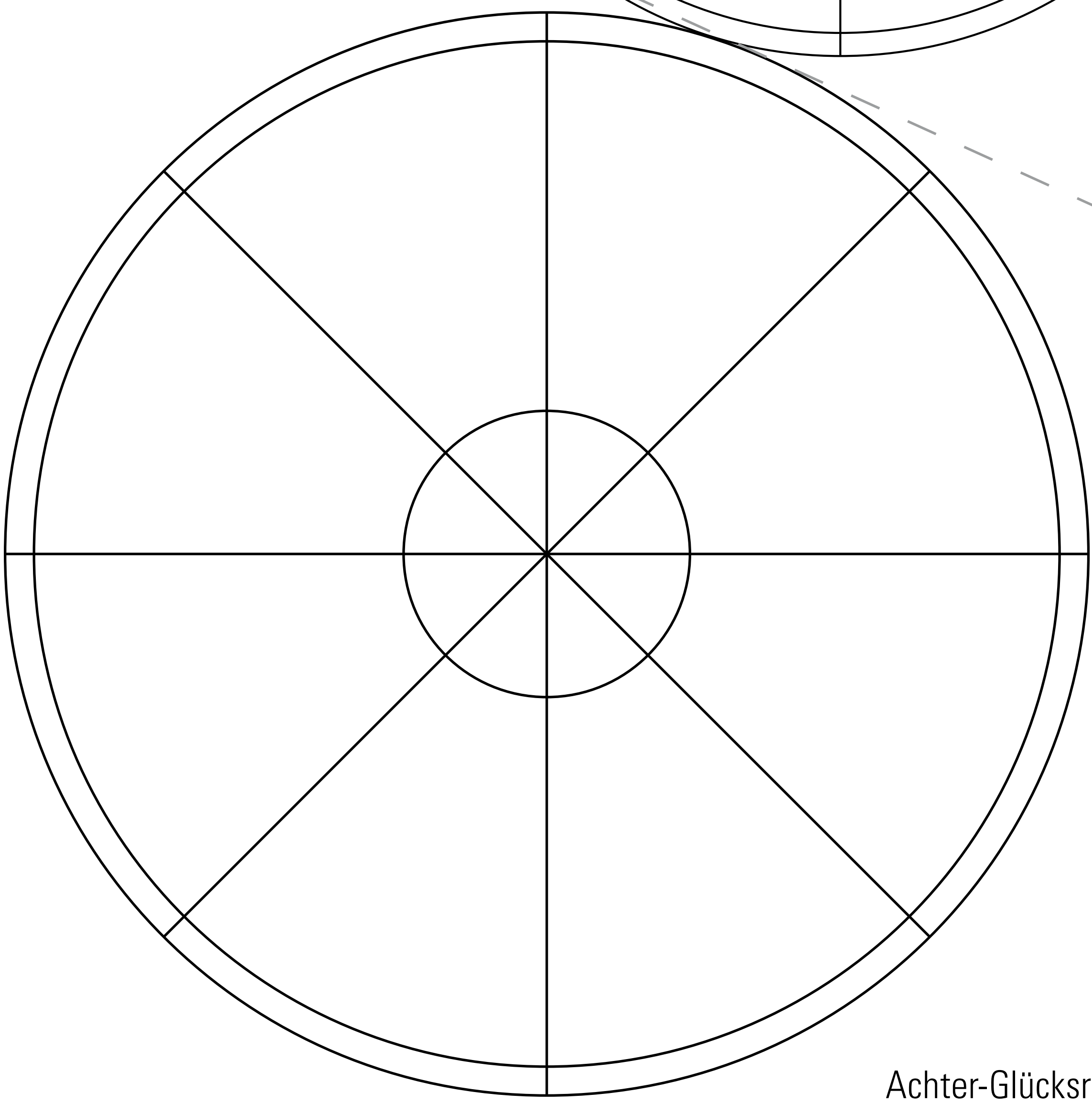
Arbeitsgänge:

- Grundplatte und Kreiselscheibe aussägen und Kanten nachschleifen
- Rundhölzer und Alu-Rohr abmessen
- Kreisscheibe durchbohren 8 mm
- Einschlagpunkte für Nägel markieren, Nägel einschlagen
- Bohrung für Kreiselführungsdübel in die Grundplatte durchführen 5 mm Ø
- Dübel einleimen
- kleines Rundholz 1 cm tief einkerben, Plastikstreifen als Zunge einklemmen
- Rohrloch für Rundholz markieren
  (ca. 2-3 cm von der Kreisscheibe entfernt) bohren und einleimen
- Grundplatte mit Oberflächenschutz (z.B. Holzwachs) bearbeiten

K 65 Bauanleitung Glücksrad

Sechser-Glücksrad





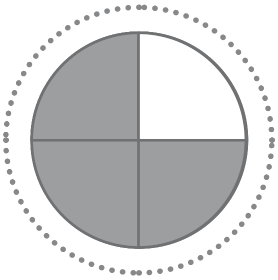
Achter-Glücksrad

K 66 Bauanleitung für Glücksräder

Material:
Runde Sperrholzplatte (0,5 cm Stärke/Durchmesser 20 cm), Popniete, zwei dicke Kunststoffscheiben, doppelseitiges Klebeband, Massivholzstück 30 cm x 30 cm, zwei Unterlegscheiben

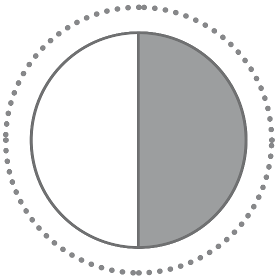
- Mittelpunkt der runden Platte markieren und durchbohren (Durchmesser der Popniete)
- Ereignisfelder auf der Glücksradscheibe einzeichnen
- auf einem Massivholzstück mittig eine Unterlegscheibe (Durchmesser der Popniete) auflegen und mit der Popniete fest einschlagen
- Glücksradscheibe auflegen und eine weitere Unterlegscheibe mit doppelseitigem Klebeband auf dem Massivholz befestigen, sodass die Scheibe am Rand stabilisiert wird.
- Pfeil aufmalen

Schätze die Gewinnchance ein.



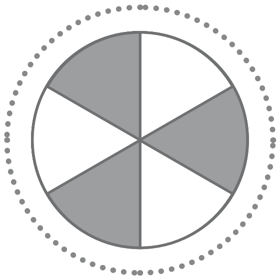
Beim Glücksrad ein dunkles Feld zu erzielen, ist …

- ☐ sicher
- ☐ möglich, aber nicht sicher
- ☐ unmöglich



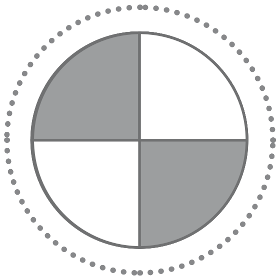
Beim Glücksrad ein dunkles Feld zu erzielen, ist …

- ☐ sicher
- ☐ möglich, aber nicht sicher
- ☐ unmöglich



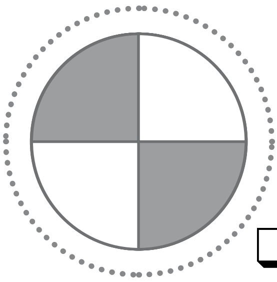
Beim Glücksrad ein dunkles Feld zu erzielen, ist …

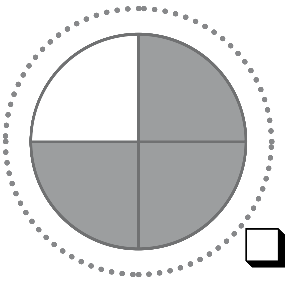
- ☐ sicher
- ☐ möglich, aber nicht sicher
- ☐ unmöglich



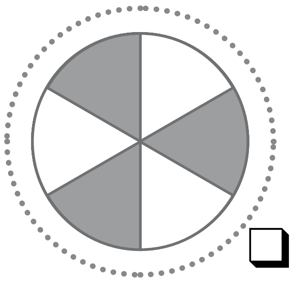
Beim Glücksrad ein dunkles Feld zu erzielen, ist …

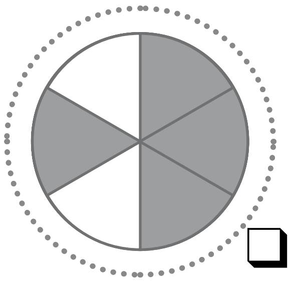
- ☐ sicher
- ☐ möglich, aber nicht sicher
- ☐ unmöglich

 ☐

 ☐

Kreuze an. Was meinst du:
a. Welches Glücksrad hat die größere Chance ein dunkles Feld zu erzielen?
b. Begründe deine Antwort.

