

Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung

Schriftliche Abiturprüfung

Mathematik

Beispielaufgaben

Heft B

Impressum

Herausgeber: Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung
Hamburger Straße 31, 22083 Hamburg

Referat: Mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Unterricht
Referatsleitung: Monika Seiffert
Fachreferentin Mathematik: Xenia Rendtel
Redaktion: Xenia Rendtel
Andreas Busse
Manfred Bergunde

Diese Veröffentlichung beinhaltet Teile von Werken, die nach ihrer Beschaffenheit nur für den Unterrichtsgebrauch in Hamburger Schulen sowie für Aus- und Weiterbildung am Hamburger Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung bestimmt sind.

Eine öffentliche Zugänglichmachung dieses für den Unterricht an Hamburger Schulen bestimmten Werkes ist nur mit Einwilligung der Behörde für Schule und Berufsbildung zulässig.

Internet: <http://www.li.hamburg.de/publikationen/abiturpruefung/>

Hamburg, am 26. Juli 2017

Inhaltsverzeichnis

I Aufgaben	6
1 Übungsaufgaben für das erste Lernjahr der Studienstufe	6
1.1 Analysis	6
1.1.1 Grundlegendes Anforderungsniveau	6
1.1.2 Erhöhtes Anforderungsniveau	10
1.2 Analytische Geometrie	14
1.2.1 Grundlegendes Anforderungsniveau	14
1.2.2 Erhöhtes Anforderungsniveau	16
1.3 Stochastik	18
1.3.1 Grundlegendes Anforderungsniveau	18
1.3.2 Erhöhtes Anforderungsniveau	21
2 Analysis	24
2.1 Grundlegendes Anforderungsniveau	24
2.2 Erhöhtes Anforderungsniveau	39
3 Analytische Geometrie	56
3.1 Grundlegendes Anforderungsniveau	56
3.2 Erhöhtes Anforderungsniveau	64
4 Lineare Algebra	74
4.1 Grundlegendes Anforderungsniveau	74
4.2 Erhöhtes Anforderungsniveau	81
5 Stochastik	87
5.1 Grundlegendes Anforderungsniveau	87
5.2 Erhöhtes Anforderungsniveau	98

II Erwartungshorizonte	113
1 Übungsaufgaben für das erste Lernjahr der Studienstufe	113
1.1 Analysis	113
1.1.1 Grundlegendes Anforderungsniveau	113
1.1.2 Erhöhtes Anforderungsniveau	118
1.2 Analytische Geometrie	125
1.2.1 Grundlegendes Anforderungsniveau	125
1.2.2 Erhöhtes Anforderungsniveau	128
1.3 Stochastik	133
1.3.1 Grundlegendes Anforderungsniveau	133
1.3.2 Erhöhtes Anforderungsniveau	135
2 Analysis	137
2.1 Grundlegendes Anforderungsniveau	137
2.2 Erhöhtes Anforderungsniveau	155
3 Analytische Geometrie	177
3.1 Grundlegendes Anforderungsniveau	177
3.2 Erhöhtes Anforderungsniveau	189
4 Lineare Algebra	202
4.1 Grundlegendes Anforderungsniveau	202
4.2 Erhöhtes Anforderungsniveau	208
5 Stochastik	215
5.1 Grundlegendes Anforderungsniveau	215
5.2 Erhöhtes Anforderungsniveau	222
A Anhang	234
A.1 Liste der Operatoren	234
A.2 Mathematische Schreibweisen	236
A.3 Aufgabenverzeichnis	240

Liebe Kolleginnen und Kollegen,
liebe Schülerinnen und Schüler,

die schriftlichen Abiturprüfungen im Fach Mathematik ab 2018 beziehen sich – wie im Jahr 2017 – auf die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife von 2012 und die zur Orientierung durch das IQB veröffentlichte Aufgabensammlung. Zur Implementation der Bildungsstandards Mathematik wurde in Hamburg der Rahmenplan Mathematik gymnasiale Oberstufe durch eine Anlage konkretisiert, die im Sommer 2015 veröffentlicht und im Frühjahr 2016 aktualisiert wurde¹. Diese Anlage ist verbindliche Grundlage des Unterrichts und der Abiturprüfung.

Neu ab 2018 ist, dass die Schulen kursweise entscheiden können, ob Lineare Algebra oder Analytische Geometrie als Schwerpunkt der Prüfung gewählt werden soll.

Zur Vorbereitung auf die Abiturprüfungen ab 2018 werden zwei neu zusammengestellte Hefte mit Beispielaufgaben zur Verfügung gestellt:

Heft A: Beispielaufgaben für den Prüfungsteil A (hilfsmittelfrei)

Heft B: Beispielaufgaben für den Prüfungsteil B (mit WTR oder CAS)

Das hier vorliegende Heft B enthält Aufgaben zu allen drei mathematischen Sachgebieten, im Bereich Lineare Algebra/Analytische Geometrie zu beiden Schwerpunkten. Nicht alle Aufgaben stehen in unterschiedlichen Varianten für die Bearbeitung mit wissenschaftlichen Taschenrechnern (WTR) und mit Computeralgebrasystemen (CAS) zur Verfügung.

Unabhängig davon, ob die Abiturprüfung mit WTR oder mit CAS abgelegt wird, sollten die Schülerinnen und Schüler zur Vorbereitung auf die Prüfung alle Aufgaben bearbeiten, da die Arbeit mit Computeralgebrasystemen im Unterricht für alle Kurse verbindlich ist.

Schülerinnen und Schüler, die auf erhöhtem Anforderungsniveau arbeiten, sollten auch die Aufgaben bearbeiten, die für das grundlegende Anforderungsniveau erstellt wurden.

Dies gilt auch umgekehrt – mit Ausnahme weniger Teilaufgaben, die sich explizit auf Inhalte beziehen, die für das grundlegende Anforderungsniveau nicht gefordert sind.

Darüber hinaus werden in Kapitel 1 Übungsaufgaben für das erste Jahr der Studienstufe zur Verfügung gestellt, die aus der zentralen Klausur unter Abiturbedingungen vom 13.12.2016 stammen.

Zur Unterstützung der Prüfungsvorbereitung steht weiterhin die Aufgabensammlung Mathematik des IQB zur Verfügung unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik>.

Dieses und weiteres Material finden Sie auch auf der Website des IfBQ².

Wir hoffen, Ihnen mit dieser Publikation eine geeignete Unterstützung für eine gezielte Vorbereitung der schriftlichen Abiturprüfung geben zu können.



Thorsten Altenburg-Hack, Landesschulrat

¹siehe <http://www.hamburg.de/bildungsplaene/4539524/start-gyo/>

²siehe <http://www.hamburg.de/abitur-2018/4883428/mathematik/>

I Aufgaben

1 Übungsaufgaben für das erste Lernjahr der Studienstufe

1.1 Analysis

1.1.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

Aufgabe 1: Werbeaktion

EH S. 113

1.1 WTR-Fassung

1. Ein Getränkehersteller möchte eine Werbeaktion für seine Limonade starten. Er hofft dadurch die verkaufte Menge kurzfristig deutlich zu steigern und zugleich seinen Marktanteil so zu erhöhen, dass er langfristig auf höherem Niveau bleibt. Die mögliche Entwicklung des Verkaufs soll durch die sogenannte „Verkaufsrate“ modellhaft beschrieben werden: Die Verkaufsrate f (in Millionen Liter pro Monat) ist die lokale Änderungsrate einer Funktion F . Dabei ist F die gesamte Menge der seit Jahresbeginn verkauften Limonade in Abhängigkeit von der Zeit t (in Monaten). Der Marketing-Leiter fertigt eine Handskizze von der gewünschten Entwicklung der Verkaufsrate an (siehe Abbildung 1).

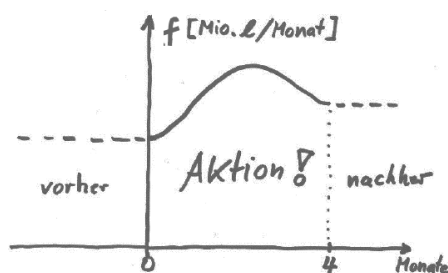


Abb. 1

Eine durch eine Modellfunktion präzisierte Darstellung ist in der Anlage zu sehen (siehe Abbildung 2 in der Anlage). Ihr liegt im Bereich $0 \leq t \leq 4$ die folgende Modellierung zugrunde:

$$f(t) = 0,15t^4 - 1,25t^3 + 2,7t^2 + 4,8$$

Für $t < 0$ gibt der konstante Wert 4,8 die Verkaufsrate vor dem Beginn der Marketingaktion wieder.

Für $t > 4$ ist der konstante Wert 6,4 die für die Zeit nach der Werbeaktion angenommene höhere Verkaufsrate.

- a) **Beschreiben** Sie den Verlauf des Graphen in Abbildung 2 in der Anlage im Sachkontext. (4 BE)

- b) **Bestätigen** Sie, dass sich die Verkaufsrate in der oben angegebenen Modellierung zu Beginn und zu Ende der Aktion nicht sprunghaft ändert. (2 BE)

- c) Ungefähr in der Mitte des Aktionszeitraums gibt es eine höchste erwartete Verkaufsrate.
Bestimmen Sie diese. (5 BE)
- d) **Deuten** Sie die Gleichung $\frac{f(t)-f(1)}{t-1} = \frac{1}{2}$ für $1 < t < 4$ im Sachkontext.
Ermitteln Sie aus der graphischen Darstellung in der Anlage die Lösung der Gleichung. (4 BE)
- e) Je stärker die Verkaufsrate zunimmt, desto höher ist der Organisationsaufwand in der Logistikabteilung.
Geben Sie aufgrund der graphischen Darstellung in der Anlage ungefähr denjenigen Zeitpunkt **an**, zu dem die lokale Steigung von f maximal ist.
Geben Sie eine notwendige Bedingung als Gleichung **an**, aus der sich dieser Zeitpunkt berechnen ließe. (2 BE)
- f) **Berechnen** Sie, wie viel Limonade nach diesem Modell während der Laufzeit der Werbeaktion voraussichtlich mehr verkauft wird, als in diesem Zeitraum zu erwarten gewesen wäre, wenn die Verkaufsrate weiterhin konstant 4,8 Mio. Liter / Monat geblieben wäre. (5 BE)
2. Aufgrund der erwarteten höheren Verkaufsraten muss die Produktionsrate rechtzeitig erhöht werden, sodass die erwarteten Verkäufe auch realisiert werden können. Zurzeit werden 4,8 Mio. Liter pro Monat produziert. Die Produktionsrate soll ab einem geeigneten Zeitpunkt t_0 , der vor dem Beginn der Werbeaktion liegt, schlagartig auf 6,4 Mio. Liter pro Monat erhöht werden, sodass auch während des Aktionszeitraums genügend Limonade zum Verkauf bereit steht.
Erläutern Sie, dass t_0 die Lösung der Gleichung $(4 - t_0) \cdot 6,4 = -t_0 \cdot 4,8 + \int_0^4 f(t) dt$ ist. (4 BE)
3. Bei der Entwicklung der Modellfunktion f im Bereich $0 \leq t \leq 4$ wurde von verschiedenen Bedingungen ausgegangen. Teilweise abweichend von diesen Bedingungen werden nun die folgenden Bedingungen neu aufgestellt:
- (1) Der Graph hat an den Stellen $t = 0$, $t = 2,5$ und $t = 4$ jeweils eine waagerechte Tangente.
 - (2) Der Funktionswert an der Stelle $t = 0$ ist 4,8.
- Nach wie vor soll die Verkaufsrate durch eine ganzrationale Funktion vierten Grades modelliert werden.
Die neuen Bedingungen werden erfüllt durch parameterabhängige Funktionen w_a mit
- $$w_a(t) = a \cdot (3t^4 - 26t^3 + 60t^2) + 4,8 \quad (0 \leq t \leq 4).$$
- Es gilt: $w_a(4) = 64a + 4,8$
- a) **Beschreiben** Sie die Modellierungsbedingungen (1) und (2) durch Gleichungen. (2 BE)
- b) **Begründen** Sie, dass keine der Funktionen w_a mit der zuvor benutzten Modellfunktion f übereinstimmt. (2 BE)

- c) **Deuten** Sie den Fall $a = 0$ im Sachkontext. (2 BE)
- d) **Bestimmen** Sie den Parameter a so, dass die Verkaufsrate während des Aktionszeitraums durchschnittlich je Monat um 0,5 Mio. Liter / Monat steigt. (2 BE)
- e) Die Geschäftsleitung erwartet, dass die Werbeaktion eine langfristige Anhebung der Verkaufsrate auf mindestens 5,6 Mio. Liter / Monat bewirkt. Da die Kosten für die Werbung in Grenzen bleiben sollen und die Möglichkeiten, den Marktanteil zu vergrößern, begrenzt sind, erwartet die Geschäftsleitung keine Anhebung der Verkaufsrate auf mehr als 8,0 Mio. Liter / Monat.
Die Bedingung $5,6 \leq w_a(4) \leq 8,0$ hat Folgen für die möglichen Extremwerte an der Stelle $t = 2,5$.
Bestimmen Sie die aufgrund der Bedingung möglichen Extremwerte an der Stelle $t = 2,5$. (6 BE)

Anlage zur Aufgabe „Werbeaktion“

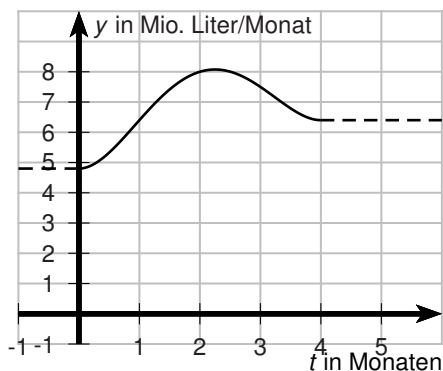


Abb. 2: Entwicklung der Verkaufsrate.

1.2 CAS-Fassung

Die CAS Aufgabe Werbeaktion ist eine Modifikation der Aufgabe Werbeaktion für WTR (siehe Seite 6). Die hier fehlenden Vortexte sind identisch.

1. Die Aufgabenteile a) - c) sind identisch zur WTR-Fassung.

- d) **Interpretieren** Sie die Bedeutung des Terms $f(4) - f(0)$ für den Zeitraum nach der Werbeaktion im Sachkontext. (2 BE)

- e) **Deuten** Sie die Gleichung $\frac{f(t)-f(0)}{t} = 1,2$ für $0 < t < 4$ im Sachkontext.
Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung und veranschaulichen Sie Ihre Deutung in der graphischen Darstellung in der Anlage. **(4 BE)**
- f) Identisch zur WTR-Fassung Aufgabenteil 1. f). **(3 BE)**
2. Identisch zur WTR-Fassung Aufgabenteil 2. **(4 BE)**
3. Die Aufgabenteile **a) - c)** sind identisch zur WTR-Fassung.
- d) **Beurteilen** Sie auf der Grundlage des Terms von f_p , ob die Modellfunktion für $1,5 < p < 2$ für eine realistische Modellierung einer gelungenen Werbeaktion geeignet ist. **(4 BE)**
- e) Identisch zur WTR-Fassung Aufgabenteil 3. d). **(2 BE)**
- f) Der Graph der Funktion f_p zeigt keinerlei Symmetrie. Es lässt sich aber zeigen, dass ganzrationale Funktionen vierten Grades mit den Extremstellen $x = 0$, $x = q$ und $x = -q$ ($q \neq 0$) einen zur y -Achse symmetrischen Graphen haben.
Zeigen Sie dieses. **(6 BE)**

1.1.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

Aufgabe 2: Werbeaktion

EH S. 118

2.1 WTR-Fassung

1. Ein Getränkehersteller möchte eine Werbeaktion für seine Limonade starten. Er hofft dadurch die verkaufte Menge kurzfristig deutlich zu steigern und zugleich seinen Marktanteil so zu erhöhen, dass er langfristig auf höherem Niveau bleibt. Die mögliche Entwicklung des Verkaufs soll durch die sogenannte „Verkaufsrate“ modellhaft beschrieben werden: Die Verkaufsrate f (in Millionen Liter pro Monat) ist die lokale Änderungsrate einer Funktion F . Dabei ist F die gesamte Menge der seit Jahresbeginn verkauften Limonade in Abhängigkeit von der Zeit t (in Monaten). Der Marketing-Leiter fertigt eine Handskizze von der gewünschten Entwicklung der Verkaufsrate an (siehe Abbildung 3).

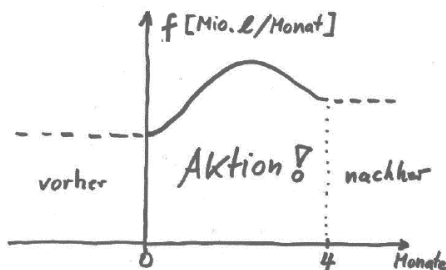


Abb. 3

Eine durch eine Modellfunktion präzierte Darstellung ist in der Anlage zu sehen (siehe Abbildung 4 in der Anlage). Ihr liegt im Bereich $0 \leq t \leq 4$ die folgende Modellierung zugrunde:

$$f(t) = 0,15t^4 - 1,25t^3 + 2,7t^2 + 4,8$$

Für $t < 0$ gibt der konstante Wert 4,8 die Verkaufsrate vor dem Beginn der Marketingaktion wieder.

Für $t > 4$ ist der konstante Wert 6,4 die für die Zeit nach der Werbeaktion angenommene höhere Verkaufsrate.

- a) **Beschreiben** Sie den Verlauf des Graphen in Abbildung 4 in der Anlage im Sachkontext. **(4 BE)**
- b) **Bestätigen** Sie, dass sich die Verkaufsrate in der oben angegebenen Modellierung zu Beginn und zu Ende der Aktion nicht sprunghaft ändert. **(2 BE)**
- c) Ungefähr in der Mitte des Aktionszeitraums gibt es eine höchste erwartete Verkaufsrate. **Bestimmen** Sie diese. **(5 BE)**
- d) **Deuten** Sie die Gleichung $\frac{f(t)-f(0)}{t} = 1,2$ für $0 < t < 4$ im Sachkontext. **Ermitteln** Sie aus der graphischen Darstellung in der Anlage die Lösungen der Gleichung. **(6 BE)**

- e) Je stärker die Verkaufsrate zunimmt, desto höher ist der Organisationsaufwand in der Logistikabteilung.

Ermitteln Sie aus der graphischen Darstellung die maximale lokale Änderungsrate von f .

Beschreiben Sie, wie diese ansonsten exakt zu berechnen wäre, wenn die graphische Lösung wegen Ungenauigkeit nicht in Frage kommen würde.

Hinweis: Geben Sie die maximale lokale Änderungsrate ohne Maßeinheit an. (6 BE)

2. Aufgrund der erwarteten höheren Verkaufsraten muss auch die Produktionsrate rechtzeitig erhöht werden, sodass die erwarteten Verkäufe realisiert werden können. Zurzeit beträgt die Produktionsrate 4,8 Mio. Liter pro Monat. Die Produktionsrate soll ab einem geeigneten Zeitpunkt t_0 , der vor dem Beginn der Werbeaktion liegt, schlagartig auf 6,4 Mio. Liter pro Monat erhöht werden, sodass auch während des Aktionszeitraums genügend Limonade zum Verkauf bereit steht.

Erläutern Sie, wie der spätest mögliche Zeitpunkt t_0 berechnet werden kann. (4 BE)

3. Bei der Entwicklung der Modellfunktion f im Bereich $0 \leq t \leq 4$ als ganzrationale Funktion vierten Grades wurde von folgenden Bedingungen ausgegangen:

(1) Der Graph hat an den Stellen $t = 0$ und $t = 4$ sowie an einer Stelle $t = p$ mit $0 < p < 4$ jeweils eine waagerechte Tangente.

(2) $f(0) = 4,8$ und $f(4) = 6,4$.

Aus diesen Bedingungen ergab sich die parameterabhängige Funktion f_p mit

$$f_p(t) = \frac{3}{80 \cdot (p-2)} \cdot t^4 - \frac{p+4}{20 \cdot (p-2)} \cdot t^3 + \frac{3p}{10 \cdot (p-2)} \cdot t^2 + 4,8$$

gültig für $0 \leq t \leq 4$, $0 < p < 4$ und $p \neq 2$.

- a) Unter den aufgestellten Modellierungsbedingungen ist keine überflüssig in dem Sinne, dass sie automatisch mit erfüllt wäre, wenn die anderen Bedingungen erfüllt sind.

Begründen Sie, dass für die ganzrationale Funktion mindestens der Grad vier gewählt werden musste. (2 BE)

- b) **Bestimmen** Sie den speziellen Wert des Parameters p , mit dem die Funktion f_p für $0 \leq t \leq 4$ die oben benutzte Modellfunktion f beschreibt.

Hinweis: Überprüfen Sie die Übereinstimmung des kompletten Funktionsterms. (5 BE)

- c) **Bestätigen** Sie für $p = 3$, dass die Verkaufsrate gemäß der zugehörigen Modellfunktion f_3 im Aktionszeitraum nur zu Anfang 4,8 Mio. Liter / Monat beträgt, aber später nicht wieder.

(4 BE)

- d) Wenn der Wert des Parameters p sich von oben der 2 nähert, steigen die Werte des Extremums, das an der Stelle $t = p$ liegt, an. Aus Kostengründen soll das Extremum der Verkaufsrates, welches ungefähr in der Mitte des Aktionszeitraums liegt, nicht zu hoch getrieben werden.

Ermitteln Sie einen Wert für p mit $p > 2$, bei dem das Extremum der Verkaufsrates gerade noch unter 9 Mio. Liter / Monat liegt. Geben Sie den ermittelten Wert mit einer Nachkommastelle an. **(2 BE)**

- e) **Beurteilen** Sie auf der Grundlage des Terms von f_p , ob die Modellfunktion für $1,5 < p < 2$ für eine realistische Modellierung einer gelungenen Werbeaktion geeignet ist. **(4 BE)**

- f) Der Graph der Funktion f_p zeigt keinerlei Symmetrie. Es lässt sich aber zeigen, dass eine ganzrationale Funktionen g mit

$$g(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e \quad (x, a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

mit den Extremstellen $x = 0$, $x = q$ und $x = -q$ ($q \neq 0$) einen zur y -Achse symmetrischen Graph hat.

Zeigen Sie dieses. **(6 BE)**

Anlage zur Aufgabe „Werbeaktion“

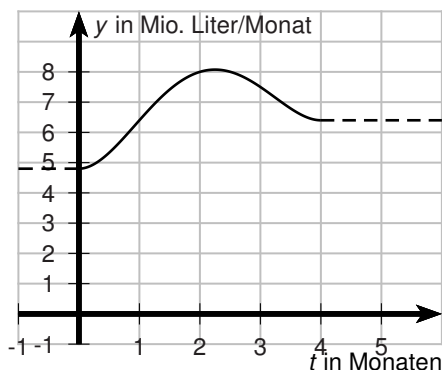


Abb. 4: Entwicklung der Verkaufsrates.

2.2 CAS-Fassung

Die CAS Aufgabe Werbeaktion ist eine Modifikation der Aufgabe Werbeaktion für WTR (siehe Seite 10). Die hier fehlenden Vortexte sind identisch.

1. Die Aufgabenteile a) - c) sind identisch zur WTR-Fassung.

- d) **Interpretieren** Sie die Bedeutung des Terms $f(4) - f(0)$ für den Zeitraum nach der Werbeaktion im Sachkontext. **(2 BE)**

- e) **Deuten** Sie die Gleichung $\frac{f(t)-f(0)}{t} = 1,2$ für $0 < t < 4$ im Sachkontext.
Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung und veranschaulichen Sie Ihre Deutung in der graphischen Darstellung in der Anlage. **(6 BE)**
- f) Je stärker die Verkaufsrate zunimmt, desto höher ist der Organisationsaufwand in der Logistikabteilung.
Bestimmen Sie rechnerisch die maximale lokale Änderungsrate von f im Intervall $t \in [0; 4]$.
Hinweis: Geben Sie die maximale lokale Änderungsrate ohne Maßeinheit an. **(6 BE)**
- g) **Beschreiben** Sie, wie die in Teil f) zu bestimmende maximale lokale Änderungsrate aus der Abbildung des Funktionsgraphen näherungsweise graphisch zu ermitteln wäre. **(3 BE)**
2. Aufgrund der erwarteten höheren Verkaufsraten muss auch die Produktionsrate rechtzeitig erhöht werden, sodass die erwarteten Verkäufe realisiert werden können. Zurzeit beträgt die Produktionsrate 4,8 Mio. Liter pro Monat. Die Produktionsrate soll ab einem geeigneten Zeitpunkt t_0 , der vor dem Beginn der Werbeaktion liegt, schlagartig auf 6,4 Mio. Liter pro Monat erhöht werden, sodass auch während des Aktionszeitraums genügend Limonade zum Verkauf bereit steht.
Bestimmen Sie den spätest möglichen Zeitpunkt t_0 und geben Sie ihn im Sachkontext auf den Tag genau an. **(6 BE)**
3. Die Aufgabenteile **a)** und **b)** sind identisch zur WTR-Fassung.
- c) Aus Kostengründen soll das Extremum der Verkaufsrate, welches ungefähr in der Mitte des Aktionszeitraums liegt, nicht zu hoch getrieben werden.
Beschreiben Sie für $p > 2$ den Einfluss von p auf den Wert dieses Extremums.
Ermitteln Sie eine Grenze für p , sodass die Verkaufsrate unter 9 Mio. Liter / Monat bleibt und geben Sie diese Begrenzung von p in Form einer Größer- bzw. Kleiner-Beziehung an. **(4 BE)**
- d) **Beurteilen** Sie auf der Grundlage des Terms von f_p , ob die Modellfunktion für $1,5 < p < 2$ für eine realistische Modellierung einer gelungenen Werbeaktion geeignet ist. **(3 BE)**
- e) Der Graph der Funktion f_p zeigt keinerlei Symmetrie. Es lässt sich aber zeigen, dass ganzrationale Funktionen vierten Grades mit den Extremstellen $x = 0$, $x = q$ und $x = -q$ ($q \neq 0$) einen zur y -Achse symmetrischen Graphen haben.
Zeigen Sie dieses. **(5 BE)**

1.2 Analytische Geometrie

1.2.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

Aufgabe 3: Haus

EH S. 125

WTR- und CAS-Aufgabe

In einem kartesischen Koordinatensystem ist das Schrägbild eines Hauses mit Walmdach abgebildet. Die gegebenen Punkte sind:

$A(3|-4|0)$, $B(3|8|0)$, $C(-3|8|0)$, $D(-3|-4|0)$, $E(3|-4|6)$, $F(3|8|6)$, $G(-3|8|6)$, $H(-3|-4|6)$, $K(0|0|10)$, $L(0|4|10)$, $M(0|8|6)$ und $N(3|2|10)$.