 ☐

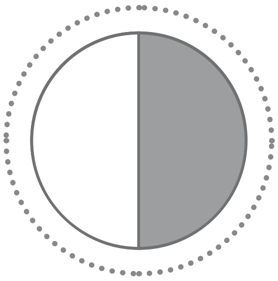
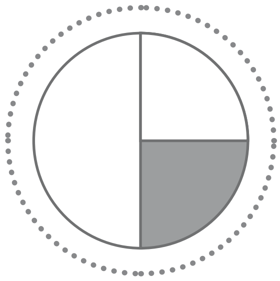
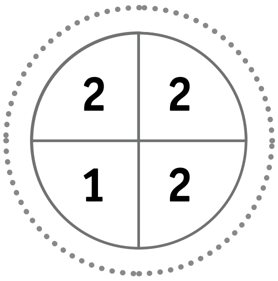
 ☐

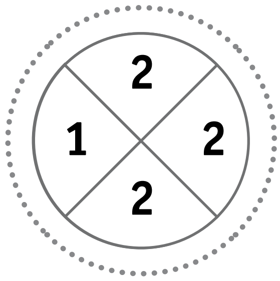
Kreuze an. Was meinst du:
a. Welches Glücksrad hat die größere Chance ein dunkles Feld zu erzielen?
b. Begründe deine Antwort.

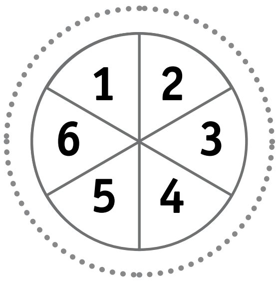
K 67 Glücksräder

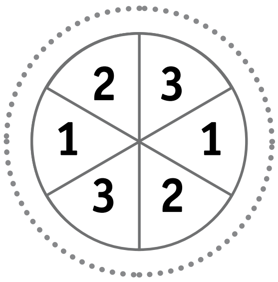
Zerschneide die Aufgabenkarten. Sortiere die Glücksräder.

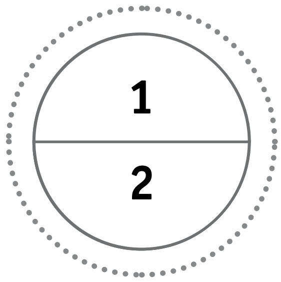
Bei welchen Rädern sind die Felder **gleichwahrscheinlich?**
Bei welchen Rädern sind die Felder **nicht gleichwahrscheinlich?**

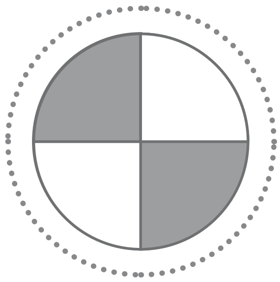
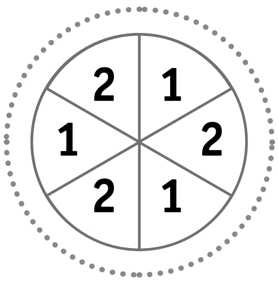




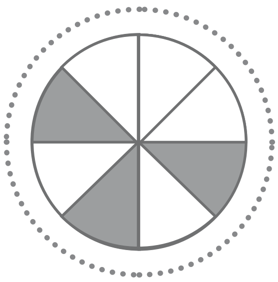
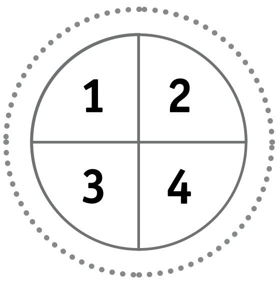


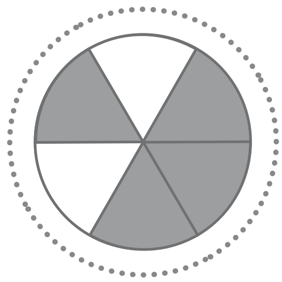
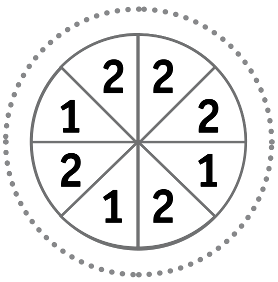


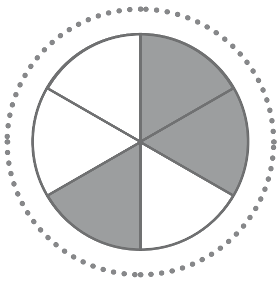
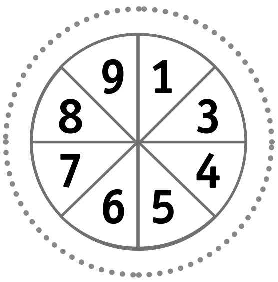


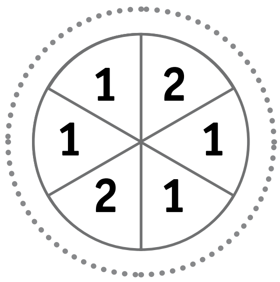


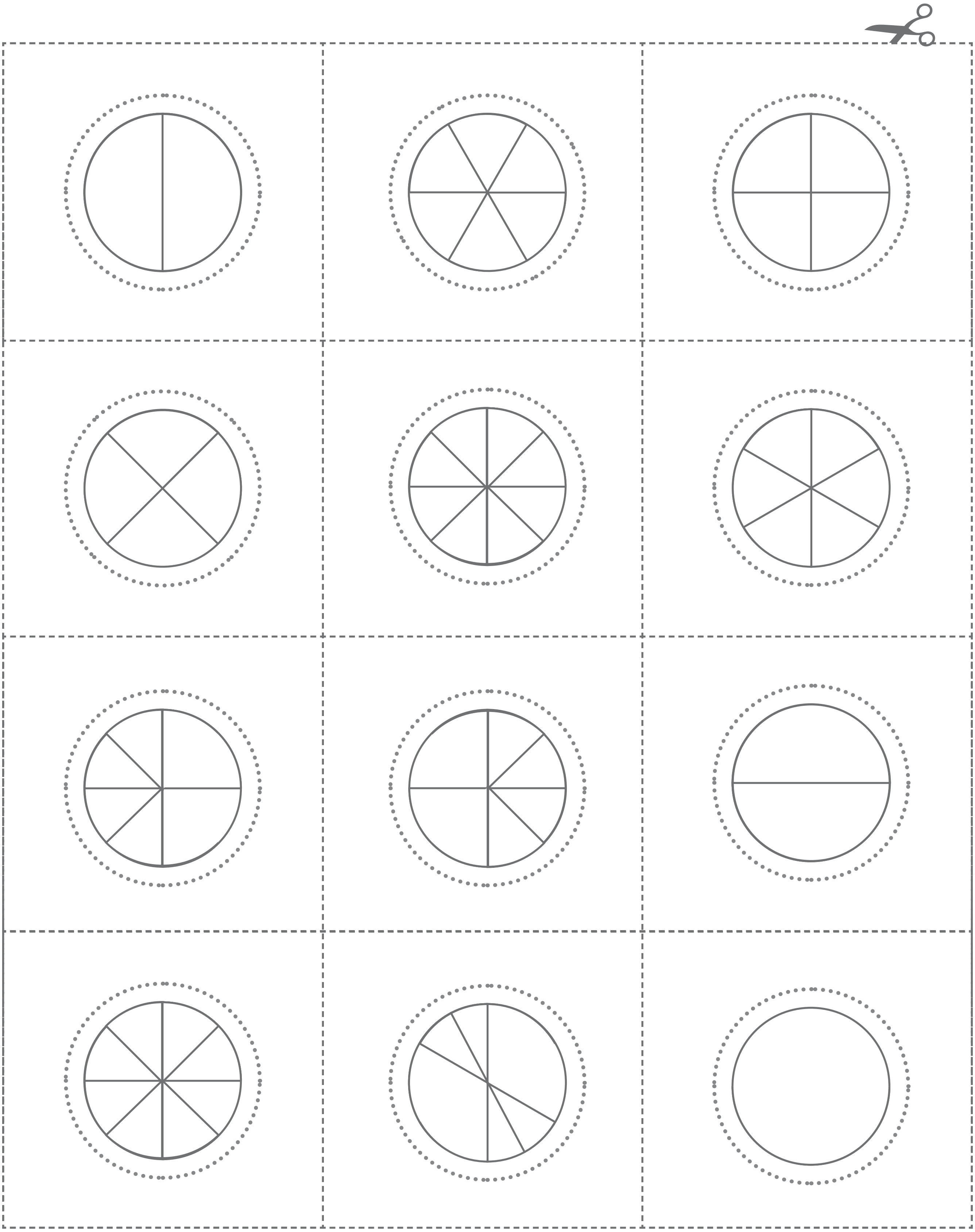





K 68 Glücksräder

Färbe die Glücksräder in zwei Farben ein,
so dass die Felder **gleichwahrscheinlich sind.**

Finde verschiedene Lösungen.