Dabei entspricht jeweils eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Meter in der Wirklichkeit.

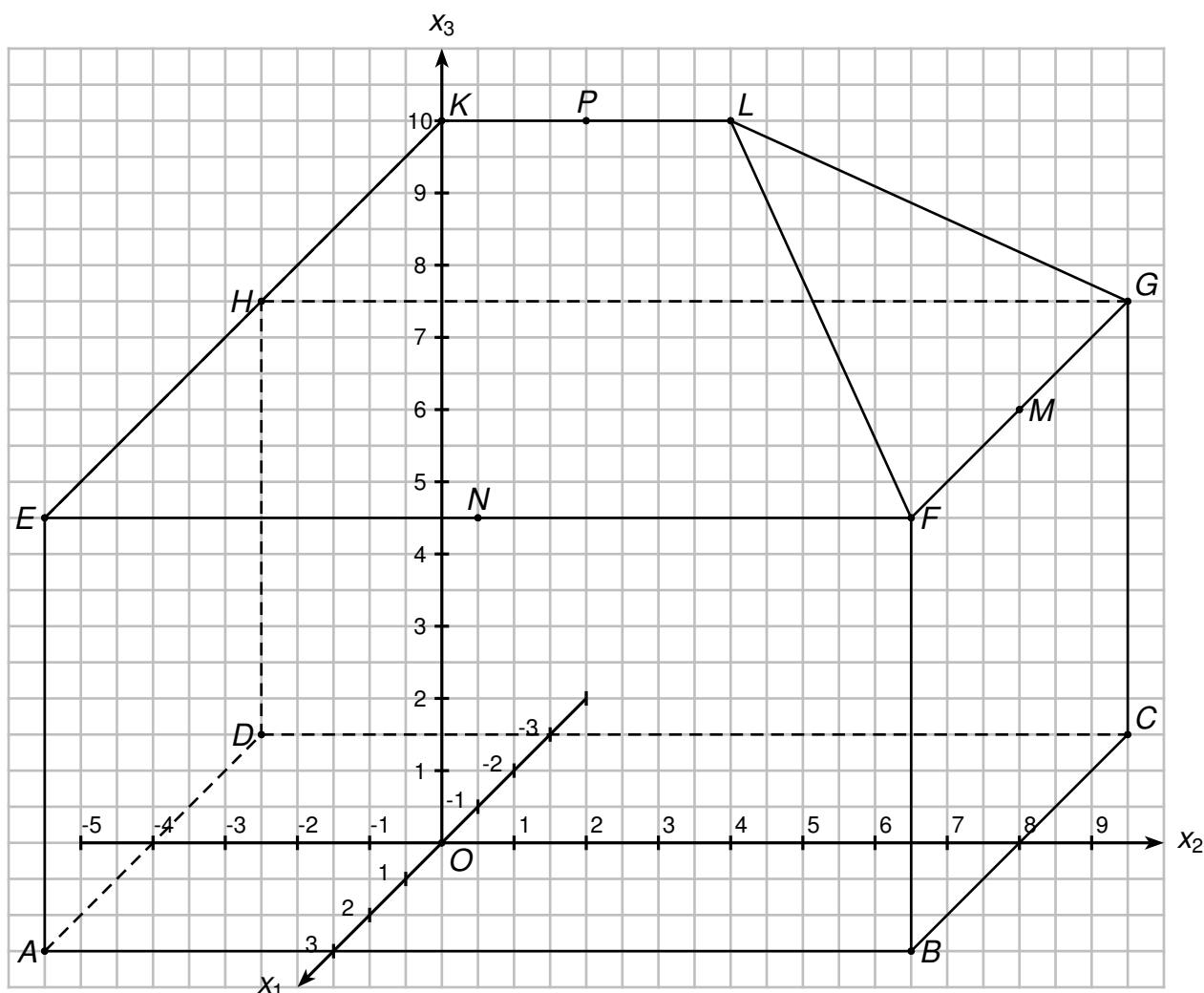


Abb. 5: Das Haus mit Walmdach

a) Stellen Sie die Vektoren \vec{AB} und \vec{BF} in Komponentenschreibweise dar.

Geben Sie den Vektor \vec{ON} als Summe von Vielfachen ausgewählter Kantenvektoren des Hauses an.

(4 BE)

b) Geben Sie die Koordinaten zweier verschiedener Punkte **an**, die in der ebenen Darstellung des dreidimensionalen Koordinatensystems am gleichen Ort wie der Punkt H eingetragen werden, aber andere räumliche Koordinaten als der Punkt H haben. **(2 BE)**

c) Zeigen Sie rechnerisch, dass das Viereck $EFLK$ ein Trapez und kein Rechteck ist.
Berechnen Sie den Innenwinkel im Trapez im Punkt K . **(4 BE)**

d) Interpretieren Sie die Bedeutung der folgenden Terme im Sachkontext der Aufgabe.

$$(I.) 2 \cdot \frac{|\vec{EF}| + |\vec{KL}|}{2} \cdot |\vec{NP}|$$

$$(II.) |\vec{FG}| \cdot |\vec{ML}|$$

Begründen Sie Ihre Interpretation.

Hinweis: Die Dreiecke FGL und EHL sind kongruent und gleichschenkelig. **(3 BE)**

e) Eine gerade Antenne steht im Punkt L auf dem Hausdach. Sie ist lotrecht zur Horizontalen ausgerichtet. Zur Sicherung der Antenne ist diese mit dem Punkt K des Daches durch eine gerade Stange verbunden. Der Winkel, den die Stange mit der Antenne bildet, beträgt 60° .

Bestimmen Sie den Befestigungspunkt der Stange an der Antenne. **(3 BE)**

f) Um das Haus herum soll ein gepflasterter Bereich angelegt werden, der das gleiche Flächenmaß hat wie die Grundfläche des Hauses. Der Weg soll unmittelbar an das Haus angrenzen und zu den entsprechenden Seiten der Hausgrundfläche parallele Begrenzungen haben. Die Breite des Weges w soll entlang der Hausseiten konstant sein.

Zeigen Sie anhand einer Skizze, dass die genannten Bedingungen zur Gleichung $4w^2 + 36w - 72 = 0$ führen und **bestimmen** Sie die äußeren Eckpunkte der Wegfläche um das Haus. **(4 BE)**

1.2.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

Aufgabe 4: Haus

EH S. 128

4.1 WTR-Fassung

In einem kartesischen Koordinatensystem ist das Schrägbild eines Hauses mit Walmdach abgebildet. Die gegebenen Punkte sind:

$A(3|-4|0)$, $B(3|8|0)$, $C(-3|8|0)$, $D(-3|-4|0)$, $E(3|-4|6)$, $F(3|8|6)$, $G(-3|8|6)$, $H(-3|-4|6)$, $K(0|0|10)$, $L(0|4|10)$ und $S(0|\frac{20}{3}|\frac{22}{3})$.

Dabei entspricht jeweils eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Meter in der Wirklichkeit.

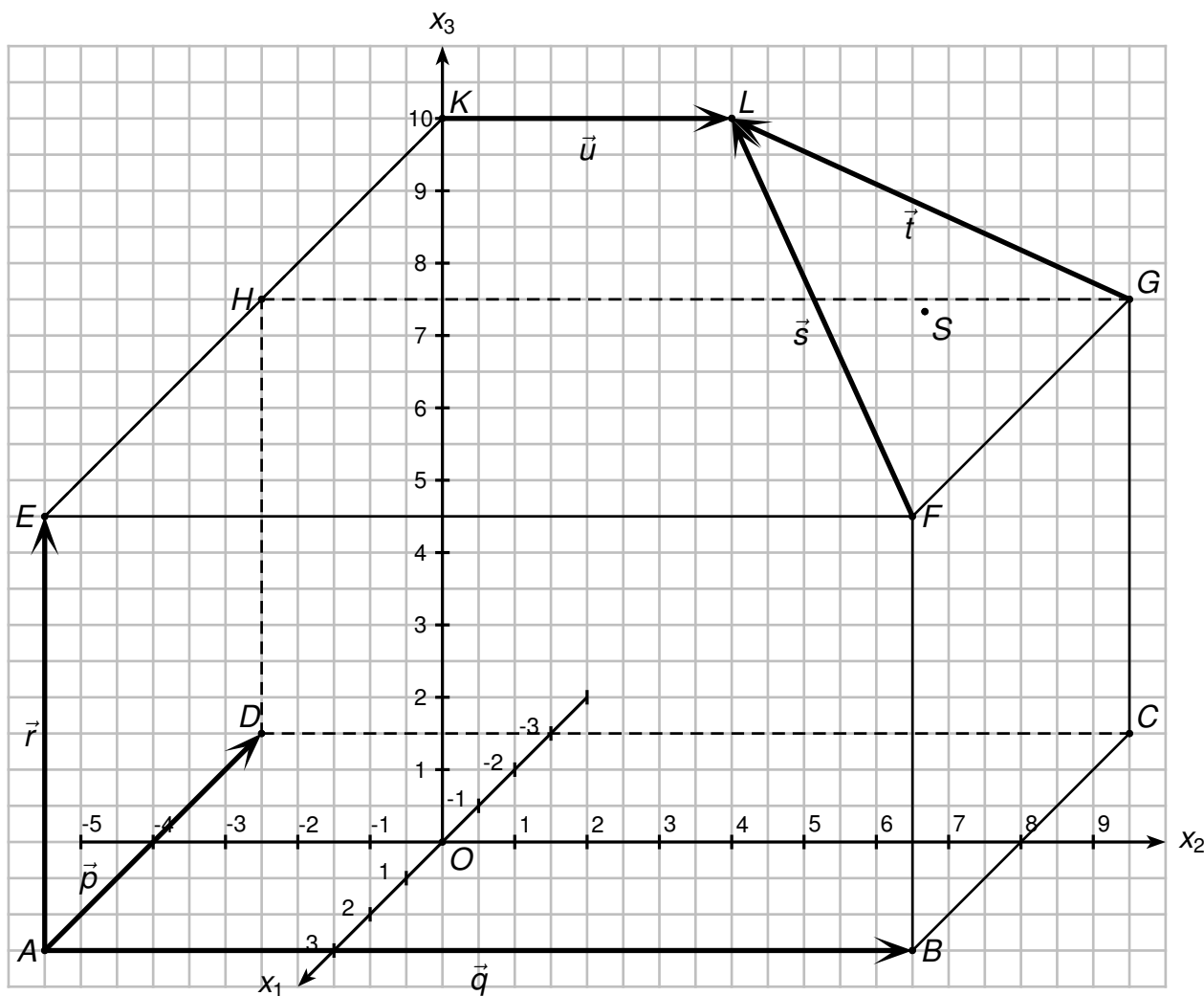


Abb. 6: Das Haus mit Walmdach

a) Stellen Sie die Vektoren \vec{AF} , \vec{CL} und \vec{AK} mithilfe der Vektoren \vec{p} , \vec{q} , \vec{r} , \vec{s} , \vec{t} und \vec{u} dar. (3 BE)

- b) **Geben** Sie die Koordinaten zweier verschiedener Punkte **an**, die in der ebenen Darstellung des dreidimensionalen Koordinatensystems am gleichen Ort wie der Punkt H eingetragen werden, aber andere räumliche Koordinaten als der Punkt H haben. **(2 BE)**
- c) **Zeigen** Sie, dass das Dreieck FGL ein gleichschenkliges, aber kein gleichseitiges Dreieck ist. **Berechnen** Sie die Basiswinkel. **(3 BE)**
- d) **Interpretieren** Sie die Bedeutung der folgenden Terme im Sachkontext der Aufgabe.
 (I.) $|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot |\vec{r}|$ (II.) $\frac{1}{2} |\vec{p}| \cdot (|\vec{OK}| - |\vec{r}|) \cdot |\vec{u}|$ (III.) $\frac{1}{3} (|\vec{q}| - |\vec{u}|) \cdot |\vec{p}| \cdot (|\vec{OK}| - |\vec{r}|)$
Begründen Sie Ihre Interpretation.
Hinweis: Die Dreiecke FGL und EHK sind kongruent. **(4 BE)**
- e) Betrachtet wird das Dreieck FGL .
Bestätigen Sie beispielhaft an einer der Seitenhalbierenden des Dreiecks die Aussage: S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $1 : 2$. **(5 BE)**
- f) Eine gerade Antenne steht im Punkt S auf dem Hausdach. Sie ist lotrecht zur Horizontalen ausgerichtet. Wenn Sonnenlicht in der Richtung
 $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \\ -0,5 \end{pmatrix}$ auf das Haus fällt, liegt der Schattenpunkt der Antennenspitze im Punkt L .
Bestimmen Sie die Länge der Antenne. **(4 BE)**
- g) Um das Haus herum soll ein gepflasterter Bereich angelegt werden, der das gleiche Flächenmaß hat wie die Grundfläche des Hauses. Der Weg soll unmittelbar an das Haus angrenzen und zu den entsprechenden Seiten der Hausgrundfläche parallele Begrenzungen haben. Die Breite des Weges w soll entlang der Hausseiten konstant sein.
Bestimmen Sie die äußeren Eckpunkte der Wegfläche um das Haus. **(4 BE)**

4.2 CAS-Fassung

Die CAS Aufgabe Haus ist eine Modifikation der Aufgabe Haus für WTR (siehe Seite 16). Die hier fehlenden Vortexte sind identisch.

Die Aufgabenteile **a) - e)** sind identisch zur WTR-Fassung.

- f) Eine gerade Antenne steht im Punkt S auf dem Hausdach. Sie ist lotrecht zur Horizontalen ausgerichtet. Zur Sicherung der Antenne ist diese auf ihrer halben Höhe mit dem Punkt L des Daches durch eine gerade Stange verbunden. Der Innenwinkel, den die Stange mit der Antenne bildet, beträgt 60° .
Bestimmen Sie die Länge der Antenne. **(5 BE)**
- g) Identisch zur WTR-Fassung Aufgabenteil g). **(3 BE)**

1.3 Stochastik

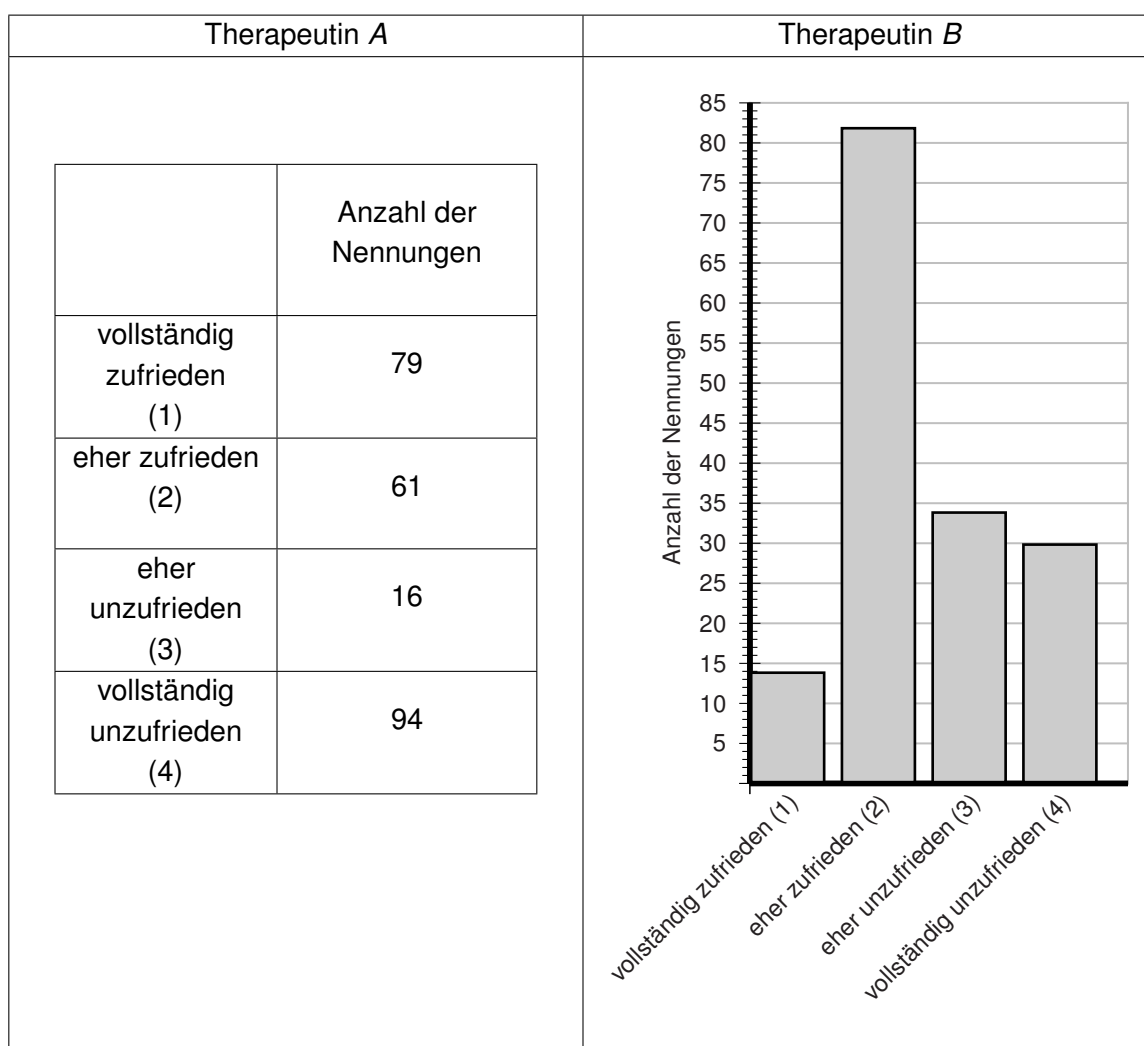
1.3.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

Aufgabe 5: Physiotherapie

EH S. 133

WTR- und CAS-Aufgabe

In einer Praxis für Physiotherapie arbeiten zwei Physiotherapeutinnen, *A* und *B*, die pro Jahr eine unterschiedliche Anzahl von Patientinnen und Patienten (kurz Patienten) behandeln. Nach Beendigung der Therapie werden die Patienten bezüglich ihrer Zufriedenheit mit der Physiotherapie befragt. Sie haben die Wahl zwischen vier Bewertungsstufen, denen jeweils eine Zahl zugeordnet ist. Die Ergebnisse der Befragungen für ein Jahr sind in einer Tabelle bzw. einem Diagramm festgehalten.



Wenn das Merkmal „zufrieden“ verwendet wird, so ist damit die Zusammenfassung der Merkmale „vollständig zufrieden“ (1) und „eher zufrieden“ (2) gemeint.

- a) **Berechnen** Sie den Anteil aller Patienten der Praxis, die mit ihrer Physiotherapie zufrieden waren. **(2 BE)**

b) Das arithmetische Mittel der Bewertungen für Therapeutin A ist 2,5.

Bestätigen Sie, dass das arithmetische Mittel der Bewertungen für Therapeutin B ebenfalls 2,5 beträgt. **(2 BE)**

c) Die Varianz der Bewertungen für Therapeutin B ist 0,8.

Bestätigen Sie rechnerisch, dass die Varianz der Bewertungen für Therapeutin A mehr als doppelt so groß ist.

Erläutern Sie, wie man schon anhand der oben gegebenen Ausgangsdaten erkennen kann, dass die Varianz der Bewertungen bei Therapeutin B kleiner ist als die von Therapeutin A.

(3 BE)

In den weiteren Aufgaben sollen die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten betrachtet werden.

d) Aus den 410 Patienten wird einer zufällig ausgewählt. Dabei werden die folgenden Ereignisse betrachtet:

Z: Der Patient ist zufrieden.

A: Der Patient wurde von Therapeutin A behandelt.

B: Der Patient wurde von Therapeutin B behandelt.

Das hier unvollständig angegebene Baumdiagramm stellt die Abhängigkeiten zwischen Therapeutinnen und Patientenzufriedenheit graphisch dar:

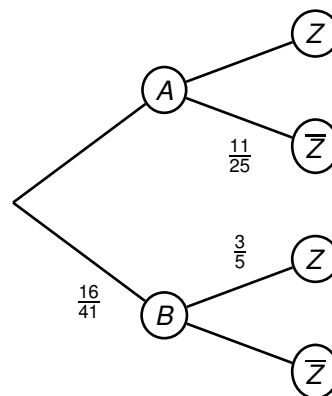


Abb. 7

Ermitteln Sie mithilfe der Daten des Baumdiagramms die fehlenden Werte in der unten stehenden Vierfeldertafel:

	Z	Z̄	
A			
B			
	118/205		1

(4 BE)

e) **Begründen** Sie, dass $P(Z|A) + P(\bar{Z}|A) = 1$ gilt.

Bestätigen Sie, dass $P(Z|A) = 0,56$ ist.

Berechnen Sie $P(B|Z)$.

(5 BE)

f) Durch eine Umstrukturierungsmaßnahme soll in Zukunft Therapeutin *A* genauso viele Patienten behandeln wie Therapeutin *B*. Außerdem wird zur Entlastung der beiden eine dritte Therapeutin *C* eingestellt. Erfahrungswerte zeigen, dass 57 % ihrer Patienten zufrieden sind. Die Wahrscheinlichkeiten der Patientenzufriedenheit bleiben bei den Therapeutinnen *A* und *B* unverändert.

Ermitteln Sie den Patientenanteil, den die Therapeutin *A* bzw. Therapeutin *B* nun übernehmen müssen, sodass die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Patient zufrieden ist, den Wert 0,575 hat.

(4 BE)

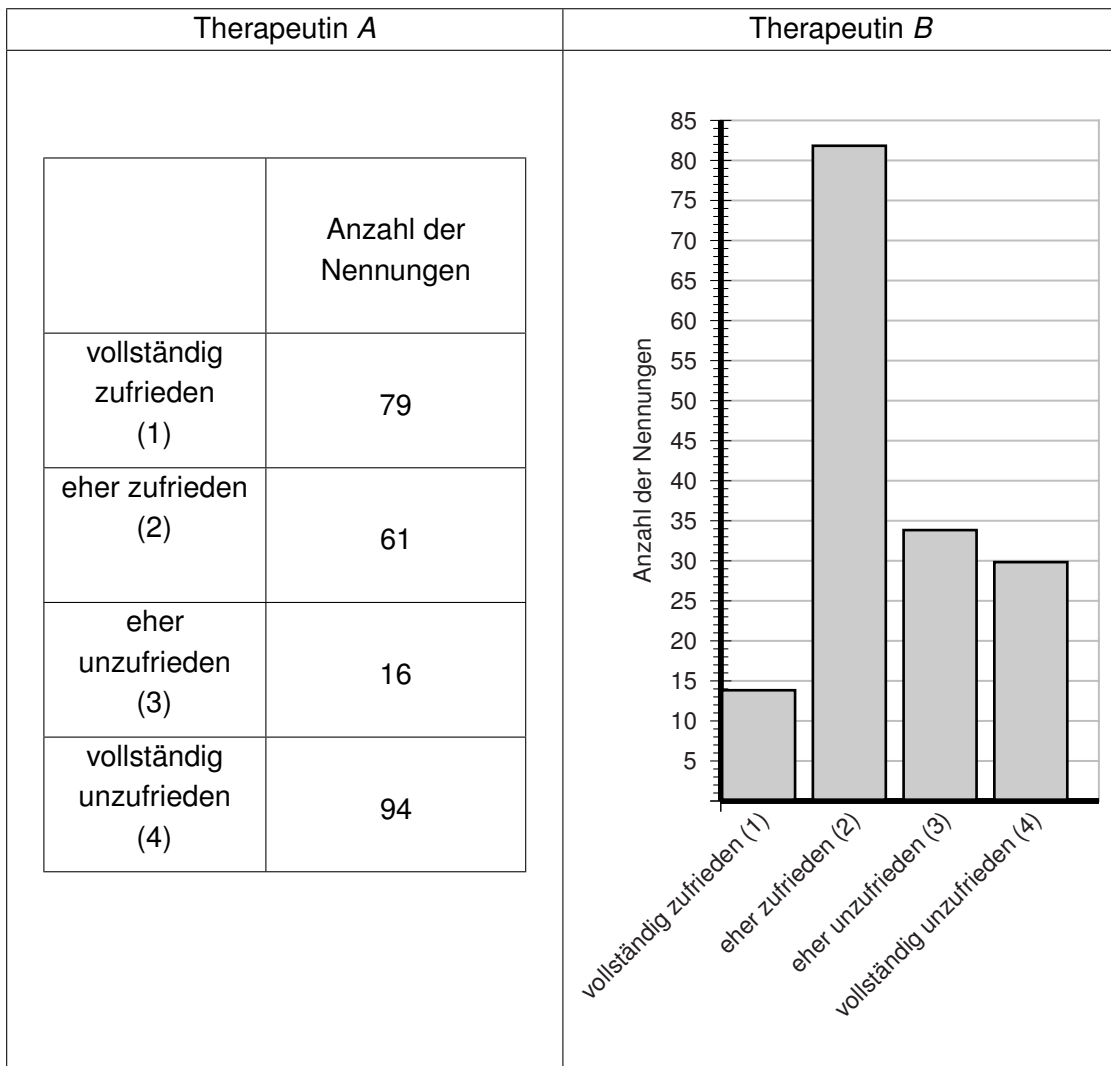
1.3.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

Aufgabe 6: Physiotherapie

EH S. 135

WTR- und CAS-Aufgabe

1. In einer Praxis für Physiotherapie arbeiten zwei Physiotherapeutinnen, *A* und *B*, die pro Jahr eine unterschiedliche Anzahl von Patientinnen und Patienten (kurz Patienten) behandeln. Nach Beendigung der Therapie werden die Patienten bezüglich ihrer Zufriedenheit mit der Physiotherapie befragt. Sie haben die Wahl zwischen vier Bewertungsstufen, denen jeweils eine Zahl zugeordnet ist. Die Ergebnisse der Befragungen für ein Jahr sind in einer Tabelle bzw. einem Diagramm festgehalten.



Wenn das Merkmal „zufrieden“ verwendet wird, so ist damit die Zusammenfassung der Merkmale „vollständig zufrieden“ (1) und „eher zufrieden“ (2) gemeint.

a) Das arithmetische Mittel der Bewertungen für Therapeutin A ist 2,5.

Bestätigen Sie, dass das arithmetische Mittel der Bewertungen für Therapeutin B ebenfalls 2,5 beträgt. **(2 BE)**

- b) Die Varianz der Bewertungen für Therapeutin B ist 0,8.
Bestätigen Sie rechnerisch, dass die Varianz der Bewertungen für Therapeutin A mehr als doppelt so groß ist.
Erläutern Sie, wie man schon anhand der oben gegebenen Ausgangsdaten erkennen kann, dass die Varianz der Bewertungen bei Therapeutin B kleiner ist als die von Therapeutin A . (3 BE)

In den weiteren Aufgaben sollen die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten betrachtet werden.

- c) Aus den 410 Patienten wird einer zufällig ausgewählt. Dabei werden die folgenden Ereignisse betrachtet:
 Z : Der Patient ist zufrieden.
 A : Der Patient wurde von Therapeutin A behandelt.
 B : Der Patient wurde von Therapeutin B behandelt.
 Das hier unvollständig angegebene Baumdiagramm stellt die Abhängigkeiten zwischen Therapeutinnen und Patientenzufriedenheit graphisch dar:

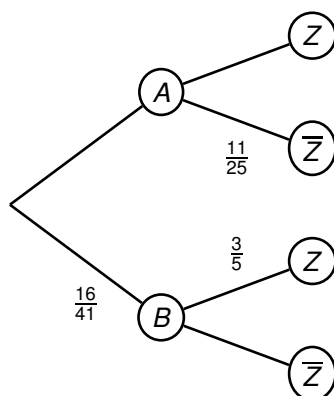


Abb. 8

Ermitteln Sie mithilfe der Daten des Baumdiagramms die fehlenden Werte in der unten stehenden Vierfeldertafel:

	Z	\bar{Z}	
A			
B			
	$\frac{118}{205}$		1

(4 BE)

- d) **Begründen** Sie, dass $P(Z|A) + P(\bar{Z}|A) = 1$ gilt.
Bestätigen Sie, dass $P(Z|A) = 0,56$ ist.
Berechnen Sie $P(B|Z)$. (5 BE)

e) Aufgrund der obigen Vorgaben gilt offenbar $P(Z|B) \neq P(Z)$.

Geben Sie unter Verwendung mathematischer Fachsprache **an**, welche Beziehung zwischen Z und B durch diese Ungleichung ausgedrückt wird.

Interpretieren Sie die Ungleichung vor dem Hintergrund des Sachkontextes. **(3 BE)**

f) Durch eine Umstrukturierungsmaßnahme soll in Zukunft Therapeutin A genauso viele Patienten behandeln wie Therapeutin B . Außerdem wird zur Entlastung der beiden eine dritte Therapeutin C eingestellt. Erfahrungswerte zeigen, dass 57 % ihrer Patienten zufrieden sind. Die Wahrscheinlichkeiten der Patientenzufriedenheit bleiben bei den Therapeutinnen A und B unverändert.

c mit $c \leq 1$ ist der Anteil der Patienten, die von Therapeutin C behandelt werden.

Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Patient zufrieden ist, durch den Term $-0,01c + 0,58$ gegeben ist.

Beurteilen Sie mithilfe einer Rechnung die folgende Aussage:

„Die Größe des Patientenanteils, der von Therapeutin C behandelt wird, hat nur einen geringen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Patient zufrieden ist.“

(4 BE)

2. In einer anderen Praxis werden die Patienten nach Therapieende ebenfalls nach ihrer Zufriedenheit befragt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Patient zufrieden ist, wird mit p bezeichnet.

Einer der unten stehenden Ausdrücke gibt die Wahrscheinlichkeit an, unter den ersten n Befragten mindestens einen zufriedenen Patienten zu finden.

Entscheiden Sie, welcher der drei Ausdrücke korrekt ist.

Begründen Sie Ihre Entscheidung mithilfe eines Baumdiagramms.

(1) $\sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^k p$

(2) $\sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^k p$

(3) $\sum_{k=0}^n (1-p)^k p$

(4 BE)

2 Analysis

2.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

Aufgabe 7: Photovoltaik

EH S. 137

WTR-Aufgabe

1. Für die Planung einer Photovoltaikanlage wird die elektrische Leistung der Anlage bei verschiedenen Sonnenständen mithilfe der unten stehenden Funktionen g_a modelliert. Dabei werden zunächst die möglichen wetterbedingten Leistungsminderungen vernachlässigt. Jede der Funktionen g_a beschreibt die elektrische Leistung $g_a(t)$ in Kilowatt (kW) zu der Zeit t in Stunden, wobei $t = 0$ derjenige Zeitpunkt ist, der genau in der Mitte zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang liegt:

$$g_a(t) = 0,04 \cdot t^4 - 8 \cdot t^2 + a \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \quad \text{und } a \in [215; 250]$$

Durch den Parameter a werden die jahreszeitlichen Unterschiede berücksichtigt. Die Graphen von g_a werden mit K_a bezeichnet.

Die Funktionen g_a sind zwar für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert, aber zur Modellierung wird nur der Zeitraum betrachtet, in dem die Fläche der Solarzellen von der Sonne beschienen wird. Die Grenzen dieses Modellierungszeitraums werden durch zwei Bedingungen bestimmt:

- (1) Die Grenzen dürfen weder vor Sonnenaufgang noch nach Sonnenuntergang liegen.
- (2) Negative Werte von $g_a(t)$ sind nicht zulässig.

- a) An einem Wintertag geht die Sonne um 08:18:44 Uhr auf und um 16:43:30 Uhr unter.
Berechnen Sie die Uhrzeit, die $t = 0$ entspricht. **(3 BE)**
- b) **Begründen** Sie ohne Berücksichtigung der Grenzen des Modellierungszeitraumes, dass K_a für alle a achsensymmetrisch zur Ordinatenachse ist. **(1 BE)**
- c) K_a hat für alle a einen Hochpunkt an der Stelle $t = 0$.
Am Standort der Anlage liegen an keinem Tag des Jahres zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang mehr als 16 Stunden und 50 Minuten.
Zeigen Sie, dass K_a für alle a im Modellierungszeitraum keinen lokalen Tiefpunkt besitzt. **(3 BE)**
- d) An einem Herbsttag liegen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang bei $t_1 = -4,220$ und $t_2 = 4,220$. Für diesen Tag ist $a = 222$.
Entscheiden Sie, ob für die Grenzen des Modellierungszeitraums Bedingung (1) oder Bedingung (2) ausschlaggebend ist.
Begründen Sie Ihre Entscheidung. **(3 BE)**

e) An einem Frühlingstag ist der Modellierungszeitraum durch (2) gegeben und es ist für diesen Tag $a = 244$.

Bestätigen Sie, dass für diesen Frühlingstag die Grenzen des Modellierungszeitraums bei $t_1 \approx -6,128$ und $t_2 \approx 6,128$ liegen. **(3 BE)**

f) **Zeichnen** Sie für diesen Frühlingstag den Graphen von g_a im gesamten Modellierungszeitraum. **(3 BE)**

g) g'_a beschreibt die momentane Änderungsrate von g_a auf \mathbb{R} .

Bestimmen Sie für diesen Frühlingstag den betragsmäßig größten Funktionswert von $g'_a(t)$ auf dem Intervall $[-6,128; 6,128]$, der als lokaler Extremwert auftritt. **(5 BE)**

h) Für die elektrische Energie $E(t)$, die von der Anlage im Laufe des Tages geliefert werden kann, gilt $E'(t) = g_a(t)$.

Berechnen Sie, wie groß die gesamte Menge an Energie ist, die an dem beschriebenen Frühlingstag von der Anlage geliefert werden kann.

Geben Sie Ihr Ergebnis in der korrekten Maßeinheit an. **(5 BE)**

2. Nun soll die Auswirkung einer gegen Mittag vorüberziehenden Wolkenfront modelliert werden. Im Zeitraum von $t = -1$ bis $t = 1$ wird $g_a(t)$ durch einen zeitabhängigen Faktor $w(t)$ mit $0,5 \leq w(t) \leq 1$ beeinflusst, sodass die elektrische Leistung im Intervall $[-1; 1]$ nicht mehr durch $g_a(t)$, sondern durch $h_a(t) = g_a(t) \cdot w(t)$ beschrieben wird.

Die Funktion w hat mit $w(0) = 0,5$ ihren kleinsten Wert an der Stelle $t = 0$.

Der Graph von h_a schließt an den Stellen $t = -1$ und $t = 1$ sprunghaft an K_a an.

Geben Sie für $w(t)$ einen möglichen Funktionsterm oder mögliche mehrere abschnittsweise gültige Funktionsterme an, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $w(-1) = 1$ und $w(1) = 1$

(2) Der Graph von w hat einen lokalen Tiefpunkt in $(0|0,5)$.

Weisen Sie die Gültigkeit der Bedingungen (1) und (2) für Ihre Lösung nach. **(6 BE)**

3. Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion f mit $f(x) = x \cdot \sin(x)$. Ihr Graph ist in Abbildung 9 abgebildet.

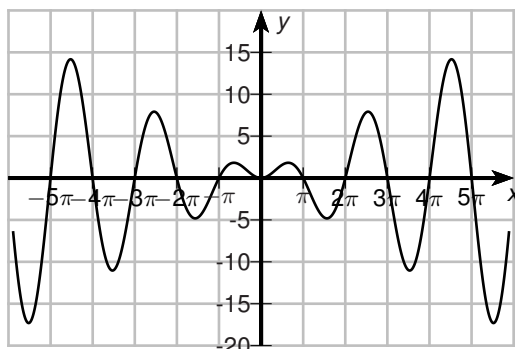
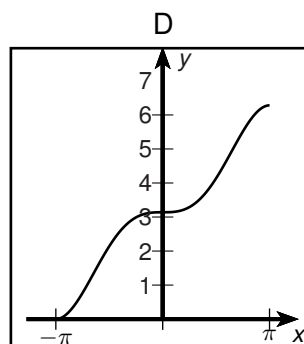
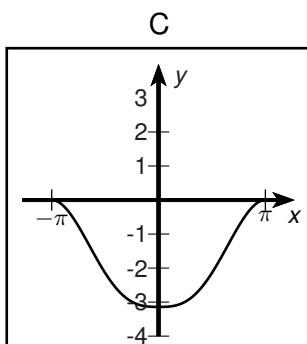
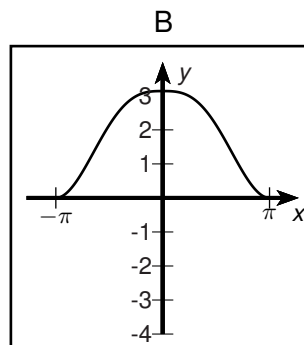
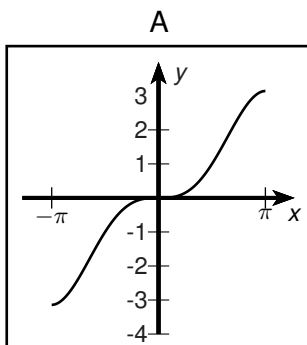


Abb. 9

- a) **Bestätigen** Sie, dass die Funktion f die gleichen Nullstellen hat wie die Funktion s mit $s(x) = \sin(x)$. (1 BE)
- b) **Zeigen** Sie, dass die Extremstellen der Funktion s keine Extremstellen der Funktion f sind. (3 BE)
- c) Zu der Funktion F mit $F(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt$ werden im Intervall $[-\pi; \pi]$ die nachfolgenden Graphen A, B, C und D angeboten.



Entscheiden Sie, welcher Graph der richtige ist.

Begründen Sie für zwei der nicht gewählten Graphen, warum sie falsch sind. (4 BE)

Aufgabe 8: Planspiel**EH S. 140****8.1 WTR-Fassung**

1. Ein ökologisches Planspiel wird entworfen. Darin wird die Bevölkerungsentwicklung in einer landschaftlich und wirtschaftlich weitgehend abgeschlossenen Region modelliert. Die Bevölkerung ernährt sich von den landwirtschaftlichen Erzeugnissen auf der Grünfläche ihrer Region. Diese Grünfläche wird durch die Ausbreitung einer angrenzenden Wüste im Laufe der Zeit verkleinert.

Damit die Bevölkerung ausreichend versorgt ist, darf die Region nicht zu dicht besiedelt werden. Die größtmögliche Bevölkerungsdichte wird im Planspiel als zulässige Bevölkerungsdichte bezeichnet.

Die zulässige Bevölkerungsdichte ändert sich im Laufe der Zeit, weil die Bevölkerung ihre Infrastruktur ausbaut und ihre landwirtschaftliche Produktivität erhöht.

Dem Planspiel werden folgende Variablen und Funktionen zugrunde gelegt:

- Die Variable t beschreibt die Zeit in Jahren ab Modellierungsbeginn, es gilt $t \geq 0$.
- Die Funktion f mit $f(t) = 5 + e^{-0,02 \cdot t}$ ordnet der Zeit die jeweilige Größe der Grünfläche in Flächeneinheiten (FE) zu, wobei 1 FE einem Flächeninhalt von 100 km^2 entspricht.
- Die Funktion p mit $p(t) = 40 - 25 \cdot e^{-0,1 \cdot t}$ ordnet der Zeit die jeweilige zulässige Bevölkerungsdichte in 1000 Einwohnern pro FE Grünfläche zu.
- Daraus ergibt sich die zulässige Einwohnerzahl der Region als Funktion b mit

$$b(t) = f(t) \cdot p(t).$$

a) Es ist $f(0) = 6$.

Geben Sie die Funktionswerte $p(0)$ und $b(0)$ an.

Deuten Sie diese drei Funktionswerte im Sachkontext.

(4 BE)

b) **Berechnen** Sie, gemäß dem Modell, die Abnahme der Größe der Grünfläche in den ersten 20 Jahren.

(2 BE)

c) **Begründen** Sie anhand der jeweiligen Funktionsterme:

(1) Die Funktionen f und p sind monoton, also monoton steigend oder fallend.

(2) Die Funktionen f und p streben einer Grenze zu.

Geben Sie $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$ an.

(6 BE)

d) Für jede Funktion h mit $h(t) = e^{q \cdot t}$ gilt $h'(t) = q \cdot e^{q \cdot t}$.

Zeigen Sie, dass $b'(t) = -0,02 \cdot e^{-0,02 \cdot t} \cdot (40 - 25 \cdot e^{-0,1 \cdot t}) + (5 + e^{-0,02 \cdot t}) \cdot 2,5 \cdot e^{-0,1 \cdot t}$ gilt.

(4 BE)

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von b .

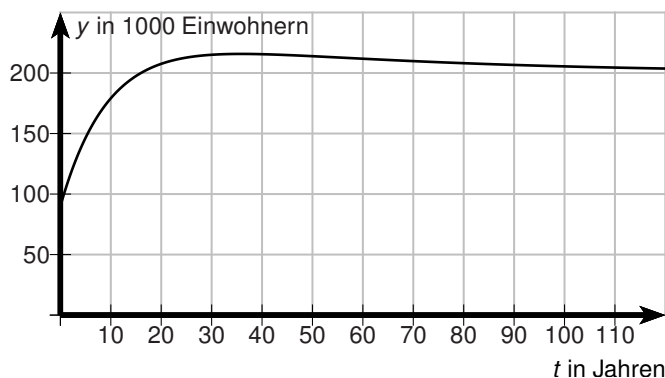


Abb. 10: Der Graph von b .

- e) Der Graph von b zeigt, dass die zulässige Einwohnerzahl im Modell zwischen $t = 25$ und $t = 45$ genau ein Maximum hat.

Ermitteln Sie durch geeignete Tabellenwerte für $b'(t)$, von welchem vollendeten Jahr ab die Einwohnerzahl zu sinken beginnt. **(3 BE)**

2. Im Planspiel soll auch der Fall durchgespielt werden, dass die tatsächliche Einwohnerzahl der Region exponentiell wächst und die zulässige Einwohnerzahl überschreiten kann: Die parameterabhängige Funktion w_k mit $w_k(t) = 90 \cdot e^{k \cdot t}$ ($t \geq 0, k > 0$) beschreibt im Folgenden die tatsächliche Einwohnerzahl in 1000 Einwohnern. Die folgende Abbildung zeigt zusätzlich zum Graphen der Funktion b den Graphen einer Funktion w_k für einen speziellen Wert von k .

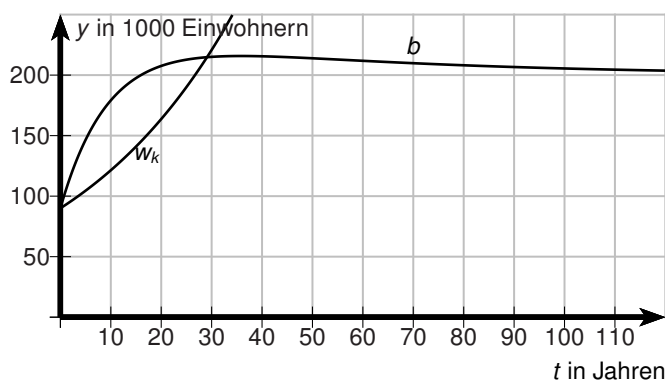


Abb. 11: Die Graphen von b und w_k .

- a) **Geben** Sie für die in Abbildung 11 dargestellte Funktion w_k **an**, nach wie vielen Jahren die tatsächliche Einwohnerzahl größer als die zulässige Einwohnerzahl wird. **(1 BE)**

- b) **Ermitteln** Sie aus der Abbildung die lokale Änderungsrate der tatsächlichen Einwohnerzahl 20 Jahre nach Modellierungsbeginn. **(2 BE)**

c) **Ermitteln** Sie mithilfe der Abbildung 11 den Wert des Parameters k , der dem dargestellten Graphen zugrunde liegt, auf zwei Nachkommastellen genau. **(3 BE)**

d) Im Planspiel ist vorgesehen, dass ab dem Moment, in dem die tatsächliche Einwohnerzahl w_k deutlich größer wird als die zulässige Einwohnerzahl, internationale Hilfe einsetzt. Das ist im Planspiel ab $t = 40$ der Fall. Fortan wird kontinuierlich pro Jahr für jeden Einwohner, um den die tatsächliche Einwohnerzahl über die zulässige Einwohnerzahl hinausgeht, eine Hilfsgütermenge in Höhe von einer Mengeneinheit (ME) geliefert.

Beschreiben Sie einen Weg zur Berechnung der gesamten Hilfsgütermenge der ersten 10 Jahre ab $t = 40$ mithilfe der Funktionen b und w_k .

Begründen Sie Ihr Vorgehen. **(4 BE)**

3. Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion s mit $s(x) = 4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot x\right)$.

a) Die Abbildung 12 zeigt den Graphen der Funktion s .

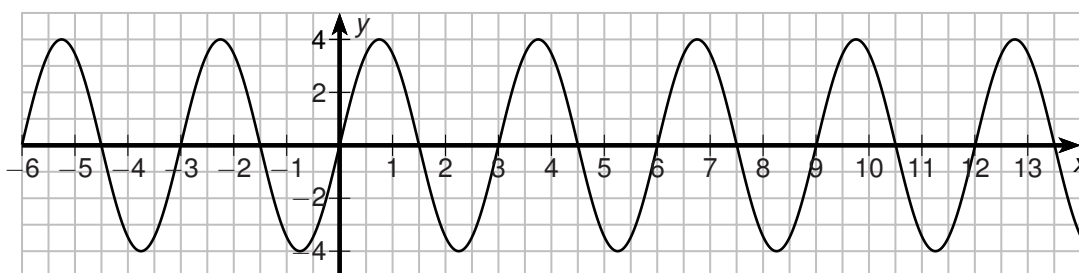


Abb. 12: Der Graph von s .

Beschreiben Sie für zwei Eigenschaften des Graphen, aus welchen Eigenschaften des Funktionsterms sie hervorgehen. **(2 BE)**

b) **Geben** Sie die Zahl c an, sodass die Funktion r mit $r(x) = s(x) + c$ zwar Nullstellen, aber keine negativen Funktionswerte hat. **(1 BE)**

c) **Stellen** Sie den Funktionsterm von s mithilfe eines \cos -Terms anstelle eines \sin -Terms dar. **(3 BE)**

d) **Geben** Sie zwei verschiedene Zahlen x_1 und x_2 an, mit denen $\int_{x_1}^{x_2} s(x) dx = 0$ ist. **(1 BE)**

e) Nach der Kettenregel hat m mit $m(x) = \cos(a \cdot x)$ den Ableitungsterm $m'(x) = -a \cdot \sin(a \cdot x)$.

Geben Sie die Funktionsgleichung einer Stammfunktion S von s an, sodass $S(0) = 0$ ist.

Bestätigen Sie für die von Ihnen angegebene Funktion, dass sie eine Stammfunktion von s ist. **(4 BE)**

8.2 CAS-Fassung

Die CAS Aufgabe Planspiel ist eine Modifikation der Aufgabe Planspiel für WTR (siehe Seite 27). Die hier fehlenden Vortexte sind identisch.

1. Die Aufgabenteile **a) - c)** sind identisch zur WTR-Fassung.

d) Zunächst steigt die zulässige Einwohnerzahl bis zu einem Maximum, danach fällt sie nur noch.

Bestimmen Sie, ab welchem vollendeten Jahr die zulässige Einwohnerzahl fällt. **(3 BE)**

2. Im Planspiel soll auch der Fall durchgespielt werden, dass die tatsächliche Einwohnerzahl der Region exponentiell wächst und die zulässige Einwohnerzahl überschreiten kann: Die parameterabhängige Funktion w_k mit $w_k(t) = 90 \cdot e^{k \cdot t}$ ($t \geq 0, k > 0$) beschreibt im Folgenden die tatsächliche Einwohnerzahl in 1000 Einwohnern.

a) Interpretieren Sie die Gleichung $w_k(t + 20) = 1,5 \cdot w_k(t)$ im Sachkontext und **bestimmen** Sie für beliebige $t > 0$ einen Wert von k , mit dem die Gleichung erfüllt ist. **(3 BE)**

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion b sowie den Graphen einer Funktion w_k für einen speziellen Wert von k .

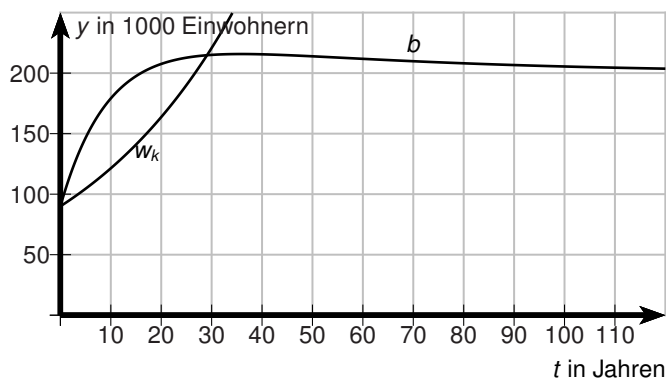


Abb. 13: Die Graphen von b und w_k .

b) Identisch zur WTR-Fassung, Aufgabenteil 2. a). **(1 BE)**

c) Identisch zur WTR-Fassung, Aufgabenteil 2. b). **(2 BE)**

d) Identisch zur WTR-Fassung, Aufgabenteil 2. c). **(3 BE)**

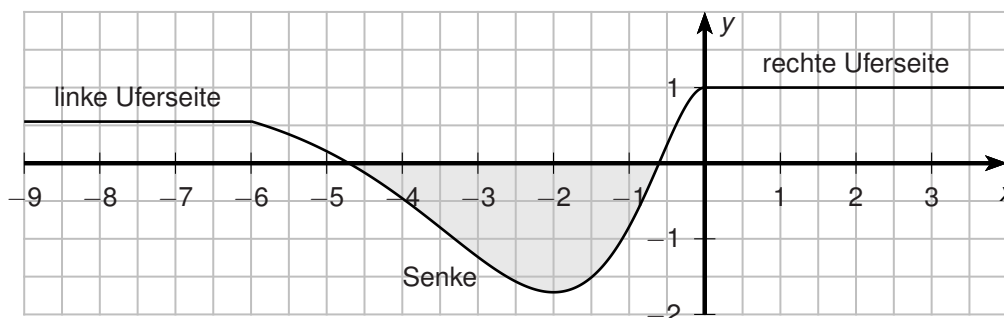
e) Bestimmen Sie eine Zahl mit drei Nachkommastellen, die von k überschritten oder unterschritten werden muss, wenn die tatsächliche Einwohnerzahl die zulässige Einwohnerzahl frühestens 50 Jahre nach Modellierungsbeginn überschreiten darf. **(3 BE)**

f) Identisch zur WTR-Fassung, Aufgabenteil 1. d). **(4 BE)**

3. a) Identisch zur WTR-Fassung. (2 BE)
3. b) **Stellen** Sie den Funktionsterm von s mithilfe eines \cos -Terms anstelle eines \sin -Terms dar. (3 BE)
- c) Eine beliebige Tangente an den Graphen von s kann entweder unendlich viele oder eine natürliche Zahl $n \geq 1$ von gemeinsamen Punkten mit dem Graphen haben.
Zeichnen Sie in Abbildung 12 eine Tangente mit unendlich vielen gemeinsamen Punkten, eine mit genau einem gemeinsamen Punkt und eine mit genau drei gemeinsamen Punkten ein.
Begründen Sie, dass für n jede natürliche Zahl $n \geq 1$ möglich ist. (4 BE)

Aufgabe 9: Fluss**EH S. 144****WTR-Aufgabe**

1. In einer Senke verläuft ein Fluss. Abbildung 14 zeigt modellhaft einen Querschnitt der Senke und der beiden horizontalen Uferzonen.