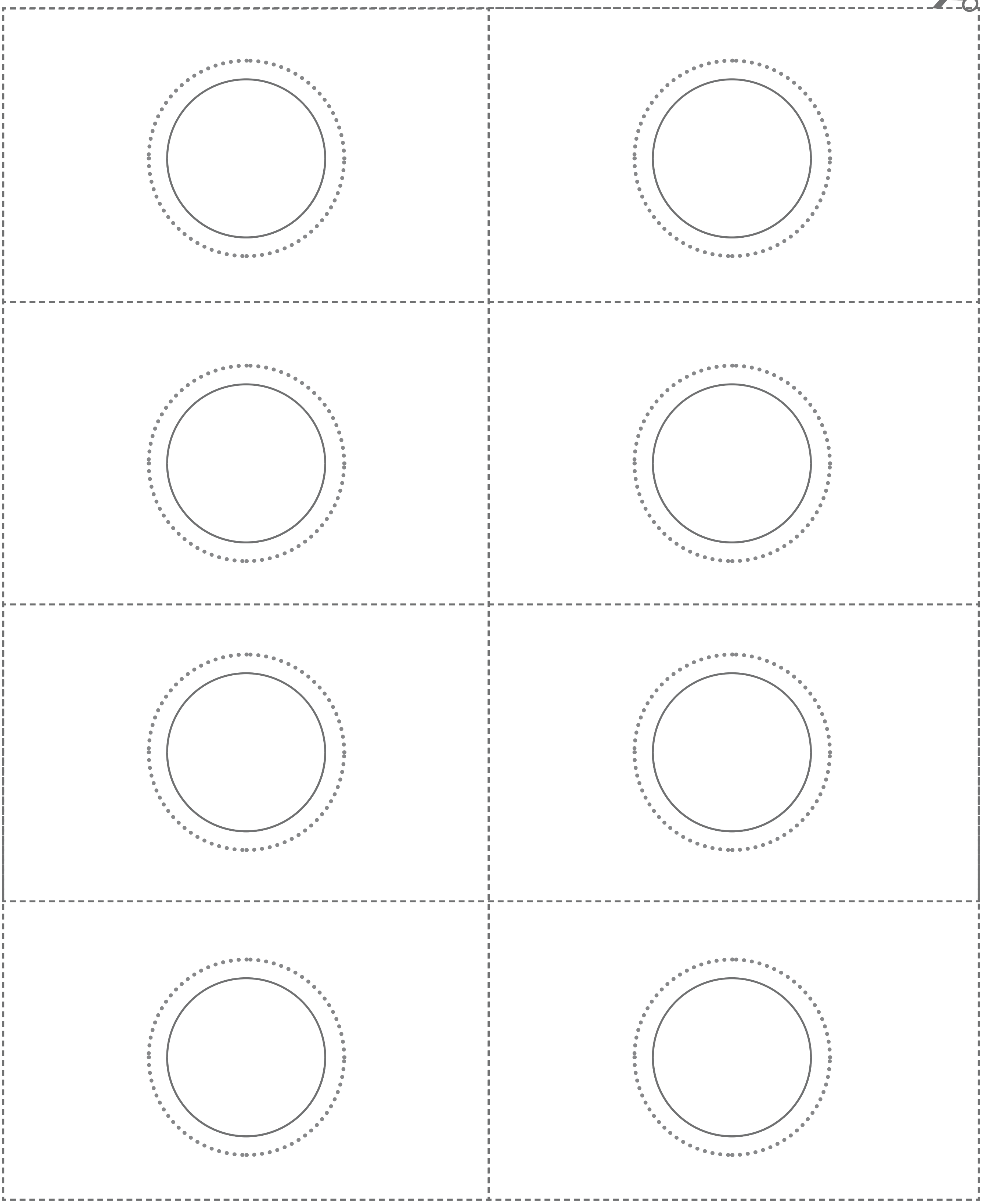


K 69 Glücksräder

Erfinde Glücksräder mit Zahlen (1-4) oder Farben (rot / blau),
die (**nicht) gleichwahrscheinlich** sind.

Beschreibe einem Mitschüler die Gewinnchancen.

nicht gleichwahrscheinlich **gleichwahrscheinlich**



5 Planungsinstrumente
5.1 Kompetenzraster

Wie kann das fachliche Lernen transparenter für Schüler/innen, Eltern und Lehrkräfte werden?

Wie baut die Fachdidaktik das mathematische Lernen auf?

Welche Kompetenzen fordert der Bildungsplan in den Anforderungen?

Wie kann das Lernen innerhalb der mathematischen Leitideen vernetzt und nach „oben“ geöffnet werden?

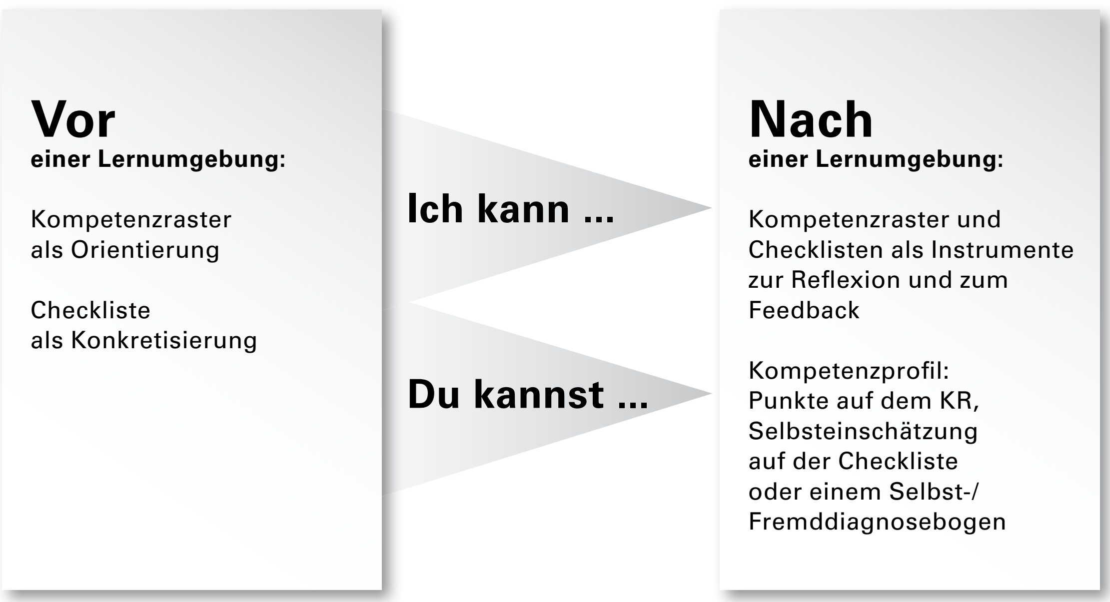
Was kann ich schon sicher und welche Kompetenzen muss ich noch ausbauen?

Wie kann ich, wie können wir gemeinsam den weiteren Lernweg planen?