**Abb. 14**

Im Querschnitt kann die Profillinie der Senke modellhaft durch die Funktion f mit

$$f(x) = -5x^2 \cdot e^x + 1$$

und $x \in [-6; 0]$ beschrieben werden. Die Wasseroberfläche wird im Modell durch einen Abschnitt der x -Achse dargestellt, die Uferzonen durch zwei Strecken, die jeweils parallel zur x -Achse verlaufen und lückenlos an den Graphen von f anschließen. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

Zur Funktion f sind Gleichungen der ersten und zweiten Ableitungsfunktion sowie einer Stammfunktion gegeben:

- $f'(x) = -5x \cdot (2 + x) \cdot e^x$
- $f''(x) = -10e^x - 20xe^x - 5x^2e^x$
- $F(x) = x - 5 \cdot (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$

- a) **Berechnen** Sie den Höhenunterschied zwischen den beiden Uferzonen. **(2 BE)**
- b) **Ermitteln** Sie mithilfe von Abbildung 14, wie breit die Senke einen Meter unterhalb der Wasseroberfläche ist. **(2 BE)**
- c) **Deuten** Sie die Gleichung $f(x + 3) = f(x)$ im Sachzusammenhang und **bestimmen** Sie mithilfe von Abbildung 14 eine Lösung der Gleichung. **(3 BE)**
- d) **Leiten** Sie aus der Funktionsgleichung von f die angegebene Funktionsgleichung von f' her. **(3 BE)**
- e) **Berechnen** Sie die Tiefe des Wassers an der tiefsten Stelle der Senke. **(4 BE)**

Über die Senke soll eine Brücke gebaut werden. Das eine Ende der Brücke soll auf der linken Uferzone aufliegen, das andere Ende auf einem Sockel am rechten Ufer. Die Profillinie der Brücke wird im Modell durch eine Strecke dargestellt, der Auflagepunkt am rechten Ufer durch den Punkt $B(0|1,1)$.

- f) **Berechnen** Sie die Länge der Brücke sowie deren Steigung in Prozent, wenn der linke Auflagepunkt im Modell durch den Punkt $A(-6|f(-6))$ dargestellt würde. **(4 BE)**
- g) **Ermitteln** Sie, wie weit das linke Ende der Brücke vom Rand der Senke entfernt läge, wenn die Brücke eine Steigung von 6 % hätte. **(3 BE)**
- h) Zwischen dem tiefsten Punkt der Senke und ihrem rechten Rand gibt es einen Punkt, in dem die Profillinie ihren größten Neigungswinkel gegenüber der Horizontalen hat. **Berechnen** Sie diesen Neigungswinkel. **(5 BE)**
- i) Das Produkt aus dem Flächeninhalt des Flussquerschnitts (in m^2) und der Fließgeschwindigkeit des Wassers (in m/s) wird als Durchflussrate bezeichnet. Die Fließgeschwindigkeit des Wassers beträgt $0,5 m/s$. Der Abschnitt der x -Achse, der die Wasseroberfläche im Modell darstellt, wird näherungsweise durch $x \approx -4,7$ und $x \approx -0,6$ begrenzt. **Berechnen** Sie die Durchflussrate. **(5 BE)**

2. Abbildung 15 zeigt den Graphen einer in \mathbb{R} definierten ganzrationalen Funktion g vierten Grades.

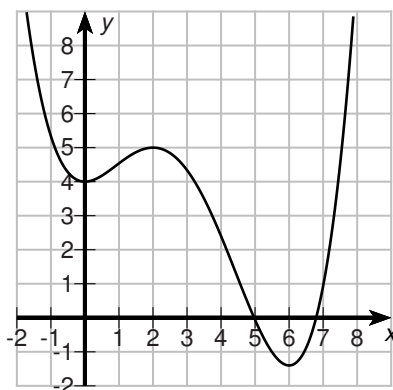


Abb. 15

- a) **Begründen** Sie, dass der Graph von g außerhalb des abgebildeten Bereichs keine Extrempunkte besitzt. **(3 BE)**
- b) Betrachtet wird die Gleichung $g(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$. **Geben** Sie alle Werte von a an, für die die Gleichung genau drei Lösungen hat. **(2 BE)**
- c) **Untersuchen** Sie, ob der Wert des Terms $g'(3) \cdot g''(3)$ positiv ist. **(4 BE)**

Aufgabe 10: Flüssigkeit**EH S. 147****CAS-Aufgabe**

In einem Produktionsprozess werden Flüssigkeiten erhitzt, eine Zeit lang bei konstanter Temperatur gehalten und anschließend wieder abgekühlt.

1. Betrachtet wird zunächst ein Vorgang, bei dem der Temperaturverlauf durchgehend gesteuert wird. In der Tabelle sind Ergebnisse einer Temperaturmessung angegeben.

Zeit in Minuten	0	2	4	10	15	20	40	60	80
Temperatur in °C	23,0	54,0	76,9	76,8	77,3	76,8	37,9	26,0	23,2

Der Temperaturverlauf kann während des Erhitzens und während des Abkühlens mithilfe der in \mathbb{R} definierten Funktion f mit

$$f(t) = 23 + 20 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot t}$$

modellhaft beschrieben werden. Dabei ist t die seit Beginn des Vorgangs vergangene Zeit in Minuten und $f(t)$ die Temperatur in °C.

- a) **Geben Sie an**, welche Temperaturen die Funktion f für den Beginn des Vorgangs und für den Zeitpunkt zwei Minuten nach diesem Beginn liefert.

Bestimmen Sie jeweils die prozentuale Abweichung von den angegebenen Messwerten. **(3 BE)**

- b) **Zeigen Sie**, dass der Graph von f genau einen Extrempunkt hat, und **vergleichen Sie** die zu diesem Punkt gehörende Temperatur mit den angegebenen Messwerten. **(4 BE)**

- c) **Skizzieren Sie** den Graphen von f für $0 \leq t \leq 80$ in einem Koordinatensystem.

Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen für große Werte von t und deuten Sie diesen Verlauf im Sachzusammenhang. **(4 BE)**

- d) Der Zeitabschnitt, in dem die Flüssigkeit konstant bei 77 °C gehalten wird, entspricht im Modell dem Intervall, in dem die Funktion f mindestens diese Temperatur liefert.

Bestimmen Sie den Zeitabschnitt und **stellen Sie** den zugehörigen Temperaturverlauf im Koordinatensystem aus Teilaufgabe c dar. **(3 BE)**

Betrachtet wird nun ein Vorgang, bei dem die Steuerung des Temperaturverlaufs zwanzig Minuten nach Beginn des Vorgangs abgeschaltet wird. Das anschließende Abkühlen der Flüssigkeit lässt sich für $t \geq 20$ durch die in \mathbb{R} definierte Funktion h mit

$$h(t) = 23 + b \cdot e^{c \cdot t}$$

und $b, c \in \mathbb{R}$ beschreiben.

- e) Zu Beginn des Abkühlens soll die Temperatur 77 °C und die momentane Änderungsrate der Temperatur $-3,5$ °C pro Minute betragen.

Bestimmen Sie die passenden Werte von b und c . **(4 BE)**

f) **Ermitteln** Sie für die Phase des Abkühlens denjenigen Zeitpunkt, für den die Werte der Funktion f und der Funktion h mit $b = 197,4$ und $c = -0,065$ am stärksten voneinander abweichen.

Geben Sie die zugehörige Abweichung an. **(5 BE)**

2. Die Steuerung kann so variiert werden, dass sich der Temperaturverlauf während des gesamten Vorgangs für $t \geq 0$ durch eine der in \mathbb{R} definierten Funktionen f_k mit

$$f_k(t) = 23 + 20 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{10} \cdot k \cdot t}$$

und $k \in \mathbb{R}^+$ beschreiben lässt. Dabei ist t die seit Beginn des Vorgangs vergangene Zeit in Minuten und $f_k(t)$ die Temperatur in $^{\circ}\text{C}$.

a) Die in Abbildung 16 dargestellten Graphen A , B und C gehören jeweils zu einem der Werte $k = 0,5$, $k = 2$ und $k = 5$.

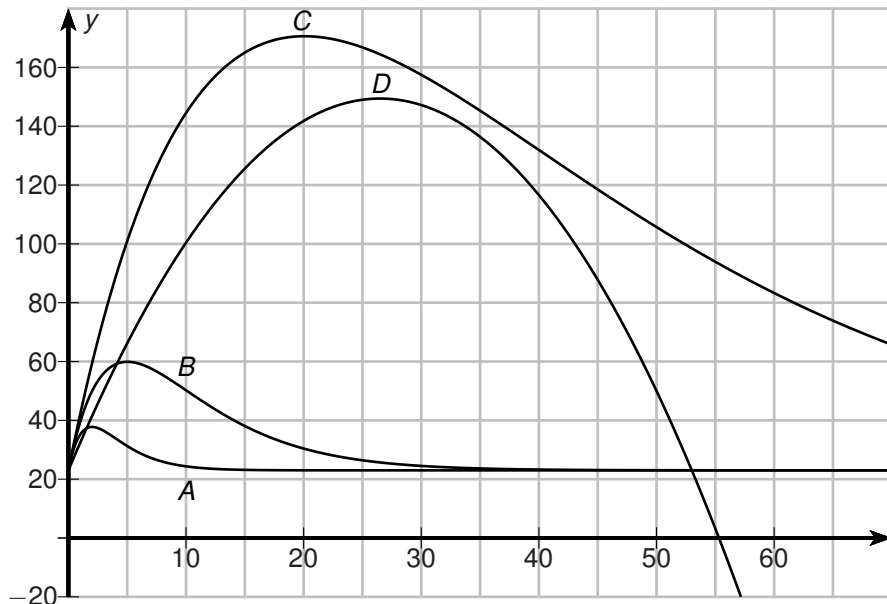


Abb. 16

Ordnen Sie jedem dieser Werte den zugehörigen Graphen zu. **(2 BE)**

b) **Begründen** Sie, dass der in Abbildung 16 dargestellte Graph D nicht zu einer der Funktionen f_k gehören kann. **(2 BE)**

c) **Berechnen** Sie denjenigen Wert von k , für den die Flüssigkeit im Modell eine Höchsttemperatur von 98°C erreicht. **(4 BE)**

- d) **Berechnen** Sie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen von f_k in Abhängigkeit von k .
Beschreiben Sie die Bedeutung der x -Koordinate des Wendepunkts im Sachzusammenhang. **(4 BE)**
- e) Der in Abbildung 17 dargestellte Graph gibt für einen gesteuerten Temperaturverlauf die Änderungsrate der Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit an, die seit Beginn des Vorgangs vergangen ist.

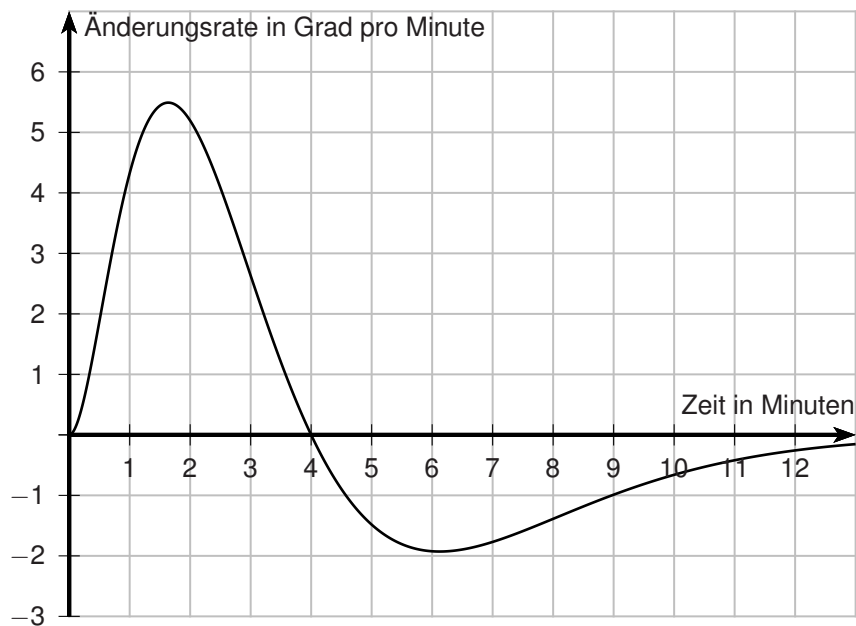


Abb. 17

Bestimmen Sie einen Näherungswert für die Änderung der Temperatur in den ersten vier Minuten nach Beginn des Vorgangs und **geben** Sie **an**, ob die Temperatur zu- oder abnimmt.

Skizzieren Sie für die ersten zwölf Minuten des Vorgangs den Graphen eines möglichen Temperaturverlaufs. **(5 BE)**

Aufgabe 11: Murmelbahn

EH S. 150

WTR-Aufgabe

1. Gegeben ist der Graph G_f einer auf \mathbb{R} definierten Funktion f (siehe Abbildung 18).

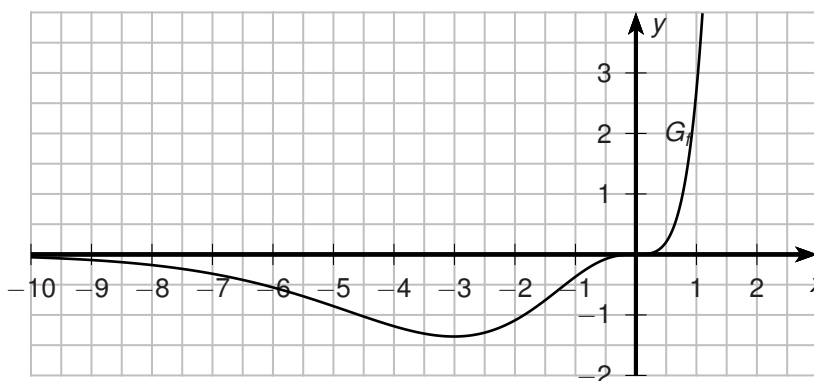


Abb. 18

a) Entnehmen Sie der Abbildung 18 die Koordinaten des Tiefpunktes und **geben** Sie sie **an**. **Zeichnen** Sie die Wendepunkte **ein**. **(2 BE)**

b) **Beschreiben** Sie unter Verwendung von Fachbegriffen das Steigungs- und das Krümmungsverhalten im abgebildeten Bereich. Unterteilen Sie dazu den Graphen von G_f in geeignete Intervalle. **(3 BE)**

c) **Beurteilen** Sie unter Bezug auf die Definitionen von Achsen- bzw. Punktsymmetrie von Funktionsgraphen die beiden folgenden Aussagen:

- G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.
- G_f ist achsensymmetrisch zur Geraden $x = -3$.

(4 BE)

d) Für die Steigung der Geraden zwischen den Punkten $(a|f(a))$ und $(b|f(b))$ mit $a = -4$ und $b = 0$ werden drei Terme vorgeschlagen:

$$(I) \quad f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \quad (II) \quad \frac{f'(a)+f'(b)}{2} \quad (III) \quad \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f'(x) \, dx$$

Entscheiden Sie – auch unter Bezugnahme auf Abbildung 18 – für jeden Term, ob er die genannte Steigung angibt.

Begründen Sie Ihre Entscheidungen. **(5 BE)**

Gegeben ist eine andere Funktion k mit $k(x) = e^x \cdot (x^3 - 1)$ und $D = \mathbb{R}$.

e) **Zeigen** Sie durch Ableiten der Funktion k , dass gilt: $k'(x) = e^x \cdot (x^3 + 3x^2 - 1)$. **(2 BE)**

- f) **Berechnen** Sie die Stellen, an denen der Graph G_k von k den Graph G_h der Funktion h mit $h(x) = x^3 - 1$, $D = \mathbb{R}$ schneidet.
Berechnen Sie den Betrag des Winkels, den G_k und G_h an einem ihrer Schnittpunkte einschließen.
(Zur Kontrolle: Die einzigen Schnittstellen sind $x = 0$ und $x = 1$.) (5 BE)
- g) Die auf \mathbb{R} definierte Funktion K mit $K(x) = (x^3 - 3x^2 + 6x - 7) \cdot e^x$ ist eine Stammfunktion von k .
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks, das von G_k und G_h eingeschlossen wird. (4 BE)
- Zu jeder reellen Zahl $t \leq 0$ ist eine Funktion k_t mit $k_t(x) = e^x \cdot (x^3 + t)$ mit $D = \mathbb{R}$ definiert.
- h) Der Graph von k_{-1} heiße G_{-1} .
Zeichnen Sie G_{-1} in das Koordinatensystem in Abbildung 18 ein. (3 BE)
- i) Die Funktion f , deren Graph in Abbildung 18 dargestellt ist, gehört zur Funktionenschar k_t .
Geben Sie den dazugehörigen Wert von t an. (2 BE)
2. Für $x \in [-10; 0]$ und für geeignete Werte von t kann der Längsschnitt einer Murmelbahn mithilfe des Graphen zu k_t modelliert werden. Die als punktförmig angenommene Murmel bewegt sich dabei von links nach rechts. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Dezimeter in der Realität.
Für positive x -Werte soll die Murmelbahn geradlinig fortgesetzt werden.
An der Stelle $x = 0$ soll deshalb ein knickfreier Übergang vom Graphen von k_t in eine Gerade mit der Steigung $-\frac{1}{2}$ erfolgen. Es gilt: $k'_t(x) = e^x \cdot (x^3 + 3x^2 + t)$.
- a) **Berechnen** Sie die Gleichung der Geraden und **geben** Sie den dazugehörigen Wert von t an.
(Zur Kontrolle: $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, $t = -\frac{1}{2}$) (3 BE)
- b) Sei $t = -\frac{1}{2}$. Der Start der Murmel befindet sich im Punkt mit der x -Koordinate -10 . Die Murmel rollt und befindet sich zu einem gewissen späteren Zeitpunkt im geradlinigen Abschnitt der Bahn. Der Höhenunterschied zum Start beträgt dann 2 dm.
Berechnen Sie den horizontalen Abstand zwischen dem Ort der Murmel und dem Startpunkt in der Maßeinheit Meter. (4 BE)
- c) Für eine beliebige Funktion r mit $D = \mathbb{R}$ sowie für die Funktion $k_{-\frac{1}{2}}$ wird folgende Aussage getroffen:
Die Lösungen der Gleichung $(x + 1) \cdot (r(x) - k_{-\frac{1}{2}}(x)) = 0$ sind die Stellen gemeinsamer Punkte der Graphen von r und $k_{-\frac{1}{2}}$.
Beurteilen Sie diese Aussage. (3 BE)

2.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

Aufgabe 12: Photovoltaik

EH S. 155

WTR-Aufgabe

1. Für die Planung einer Photovoltaikanlage wird die elektrische Leistung der Anlage bei verschiedenen Sonnenständen mithilfe der unten stehenden Funktionen g_a modelliert. Dabei werden zunächst die möglichen wetterbedingten Leistungsminderungen vernachlässigt. Jede der Funktionen g_a beschreibt die elektrische Leistung $g_a(t)$ in Kilowatt (kW) zu der Zeit t in Stunden, wobei $t = 0$ derjenige Zeitpunkt ist, der genau in der Mitte zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang liegt:

$$g_a(t) = 0,04 \cdot t^4 - 8 \cdot t^2 + a \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \quad \text{und } a \in [215; 250]$$

Durch den Parameter a werden die jahreszeitlichen Unterschiede berücksichtigt. Die Graphen von g_a werden mit K_a bezeichnet.

Die Funktionen g_a sind zwar für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert, aber zur Modellierung wird nur der Zeitraum betrachtet, in dem die Fläche der Solarzellen von der Sonne beschienen wird.

Die Grenzen dieses Modellierungszeitraums werden durch zwei Bedingungen bestimmt:

- (1) Die Grenzen dürfen weder vor Sonnenaufgang noch nach Sonnenuntergang liegen.
- (2) Negative Werte von $g_a(t)$ sind nicht zulässig.

- a) An einem Wintertag geht die Sonne um 08:18:44 Uhr auf und um 16:43:30 Uhr unter.
Berechnen Sie die Uhrzeit, die $t = 0$ entspricht. **(3 BE)**
- b) K_a hat für alle a einen Hochpunkt an der Stelle $t = 0$.
Am Standort der Anlage liegen an keinem Tag des Jahres zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang mehr als 16 Stunden und 50 Minuten.
Zeigen Sie, dass K_a für alle a im Modellierungszeitraum keinen lokalen Tiefpunkt besitzt. **(3 BE)**
- c) An einem Herbsttag liegen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang bei $t_1 = -4,220$ und $t_2 = 4,220$. Für diesen Tag ist $a = 222$.
Entscheiden Sie, ob für die Grenzen des Modellierungszeitraums Bedingung (1) oder Bedingung (2) ausschlaggebend ist.
Begründen Sie Ihre Entscheidung. **(3 BE)**
- d) An einem Frühlingstag ist der Modellierungszeitraum durch (2) gegeben und es ist für diesen Tag $a = 244$.
Berechnen Sie die Grenzen des Modellierungszeitraums für diesen Frühlingstag.
(Zur Kontrolle: Die Grenzen liegen bei $t \approx \pm 6,128$.) **(7 BE)**

e) g'_a beschreibt die momentane Änderungsrate von g_a auf \mathbb{R} .

Bestimmen Sie für diesen Frühlingstag den betragsmäßig größten Funktionswert von $g'_a(t)$ auf dem Intervall $[-6,128; 6,128]$. **(7 BE)**

f) Für die elektrische Energie $E(t)$, die von der Anlage im Laufe des Tages geliefert werden kann, gilt $E'(t) = g_a(t)$.

Berechnen Sie, wie groß die gesamte Menge an Energie ist, die an dem beschriebenen Frühlingstag von der Anlage geliefert werden kann.

Geben Sie Ihr Ergebnis in der korrekten Maßeinheit **an**. **(5 BE)**

2. Nun soll die Auswirkung einer gegen Mittag vorüberziehenden Wolkenfront modelliert werden. Im Zeitraum von $t = -1$ bis $t = 1$ wird $g_a(t)$ durch einen zeitabhängigen Faktor $w(t)$ mit $0,5 \leq w(t) \leq 1$ beeinflusst, sodass die elektrische Leistung im Intervall $[-1; 1]$ nicht mehr durch $g_a(t)$, sondern durch $h_a(t) = g_a(t) \cdot w(t)$ beschrieben wird.

Die Funktion w hat mit $w(0) = 0,5$ ihren kleinsten Wert an der Stelle $t = 0$.

Der Graph von h_a schließt an den Stellen $t = -1$ und $t = 1$ sprunghfrei an K_a an, es gilt also $w(-1) = w(1) = 1$.

a) **Zeigen** Sie für den Anschluss bei $t = 1$, dass dort die Knickfreiheit gewährleistet ist, wenn gilt: $w'(1) = 0$ **(5 BE)**

b) **Geben** Sie für $w(t)$ einen möglichen Funktionsterm oder mögliche mehrere abschnittsweise gültige Funktionsterme **an**, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $w(-1) = 1$

(2) $w(1) = 1$

(3) $w'(-1) = 0$

(4) $w'(1) = 0$

(5) Der Graph von w hat einen lokalen Tiefpunkt in $(0|0,5)$.

Weisen Sie die Gültigkeit der Bedingungen (1) bis (5) für Ihre Lösung **nach**. **(5 BE)**

3. Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion f mit

$$f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

a) **Bestätigen** Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = -e^{-\frac{1}{2}x^2}$ eine Stammfunktion von f ist.

(2 BE)

b) In Abbildung 19 ist der Graph von F eingezeichnet.

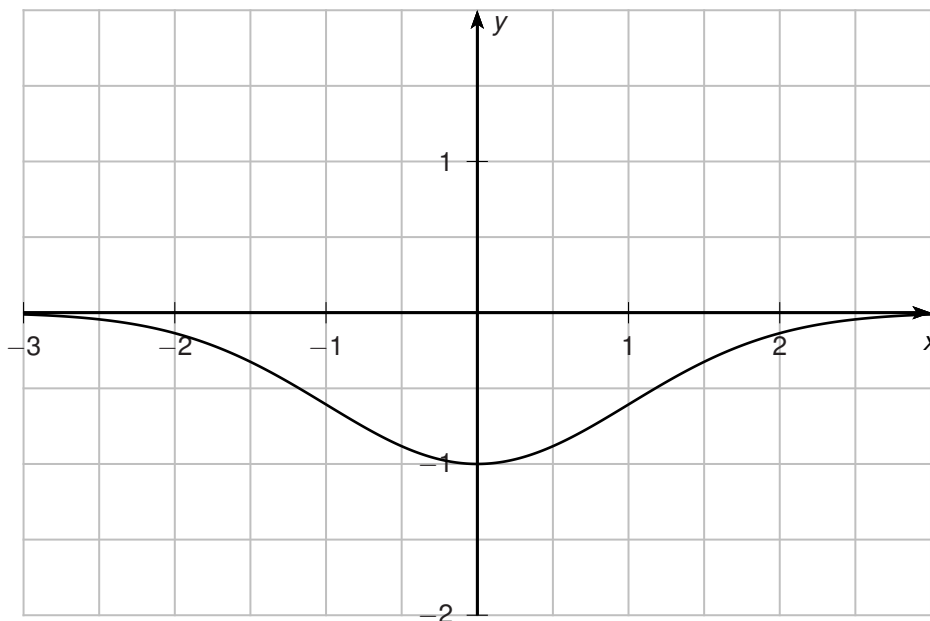


Abb. 19

Skizzieren Sie in dasselbe Koordinatensystem den Graphen von f .

(2 BE)

c) Die Gleichung $\int_0^x f(t) dt = r$ hat nur zu bestimmten $r \in \mathbb{R}$ Lösungen für x .

Ermitteln Sie, zu welchen r das der Fall ist.

(6 BE)

d) Die Funktion f ist eine spezielle Funktion unter den in \mathbb{R} definierten Funktionen f_n mit $f_n(x) = x^n \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist.

Ermitteln Sie, welche der Funktionen f_n einen zum Ursprung punktsymmetrischen und welche einen zur Ordinatenachse achsensymmetrischen Graphen haben.

(2 BE)

Aufgabe 13: Planspiel**EH S. 159****13.1 WTR-Fassung**

1. Ein ökologisches Planspiel wird entworfen. Darin wird die Bevölkerungsentwicklung in einer landschaftlich und wirtschaftlich weitgehend abgeschlossenen Region modelliert. Die Bevölkerung ernährt sich von den landwirtschaftlichen Erzeugnissen auf der Grünfläche ihrer Region. Diese Grünfläche wird durch die Ausbreitung einer angrenzenden Wüste im Laufe der Zeit verkleinert.

Damit die Bevölkerung ausreichend versorgt ist, darf die Region nicht zu dicht besiedelt werden. Die größtmögliche Bevölkerungsdichte wird im Planspiel als zulässige Bevölkerungsdichte bezeichnet.

Die zulässige Bevölkerungsdichte ändert sich im Laufe der Zeit, weil die Bevölkerung ihre Infrastruktur ausbaut und ihre landwirtschaftliche Produktivität erhöht.

Dem Planspiel werden folgende Variablen und Funktionen zugrunde gelegt:

- Die Variable t beschreibt die Zeit in Jahren ab Modellierungsbeginn, es gilt $t \geq 0$.
- Die Funktion f mit $f(t) = 5 + e^{-0,02 \cdot t}$ ordnet der Zeit die jeweilige Größe der Grünfläche in Flächeneinheiten (FE) zu, wobei 1 FE einem Flächeninhalt von 100 km^2 entspricht.
- Die Funktion p mit $p(t) = 40 - 25 \cdot e^{-0,1 \cdot t}$ ordnet der Zeit die jeweilige zulässige Bevölkerungsdichte in 1000 Einwohnern pro FE Grünfläche zu.
- Daraus ergibt sich die zulässige Einwohnerzahl der Region als Funktion b mit

$$b(t) = f(t) \cdot p(t).$$

a) Es ist $f(0) = 6$.

Geben Sie die Funktionswerte $p(0)$ und $b(0)$ an.

Deuten Sie diese drei Funktionswerte im Sachkontext.

(4 BE)

b) **Begründen** Sie anhand der jeweiligen Funktionsterme:

(1) Die Funktionen f und p sind monoton, also monoton steigend oder fallend.

(2) Die Funktionen f und p streben einer Grenze zu.

Geben Sie $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$ an.

(6 BE)

c) **Zeigen** Sie, dass gilt:

$$b'(t) = -0,02 \cdot e^{-0,02 \cdot t} \cdot (40 - 25 \cdot e^{-0,1 \cdot t}) + (5 + e^{-0,02 \cdot t}) \cdot 2,5 \cdot e^{-0,1 \cdot t}$$

(4 BE)

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von b .

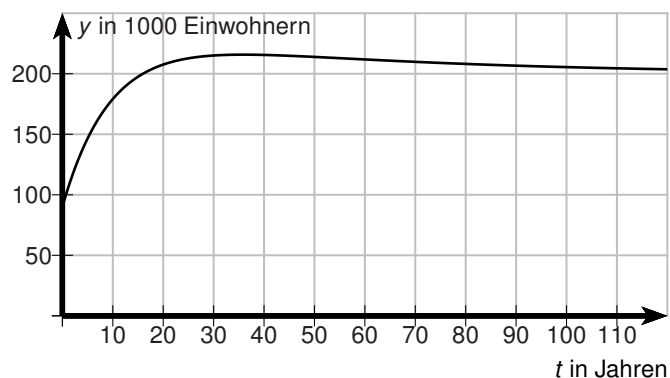


Abb. 20: Der Graph von b .

- d) Der Graph von b zeigt, dass die zulässige Einwohnerzahl im Modell zwischen $t = 25$ und $t = 45$ genau ein Maximum hat.

Ermitteln Sie durch geeignete Tabellenwerte für $b'(t)$, von welchem vollendeten Jahr ab die Einwohnerzahl zu sinken beginnt. **(3 BE)**

2. Im Planspiel soll auch der Fall durchgespielt werden, dass die tatsächliche Einwohnerzahl der Region exponentiell wächst und die zulässige Einwohnerzahl überschreiten kann: Die parameterabhängige Funktion w_k mit $w_k(t) = 90 \cdot e^{k \cdot t}$ ($t \geq 0, k > 0$) beschreibt im Folgenden die tatsächliche Einwohnerzahl in 1000 Einwohnern. Die folgende Abbildung zeigt zusätzlich zum Graphen der Funktion b den Graphen einer Funktion w_k für einen speziellen Wert von k .

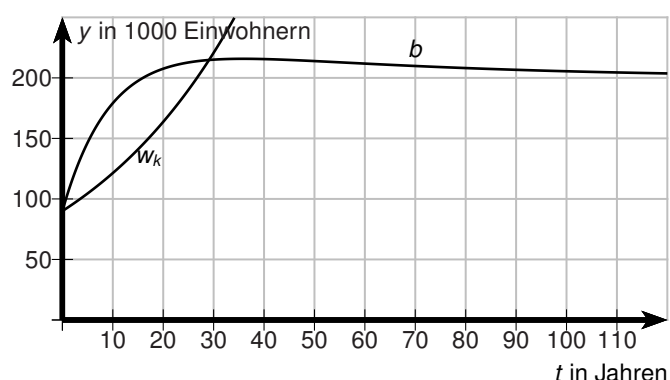


Abb. 21: Die Graphen von b und w_k .

- a) **Geben** Sie für die in Abbildung 21 dargestellte Funktion w_k **an**, nach wie vielen Jahren die tatsächliche Einwohnerzahl größer als die zulässige Einwohnerzahl wird. **(1 BE)**

- b) **Ermitteln** Sie mithilfe der Abbildung 21 den Wert des Parameters k , der dem dargestellten Graphen zugrunde liegt, auf zwei Nachkommastellen genau. **(3 BE)**

- c) Es gibt Werte des Parameters k , für die $w'_k(0) \geq b'(0)$ gilt.
Begründen Sie anschaulich, dass aus der Beziehung $w'_k(0) \geq b'(0)$ folgt, dass der Graph von w_k für alle $t > 0$ über dem Graphen von b liegt. (5 BE)
- d) Für bestimmte Werte des Parameters k wird die zulässige Einwohnerzahl von Anfang an, d. h. schon für beliebig kleine $t > 0$, von der tatsächlichen Einwohnerzahl überschritten.
Ermitteln Sie, für welche Werte von k dies der Fall ist. (5 BE)
3. Gegeben sind die in $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$ definierten Funktionen r_a mit $r_a(x) = \frac{a}{x+a}$ ($a > 0$). Ihre Graphen werden mit G_a bezeichnet.
- a) **Geben** Sie **an**, durch welche Verschiebungen, Streckungen, Stauchungen oder Spiegelungen G_a aus dem Graphen der Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) hervorgeht. (2 BE)
- b) Der Punkt $P(0|1)$ ist ein Punkt, der auf allen Graphen G_a liegt.
Zeigen Sie:
Zwei Graphen G_{a_1} , deren Parameterwerte a_1 und a_2 verschieden sind ($a_1 \neq a_2$), haben außer dem Punkt $P(0|1)$ keinen weiteren gemeinsamen Punkt. (3 BE)
- c) **Bestimmen** Sie in Abhängigkeit von a einen möglichst einfachen Term für das Volumen des Rotationskörpers, der bei Rotation von G_a um die x -Achse im Bereich $0 \leq x \leq a$ entsteht. (4 BE)
- d) **Leiten** Sie **her**, dass die im Punkt $P(0|1)$ angelegte Tangente durch die Gleichung $t_a(x) = -\frac{1}{a} \cdot (x - a)$ beschrieben werden kann. (4 BE)
- e) Betrachtet wird der Fall $a = 1$. Der Graph G_1 schließt mit den Koordinatenachsen und der Geraden mit der Gleichung $x = 1$ eine Fläche M ein. Diese wird durch die Tangente t_1 in zwei Teilflächen geteilt. Die Teilfläche unterhalb der Tangente heißt M_1 .
Bestimmen Sie den Anteil des Flächeninhalts von M_1 am Flächeninhalt von M .
Geben Sie den Anteil näherungsweise, auf drei Nachkommastellen genau **an**. (6 BE)

13.2 CAS-Fassung

Die CAS Aufgabe Planspiel ist eine Modifikation der Aufgabe Planspiel für WTR (siehe Seite 42). Die hier fehlenden Vortexte sind identisch.

1. a) Identisch zur WTR-Fassung. (4 BE)
- b) **Berechnen** Sie, gemäß dem Modell, die Abnahme der Größe der Grünfläche in den ersten 20 Jahren. (2 BE)
- c) Identisch zur WTR-Fassung, Aufgabenteil 1. b). (6 BE)

- d) Zunächst steigt die zulässige Einwohnerzahl bis zu einem Maximum, danach fällt sie nur noch.

Bestimmen Sie, ab welchem vollendeten Jahr die zulässige Einwohnerzahl fällt. **(3 BE)**

2. Im Planspiel soll auch der Fall durchgespielt werden, dass die tatsächliche Einwohnerzahl der Region exponentiell wächst und die zulässige Einwohnerzahl überschreiten kann: Die parameterabhängige Funktion w_k mit $w_k(t) = 90 \cdot e^{k \cdot t}$ ($t \geq 0, k > 0$) beschreibt im Folgenden die tatsächliche Einwohnerzahl in 1000 Einwohnern.

- a) **Interpretieren** Sie die Gleichung $w_k(t + 20) = 1,5 \cdot w_k(t)$ im Sachkontext und **bestimmen** Sie für beliebige $t > 0$ einen Wert von k , mit dem die Gleichung erfüllt ist. **(3 BE)**

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion b sowie den Graphen einer Funktion w_k für einen speziellen Wert von k .

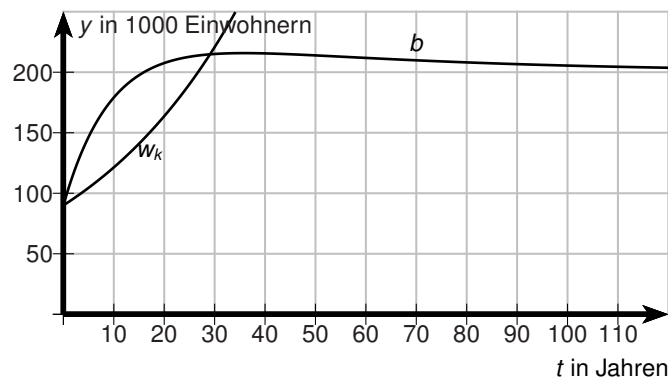


Abb. 22: Die Graphen von b und w_k .

- c) **Bestimmen** Sie eine Zahl mit drei Nachkommastellen, die von k überschritten oder unterschritten werden muss, wenn die tatsächliche Einwohnerzahl frühestens 50 Jahre nach Modellierungsbeginn überschreiten darf. **(3 BE)**
- d) Identisch zur WTR-Fassung, Aufgabenteil 2. c). **(5 BE)**
- e) Identisch zur WTR-Fassung, Aufgabenteil 2. d). **(3 BE)**
3. Die Aufgabenteile a) und b) sind identisch zur WTR-Fassung
- c) **Zeigen** Sie, dass das Volumen des Rotationskörpers, der bei Rotation von G_a um die x -Achse im Bereich $0 \leq x \leq a$ entsteht, proportional zu a ist. **(3 BE)**
- d) Identisch zur WTR-Fassung, Aufgabenteil 3. d). **(3 BE)**

- e) Der Graph G_a schließt mit den Koordinatenachsen und der Geraden mit der Gleichung $x = a$ eine Fläche M ein. Diese wird durch die Tangente t_a in zwei Teilflächen geteilt. Die Teilfläche unterhalb der Tangente heißt M_1 .

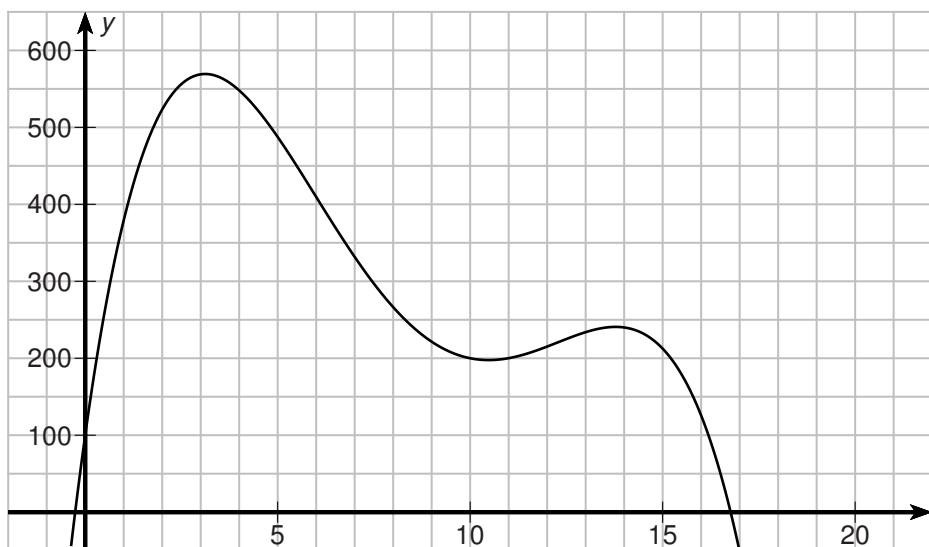
Zeigen Sie, dass der Anteil des Flächeninhalts von M_1 am Flächeninhalt von M unabhängig von a ist. **(5 BE)**

- f) Die Gerade $x = 0$ hat mit dem Graphen G_2 den gemeinsamen Punkt $P(0|1)$, die Gerade $y = 0$ hingegen hat mit dem Graphen G_2 keinen gemeinsamen Punkt.

Untersuchen Sie, welche weiteren Ursprungsgeraden mit dem Graphen G_2 keinen gemeinsamen Punkt haben. **(3 BE)**

Aufgabe 14: Wasserbecken**EH S. 163****WTR-Aufgabe**

1. Abbildung 23 zeigt den Graphen einer Funktion f , die für $0 \leq t \leq 15$ das Volumen des Wassers in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $f(t)$ das Volumen in Kubikmetern.

**Abb. 23**

- a) **Geben** Sie das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn **an** sowie den Zeitraum, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt. **(3 BE)**
- b) **Bestimmen** Sie die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn. **(4 BE)**
- c) Die fünfzehn Stunden nach Beobachtungsbeginn vorliegende momentane Änderungsrate des Wasservolumens bleibt bis zu dem Zeitpunkt erhalten, zu dem das Becken kein Wasser mehr enthält.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man diesen Zeitpunkt grafisch bestimmen kann.
Geben Sie den Zeitpunkt **an**. **(3 BE)**
- d) **Interpretieren** Sie die Gleichung $f(t+6) = f(t) - 350$ im Sachzusammenhang.
Geben Sie eine Lösung der Gleichung **an**. **(4 BE)**
- e) **Begründen** Sie, dass die Funktionsgleichung von f weder die Form I noch die Form II hat:

I $y = -0,3t^4 + at^2 + 100, a \in \mathbb{R}$

II $y = 8,5t^3 + 3,7t^2 + bt + 100, b \in \mathbb{R}$

(3 BE)

2. Für ein anderes Becken wird die momentane Änderungsrate des Volumens des enthaltenen Wassers für $0 \leq t \leq 15$ durch die Funktion g mit

$$g(t) = 0,4 \cdot (2t^3 - 39t^2 + 180t)$$

beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die Änderungsrate in $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$.

Die Funktion G mit

$$G(t) = 0,2 \cdot (t^4 - 26t^3 + 180t^2)$$

ist eine Stammfunktion von g .

- a) **Berechnen** Sie für den beschriebenen Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist. **(5 BE)**
- b) **Ermitteln** Sie rechnerisch den Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt. **(4 BE)**
- c) Drei Stunden nach Beobachtungsbeginn sind im Becken 350 Kubikmeter Wasser enthalten.
Bestimmen Sie das Volumen des Wassers zu Beobachtungsbeginn. **(4 BE)**
- d) **Untersuchen** Sie rechnerisch, ob es nach Beobachtungsbeginn einen Zeitpunkt gibt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn. **(5 BE)**

3. Für jeden Wert $c \in \mathbb{R}^+$ ist die in \mathbb{R} definierte Funktion $h_c : x \mapsto c \cdot \sin(cx)$ gegeben. Abbildung 24 zeigt den Graphen von h_1 .

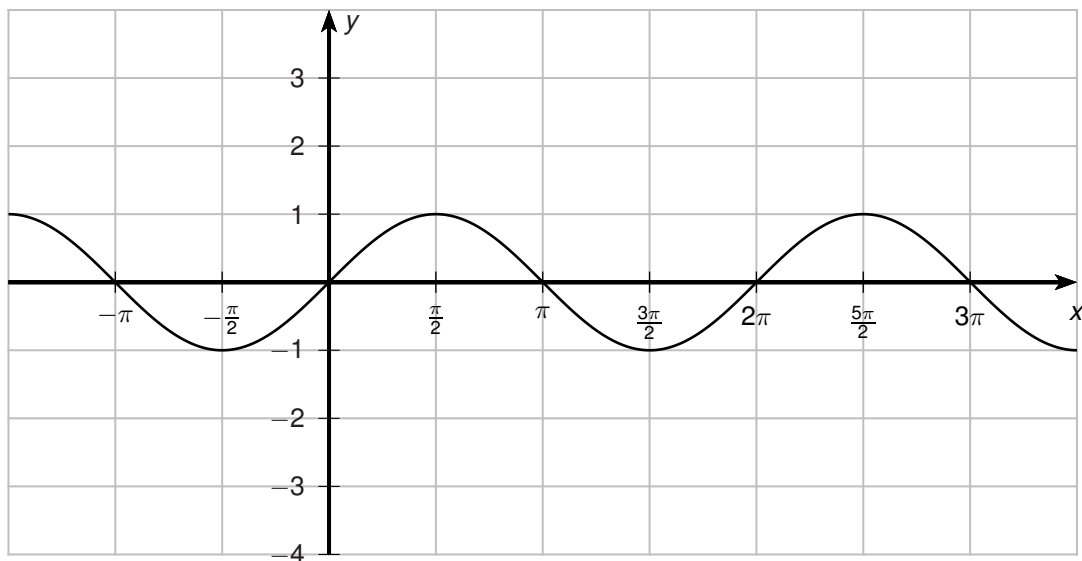
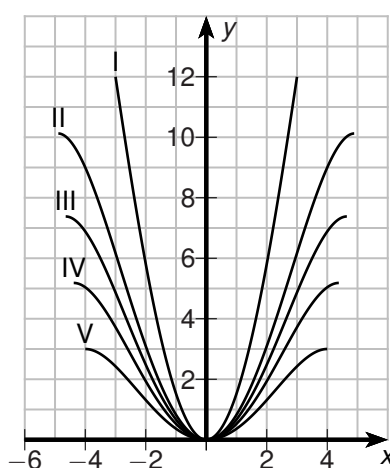


Abb. 24

- a) **Skizzieren** Sie für $c = \frac{1}{2}$ und $c = 2$ jeweils den Graphen von h_c in Abbildung 24. **(4 BE)**
- b) Eine Nullstelle von h_c ist 0, die benachbarte positive Nullstelle wird mit u bezeichnet.
Geben Sie den Wert von u in Abhängigkeit von c an.
Berechnen Sie damit den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von h_c für $0 \leq x \leq u$ mit der x -Achse einschließt. **(5 BE)**
- c) **Beschreiben** Sie, wie man ohne Verwendung einer Ableitungsfunktion die Koordinaten eines Tiefpunkts des Graphen von h_c in Abhängigkeit von c ermitteln kann.
Geben Sie die Koordinaten eines Tiefpunkts an. **(3 BE)**
- d) **Geben** Sie einen Term der 103. Ableitung von h_c an. **(3 BE)**

Aufgabe 15: Gläser**EH S. 167****CAS-Aufgabe**

1. Die Abbildung zeigt schematisch Längsschnitte von fünf Gläsern einer Glas-Serie; Füße und Stiele der Gläser sind nicht abgebildet. Die Gläser sind rotationssymmetrisch, d. h. jeder zur Rotationsachse senkrechte Querschnitt durch ein Glas ist kreisförmig. Im eingezeichneten Koordinatensystem werden die Rotationsachsen der Gläser durch die y -Achse dargestellt; eine Längeneinheit entspricht 1 cm in der Wirklichkeit.

**Abb. 25**

Die Formen der Gläser sind so gewählt, dass jeder der fünf Längsschnitte modellhaft mithilfe einer der in \mathbb{R} definierten Funktionen f_k mit

$$f_k(x) = -\frac{3}{512}k \cdot x^4 + \frac{3}{32}k^2 \cdot x^2$$

und $k \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden kann. Dabei gehört die Funktion f_2 zum Likörglas der Serie, die Funktion f_3 zum Cocktailglas. Das Sektglas hat eine Höhe von 12 cm, sein Rand einen Durchmesser von 6 cm. Die Materialstärke der Gläser soll vernachlässigt werden.

- a) **Ordnen** Sie dem Likörglas und dem Cocktailglas jeweils den zugehörigen Graphen aus der Abbildung **zu**. **(2 BE)**
- b) **Bestimmen** Sie für das Sektglas den zugehörigen Wert von k . **(2 BE)**
- c) **Begründen** Sie, dass der Graph von f_k für jedes $k \in \mathbb{R}^+$ symmetrisch zur y -Achse ist. **(2 BE)**
- d) **Bestimmen** Sie Lage und Art der Extremstellen von f_k .
(Zur Kontrolle: Eine Extremstelle ist $x = 2\sqrt{2k}$.) **(5 BE)**

- e) **Weisen** Sie für die Schar der Graphen von f_k **nach**, dass alle Extrempunkte mit positiver x -Koordinate auf dem Graphen einer Funktion mit der Gleichung $y = \frac{3}{4096}x^6$ liegen. (3 BE)

2. Betrachtet wird nun das Cocktailglas, dessen Längsschnitt für $-2\sqrt{6} \leq x \leq 2\sqrt{6}$ durch f_3 beschrieben wird.

- a) Um das Glas verläuft 2 cm unterhalb des Rands eine eingeschliffene Linie. **Berechnen** Sie deren Länge. (5 BE)

- b) Die Form eines Glases wird in einem Bereich als konvex bezeichnet, wenn der Graph, der den zugehörigen Längsschnitt darstellt, nicht rechtsgekrümmt ist. **Bestimmen** Sie für den Bereich des Cocktailglases, in dem dieses konvex ist, die zugehörigen x -Koordinaten. (3 BE)

Im Glas steht ein 20 cm langer gerader Strohhalm, dessen Durchmesser vernachlässigt werden soll. Der untere Endpunkt des Strohhalms wird im Modell durch einen Punkt des Graphen von f_3 beschrieben, der Strohhalm hat mit seinem unteren Endpunkt also Kontakt zum Glas.

- c) Außerdem berührt der Strohhalm das Glas in dem Punkt, der im Modell durch $(4|f_3(4))$ dargestellt wird.

Ermitteln Sie die Länge desjenigen Abschnitts des Strohhalms, der zwischen dem Berührungspunkt und seinem oberen Endpunkt liegt. (4 BE)

- d) Die Lage des Strohhalms wird nun so verändert, dass sein unterer Endpunkt im Modell durch $P(-1|f_3(-1))$ dargestellt wird, der Punkt, in dem er das Glas berührt, durch $Q(u|f_3(u))$ mit $u > 0$.

Bestimmen Sie den Wert von u . (4 BE)

3. Betrachtet wird nun das oben beschriebene Sektglas der Serie.

Ein Hochpunkt des Graphen der zugehörigen Funktion hat die Koordinaten $x \approx 5,7$ und $y \approx 25,2$, ein Wendepunkt die Koordinaten $x \approx 3,3$ und $y \approx 14,0$.

- a) Das Sektglas unterscheidet sich hinsichtlich der Form wesentlich vom Cocktailglas. **Beschreiben** Sie im Sachzusammenhang unter Berücksichtigung der gegebenen Punkte des zum Sektglas gehörenden Graphen zwei wesentliche Unterschiede. (4 BE)

Das Sektglas wird so aufgestellt, dass seine Rotationsachse vertikal ist. Es wird mit Flüssigkeit gefüllt. Für $-3 \leq x \leq 3$ kann der Längsschnitt des Glases näherungsweise durch die Funktion p mit

$$p(x) = \frac{4}{3}x^2$$

beschrieben werden.

- b) Zeigen** Sie unter Verwendung der Näherung durch die Funktion p , dass sich der Radius der Oberfläche der Flüssigkeit in Abhängigkeit von der Füllhöhe h durch die Gleichung

$$r(h) = \frac{1}{2}\sqrt{3h}$$

bestimmen lässt.

(3 BE)

- c) Zeichnen** Sie den Graphen der Funktion p sowie den Graphen der in \mathbb{R}_0^+ definierten Funktion $r : h \mapsto r(h)$ jeweils in ein geeignetes Koordinatensystem ein.

(2 BE)

- d) Ermitteln** Sie unter Verwendung von $r(h)$ das Volumen der Flüssigkeit bei einer Füllhöhe von 6 cm.

(4 BE)

- 4.** Der Längsschnitt des Likörglases soll für $0 \leq x \leq 4$ mithilfe zweier in \mathbb{R} definierter quadratischer Funktionen p_1 und p_2 beschrieben werden, die folgende Eigenschaften besitzen:

- Die Scheitelpunkte der Graphen von p_1 und p_2 sollen im Tiefpunkt bzw. im Hochpunkt des Graphen von f_2 liegen.
- Die Graphen von p_1 und p_2 sollen ohne Knick ineinander übergehen.