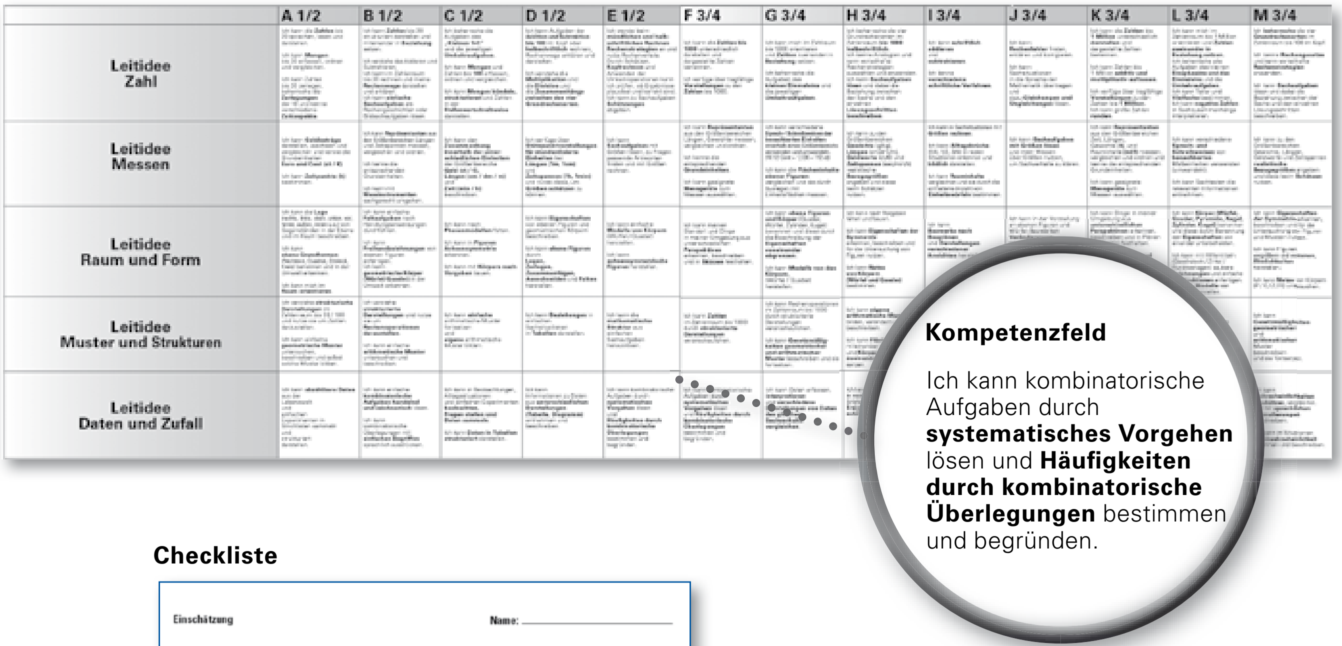
Ein Kompetenzraster ist für die Hand der Lehrkraft konzipiert, ein mögliches Planungsinstrument, welches das Lernen im individualisierten Unterricht ermöglicht. Es kann ein zentrales Element eines schulinternen Fachcurriculums sein und die Schnittstelle zwischen dem Bildungsplan einerseits und dem schulinternen Fachcurriculum anderseits bilden.

So kann ein Kompetenzraster einen wichtigen Beitrag zur Transparenz für Lehrkräfte, Schülerinnen und Schüler sowie Eltern, indem der fachliche Entwicklungshorizont – gelöst von Klassenstufen - verbindlich dargestellt wird. Die in den einzelnen Kompetenzfeldern beschriebenen Kompetenzen werden in Checklisten konkretisiert, sodass individuelle Kompetenzen mit diesen Referenzwerten in Beziehung gesetzt werden können.

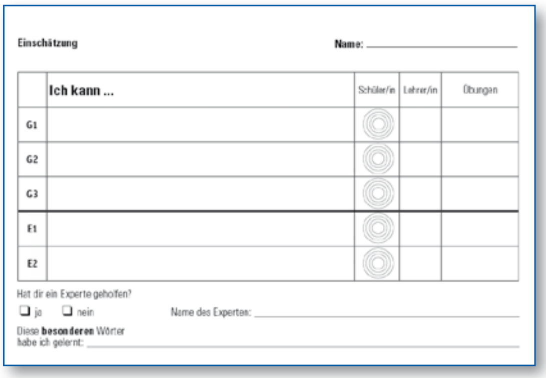
Das Instrument eines Kompetenzrasters fördert eine permanente Reflexion und ermöglicht ein systematisches Feedback. Lernende können bezogen auf die unterschiedlichen Kompetenzbereiche ein individuelles Kompetenzprofil selbst beschreiben und/oder erhalten.



Kompetenzraster Klasse 1-4



Checkliste



Einschätzung

Name:

	Ich kann ...	Schüler/in	Lehrer/in	Übungen
G1				
G2				
G3				
E1				
E2				

Hat dir ein Experte geholfen?

❑ ja ❑ nein Name des Experten:

Diese **besonderen** Wörter habe ich gelernt:

Lernmaterialien

		Ich kann...	Übungen	☺	?	☹
Daten & Zufall	*G1.*	**alle Zerlegungsmöglichkeiten der 5 mit Plättchen darstellen und benennen.**	Zb 1, 18			
	G2.	**die Summenregel am Sechserwürfel mit Zahlkombinationen beschreiben.**				
	G3.	**alle Zerlegungsmöglichkeiten der 10 mit Plättchen darstellen und benennen.**	*Zb 1, S. 35*			
	G4.	**Zweierkombinationen bildlich darstellen und beschreiben.**	*Zb 1, S.119*			
	G5.	**Dreierkombinationen bildlich darstellen und beschreiben.**	*Zb 1, S.119* *Mm 1, S.77*			
	G6.	**Daten zum Sechserwürfel-Experiment sammeln.**	*Mm 1, Ü2, S.102.1*			
	G7.	**Daten zum Sechserwürfel-Experiment darstellen und interpretieren.**	Zb 2, S.58/59			
	E1	die Gleichwahrscheinlichkeit am Beispiel der geraden und ungeraden Augenzahlen beim Wurf des Sechserwürfels begründen.	*Mm 1, Ü2, S.102.1*			
	E2	die Gleichwahrscheinlichkeit der Augenzahlen beim Wurf des Sechserwürfels beschreiben.	Zb 2, S.11			
	E3	Ich kann Häufigkeiten mit einfachen Begriffen ((un-) sicher, nie, immer, Chance, (un-)wahrscheinlich) beschreiben.				

Beispiel Checkliste Leitidee Daten / Zufall – B•1/2
Materialien und Arbeitsblätter:

Zb_Zahlenbuch 1_Klett Verlag
Mm_Mathematikus 1_Westermann Verlag

Weitere Quellen: www.schulcommsy.de (AG Kompetenzraster)

5.2 Selbst- und Fremdeinschätzungsbögen

Im Mathematikunterricht der Primarstufe werden neben Wochenplänen verschiedene „Lernbeweise“ bereits eingesetzt. Ein Beispiel wäre ein „Einmaleins-Pass“, in welchem die Kinder mit der Lehrkraft verabreden, was bis wann gelernt und beherrscht werden soll. Die Arbeit mit dem Kompetenzraster ermöglicht es, für jedes Kompetenzfeld einen „Lernbeweis“ zu beschreiben: über Checklisten erfahren die Kinder die Konkretisierung des Lernens über die Nennung der mathematischen Fertigkeiten und der Verabredung der einzusetzenden Lernmaterialien. Eine Checkliste muss von der Lehrkraft für die Lernklasse erstellt werden. Bedeutsam sind die kindgerechte Formulierung und die Reduzierung der Teilkompetenzen vor allem zum Start des Lernens mit dem Kompetenzraster. Zu Beginn sollten nur drei bis vier Kompetenzfelder in der Checkliste beschrieben sein. Mit zunehmender Lernerfahrung kann die Checkliste umfangreicher werden. Bei den angebotenen Beispiel-Checklisten sind Lehrkräfte aufgefordert, entsprechende Kompetenzfelder auszuwählen, überflüssige Felder zu löschen und /oder eigene Kompetenzbeschreibungen passend zu den eingesetzten Lernmaterialien der Schule zu ergänzen.
(Empfehlung: Anzahl der Kompetenzbeschreibungen= Jahrgang plus zwei)

Beim Versuch, individuelles Erarbeiten und Üben mathematischer Fertigkeiten für alle Schüler/innen zu gestalten, wird man natürlich auch auf Grenzen des individuellen Lernens stoßen. Nicht jedes Kind steigt sofort begeistert und erfolgreich in selbständige Lernprozesse ein und schafft es, sich selbst immer genau und kritisch einzuschätzen. Hier ist der Einsatz von Checklisten empfehlenswert, welche die Kombination von Selbst- und Fremdeinschätzung (Partner- oder Lehrkraft) einfordert. Im gemeinsamen Gespräch zum Bearbeitungsstand der Checkliste können die Einschätzungen der SuS mit der Lehrkraft –falls diese unterschiedlich sind – an Übungen verifiziert werden.

Das Lernen in der Primarstufe leistet mit der Hinführung zur Selbsteinschätzung des eigenen Lernstandes einen Beitrag den Umgang mit Kompetenzrastern zu erlernen. Manche Kinder werden motiviert, die Öffnung des Lernweges zu ergreifen, während andere Kinder noch angeleitet und enger betreut werden müssen. Genau hier liegt die Chance für die Gestaltung eines abwechslungsreichen, ansprechenden Mathematikunterrichts bereits von Anfang an. Der Wechsel zwischen Phasen des gemeinsamen als auch des individualisierten Lernens – auch mal in einführenden frontalen Phasen oder in einer Rechenkonferenz im Stuhlkreis – als auch das Lernen in Einzel- und Partnerarbeit - erfordert von der Lehrkraft ein stetiges Talent für Unterrichtsorganisation und ein hohes Maß an Fachkompetenz.

Wichtig aus Sicht der Schüler und Schülerinnen ist es, jederzeit zu wissen und mitentscheiden zu können, auf welches Lernziel mit welchem Lern- und Übungsmaterial gesteuert wird und wo die eigenen Schwächen und Stärken liegen. Der Umgang mit einer Checkliste mündet in einer Überprüfung (Test, Lernbeweis, Führerschein, Forscherdiplom, Arbeit,...) mit dem Ziel zu beweisen, wie erfolgreich das Lernen für das einzelne Kind war. Schriftliche Arbeiten müssen hier nicht in der Klassengemeinschaft gestellt werden, sondern können von Lerngruppen mit der Lehrkraft begleitend zum Lernprozess verabredet werden. Mit der Stärkung der Eigenverantwortung können bereits Kinder der Primarstufe eine prozesshafte Entwicklung hin zu selbstständigem Arbeiten erfahren.

Wie werden Checklisten entwickelt?

- Ich kann ...“-Formulierung
- Selbsteinschätzung: Kann ich...
  Ich bin mir nicht sicher, wir müssen darüber sprechen...
  Kann ich nicht...
- Voraussetzungen benennen
- schülergerechte Formulierungen
- Teilfähigkeiten formulieren (Bezug: KMK-Standards und der Hamburger Bildungsplan.)
- inhaltlich nicht zu umfangreich (Anzahl der Kompetenzen gleich Jahrgang plus zwei)
- verständlicher Aufbau der Kompetenzraster, der Checklisten und der Aufgaben
- Inhalt: alle Themen / Aufgaben, die bei der Überprüfung beherrscht werden sollen

K 70 Möglicher Einschub unter 5 Lernen im individualisierten Mathematikunterricht

	A 1/2	B 1/2	C 1/2	D 1/2	E 1/2
Leitidee Zahl	Ich kann die **Zahlen** bis 20 sprechen, lesen und darstellen. Ich kann **Mengen** bis 20 erfassen, ordnen und vergleichen. Ich kann Zahlen bis 20 zerlegen, beherrsche die **Zerlegungen** der 10 und kenne verschiedene **Zahlaspekte**.	Ich kann **Zahlen** bis 20 strukturiert darstellen und miteinander in **Beziehung** setzen. Ich verstehe das Addieren und Subtrahieren. Ich kann im Zahlenraum bis 20 rechnen und meine **Rechenwege** darstellen und erklären. Ich kann **einfache Sachaufgaben** als Rechengeschichten oder Bildsachaufgaben lösen.	Ich beherrsche die Aufgaben des **„Kleinen 1+1"** und die jeweiligen **Umkehraufgaben**. Ich kann **Mengen** und Zahlen bis **100** erfassen, ordnen und vergleichen. Ich kann **Mengen bündeln, strukturieren** und Zahlen in der **Stellenwertschreibweise** darstellen.	Ich kann Aufgaben der **Addition und Subtraktion bis 100** im Kopf oder **halbschriftlich** rechnen, Rechenwege erklären und darstellen. Ich verstehe die **Multiplikation** und die **Division** und die **Zusammenhänge zwischen den vier Grundrechenarten**.	Ich wende beim **mündlichen und halb-schriftlichen Rechnen Rechenstrategien** an und nutze Rechenvorteile. Durch Schätzen, **Kopfrechnen** und Anwenden der Umkehroperationen kann ich prüfen, ob Ergebnisse plausibel und korrekt sind. Ich kann zu Sachaufgaben **Schätzungen** abgeben.
Leitidee Messen	Ich kann **Geldbeträge** darstellen, wechseln und vergleichen und kenne die Grundeinheiten **Euro und Cent (ct / €)**. Ich kann **Zeitpunkte (h)** bestimmen.	Ich kann **Repräsentanten** aus den Größenbereichen Längen und Zeitspannen messen, vergleichen und ordnen. Ich kenne die entsprechenden Grundeinheiten. Ich kann mit **Messinstrumenten** sachgerecht umgehen.	Ich kann den **Zusammenhang innerhalb der unter-schiedlichen Einheiten** der Größenbereiche **Geld (ct / €), Längen (cm / dm / m)** und **Zeit (min / h)** beschreiben.	Ich verfüge über **Stützpunktvorstellungen für standardisierte Einheiten** bei **Längen (1m, 1cm)** und **Zeitspannen (1h, 1min)** und nutze diese, um **Größen schätzen** zu können.	Ich kann **Sachaufgaben** mit Größen lösen, zu Fragen passende Antworten finden und mit Größen rechnen.
Leitidee Raum und Form	Ich kann die **Lage** (rechts, links, oben, unten, vor, hinter, außen, innen u.a.) von Gegenständen in der Ebene und im Raum beschreiben. Ich kann **ebene Grundformen** (Rechteck, Quadrat, Dreieck, Kreis) benennen und in der Umwelt erkennen. Ich kann mich im **Raum orientieren**.	Ich kann einfache **Faltaufgaben** nach Handlungsanweisungen durchführen. Ich kann **Freihandzeichnungen** von ebenen Figuren anfertigen. Ich kann **geometrische Körper (Würfel/Quader)** in der Umwelt erkennen.	Ich kann nach **Phasenmodellen** falten. Ich kann in **Figuren Achsensymmetrie** erkennen. Ich kann mit **Körpern nach Vorgaben** bauen.	Ich kann **Eigenschaften** von ebenen Figuren und geometrischen Körpern beschreiben. Ich kann **ebene Figuren** durch **Legen, Zerlegen, Zusammenfügen, Ausschneiden** und **Falten** herstellen.	Ich kann einfache **Modelle von Körpern** (Würfel / Quader) herstellen. Ich kann **achsensymmetrische Figuren** herstellen.
Leitidee Muster und Strukturen	Ich verstehe **strukturierte Darstellungen** im Zahlenraum bis 20 / 100 und nutze sie um Zahlen darzustellen. Ich kann einfache **geometrische Muster** untersuchen, beschreiben und selbst solche Muster bilden.	Ich verstehe **strukturierte Darstellungen** und nutze sie um **Rechenoperationen darzustellen**. Ich kann einfache **arithmetische Muster** untersuchen und beschreiben.	Ich kann **einfache** arithmetische Muster fortsetzen und **eigene** arithmetische Muster bilden.	Ich kann **Beziehungen** in einfachen Sachsituationen in **Tabellen** darstellen.	Ich kann die **mathematische Struktur** aus einfachen Sachaufgaben herauslösen.
Leitidee Daten und Zufall	Ich kann **abzählbare Daten** aus der Lebenswelt und einfachen Experimenten in Strichlisten sammeln und strukturiert darstellen.	Ich kann einfache **kombinatorische Aufgaben handelnd und zeichnerisch** lösen. Ich kann kombinatorische Überlegungen mit **einfachen Begriffen** sprachlich ausdrücken.	Ich kann in Beobachtungen, Alltagssituationen und einfachen Experimenten **beobachten, Fragen stellen und Daten sammeln**. Ich kann **Daten in Tabellen strukturiert** darstellen.	Ich kann Informationen zu Daten aus **unterschiedlichen Darstellungen (Tabelle, Diagramm)** entnehmen und beschreiben.	Ich kann kombinatorische Aufgaben durch **systematisches Vorgehen** lösen und **Häufigkeiten durch kombinatorische Überlegungen** bestimmen und begründen.