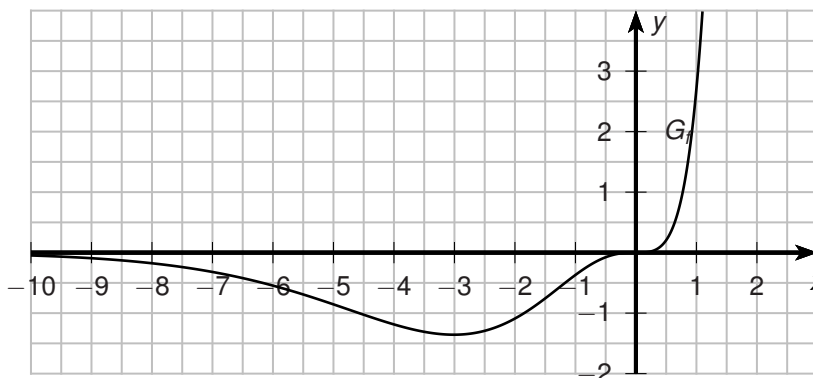
Der Punkt, in dem die beiden Graphen ineinander übergehen, hat die gleiche x -Koordinate wie der Wendepunkt des Graphen von f_2 .

Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen von p_1 und p_2 .

(7 BE)

Aufgabe 16: Murmelbahn**EH S. 171****WTR-Aufgabe**

1. Gegeben ist der Graph G_f einer auf \mathbb{R} definierten Funktion f (siehe Abbildung 26).

**Abb. 26**

a) Entnehmen Sie der Abbildung 26 die Koordinaten des Tiefpunktes und **geben** Sie sie **an**. **Zeichnen** Sie die Wendepunkte **ein**. **(2 BE)**

b) **Beschreiben** Sie unter Verwendung von Fachbegriffen das Steigungs- und das Krümmungsverhalten im abgebildeten Bereich. Unterteilen Sie dazu den Graphen von G_f in geeignete Intervalle. **(3 BE)**

c) **Beurteilen** Sie unter Bezug auf die Definitionen von Achsen- bzw. Punktsymmetrie von Funktionsgraphen die beiden folgenden Aussagen:

- G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.
- G_f ist achsensymmetrisch zur Geraden $x = -3$.

(4 BE)

d) Für die Steigung der Geraden zwischen den Punkten $(a|f(a))$ und $(b|f(b))$ mit $a = -4$ und $b = 0$ werden drei Terme vorgeschlagen:

$$(I) \quad f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \quad (II) \quad \frac{f'(a)+f'(b)}{2} \quad (III) \quad \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f'(x) dx$$

Entscheiden Sie – auch unter Bezugnahme auf Abbildung 26 – für jeden Term, ob er die genannte Steigung angibt.

Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

(5 BE)

Gegeben ist eine andere Funktion k mit $k(x) = e^x \cdot (x^3 - 1)$ und $D = \mathbb{R}$.

e) **Zeigen** Sie durch Ableiten der Funktion k , dass gilt: $k'(x) = e^x \cdot (x^3 + 3x^2 - 1)$ **(2 BE)**

- f) **Berechnen** Sie die Stellen, an denen der Graph G_k von k den Graph G_h der Funktion h mit $h(x) = x^3 - 1$, $D = \mathbb{R}$ schneidet.
Berechnen Sie den Betrag des Winkels, den G_k und G_h an einem ihrer Schnittpunkte einschließen.
(Zur Kontrolle: Die einzigen Schnittstellen sind $x = 0$ und $x = 1$.) (5 BE)
- g) Die auf \mathbb{R} definierte Funktion K mit $K(x) = (x^3 - 3x^2 + 6x - 7) \cdot e^x$ ist eine Stammfunktion von k .
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks, das von G_k und G_h eingeschlossen wird. (4 BE)
- Zu jeder reellen Zahl $t \leq 0$ ist eine Funktion k_t mit $k_t(x) = e^x \cdot (x^3 + t)$ mit $D = \mathbb{R}$ definiert.
- h) Der Graph von k_{-1} heiße G_{-1} .
Zeichnen Sie G_{-1} in das Koordinatensystem in Abbildung 26 ein. (3 BE)
- i) Die Funktion f , deren Graph in Abbildung 26 dargestellt ist, gehört zur Funktionenschar k_t .
Geben Sie den dazugehörigen Wert von t an. (2 BE)
2. Für $x \in [-10; 0]$ und für geeignete Werte von t kann der Längsschnitt einer Murmelbahn mithilfe des Graphen zu k_t modelliert werden. Die als punktförmig angenommene Murmel bewegt sich dabei von links nach rechts. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Dezimeter in der Realität.
Für positive x -Werte soll die Murmelbahn geradlinig fortgesetzt werden.
An der Stelle $x = 0$ soll deshalb ein knickfreier Übergang vom Graphen von k_t in eine Gerade mit der Steigung $-\frac{1}{2}$ erfolgen. Es gilt: $k'_t(x) = e^x \cdot (x^3 + 3x^2 + t)$.
- a) **Berechnen** Sie die Gleichung der Geraden und **geben** Sie den dazugehörigen Wert von t an.
(Zur Kontrolle: $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, $t = -\frac{1}{2}$) (3 BE)
- b) Sei $t = -\frac{1}{2}$. Der Start der Murmel befindet sich im Punkt mit der x -Koordinate -10 . Die Murmel rollt und befindet sich zu einem gewissen späteren Zeitpunkt im geradlinigen Abschnitt der Bahn. Der Höhenunterschied zum Start beträgt dann 2 dm.
Berechnen Sie den horizontalen Abstand zwischen dem Ort der Murmel und dem Startpunkt in der Maßeinheit Meter. (4 BE)
- c) Für eine beliebige Funktion r mit $D = \mathbb{R}$ sowie für die Funktion $k_{-\frac{1}{2}}$ wird folgende Aussage getroffen:
Die Lösungen der Gleichung $(x + 1) \cdot (r(x) - k_{-\frac{1}{2}}(x)) = 0$ sind die Stellen gemeinsamer Punkte der Graphen von r und $k_{-\frac{1}{2}}$.
Beurteilen Sie diese Aussage. (3 BE)

3. Gegeben ist die Funktionenschar g_a mit $g_a(x) = e^{3x+a} - a \cdot x$, $D = \mathbb{R}$

a) **Zeigen** Sie, dass jede Scharkurve mit positivem Parameter a genau einen Tiefpunkt besitzt, und **berechnen** Sie die Minimalstelle.

(Zur Kontrolle: Minimalstelle bei $x = \frac{1}{3} (\ln(\frac{1}{3}a) - a)$)

Zeigen Sie, dass der Tiefpunkt der Scharkurve zu $a = 3$ nicht auf der Geraden $y = x$ liegt.

(6 BE)

b) Sei jetzt $a = 0$. Der Graph von g_0 rotiert zwischen 0 und einer positiven Stelle z um die x -Achse und erzeugt dabei einen Rotationskörper des Volumens 10.

Berechnen Sie z .

(4 BE)

3 Analytische Geometrie

3.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

Aufgabe 17: Designerentwurf

EH S. 177

WTR-Aufgabe

Ein Designer entwirft mithilfe einer CAD-Software ein Dekorationsobjekt für ein Juweliergeschäft. Das Ausgangsmaterial für das Objekt ist ein Metallquader. Die Eckpunkte des Quaders sind im räumlichen Koordinatensystem:

$$A(2|-2|0), B(2|3|0), C(-2|3|0), D(-2|-2|0), \\ E(2|-2|3), F(2|3|3), G(-2|3|3) \text{ und } H(-2|-2|3).$$

Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Zentimeter in der Realität (siehe Abbildung 27 in der Anlage).

Der Designer plant zunächst, aus dem gegebenen Quader eine Pyramide $ABCD S$ zu konstruieren, deren Spitze bei $S(0|0,5|3)$ liegt.

- a) **Zeichnen** Sie die Pyramide in die Abbildung 27 in der Anlage ein. **(3 BE)**
- b) **Zeigen** Sie, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck, aber kein Quadrat ist. **(3 BE)**
- c) **Bestimmen** Sie die Ebenengleichung der Ebene E_1 , in der das Dreieck ABS liegt, in Koordinatenform.
(Zur Kontrolle: $E_1 : 3x_1 + 2x_3 = 6$) **(3 BE)**
- d) **Bestimmen** Sie den Neigungswinkel des Dreiecks ABS gegenüber der Grundfläche der Pyramide. **(3 BE)**
- e) **Beurteilen** Sie, ob die Kante \overline{DS} die x_3 -Achse schneidet. **(3 BE)**
- f) Der Designer überlegt, an der unteren Kante \overline{AB} einen kleinen Diamanten zu befestigen, der die Strecke \overline{AB} im Verhältnis $2 : 3$ aufteilt.
Bestimmen Sie die beiden möglichen Positionen des Diamanten. **(3 BE)**
- g) Der Designer konstruiert mit seinem CAD-Programm aus dem Quader eine neue Pyramide mit rechteckiger Grundfläche, aber kleinerem Volumen. Die Kante \overline{AD} lässt er gleich, die neue Pyramide hat eine Höhe von 2 cm und ein Volumen von 9 cm^3 .
Bestimmen Sie die Koordinaten einer möglichen neuen Spitze und die beiden neuen Eckpunkte der Pyramidengrundfläche. **(2 BE)**

Anlage zur Aufgabe „Designerentwurf“

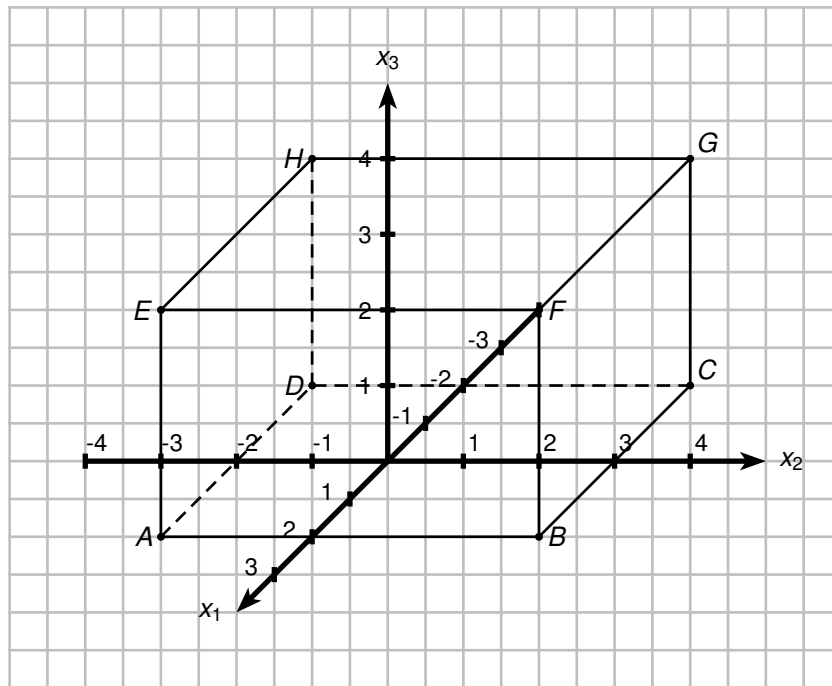


Abb. 27

Aufgabe 18: One World Trade Center**EH S. 180****18.1 WTR-Fassung**

Der obere Teil des *One World Trade Center* in New York City ist ein Turm. Die Grundfläche dieses Turms lässt sich in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft durch das Quadrat $ABCD$ mit

$$A(30,5 | -30,5 | 0), B(30,5 | 30,5 | 0), C(-30,5 | 30,5 | 0) \text{ und } D(-30,5 | -30,5 | 0)$$

beschreiben (siehe Abbildung 28 in der Anlage).

Die Eckpunkte der quadratischen Deckfläche $PQRS$ des Turms haben die Koordinaten

$$P(30,5 | 0 | 361), Q(0 | 30,5 | 361), R(-30,5 | 0 | 361) \text{ und } S(0 | -30,5 | 361).$$

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität.

- a) Zeichnen** Sie die Draufsicht des Turms, also die senkrechte Projektion in die x_1 - x_2 -Ebene. **Zeigen** Sie, dass die Eckpunkte der projizierten Deckfläche auf den Seiten der Grundfläche liegen. **(4 BE)**
- b)** Die Grund- und die Deckfläche des Turms sind durch ein umlaufendes Band von Dreiecken verbunden (siehe Abbildung 28 in der Anlage). **Bestätigen** Sie, dass die Außenwand PBQ ein gleichschenkliges, aber kein gleichseitiges Dreieck ist. **(2 BE)**
- c) Begründen** Sie, dass die Ebene, die die drei Punkte A , B und P enthält, durch die Gleichung $x_1 = 30,5$ beschrieben werden kann. **(1 BE)**
- d)** Die Seitenfläche PBQ liegt in einer Ebene E . **Ermitteln** Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.
(Zur Kontrolle: Es ist $E : 722x_1 + 722x_2 + 61x_3 = 44042$.) **(3 BE)**
- e) Berechnen** Sie die Größe des Neigungswinkels der Wand PBQ gegenüber der Grundfläche des Turms. **(3 BE)**
- f) Bestimmen** Sie die Länge der Strecke $\overline{P_2Q_2}$ im Dreieck PBQ für $x_3 = 200$ (siehe Abbildung 28 in der Anlage). **(4 BE)**
- g)** Die Kante \overline{AP} liegt auf einer Geraden g_1 und die Kante \overline{CR} liegt auf einer Geraden g_2 . **Begründen** Sie, dass die Geraden g_1 und g_2 windschief zueinander liegen. **(3 BE)**

Anlage zur Aufgabe „One World Trade Center“

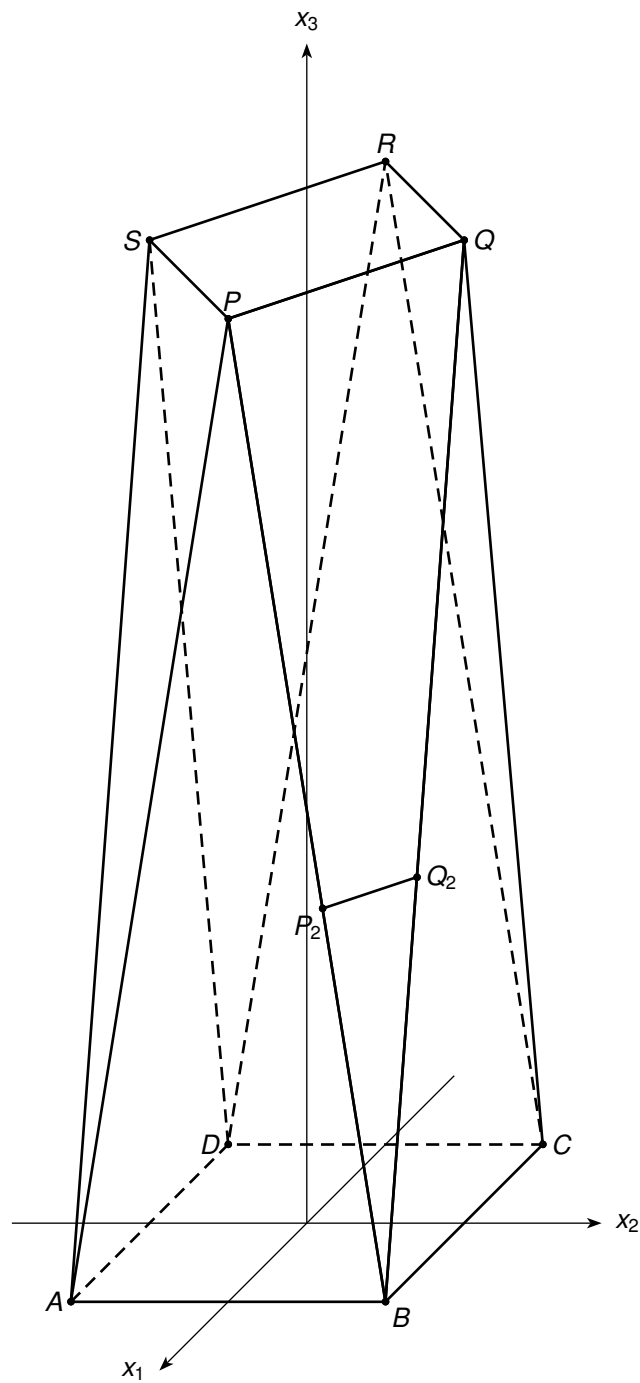


Abb. 28: Das Schrägbild des Turmes. Die Skizze ist nicht maßstabsgetreu.

18.2 CAS-Fassung

Die CAS Aufgabe One World Trade Center ist eine Modifikation der Aufgabe One World Trade Center für WTR (siehe Seite 58). Die hier fehlenden Vortexte sind identisch.

Die Aufgabenteile **a)** und **b)** sind identisch zur WTR-Fassung.

c) Identisch zur WTR-Fassung, Aufgabenteil d). **(2 BE)**

d) Identisch zur WTR-Fassung, Aufgabenteil e). **(2 BE)**

e) Identisch zur WTR-Fassung, Aufgabenteil f). **(4 BE)**

f) Identisch zur WTR-Fassung, Aufgabenteil g). **(3 BE)**

g) Der Flächeninhalt F der Querschnittsfläche des Turms in der Höhe h über der Grundfläche lässt sich mithilfe einer quadratischen Funktion berechnen:

$$F(h) = a \cdot h^2 + b \quad \text{für } 0 \leq h \leq 361 \quad \text{und} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie die Werte für a und b .

Ermitteln Sie, in welcher Höhe h der Flächeninhalt F nur noch 70 % des Flächeninhalts der Grundfläche entspricht. **(3 BE)**

Aufgabe 19: Pagode

EH S. 183

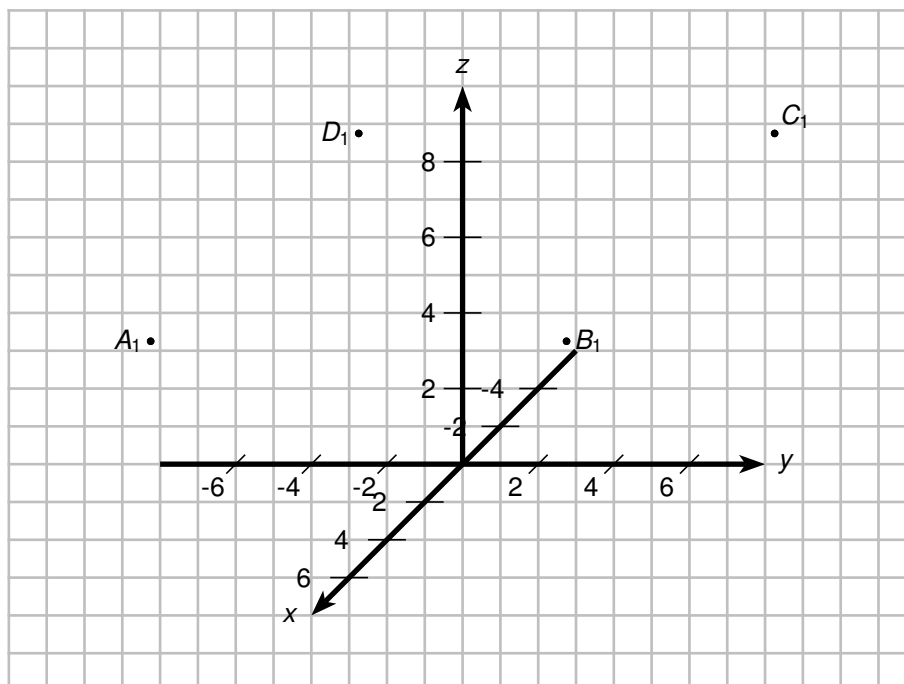
WTR-Aufgabe

Die abgebildete Pagode, Zeichen ostasiatischer Architektur, steht im Hamburger Tierpark Hagenbeck. Jede der drei Dachetagen besteht aus vier Dachflächen gleicher Form und Größe. Die Dachflächen der mittleren und oberen Etage sind jeweils parallel zu einer Dachfläche der unteren Etage. In einem kartesischen Koordinatensystem können die Dachflächen der unteren Etage modellhaft als Vierecke dargestellt werden. Die Punkte $A_1(5,5 | -5,5 | 6)$, $B_1(5,5 | 5,5 | 6)$, $C_1(-5,5 | 5,5 | 6)$, $D_1(-5,5 | -5,5 | 6)$, $A_2(2 | -2 | 8,1)$, $B_2(2 | 2 | 8,1)$, $C_2(-2 | 2 | 8,1)$ und $D_2(-2 | -2 | 8,1)$ sind die Eckpunkte dieser vier Vierecke. Dabei beschreibt die xy -Ebene die Horizontale; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.



© Foto mit freundlicher Genehmigung von Tierpark Hagenbeck

- a) **Zeichnen** Sie in das abgebildete Koordinatensystem für die untere Dachetage die fehlenden Eckpunkte sowie die Strecken **ein**, die die Kanten der Dachflächen darstellen.



(3 BE)

- b) **Zeigen** Sie rechnerisch, dass das Viereck $A_1B_1B_2A_2$ ein Trapez ist, in dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.

Begründen Sie, dass es sich nicht um ein Parallelogramm handelt.

(3 BE)

- c) **Geben** Sie die Koordinaten der Mittelpunkte M_1 und M_2 der Seiten A_1B_1 bzw. A_2B_2 an.
Berechnen Sie den gesamten Inhalt der Dachflächen der unteren Etage in Quadratmetern. (5 BE)

- d) Die Strecke $\overline{A_1A_2}$ ist Teil einer Geraden g .
Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von g mit der z -Achse. (3 BE)

Das Viereck $A_1B_1B_2A_2$ liegt in der Ebene $E : 3x + 5z = 46,5$ und stellt die untere der drei Dachflächen auf der Südseite der Pagode dar.

- e) **Berechnen** Sie den Neigungswinkel dieser Dachfläche gegenüber der Horizontalen. (2 BE)

- f) Auch die beiden Dachflächen der mittleren und oberen Etage auf der Südseite der Pagode können im Modell jeweils durch ein Viereck dargestellt werden. Die Ebenen, in denen diese beiden Vierecke liegen, werden durch zwei der folgenden Gleichungen beschrieben.

Ordnen Sie die beiden Dachflächen jeweils einer Gleichung **zu** und **begründen** Sie Ihre Zuordnung.

I $3x + 8z = 46,5$

III $3x + 5z = 58$

V $3x + 5z = 35$

II $3x + 5z = 24,5$

IV $3x + 10z = 46,5$

VI $3x + 5z = 68,5$

(4 BE)

Aufgabe 20: Pyramide**EH S. 186****CAS-Aufgabe**

In einem kartesischen Koordinatensystem ist die gerade Pyramide $ABCD$ mit $A(0|0|0)$, $B(5|0|0)$, $C(5|5|0)$ und $D(0|5|0)$ sowie der Spitze $S(2,5|2,5|3,9)$ gegeben.

- a) **Zeichnen** Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem **ein**. **(3 BE)**
- b) **Begründen** Sie ohne Verwendung von Vektoren, dass die Grundfläche der Pyramide ein Quadrat ist. **(2 BE)**
- c) **Bestimmen** Sie den Inhalt einer Seitenfläche der Pyramide. **(2 BE)**
- d) Die Punkte A , B und S liegen in einer Ebene E .
Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. **(3 BE)**

Die Pyramide stellt modellhaft ein geschlossenes Zelt dar, das auf horizontalem Untergrund steht. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

- e) **Bestimmen** Sie die Größe des Neigungswinkels einer Zeltwand gegenüber der Horizontalen. **(2 BE)**
- f) Auf das Zelt treffendes Sonnenlicht lässt sich im Modell zu einem bestimmten Zeitpunkt durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 7,5 \\ -12,5 \\ -3,9 \end{pmatrix}$ beschreiben. Zu diesem Zeitpunkt trifft Sonnenlicht durch ein kleines Loch in einer Zeltwand genau auf den Eckpunkt des Zeltbodens, der durch den Punkt B beschrieben wird. Der Punkt $L(x_L|y_L|1,3)$ stellt das Loch in der Zeltwand dar.
Bestimmen Sie die Werte von x_L und y_L . **(3 BE)**
- g) Auf einem Teil des Zeltbodens hat ein 1,20 m großes Kind die Möglichkeit, aufrecht zu stehen.
Bestimmen Sie auf der Grundlage des Modells den Anteil des Flächeninhalts dieses Teils am Flächeninhalt des gesamten Zeltbodens.
Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen anhand einer geeignet beschrifteten Skizze. **(5 BE)**

3.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

Aufgabe 21: Designerentwurf

EH S. 189

WTR-Aufgabe

1. Ein Designer entwirft mithilfe einer CAD-Software ein Dekorationsobjekt für ein Juweliergeschäft. Das Ausgangsmaterial für das Objekt ist ein Metallquader. Die Eckpunkte des Quaders sind im räumlichen Koordinatensystem:
- $$A(2|-2|0), B(2|3|0), C(-2|3|0), D(-2|-2|0),$$
- $$E(2|-2|3), F(2|3|3), G(-2|3|3) \text{ und } H(-2|-2|3).$$
- Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Zentimeter in der Realität (siehe Abbildung 29 in der Anlage).
- Der Designer plant zunächst, aus dem gegebenen Quader eine Pyramide $ABCD S$ zu konstruieren, deren Spitze bei $S(0|0,5|3)$ liegt.
- a) **Zeichnen** Sie die Pyramide in die Abbildung 29 in der Anlage ein. (3 BE)
- b) Die Oberfläche der Metallpyramide soll vergoldet werden.
Berechnen Sie die Oberfläche der Pyramide. (3 BE)
- c) **Bestimmen** Sie die Ebenengleichung der Ebene E_1 , in der das Dreieck ABS liegt, in Koordinatenform.
 (Zur Kontrolle: $E_1 : 3x_1 + 2x_3 = 6$) (3 BE)
- d) Das Dreieck BCS liegt in der Ebene $E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3,6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1,2 \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie den Winkel, den die Dreiecksflächen ABS und BCS miteinander bilden. (5 BE)
- e) **Beurteilen** Sie, ob die Kante \overline{DS} die x_3 -Achse schneidet. (3 BE)
- f) Der Designer überlegt, an der unteren Kante \overline{AB} einen kleinen Diamanten zu befestigen, der die Strecke \overline{AB} im Verhältnis 2 : 3 aufteilt.
Bestimmen Sie die beiden möglichen Positionen des Diamanten. (3 BE)

2. Gegeben sind eine Ebene F in Koordinatenform $F : x_2 + x_3 = 4$ und die folgenden Ebenengleichungen:

$$F_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } s, t \in \mathbb{R}$$

$$F_2 : -x_2 - x_3 = 8$$

$$F_3 : x_2 - x_3 = 4$$

$$F_4 : x_2 + x_3 = -8$$

$$F_5 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } s, t \in \mathbb{R}$$

$$F_6 : -x_2 + 2x_3 = 4$$

Zwei der angegebenen Ebenen sind orthogonal zu F .