Anschlusskante K 71

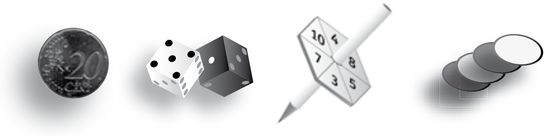
K 71 Möglicher Einschub unter 5 Lernen im individualisierten Mathematikunterricht

Anschlusskante K 70

F 3/4	G 3/4	H 3/4	I 3/4	J 3/4	K 3/4	L 3/4	M 3/4
Ich kann die **Zahlen bis 1000** unterschiedlich darstellen und dargestellte Zahlen benennen. Ich verfüge über tragfähige **Vorstellungen** zu den **Zahlen** bis 1000.	Ich kann mich im Zahlraum bis 1000 orientieren und **Zahlen** zueinander in **Beziehung** setzen. Ich beherrsche die Aufgaben des **kleinen Einmaleins** und die jeweiligen **Umkehraufgaben**.	Ich beherrsche die vier Grundrechenarten im Zahlenraum **bis 1000 halbschriftlich**. Ich kenne Analogien und kann vorteilhafte Rechenstrategien auswählen und anwenden. Ich kann **Sachaufgaben lösen** und dabei die Beziehung zwischen der Sache und den einzelnen **Lösungsschritten beschreiben**.	Ich kann **schriftlich addieren** und **subtrahieren**. Ich kenne **verschiedene schriftliche Verfahren**.	Ich kann **Rechenfehler** finden, erklären und korrigieren. Ich kann Sachsituationen in die Sprache der Mathematik übertragen und dazu **Gleichungen und Ungleichungen** lösen.	Ich kann die **Zahlen** bis **1 Million** unterschiedlich **darstellen** und dargestellte Zahlen benennen. Ich kann Zahlen bis 1 Million **additiv und multiplikativ aufbauen**. Ich verfüge über tragfähige **Vorstellungen** zu den Zahlen bis **1 Million**. Ich kann große Zahlen **runden**.	Ich kann mich im Zahlenraum bis 1 Million orientieren und **Zahlen zueinander in Beziehung setzen.** Ich beherrsche alle Aufgaben des kleinen **Einspluseins und des Einmaleins** und die **Umkehraufgaben**. Ich kann Teiler und **Vielfache** bestimmen. Ich kann **negative Zahlen** in Sachzusammenhänge interpretieren.	Ich **beherrsche** die vier **Grundrechenarten** im Zahlenraum bis 100 im Kopf. Ich kenne **Rechengesetze** und kann vorteilhafte **Rechenstrategien** anwenden. Ich kann **Sachaufgaben** lösen und dabei die Beziehung zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschreiben.
Ich kann **Repräsentanten** aus den Größenbereichen Längen, Gewichte messen, vergleichen und ordnen. Ich kenne die entsprechenden **Grundeinheiten**. Ich kann geeignete **Messgeräte** zum Messen auswählen.	Ich kann verschiedene **Sprech-/ Schreibweisen der benachbarten Einheiten** innerhalb eines Größenbereichs verwenden und umwandeln. (1€ 12 Cent = 1,12€ = 112 ct) Ich kann die **Flächeninhalte ebener Figuren** vergleichen und sie durch Auslegen mit Einheitsflächen messen.	Ich kann zu den Größenbereichen **Gewichte** (g/kg), **Längen** (cm/dm/m), **Geldwerte** (ct/€) und **Zeitspannen** (sec/min/h) realistische **Bezugsgrößen** angeben und diese beim Schätzen nutzen.	Ich kann in Sachsituationen mit **Größen rechnen**. Ich kann **Alltagsbrüche** (1/4, 1/2, 3/4) in realen Situationen erkennen und **bildlich** darstellen. Ich kann **Rauminhalte** vergleichen und sie durch die enthaltene Anzahl von **Einheitswürfeln** bestimmen.	Ich kann **Sachaufgaben mit Größen lösen** und mein Wissen über Größen nutzen, um Sachverhalte zu klären.	Ich kann **Repräsentanten** aus den Größenbereichen Zeit, Längen, Gewichte **(t)**, und Rauminhalte **(ml/l)** messen, vergleichen und ordnen und kenne die entsprechenden Grundeinheiten. Ich kann geeignete **Messgeräte** zum Messen auswählen.	Ich kann verschiedene **Sprech- und Schreibweisen** von **benachbarten** Maßeinheiten verwenden (umwandeln). Ich kann Sachtexten die relevanten Informationen entnehmen.	Ich kann zu den Größenbereichen Gewichte, Längen, Geldwerte und Zeitspannen **realistische Bezugsgrößen** angeben und diese beim **Schätzen** nutzen.
Ich kann meinen Standort und Dinge in meiner Umgebung aus unterschiedlichen **Perspektiven** erkennen, beschreiben und in **Skizzen** festhalten.	Ich kann **ebene Figuren und Körper** (Quader, Würfel, Zylinder, Kugel) benennen und diese durch die Beschreibung der **Eigenschaften voneinander abgrenzen**. Ich kann **Modelle von den Körpern**, (Würfel / Quader) herstellen.	Ich kann nach Vorgaben falten und bauen. Ich kann **Eigenschaften der Symmetrie** erkennen, beschreiben und für die Untersuchung von Figuren nutzen. Ich kann **Netze von Körpern (Würfel und Quader)** bestimmen.	Ich kann **Bauwerke nach Bauplänen** und **Darstellungen verschiedener Ansichten** herstellen.	Ich kann in der Vorstellung an ebenen Figuren und Würfel-Bauwerken **Veränderungen vornehmen und die Endform beschreiben** (Kopfgeometrie). Ich kann den **Faltwinkel** zur Identifizierung rechter Winkel in der Ebene und im Raum nutzen.	Ich kann Dinge in meiner Umgebung aus **unterschiedlichen Perspektiven** erkennen, beschreiben und in Plänen und Karten festhalten. Ich kann **parallele und senkrechte Linien** untersuchen und zeichnen. Ich kann geometrisch dargestellte **Bruchteile** vergleichen.	Ich kann **Körper (Würfel, Quader, Pyramide, Kegel, Zylinder, Kugel)** benennen und diese durch Benennung der **Eigenschaften** von einander unterscheiden. Ich kann mit Hilfsmitteln (Geodreieck / Zirkel / Punktvorlagen) saubere **Zeichnungen** und einfache **Konstruktionen** anfertigen. Ich kann **Modelle** von Körpern herstellen.	Ich kann **Eigenschaften der Symmetrie** erkennen, beschreiben und für die Untersuchung von Figuren und Mustern nutzen. Ich kann Figuren vergrößern und verkleinern, **Ähnlichkeiten** herstellen. Ich kann **Netze** von Körpern (P / K / Z / K) untersuchen.
Ich kann **Zahlen** im Zahlenraum bis 1000 durch **strukturierte Darstellungen** veranschaulichen.	Ich kann Rechenoperationen im Zahlenraum bis 1000 durch strukturierte Darstellungen veranschaulichen. Ich kann **Gesetzmäßig-keiten geometrischer und arithmetischer Muster** beschreiben und sie fortsetzen.	Ich kann **eigene arithmetische Muster** bilden, verändern und beschreiben. Ich kann **Flächenformen** miteinander vergleichen und **Körper** mit diesen **zueinander** in Beziehung setzen.	Ich kann **Zuordnungen in Tabellen** darstellen und diese untersuchen. Ich kann eine **gesetzmäßige Zuordnung** (z. B. von Menge und Preis) erkennen, benennen und diese mit eigenen Worten beschreiben.	Ich kann **Zuordnungen in Sachsituationen** beschreiben und entsprechende Aufgaben lösen. Ich kann einfache Aufgaben zur **Proportionalität** lösen.	Ich kann Zahlen im Zahlenraum bis 1 Million durch **strukturierte Darstellungen** veranschaulichen.	Ich kann **Rechenoperationen** im Zahlenraum bis 1 Million durch **strukturierte Darstellungen** veranschaulichen.	Ich kann **Gesetzmäßigkeiten geometrischer** und **arithmetischer** Muster beschreiben und sie fortsetzen.
Ich kann kombinatorische Aufgaben durch **systematisches Vorgehen** lösen und **Häufigkeiten durch kombinatorische Überlegungen** bestimmen und begründen.	Ich kann Daten erfassen, **interpretieren** und **verschiedene Darstellungen von Daten des gleichen Sachverhalts vergleichen**.	Ich kann in meinem eigenen Erfahrungsbereich **Ereignisse mit zufälligem Ausgang** finden.	Ich kann **Häufigkeiten mit einfachen Begriffen** (z. B. nie, selten, oft, immer) beschreiben.	Ich kann **Gewinnchancen** bei Spielen **einschätzen und begründen**.	Ich kann **Daten** aus der Lebenswelt und Experimenten in Tabellen und unterschiedlichen Schaubildern **sammeln und darstellen**. Ich kann **Stichproben** erheben und auswerten.	Ich kann **Häufigkeiten** von Ereignissen durch **kombinatorische Überlegungen** bestimmen. Ich kann einfache kombinatorische Aufgaben durch **systematisches Vorgehen** lösen.	Ich kann **Wahrscheinlichkeiten abschätzen**, vergleichen. und mit **sprachlichen Formulierungen** beschreiben. Ich kann in Situationen **Gleichwahrscheinlichkeit** erkennen und beschreiben.