Geben Sie diese beiden Ebenen **an** und **begründen** Sie ihre Auswahl.

(5 BE)

Anlage zur Aufgabe „Designerentwurf“

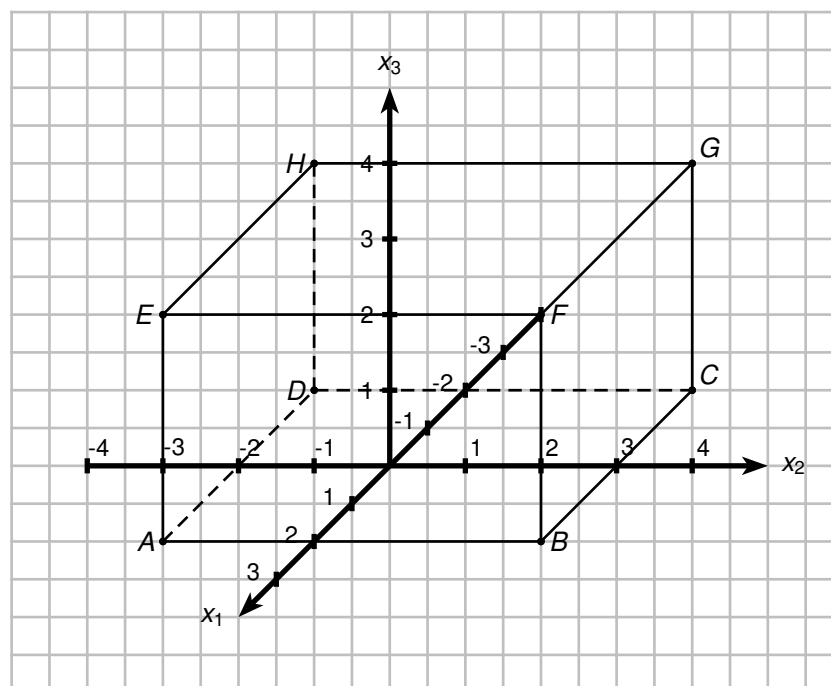


Abb. 29

Aufgabe 22: One World Trade Center**EH S. 193****22.1 WTR-Fassung**

Der obere Teil des *One World Trade Center* in New York City ist ein Turm. Die Grundfläche dieses Turms lässt sich in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft durch das Quadrat $ABCD$ mit

$$A(30,5 | -30,5 | 0), B(30,5 | 30,5 | 0), C(-30,5 | 30,5 | 0) \text{ und } D(-30,5 | -30,5 | 0)$$

beschreiben (siehe Abbildung 31 in der Anlage).

Die Eckpunkte der quadratischen Deckfläche $PQRS$ des Turms haben die Koordinaten

$$P(30,5 | 0 | 361), Q(0 | 30,5 | 361), R(-30,5 | 0 | 361) \text{ und } S(0 | -30,5 | 361).$$

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität.

- a) Zeichnen** Sie die Draufsicht des Turms, also die senkrechte Projektion in die x_1 - x_2 -Ebene. **Zeigen** Sie, dass die Eckpunkte der projizierten Deckfläche auf den Seiten der Grundfläche liegen. **(4 BE)**
- b)** Die Grund- und die Deckfläche des Turms sind durch ein umlaufendes Band von Dreiecken verbunden (siehe Abbildung 31 in der Anlage). **Bestätigen** Sie, dass die Außenwand PBQ ein gleichschenkliges, aber kein gleichseitiges Dreieck ist. **(2 BE)**
- c)** Die Seitenfläche PBQ liegt in einer Ebene E . **Ermitteln** Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.
(Zur Kontrolle: Es ist $E : 722x_1 + 722x_2 + 61x_3 = 44042$.) **(3 BE)**
- d) Berechnen** Sie die Größe des Neigungswinkels der Seitenfläche PBQ gegen die Seitenfläche APB . **(3 BE)**
- e)** Die Kante \overline{AP} liegt auf einer Geraden g_1 und die Kante \overline{CR} liegt auf einer Geraden g_2 . **Begründen** Sie, dass die Geraden g_1 und g_2 windschief zueinander liegen. **(3 BE)**
- f) Ermitteln** Sie rechnerisch den Abstand von g_1 und g_2 . **(3 BE)**

Die Querschnittsfläche des Turms in der Höhe h_A über der Grundfläche ist ein Achteck, in dem genau zwei verschiedene Seitenlängen s_1 und s_2 vorkommen. Dabei sind gleiche Seitenlängen nicht benachbart (siehe Abbildung 30 und Abbildung 31 in der Anlage).

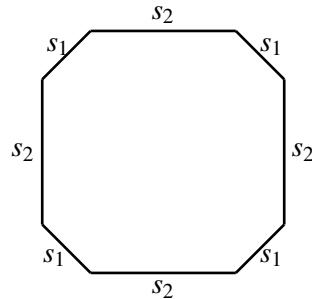


Abb. 30: Achteck mit den Kanten s_1 und s_2 .

Für die eine Seitenlänge s_1 gilt $s_1 = \frac{h_A}{361} \cdot |\vec{PQ}|$.

g) Zeigen Sie anhand einer geeigneten Skizze, dass für die andere Seitenlänge s_2 gilt:

$$s_2 = \left(1 - \frac{h_A}{361}\right) \cdot |\vec{AB}|$$

(4 BE)

h) Ermitteln Sie, in welcher Höhe über der Grundfläche die Querschnittsfläche die Form eines regelmäßigen Achtecks hat.

(3 BE)

Anlage zur Aufgabe „One World Trade Center“

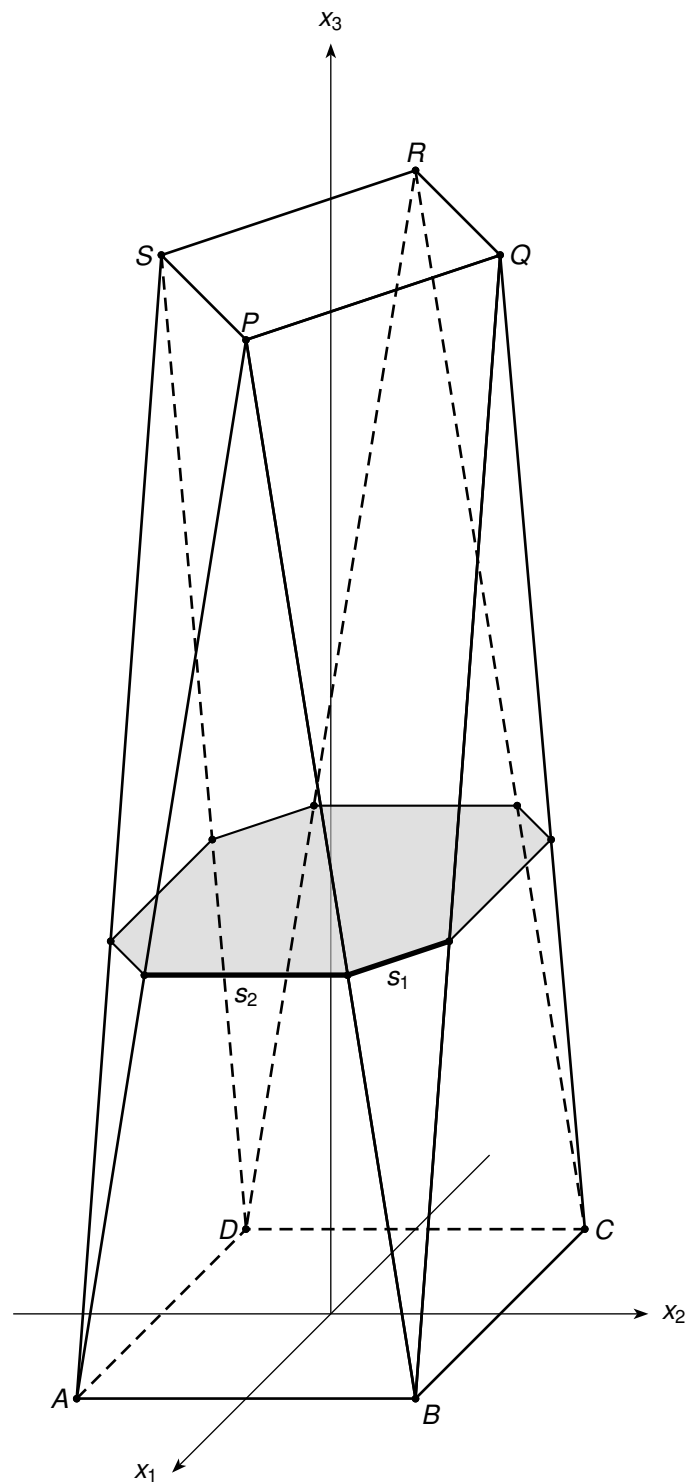


Abb. 31: Das Schrägbild des Turmes. Die Skizze ist nicht maßstabsgetreu.

22.2 CAS-Fassung

Die CAS Aufgabe One World Trade Center ist eine Modifikation der Aufgabe One World Trade Center für WTR (siehe Seite 66). Die hier fehlenden Vortexte sind identisch.

Die Aufgabenteile **a - h** sind identisch zur WTR-Fassung.

- i) Der Flächeninhalt F der Querschnittsfläche des Turms in der Höhe h über der Grundfläche lässt sich mithilfe einer quadratischen Funktion berechnen:

$$F(h) = a \cdot h^2 + b \quad \text{für } 0 \leq h \leq 361 \quad \text{und} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie die Werte für a und b .

Ermitteln Sie, in welcher Höhe h der Flächeninhalt F nur noch 70 % des Flächeninhalts der Grundfläche entspricht. **(3 BE)**

Aufgabe 23: Solarmodule**EH S. 197****WTR-Aufgabe**

In einem kartesischen Koordinatensystem ist das Viereck $ABCD$ mit $A(0|0|1)$, $B(2|6|1)$, $C(-4|8|5)$ und $D(-6|2|5)$ gegeben. Der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks wird mit M bezeichnet.

a) **Begründen** Sie, dass die Gerade AB parallel zur x_1x_2 -Ebene verläuft. **(2 BE)**

b) **Weisen** Sie **nach**, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist.

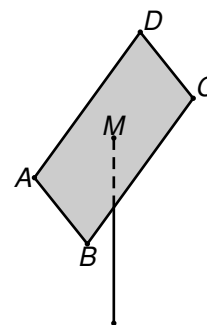
Geben Sie die Koordinaten von M **an**. **(4 BE)**

c) Das Rechteck $ABCD$ liegt in einer Ebene E .

Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(Zur Kontrolle: $3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0$) **(4 BE)**

Solarmodule werden auf einem Trägergestell montiert, das an einem vertikal stehenden Metallrohr befestigt ist. Die gesamte Fläche der Solarmodule wird zu einem bestimmten Zeitpunkt modellhaft durch das Rechteck $ABCD$ dargestellt. Das Metallrohr lässt sich im Modell durch eine Strecke beschreiben, der Befestigungspunkt am Trägergestell durch den Punkt M (vgl. Abbildung 32). Im Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2 -Ebene die Horizontale; eine Längeneinheit entspricht 0,8 m in der Wirklichkeit.

**Abb. 32**

d) Im Sinne eines möglichst großen Energieertrags sollte der Neigungswinkel φ der Modulfläche gegenüber der Horizontalen zwischen 30° und 36° liegen.

Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist. **(3 BE)**

e) Zum betrachteten Zeitpunkt fällt das Sonnenlicht, das im Modell durch parallele Geraden dargestellt wird, senkrecht auf die Fläche der Solarmodule. Diese Fläche erzeugt auf dem horizontalen Untergrund einen rechteckigen Schatten.

Begründen Sie unter Verwendung einer geeignet beschrifteten Skizze, dass der Flächeninhalt des Schattens mithilfe des Terms $|\vec{AB}| \cdot \frac{|\vec{AD}|}{\cos \varphi} \cdot (0,8 \text{ m})^2$ berechnet werden kann. **(5 BE)**

Um die Solarmodule während eines Tages ständig möglichst gut nach der Sonneneinstrahlung ausrichten zu können, lässt sich das Metallrohr mit dem Trägergestell um die Längsachse des Rohrs drehen.

Die Neigung des Trägergestells bleibt dabei unverändert.

f) Betrachtet wird der untere linke Eckpunkt der Modulfläche, der im Modell durch den Punkt A dargestellt wird.

Berechnen Sie den Radius des Kreises, auf dem sich dieser Eckpunkt bei der Drehung des Metallrohrs bewegt. **(4 BE)**

g) **Begründen** Sie ohne zu rechnen, dass der in Teilaufgabe f) ermittelte Radius entsprechend auch für den unteren rechten Eckpunkt der Modulfläche gilt. **(3 BE)**

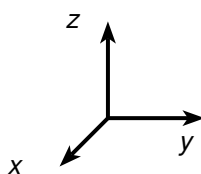
Aufgabe 24: Zelt**EH S. 199****CAS-Aufgabe**

Ein geschlossenes Zelt, das auf horizontalem Untergrund steht, hat die Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die seitlichen Kanten der Zeltwände werden durch vier gleich lange Stangen gebildet. Das Zelt ist 3,90 m hoch, die Seitenlänge des Zeltbodens beträgt 5,00 m.

Das Zelt kann in einem kartesischen Koordinatensystem durch eine Pyramide $ABCD$ mit der Spitze S modellhaft dargestellt werden.

Der Punkt A liegt im Koordinatenursprung, B auf dem positiven Teil der x -Achse und D auf dem positiven Teil der y -Achse. Der Punkt C hat die Koordinaten $(5|5|0)$, der Mittelpunkt der Grundfläche wird mit M bezeichnet. Das Dreieck ABS liegt in der Ebene $E : -39y + 25z = 0$. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

- a) **Geben** Sie die Koordinaten der Punkte B , D , M und S **an** und **zeichnen** Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem gemäß Abbildung 33 **ein**.

**Abb. 33****(5 BE)**

- b) Jeweils zwei benachbarte Zeltwände schließen im Inneren des Zelts einen stumpfen Winkel ein.

Ermitteln Sie dessen Größe.

(4 BE)

- c) Im Zelt ist eine Lichtquelle so aufgehängt, dass sie von jeder der vier Wände einen Abstand von 80 cm hat.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts, der die Lichtquelle im Modell darstellt. **(4 BE)**

- d) Der Ortsvektor eines Punkts P lässt sich in der Form

$$\vec{OP} = r \cdot \vec{OC} + s \cdot \vec{OS}$$

mit $r, s \in [0; 1]$ und $r + s = 1$ darstellen.

Weisen Sie **nach**, dass P auf der Strecke \overline{CS} liegt.

(3 BE)

Betrachtet wird die Zeltwand, die im Modell durch das Dreieck CDS dargestellt wird. Ein Teil dieser Zeltwand kann mithilfe zweier weiterer Stangen zu einem horizontalen Vordach aufgespannt werden (vgl. Abbildung 34).

Die dadurch entstehende Öffnung in der Zeltwand kann im Modell durch ein Rechteck dargestellt werden. Eine Seite dieses Rechtecks liegt so auf der Strecke \overline{CD} , dass der eine Endpunkt dieser Seite von C ebenso weit entfernt ist wie der andere Endpunkt von D .

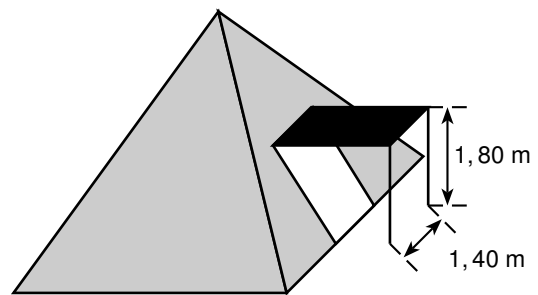


Abb. 34

e) **Weisen Sie nach**, dass die Länge des Vordachs etwa 2,14 m beträgt.

Alle Punkte derjenigen Kante des Vordachs, an deren Enden die beiden Stangen befestigt sind, haben im Modell die gleiche y -Koordinate.

Bestimmen Sie diese y -Koordinate.

(Zur Kontrolle: Die y -Koordinate beträgt etwa 5,98.)

(4 BE)

f) Auf das Zelt treffendes Sonnenlicht lässt sich im Modell zu einem bestimmten Zeitpunkt durch

parallele Geraden mit einem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0,5 \\ -4,2 \\ a \end{pmatrix}$ beschreiben. Zu diesem Zeitpunkt

trifft Sonnenlicht durch ein kleines Loch im horizontalen Vordach genau auf den Mittelpunkt des Zeltbodens.

Für a kommen verschiedene ganzzahlige Werte infrage.

Ermitteln Sie einen dieser Werte und **geben** Sie die Koordinaten des zugehörigen Punkts **an**, der im Modell eine mögliche Position des Lochs im Vordach darstellt.

(5 BE)

4 Lineare Algebra

4.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

Aufgabe 25: Wölfe

EH S. 202

CAS-Aufgabe

1. Wölfe leben im Rudelverband. Ein Rudel besteht aus einem Elternpaar, das das Rudel führt, und dessen Nachkommen.

Betrachtet wird die Entwicklung einer Population der weiblichen Tiere eines Wolfsbestands in einem großen, abgeschlossenen Gebiet. Im ersten Lebensjahr werden die Tiere als Welpen und im zweiten als Jungtiere bezeichnet. Ab dem dritten Lebensjahr sind die Tiere geschlechtsreif und werden Rudelführerinnen. Jede Rudelführerin bringt pro Jahr durchschnittlich drei weibliche Welpen zur Welt.

In einem Modell werden Zusammensetzungen der Population der weiblichen Wölfe durch

Vektoren der Form $\begin{pmatrix} W \\ J \\ R \end{pmatrix}$ dargestellt, wobei W die Anzahl der Welpen, J die Anzahl der

Jungtiere und R die Anzahl der Rudelführerinnen bezeichnet. Zu Beginn der Beobachtung wird die Zusammensetzung der Population durch den Vektor \vec{v}_0 dargestellt.

Die Entwicklung der Population von einem Jahr n zum nächsten lässt sich zunächst durch die

Matrix $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,8 \end{pmatrix}$ und die Gleichung $\vec{v}_{n+1} = L \cdot \vec{v}_n$ beschreiben.

- a) **Stellen** Sie die Entwicklung der Population in einem Übergangdiagramm dar. **(3 BE)**

- b) **Nennen** Sie den Eintrag der Matrix L , der die Überlebensrate der Welpen angibt.

Beschreiben Sie, wie sich dieser Eintrag bei einer Erhöhung der Sterblichkeitsrate der Welpen ändern würde. **(2 BE)**

- c) Zu Beobachtungsbeginn gehören zur Population 39 Rudelführerinnen, ein Jahr später sind es bereits 55.

Bestimmen Sie die Anzahl der Jungtiere zu Beobachtungsbeginn. **(2 BE)**

Zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn ändern sich die Umweltbedingungen und damit die Entwicklung der Population.

Die Entwicklung kann nun im Zwei-Jahres-Rhythmus, d. h. von einem Jahr zum übernächsten,

durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3,75 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0,24 & 0,45 & 0,56 \end{pmatrix}$ und die Gleichung $\vec{v}_{n+2} = M \cdot \vec{v}_n$ beschrieben werden.

Sechs Jahre nach Beobachtungsbeginn wird die Zusammensetzung der Population durch den Vektor $v_6 = \begin{pmatrix} 600 \\ 173 \\ 165 \end{pmatrix}$ dargestellt.

d) Ermitteln Sie die Anzahl der Welpen, Jungtiere und Rudelführerinnen vier Jahre nach Beobachtungsbeginn. **(2 BE)**

e) Bestimmen Sie die Anzahl der Welpen, Jungtiere und Rudelführerinnen acht Jahre nach Beobachtungsbeginn. **(1 BE)**

f) Die Vektoren $\vec{v}_{10} \approx \begin{pmatrix} 2168 \\ 629 \\ 598 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_{12} \approx \begin{pmatrix} 4126 \\ 1195 \\ 1138 \end{pmatrix}$ stellen die Zusammensetzungen der

Population zehn bzw. zwölf Jahre nach Beobachtungsbeginn dar.

Es gibt für bestimmte Vektoren einen Faktor, der die Zunahme der Anzahlen der Welpen, Jungtiere und Rudelführerinnen von einem Jahr zum nächsten beschreibt.

Zeigen Sie anhand der Vektoren \vec{v}_{10} und \vec{v}_{12} , dass dieser Faktor für jede der drei Altersgruppen etwa 1,38 beträgt. **(2 BE)**

g) Beurteilen Sie die Beschreibung der Entwicklung der Population durch die Matrix M hinsichtlich ihrer Eignung zur langfristigen Beschreibung der Entwicklung der Population. **(2 BE)**

2. Gegeben ist die Matrix $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ sowie Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass es keinen Vektor $\vec{u} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gibt, für den $N \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt. **(2 BE)**

b) Für einen Vektor \vec{u} gilt $|\vec{u}|^2 = 1800$.

Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $N \cdot \vec{u} = \vec{u}$. **(4 BE)**

Aufgabe 26: Reptilien**EH S. 204****WTR-Aufgabe**

1. Auf einer Insel lebt eine Reptilienart mit zwei Entwicklungsstadien:
Ei und ausgeschlüpftes Reptil, im Folgenden kurz als Reptil bezeichnet.
Der Bestand an Reptilien wird halbjährlich gezählt.
Die Entwicklung der Population lässt sich modellhaft beschreiben mithilfe der Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 0,16 & 1,6 \\ 0,24 & 0,48 \end{pmatrix}$$

Die Populationsvektoren der i -ten Zählung sind $\vec{v}_i = \begin{pmatrix} e_i \\ r_i \end{pmatrix}$, wobei e_i für die Zahl der Eier und r_i für die Zahl der ausgeschlüpften Reptilien steht. Im Modell gilt $\vec{v}_{i+1} = L \cdot \vec{v}_i$.

- a) Bei der ersten Zählung ($i = 1$) wurden ca. 600 Reptilien gezählt. Die Eier waren im Sand vergraben, sie wurden nicht gezählt. Es wird geschätzt, dass bei der ersten Zählung ca. 1000 Eier vorhanden gewesen sein könnten.

Berechnen Sie für $e_1 = 1000$ und $r_1 = 600$ den Populationsvektor \vec{v}_2 . **(2 BE)**

- b) Bei der zweiten Zählung ($i = 2$) wurden ca. 576 Reptilien gezählt.

Bestätigen Sie mit den Werten $r_1 = 600$ und $r_2 = 576$ den Wert $e_1 = 1200$.

Ermitteln Sie, wie viele Eier zwischen der ersten und zweiten Zählung gelegt wurden.

(3 BE)

- c) **Bestimmen** Sie den Populationsvektor, der laut Modell ein halbes Jahr vor der ersten Zählung anzunehmen ist.

(4 BE)

- d) Die Gleichung $L \cdot \vec{x} = \vec{x}$ hat genau einen Lösungsvektor.

Begründen Sie auf Grundlage dieser Aussage, dass es keine lebende Population geben kann, deren Anzahlen von Eiern und Reptilien von einem Zeitschritt zum nächsten gleich bleiben.

(2 BE)

- e) Das Modell soll verfeinert werden. Die Gruppe der Eier wird unterteilt in die Gruppe der Neugelegten (N), die im letzten halben Jahr gelegt wurden, und die Gruppe der Altgelegten (A), die im Halbjahr davor gelegt wurden.

Die Abbildung 37 zeigt den Übergangsgraphen des verfeinerten Modells.

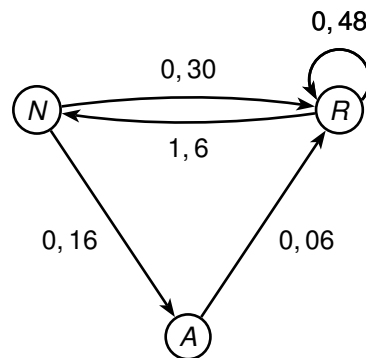


Abb. 35

Bestimmen Sie das Verhältnis $n : a$ der Anzahl neugelegter zur Anzahl altgelegter Eier, für das der gesamte Anteil an Eiern, aus denen ein Reptil im Halbjahr schlüpft, weiterhin dem anfänglichen Modell entspricht. **(3 BE)**

2. Gegeben ist der Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) **Geben** Sie einen von \vec{p} verschiedenen, aber zu \vec{p} kollinearen Vektor an. (1 BE)

b) **Geben** Sie einen zu \vec{p} orthogonalen Vektor an. (1 BE)

c) **Untersuchen** Sie, ob es zwei reelle Zahlen a und b gibt, sodass

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{p}$$

ist.

(2 BE)

d) Die Abbildung 36 zeigt zwei Quader, die jeweils drei Kanten auf den Koordinatenachsen haben. Zwei ihrer Eckpunkte sind mit A und B bezeichnet.

Ermitteln Sie \vec{AB} .