K 72

Einschätzung



Name: ______________________

	Ich kann ...	Schüler/in	Lehrer/in	Übungen
G1				
G2				
G3				
E1				
E2				

Hat dir ein Experte geholfen?

❑ ja ❑ nein Name des Experten: ______________________

Diese **besonderen** Wörter
habe ich gelernt: ______________________

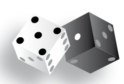
G = Grundanforderungen, E = Erweiterte Anforderungen

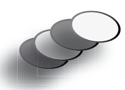
K 73

Einschätzung **Name:** ____________

Abzählbare Daten aus einfachen Experimenten sammeln und strukturiert darstellen.

	Ich kann ...	Schüler/in	Lehrer/in	Übungen
G1	Daten eines Münzexperimentes - einen Wurf mit einer Münze - darstellen.			
G2	Ereignisse eines „5er-Plättchenwerfen-Experimentes" darstellen.			
G3	Ereignisse eines „10er-Plättchenwerfen-Experimentes" darstellen.			
G4	mögliche Augensummen beim Wurf von zwei Sechserwürfeln darstellen.			
G5	„mein" Experiment in einer Tabelle darstellen und deuten.			
E1				
E2				





G = Grundanforderungen, E = Erweiterte Anforderungen

K 74

Einschätzung

Ein Experiment durchführen und die Daten in Tabellen darstellen.

Name: ______________________

	Ich kann ...	Schüler/in	Lehrer/in	Übungen
G1	zu Ereignissen im Würfelexperiment mit einem Sechserwürfel eine Strichliste oder eine Zahlentabelle anlegen.			
G2	Daten zu einem Schüttelkastenexperiment in einer Strichliste oder in einer Zahlentabelle abbilden.			
G3	Daten zum Münz-Experiment sammeln, darstellen und deuten.			
G4	die Häufigkeit von Augensummen mit zwei Sechserwürfeln bestimmen.			
E1				
E2				

Hat dir ein Experte geholfen?

❑ ja ❑ nein Name des Experten: ______________________

Diese **besonderen** Wörter habe ich gelernt: ______________________

G = Grundanforderungen, E = Erweiterte Anforderungen

K 75

Einschätzung

Kombinatorische Überlegungen darstellen und mit einfachen Begriffen sprachlich ausdrücken.

	Ich kann ...	Schüler/in	Lehrer/in	Übungen
G1	Zweierkombinationen bildlich darstellen und beschreiben.			
G2	Dreierkombinationen bildlich darstellen und beschreiben.			
G3	alle Zerlegungsmöglichkeiten der „5" mit Plättchen darstellen und benennen.			
G4	alle Zerlegungsmöglichkeiten der „10" mit Plättchen darstellen und benennen.			
G5	**alle** Kombinationen von zwei Würfelbildern darstellen und beschreiben.			
G6	kombinatorische Wechselspiele darstellen.			
E1				
E2				

G = Grundanforderungen, E = Erweiterte Anforderungen

K 76

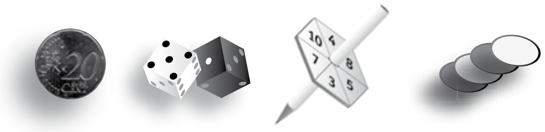
Einschätzung

Häufigkeiten von Ereignissen durch kombinatorische Überlegungen bestimmen und begründen.

	Ich kann ...	Schüler/in	Lehrer/in	Übungen
G1	in meiner Lebenswelt Situationen mit zufälligem / sicherem Ereignis nennen.			
G2	die Gleichwarscheinlichkeit der Augenzahlen beim Wurf des Sechserwürfels beschreiben.			
G3	die Summenregel am Sechserwürfel mit Zahlenkombinationen erklären.			
G4	Ereignisse mit Gleichwahrscheinlichkeit nennen.			
G5	hohe / geringe Häufigkeit von Augensummen beim Wurf von zwei Sechserwürfeln begründen.			
G6	Häufigkeiten mit einfachen Begriffen (un-)sicher, nie, immer, Chance, (un-)wahrscheinlich beschreiben.			
G7	eine faire Gewinnsituation von einer unfairen unterscheiden.			
E1				

G = Grundanforderungen, E = Erweiterte Anforderungen

K 77

Schüler-Checkliste  **Name:** ____________________

	Ich kann …	Zielscheibe	Übungen
G1			
G2			
G3			
E1			
E2			

Hat dir ein Experte geholfen?

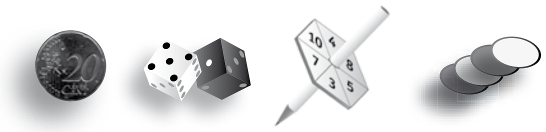
❑ ja ❑ nein Name des Experten: ____________________

Diese **besonderen** Wörter
habe ich gelernt: ____________________

G = Grundanforderungen, E = Erweiterte Anforderungen

K 78

Schüler-Checkliste



Name: ____________________

		Schüler: Ich kann...			**Lehrer/in:** Du kannst...			Übungen
		☺☺	**?**	☹☹	☺☺	**?**	☹☹	
G1								
G2								
G3								
G4								
E1								
E2								

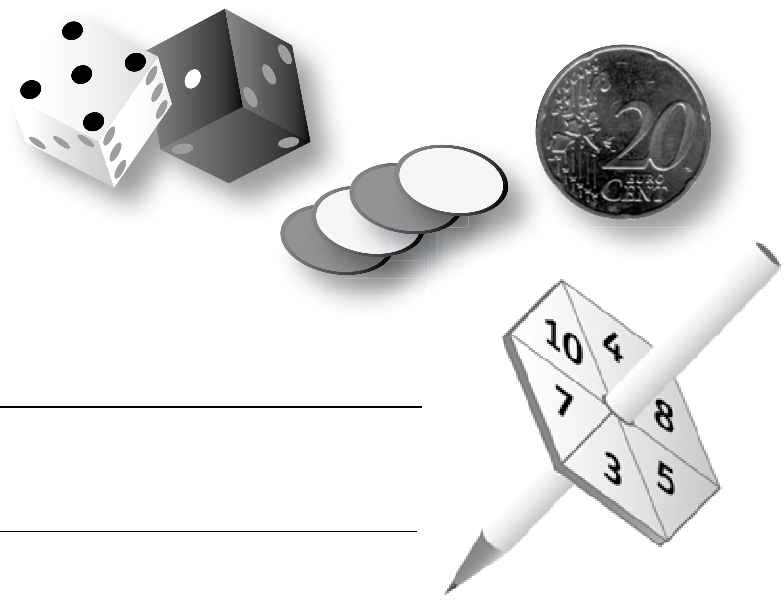
Hat dir ein Experte geholfen?

❑ ja ❑ nein Name des Experten: ____________________

Diese **besonderen** Wörter
habe ich gelernt: ____________________

G = Grundanforderungen, E = Erweiterte Anforderungen

K 79



Logbuch für Könner

Name ______________________________

Klasse ______________________________

	Ich kann ...	Zielscheibe	Übungen
G1		◎	
G2		◎	
G3		◎	
E1		◎	

Hat dir ein Experte geholfen? ❑ ja ❑ nein Name des Experten: ______________________________

Diese **besonderen** Wörter
habe ich gelernt: ______________________________

	Ich kann ...	Zielscheibe	Übungen
G1		◎	
G2		◎	
G3		◎	
E1		◎	

Hat dir ein Experte geholfen? ❑ ja ❑ nein Name des Experten: ______________________________

Diese **besonderen** Wörter
habe ich gelernt: ______________________________

	Ich kann ...	Zielscheibe	Übungen
G1			
G2			
G3			
E1			

Hat dir ein Experte geholfen? ☐ ja ☐ nein Name des Experten: ____________________

Diese **besonderen** Wörter
habe ich gelernt: ____________________

	Ich kann ...	Zielscheibe	Übungen
G1			
G2			
G3			
E1			

Hat dir ein Experte geholfen? ☐ ja ☐ nein Name des Experten: ____________________

Diese **besonderen** Wörter
habe ich gelernt: ____________________

	Ich kann ...	Zielscheibe	Übungen
G1			
G2			
G3			
E1			

Hat dir ein Experte geholfen? ☐ ja ☐ nein Name des Experten: ____________________

Diese **besonderen** Wörter
habe ich gelernt: ____________________

6 **Literatur** zur Vertiefung

Beck-Bornholdt, D.(1992): Der Hund, der Eier legt, Reinbek
Behring, Karin (2011): Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit. Kompetenzorientierte Aufgaben und Tests zur Stochastik. 2.-4. Klasse. Persen Verlag
Bettner, Marco / Dinges, Erik (2011): Stochastik an Stationen. Rechnen mit Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeit Klasse 1 und 2 (3 und 4). Auer Verlag.
Eisenreich, A. / Olbrich, P. (2005): Bildungsstandards für die Grundschule Mathematik 4, Auer Verlag, Donauwörth
Engel,A. / Varga,T. / Walser,W. (1974): Zufall oder Strategie? Spiele zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der Primarstufe, Stuttgart: Klett
Grassmann, M.(1999): Zur Entwicklung von Zahl- und Größenvorstellung als wichtigstem Anliegen des Sachrechnens. In: Grundschulunterricht. H.4, S.31-34
Holubek, I. (1996): Heranführen von Grundschulkindern an stochastische Denk- und Arbeitsweisen, sowie deren weitere Entwicklung in der Sekundarstufe 1, unveröffentlichte Examensarbeit, Potsdam
Hornschuh, Hermann-Dietrich / Sewerin, Horst (2010): PISA-Training. Denkaufgaben zur Stochastik für Klasse 3 und 4. Mildenberger Verlag. Zusatz: Lösungsband)
Käpnick, F. u. a.(2005): Das Mathehaus , Kl. 1-4, Cornelsen Verlag
Käpnick, F. u. a.(2001): Rechenwege, Mathematikbuch Kl.4, Volk und Wissen Verlag. Berlin
Kelnberger, m (2009): Stochastik in der Grundschule. 3./4. Jg. pb-Verlag Puchheim
Klunter, Martina / Raudies, Monika / Veith, Ute (2010): Daten, Zufalle und Wahrscheinlichkeit. Unterrichtsideen zum Beobachten und Kombinieren für die Klassen 1 und 2. Westermann Verlag.
Krauthausen,Günter / Scherer, Petra (2001): Einführung in die Mathematikdidaktik. Spektrum Akademischer Verlag.
Krämer, W. (1996): Denkste. Trugschlüsse aus der Welt des Zufalls und der Zahlen. Frankfurt/Main
Lorenz, J.H. (2011): mathe: pro. Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit. Box 1-4. Westermann Verlag **Kütting, H. (1999):** Elementare Stochastik, Heidelberg
Lorenz, J.H. (2006): Mathematik; Kallmeyer Verlag
Lorenz, J.H. (2007): Knobelbox 1/2 (3/4) Mathematik; Westermann Verlag
Müller, G. / Wittmann, E. u. a.(1996): Das Zahlenbuch. Mathematik im 1.-4. Schj., Ernst Klett Grundschulverlag, S.16, Leipzig
Müller, G. / Wittmann, E. u. a.(2007): Das Kleine Zahlenbuch. Probieren und Kombinieren, Ernst Klett Grundschulverlag, Leipzig
Neubert, B.(1998): Kombinatorische Aufgabenstellungen in der Grundschule, Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 479-482
Neubert, B. (1998): Grundschulkinder lösen kombinatorische Aufgabenstellungen, Grundschulunterricht, Heft 9, S. 17-19
Radatz, H.; Rickmeyer, K. (1996): Aufgaben zur Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule, Hannover, Schroedel
Radatz, H. / Schipper, W. / Dröge, R./ Ebeling, A. (1999/2000): Handbuch für den Mathematikunterricht, 3./4. Schuljahr, Hannover
Schipper, Wilhelm (2009): Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Schroedel Verlag.
Warmuth,E. / Warmuth, W.(1998): Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung: vom Umgang mit dem Zufall
Walther, G. (2007): Bildungsstandards Mathematik Grundschule, Cornelsen Verlag
Wollring, B. (1993): Spielinterviews zur Erkundung stochastischer Vorstellungen bei Kindern im Vor- und Grundschulalter. In: Lorenz, J.-H. (Hrsg.) Mathematik und Anschauung (IDM-Reihe, Band 18), S. 67-91, Köln
Grundschulzeitschrift 172(2004): Thema Statistik
Grundschulunterricht 02 (2008): Mathematik – Daten – Zufall und Wahrscheinlichkeit – Kombinatorik, Oldenbourg Verlag

7 **Links** im worldwideweb

Vorlesungsfolien Mathematik für die Grundschule des Instituts für Didaktik der Mathematik von **Dr. Bernd Neubert**, download als word oder powerpoint möglich.
www.uni-giessen.de/math-didaktik/math_grundsch2/download.htm#folien
www.uni-giessen.de/math-didaktik/gdm_grundschule/publikationen.htm

Zeitschrift „Stochastik in der Schule“
www.uni-klu.ac.at./stochastik.schule/wir.htm

Didaktik der Stochastik - Stochastik in der Grundschule
www.learn-line.nrw.de/angebote/selma/foye.../Stochastik_in_der_Primarstufe_02.hat
mit Unterrichtsbeispielen

Zur Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung
www.gluecksspielschule.de/wahrsscheinlichkeitsrechnung/

S. Hilger: Skript zur Vorlesung „Mathematik in der Grundschule 2“
http:/mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/didphy/skripten/mgs2.pdf
u.a. Kapitel zum Thema Topologie (Das Vier-Farben-Problem, Unikursale Graphen, Das Königsberger Brückenproblem sowie andere Beispiele und Ideen.)

Alexander’s Welt der Wahrscheinlichkeiten
www.geocities.com/SoHo/Study/4544/

Würfelwege zum Ziel
www.techfak.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/kap_6/illustr/g6_3_1.html

Denk-Defizite bei Statistik und Wahrscheinlichkeiten, u.a. das Ziegenproblem
www.methode.de/mi/dmmi001.htm

Wachsende Modulsammlung zur Mathematik, z.B. Kombinatorik und Knobeln
(Wem gehört der gründe Ballon?)
www.matheprisma.uni-wuppertal.de

Stochastik in der Primarstufe
www.learn-line.nrw.de/angebote/selma/foyer/projekte/hennproj/henn2/Stochastik_in_der_Primarstufe_02.htm

Lehrproben, auch zum Thema Stochastik in der Grundschule
www.lehrproben.de/lehrproben/default_ie.asp

Unterrichtsentwürfe **www.unterrichtsmaterial-grundschule.de/mathe3.html**

www.oesi.de/mediennutzung/klasse2/kombinatorikwmann.doc

Systematisches Zählen und stochastisches Denken in der Grundschule,
Notizen zu einer Fortbildungsveranstaltung.
(Darstellung des Themas Stochastik in der Grundschule!)
www.uni-bayreuth.de/xist4c/download/web/Stochastik_GS_uplId_5930_coId_86_.pdf

www.compigs.de/grundschuldatenbank/zahlen_grundschule.htm

Zentrale für Unterrichtsmedien im Internet e.V. **www.zum.de**

Hamburg

Behörde für Schule und Berufsbildung ■ www.hamburg.de/bildungsplaene/