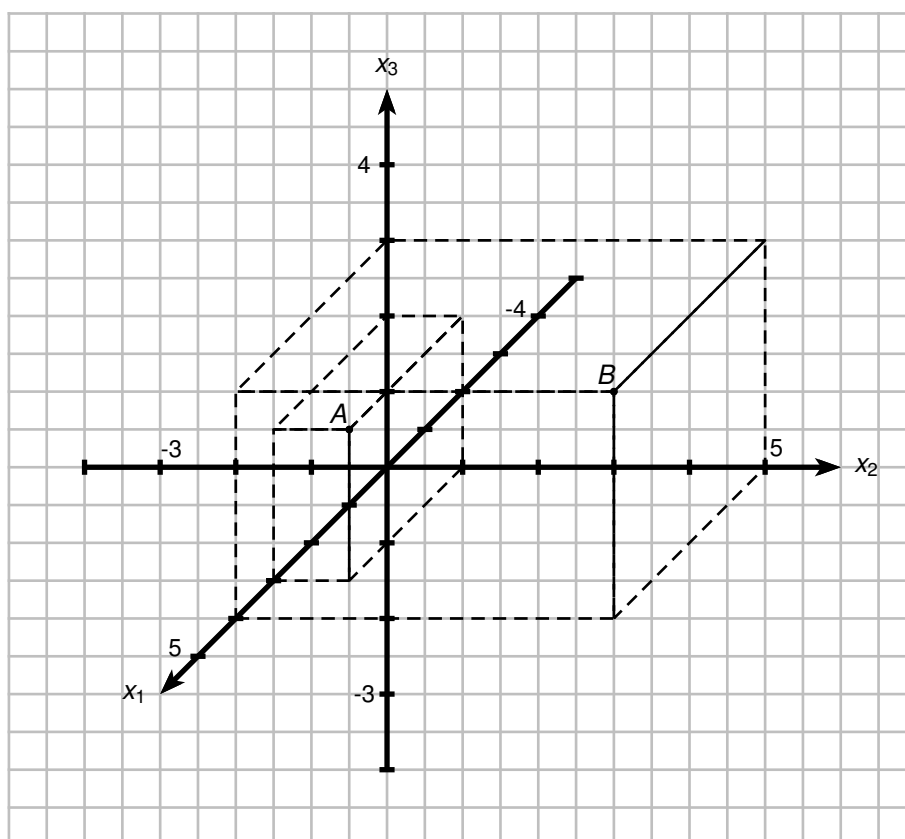


Abb. 36

(2 BE)

Aufgabe 27: Reptilien**EH S. 206****CAS-Aufgabe**

Auf einer Insel lebt eine Reptilienart mit zwei Entwicklungsstadien:

Ei und ausgeschlüpftes Reptil, im Folgenden kurz als Reptil bezeichnet.

Der Bestand an Reptilien wird halbjährlich gezählt.

Die Entwicklung der Population lässt sich modellhaft beschreiben mithilfe der Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 0,16 & 1,6 \\ 0,24 & 0,48 \end{pmatrix}$$

Die Populationsvektoren der i -ten Zählung sind $\vec{v}_i = \begin{pmatrix} e_i \\ r_i \end{pmatrix}$, wobei e_i für die Zahl der Eier und r_i für die Zahl der ausgeschlüpften Reptilien steht. Im Modell gilt $\vec{v}_{i+1} = L \cdot \vec{v}_i$.

- a) **Skizzieren** Sie den Übergangsgraphen. **(2 BE)**
- b) **Berechnen** Sie die zu L inverse Matrix L^{-1} auf zwei Nachkommastellen genau und **interpretieren** Sie das Ergebnis von $L^{-1} \cdot \vec{v}_1$ im Sachkontext. **(2 BE)**
- c) Bei der ersten Zählung ($i = 1$) wurden ca. 600 Reptilien gezählt. Die Eier waren im Sand vergraben, sie wurden nicht gezählt. Es wird geschätzt, dass bei der ersten Zählung ca. 1000 Eier vorhanden gewesen sein könnten.
Berechnen Sie für $e_1 = 1000$ und $r_1 = 600$ den Populationsvektor \vec{v}_2 . **(2 BE)**
- d) Bei der zweiten Zählung ($i = 2$) wurden ca. 576 Reptilien gezählt.
Bestätigen Sie mit den Werten $r_1 = 600$ und $r_2 = 576$ den Wert $e_1 = 1200$.
Ermitteln Sie, wie viele Eier zwischen der ersten und zweiten Zählung gelegt wurden. **(3 BE)**
- e) In Kenntnis der zweiten Zählung und des Wertes $e_1 = 1200$ prognostiziert ein Forscherteam: „Wenn sich die Entwicklungsbedingungen der Reptilienpopulation nicht ändern, werden 8 Jahre nach der zweiten Zählung nur noch halb so viele Eier und Reptilien wie zu Beginn gezählt werden.“
Entscheiden Sie, ob das Forscherteam im Rahmen der Modellierung Recht hat, und **belegen** Sie Ihre Entscheidung durch eine Berechnung. **(4 BE)**
- f) **Untersuchen** Sie, ob es im Rahmen der Modellierung mit der Matrix L eine lebende Population geben kann, bei der die Anzahl der gezählten Eier und Reptilien von einem Zeitschritt zum anderen exakt gleich bleibt. **(3 BE)**

- g) Das Modell soll verfeinert werden. Die Gruppe der Eier wird unterteilt in die Gruppe der Neugelegten (N), die im letzten halben Jahr gelegt wurden, und die Gruppe der Altgelegten (A), die im Halbjahr davor gelegt wurden.

Die Abbildung 37 zeigt den Übergangsgraphen des verfeinerten Modells.

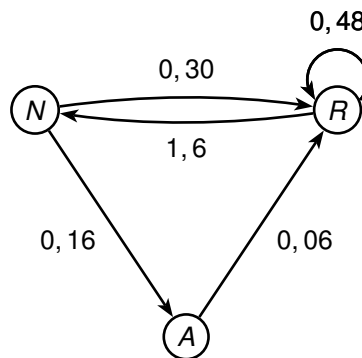


Abb. 37

Der gesamte Anteil an Eiern, aus denen ein Reptil schlüpft, soll weiterhin dem anfänglichen Modell entsprechen.

Ermitteln Sie die im neuen Modell anzunehmenden Anzahlen n_1 bzw. a_1 der Neugelegten bzw. Altgelegten, wenn $e_1 = 1200$ Eiern für die erste Zählung angenommen wird. **(4 BE)**

4.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

Aufgabe 28: Wölfe

EH S. 208

WTR-Aufgabe

1. Wölfe leben im Rudelverband. Ein Rudel besteht aus einem Elternpaar, das das Rudel führt, und dessen Nachkommen.

Betrachtet wird die Entwicklung einer Population der weiblichen Tiere eines Wolfsbestands in einem großen, abgeschlossenen Gebiet. Im ersten Lebensjahr werden die Tiere als Welpen und im zweiten als Jungtiere bezeichnet. Ab dem dritten Lebensjahr sind die Tiere geschlechtsreif und werden Rudelführerinnen. Jede Rudelführerin bringt pro Jahr durchschnittlich drei weibliche Welpen zur Welt.

In einem Modell werden Zusammensetzungen der Population der weiblichen Wölfe durch

Vektoren der Form $\begin{pmatrix} W \\ J \\ R \end{pmatrix}$ dargestellt, wobei W die Anzahl der Welpen, J die Anzahl der

Jungtiere und R die Anzahl der Rudelführerinnen bezeichnet. Zu Beginn der Beobachtung wird die Zusammensetzung der Population durch den Vektor \vec{v}_0 dargestellt.

Die Entwicklung der Population von einem Jahr n zum nächsten lässt sich zunächst durch die

Matrix $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,8 \end{pmatrix}$ und die Gleichung $\vec{v}_{n+1} = L \cdot \vec{v}_n$ beschreiben.

- a) **Stellen** Sie die Entwicklung der Population in einem Übergangendiagramm dar. **(3 BE)**

- b) **Beschreiben** Sie die Bedeutung von x im Sachzusammenhang. **(1 BE)**

- c) 72 % der Tiere sterben innerhalb der ersten zwei Lebensjahre.

Ermitteln Sie den Wert von x . **(2 BE)**

- d) Zu Beobachtungsbeginn gehören zur Population 39 Rudelführerinnen, ein Jahr später sind es bereits 55.

Bestimmen Sie die Anzahl der Jungtiere zu Beobachtungsbeginn. **(2 BE)**

Zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn ändern sich die Umweltbedingungen und damit die Entwicklung der Population.

Die Entwicklung kann nun im Zwei-Jahres-Rhythmus, d. h. von einem Jahr zum übernächsten,

durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3,75 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0,24 & 0,45 & 0,56 \end{pmatrix}$ und die Gleichung $\vec{v}_{n+2} = M \cdot \vec{v}_n$ beschrieben werden.

Sechs Jahre nach Beobachtungsbeginn wird die Zusammensetzung der Population durch

den Vektor $\vec{v}_6 = \begin{pmatrix} 600 \\ 173 \\ 165 \end{pmatrix}$ dargestellt, d. h. die Population besteht aus 938 Tieren.

- e) **Bestimmen** Sie die Anzahl der Welpen, Jungtiere und Rudelführerinnen acht Jahre nach Beobachtungsbeginn. **(2 BE)**

- f) Die Vektoren $\vec{v}_{10} \approx \begin{pmatrix} 2168 \\ 629 \\ 598 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_{12} \approx \begin{pmatrix} 4126 \\ 1195 \\ 1138 \end{pmatrix}$ stellen die Zusammensetzungen der

Population zehn bzw. zwölf Jahre nach Beobachtungsbeginn dar.

Es gibt für bestimmte Vektoren einen Faktor, der die Zunahme der Anzahlen der Welpen, Jungtiere und Rudelführerinnen von einem Jahr zum nächsten beschreibt.

Zeigen Sie anhand der Vektoren \vec{v}_{10} und \vec{v}_{12} , dass dieser Faktor für jede der drei Altersgruppen etwa 1,38 beträgt.

(2 BE)

- g) **Bestimmen** Sie die Lösung der Gleichung $938 \cdot 1,38^{t-6} = 45000$ mit $t \in [6; +\infty[$.

Interpretieren Sie unter Verwendung der Lösung dieser Gleichung die Zahl 45000 im Sachzusammenhang.

(3 BE)

- h) **Beurteilen** Sie die Beschreibung der Entwicklung der Population durch die Matrix M hinsichtlich ihrer Eignung zur langfristigen Beschreibung der Entwicklung der Population.

(2 BE)

2. Betrachtet werden 3×3 -Matrizen N sowie Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, für die $N \cdot \vec{u} = \vec{u}$ gilt.

- a) Die Matrix N^{-1} ist die inverse Matrix zu einer der Matrizen N .

Beurteilen Sie für jede der beiden folgenden Gleichungen, ob es einen Wert von $a \in \mathbb{R}$ gibt, für den die Gleichung erfüllt ist:

- $(N \cdot N^{-1}) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u}$
- $(N + N^{-1}) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u}$

(4 BE)

- b) **Zeigen** Sie für $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$, dass $u_2 = u_3$ gilt.

(4 BE)

Aufgabe 29: Reptilien**EH S. 210****WTR-Aufgabe**

1. Auf einer Insel lebt eine Reptilienart mit zwei Entwicklungsstadien:
Ei und ausgeschlüpftes Reptil, im Folgenden kurz als Reptil bezeichnet.
Der Bestand an Reptilien wird halbjährlich gezählt.
Die Entwicklung der Population lässt sich modellhaft beschreiben mithilfe der Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 0,16 & 1,6 \\ 0,24 & 0,48 \end{pmatrix}$$

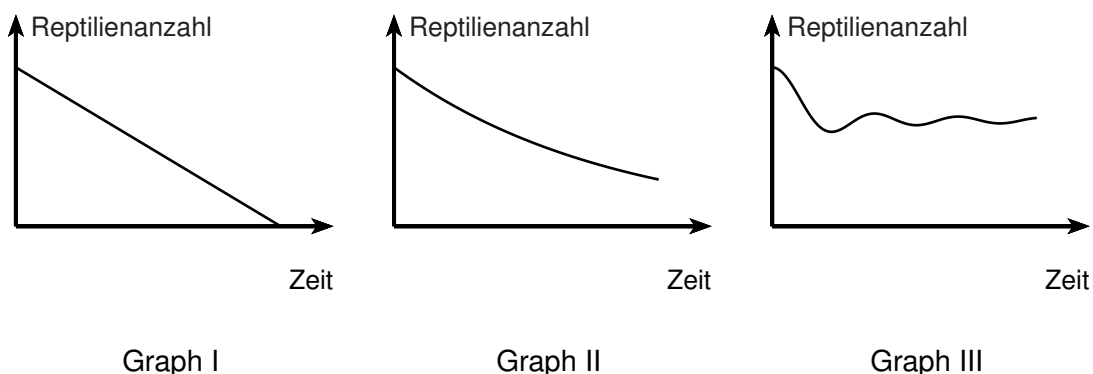
Die Populationsvektoren der i -ten Zählung sind $\vec{v}_i = \begin{pmatrix} e_i \\ r_i \end{pmatrix}$, wobei e_i für die Zahl der Eier und r_i für die Zahl der ausgeschlüpften Reptilien steht. Im Modell gilt $\vec{v}_{i+1} = L \cdot \vec{v}_i$.

- a) **Skizzieren** Sie den Übergangsgraphen. **(2 BE)**
- b) Bei der ersten Zählung ($i = 1$) wurden ca. 600 Reptilien gezählt. Die Eier waren im Sand vergraben, sie wurden nicht gezählt. Es wird geschätzt, dass bei der ersten Zählung ca. 1000 Eier vorhanden gewesen sein könnten.
Berechnen Sie für $e_1 = 1000$ und $r_1 = 600$ den Populationsvektor \vec{v}_2 . **(2 BE)**
- c) **Begründen** Sie aus den Eigenschaften der Matrix heraus:
Je mehr Eier bei der ersten Zählung neben den 600 Reptilien tatsächlich vorhanden waren, desto mehr Eier und Reptilien werden bei der zweiten Zählung vorhanden sein. **(2 BE)**
- d) Bei der zweiten Zählung ($i = 2$) wurden ca. 576 Reptilien gezählt.
Bestätigen Sie mit den Werten $r_1 = 600$ und $r_2 = 576$ den Wert $e_1 = 1200$.
Ermitteln Sie, wie viele Eier zwischen der ersten und zweiten Zählung gelegt wurden. **(3 BE)**
- e) **Bestimmen** Sie den Populationsvektor, der laut Modell ein halbes Jahr vor der ersten Zählung anzunehmen ist. Wählen Sie für Ihre Rechnungen $e_1 = 1200$. **(4 BE)**

- f) Im vorliegenden Modell mit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1200 \\ 600 \end{pmatrix}$ gilt $L \cdot \vec{v}_i = 0,96 \cdot \vec{v}_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Wählen Sie aus, welcher der drei abgebildeten Graphen die langfristige Entwicklung der Reptilienanzahl schematisch richtig wiedergibt.

Begründen Sie zu einem der nicht ausgewählten Graphen, warum er nicht zutreffend sein kann.



(2 BE)

- g) Durch ökologische Maßnahmen soll der Anteil der Eier, aus denen ein Reptil schlüpft, von 0,24 auf eine Zahl u erhöht werden, sodass die neue Übergangsmatrix $L^* = \begin{pmatrix} 0,16 & 1,6 \\ u & 0,48 \end{pmatrix}$ eine lebende Population ermöglicht, deren Anzahlen von Eiern und Reptilien sich von einem Zeitschritt zum nächsten nicht ändert.

Bestimmen Sie einen geeigneten Wert von u . (4 BE)

- h) Die ökologischen Maßnahmen werden durchgeführt, sodass ab $i = 8$ für die nachfolgenden Übergänge eine neue Matrix L^* verwendet werden kann.

Für die neue Übergangsmatrix L^* gilt: $(L^*)^n \approx \begin{pmatrix} 0,382 & 1,176 \\ 0,201 & 0,618 \end{pmatrix}$ für alle $n \geq 10$.

Interpretieren Sie mit kurzer Begründung die Matriceigenschaft, dass sich $(L^*)^n$ für $n \geq 10$ so gut wie gar nicht mehr ändert, im Hinblick auf die weitere Entwicklung der Population. (2 BE)

2. Eine 3×3 -Matrix $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$ soll auf eine 2×2 -Matrix

$$N = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} + m_{13} \\ m_{21} + m_{31} & m_{22} + m_{32} + m_{23} + m_{33} \end{pmatrix}$$

reduziert werden. Dieser Vorgang soll mithilfe der Matrizenmultiplikation so durchgeführt werden, dass er unabhängig von den speziellen Werten der Einträge m_{ij} funktioniert.

Ermitteln Sie zwei Matrizen P und Q , sodass $P \cdot M \cdot Q = N$ ist. (4 BE)

Aufgabe 30: Reptilien**EH S. 213****CAS-Aufgabe**

1. Auf einer Insel lebt eine Reptilienart mit zwei Entwicklungsstadien:
Ei und ausgeschlüpftes Reptil, im Folgenden kurz als Reptil bezeichnet.
Der Bestand an Reptilien wird halbjährlich gezählt.
Die Entwicklung der Population lässt sich modellhaft beschreiben mithilfe der Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 0,16 & 1,6 \\ 0,24 & 0,48 \end{pmatrix}.$$

Die Populationsvektoren der i -ten Zählung sind $\vec{v}_i = \begin{pmatrix} e_i \\ r_i \end{pmatrix}$, wobei e_i für die Zahl der Eier und r_i für die Zahl der ausgeschlüpften Reptilien steht. Im Modell gilt $\vec{v}_{i+1} = L \cdot \vec{v}_i$.

- a) **Skizzieren** Sie den Übergangsgraphen. **(2 BE)**
- b) Bei der ersten Zählung ($i = 1$) wurden ca. 600 Reptilien gezählt. Die Eier waren im Sand vergraben, sie wurden nicht gezählt. Bei der zweiten Zählung ($i = 2$) wurden ca. 576 Reptilien gezählt.
Bestätigen Sie mit den Werten $r_1 = 600$ und $r_2 = 576$ den Wert $e_1 = 1200$.
Ermitteln Sie, wie viele Eier zwischen der ersten und zweiten Zählung gelegt wurden. **(3 BE)**
- c) **Bestimmen** Sie den Populationsvektor, der laut Modell ein halbes Jahr vor der ersten Zählung anzunehmen ist. **(2 BE)**
- d) Es ist $e_1 : r_1 = 2 : 1$.
Zeigen Sie, dass laut Modell das Verhältnis $e_i : r_i$ auch für alle folgenden Zeitschritte konstant bei $2 : 1$ bestehen bleibt. **(4 BE)**
- e) Für das gegebene Verhältnis $e_i : r_i = 2 : 1$ gilt die Gleichung $L \cdot \vec{v}_i = 0,96 \cdot \vec{v}_i$.
Begründen Sie, dass die Gleichung $L \cdot \vec{v}_i = 0,96 \cdot \vec{v}_i$ mit $r_i \neq 0$ nur für das vorliegende Verhältnis $2 : 1$ exakt gilt. **(3 BE)**

- f) Im vorliegenden Modell ist die Reptilienpopulation langfristig vom Aussterben bedroht. Daher werden die Umweltbedingungen so verbessert, dass aus einem höheren Anteil der Eier Reptilien ausschlüpfen. Alle auf \vec{v}_8 folgende Übergänge können nun durch eine neue Übergangsmatrix $L^* = \begin{pmatrix} 0,16 & 1,6 \\ 0,273 & 0,48 \end{pmatrix}$ beschrieben werden.

Zu L^* gibt es eine Grenzmatrix G , die schon mit geringem rechnerischen Aufwand in hinreichender Genauigkeit erkennbar wird.

Ermitteln Sie G auf drei Nachkommastellen genau.

Bestimmen Sie ausgehend von $\vec{v}_8 = \begin{pmatrix} 901 \\ 451 \end{pmatrix}$ einen Grenzvektor \vec{g} mit einer Genauigkeit von drei Nachkommastellen.

Ermitteln Sie als Prognose für die Langzeitentwicklung der Population einen Populationsvektor mit ganzzahligen Einträgen, die möglichst nahe an den Einträgen von \vec{g} liegen, sodass der modellgemäß darauf folgende Populationsvektor nach ganzzahliger Rundung wieder derselbe ist. (5 BE)

2. Gegeben sind der Punkt $A(2 | 1 | 2)$ sowie der Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Der Ursprung des Koordinatensystems wird mit O bezeichnet.

- a) **Bestimmen** Sie die Koordinaten des Punktes B , für den $\vec{p} = \vec{AB}$ ist. (2 BE)
- b) **Ermitteln** Sie die Koordinaten eines Punktes C , der zusammen mit O , A und B Eckpunkt eines Parallelogramms ist. (2 BE)
- c) **Ermitteln** Sie mögliche Koordinaten eines Punktes D , sodass das Dreieck AOD im Ursprung einen rechten Winkel hat. (2 BE)

5 Stochastik

5.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

Aufgabe 31: Möbelfabrik

EH S. 215

WTR-Aufgabe

In einer Möbelfabrik werden Regale hergestellt. Es werden 3 Regaltypen produziert: A , B und C . Diese werden gepackt und als Bausatz verkauft.

In jedes Paket gehören Böden, Seitenteile und ein Tütchen mit Kleinmaterial (Schrauben, Winkel, Regalhalterungen ...). Die Pakete zu A , B und C unterscheiden sich in den Böden und Seitenteilen. Das Tütchen mit dem Kleinmaterial ist aus Rationalisierungsgründen bei den Paketen A und B dasselbe. Bei C wird ein anderes Tütchen verwendet, das sich aber äußerlich nicht vom Tütchen 1 unterscheidet.

Paket A	Paket B	Paket C
Böden A	Böden B	Böden C
Seitenteile A	Seitenteile B	Seitenteile C
Tütchen 1	Tütchen 1	Tütchen 2

Beim Packen können Fehler passieren, z. B. werden die Böden B in das Paket C gepackt.

1. a) Jedes Paket enthält genau eine Sorte der Böden, genau eine Sorte der Seitenteile und genau eines der beiden Materialtütchen.

Ermitteln Sie, auf wie viele Weisen man ein Paket packen kann. **(2 BE)**

- b) In einer Dose befinden sich zufällig gemischt acht Tütchen des Typs 1 und zwei Tütchen des Typs 2. Beim Öffnen der Dose fallen versehentlich fünf Tütchen auf einmal auf den Boden.

Widerlegen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass beide Tütchen des Typs 2 zu den auf den Boden gefallen gehören, durch $\binom{5}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3$ gegeben ist. **(2 BE)**

Aufgrund langjähriger Erfahrungen kann angenommen werden, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Paket fehlerhaft gepackt ist, 9 % beträgt.

An einem durchschnittlichen Tag werden 117 Pakete gepackt.

- c) **Interpretieren** Sie den folgenden Term im Sachkontext der vorliegenden Aufgabe:

$$1 - 0,09^{117} - 117 \cdot 0,91 \cdot 0,09^{116} \quad \mathbf{(2 BE)}$$

- d) Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der an einem durchschnittlichen Tag fehlerhaft gepackten Pakete.

Ermitteln Sie k , sodass die Wahrscheinlichkeit für $X = k$ nur ein Viertel der Wahrscheinlichkeit für $X = 9$ beträgt. **(3 BE)**

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Paket falsch gepackt ist, nicht mehr auf 9 % festgelegt ist.

2. Die Pakete werden von drei verschiedenen Personen gepackt: Person I, Person II und Person III.

Langfristig hat sich gezeigt, dass die Personen I und III jeweils 11 % ihrer Pakete fehlerhaft packen, während Person II nur 3,5 % ihrer Pakete fehlerhaft packt. Diese relativen Häufigkeiten sollen im Folgenden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden.

Die Ereignisse E und F sind folgendermaßen definiert:

E : Das Paket ist falsch gepackt.

F : Das Paket wurde von Person II gepackt.

Mit den Variablen

x : Anteil der Pakete, die Person II packt

y : $P(F|E)$

wird die Funktion $f : x \rightarrow y, x \in D$, definiert. Ihr Graph ist in Abbildung 38 dargestellt.

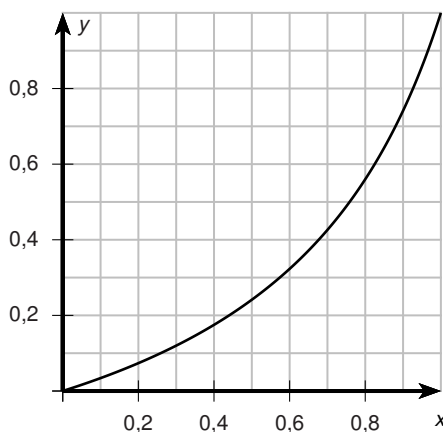


Abb. 38

- a) **Interpretieren** Sie die Ereignisse \bar{F} und $F \cap E$ im Sachkontext der Aufgabe. **(3 BE)**

- b) **Beurteilen** Sie anhand des Graphen folgende Aussagen:

- (1) „Wenn Person II die Hälfte aller Pakete packt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein falsch gepacktes Paket von ihr stammt, ungefähr 0,25.“
- (2) „Die Wahrscheinlichkeit, dass ein falsch gepacktes Paket von Person II stammt, steigt proportional mit dem Anteil der Pakete, die sie packt.“

(4 BE)

- c) **Bestimmen** Sie mit den im Text angegebenen Wahrscheinlichkeiten eine Funktionsgleichung der Funktion f .

Geben Sie die im Sachkontext sinnvolle Definitionsmenge D von f an.

(4 BE)

Aufgabe 32: Triebwerke**EH S. 217****32.1 WTR-Fassung**

Ein bestimmter Flugzeugtyp hat drei Triebwerke: zwei an den Tragflächen und ein mittig angebrachtes. Jeweils nach der Fertigstellung des Flugzeugs wird ein Testflug vorgenommen.



Abb. 39: Quelle: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AMd11front.jpg> von Hornet Driver

Vereinfachend wird angenommen, dass jedes Triebwerk bei einem Testflug mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,25 % Probleme an den Schweißnähten zeigt, die jedoch nicht zum Absturz führen. Nehmen Sie an, dass die Anzahl der Triebwerke mit diesem Defekt binomialverteilt ist.

1. a) **Berechnen** Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei 12 Testflügen mindestens ein Triebwerk Probleme an den Schweißnähten aufweist. **(3 BE)**

- b) **Untersuchen** Sie, ob die folgenden realen Situationen der oben genannten Annahme, dass die Anzahl der Triebwerke mit Problemen an den Schweißnähten binomialverteilt ist, entgegenstehen.
Begründen Sie Ihre Darlegungen:
 - (I) Einer der zuständigen Monteure ist frisch verliebt und ist mit seinen Gedanken während der Arbeit oft nicht bei der Sache.
 - (II) Beim Testflug reisen zwei Mitglieder des Vorstands des Triebwerkherstellers mit. Diese unterhalten sich während des Fluges miteinander über mögliche Triebwerksprobleme. **(4 BE)**

- c) **Berechnen** Sie, wie viele Testflüge es mindestens geben muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens einmal ein linkes Triebwerk Probleme an den Schweißnähten aufweist. **(3 BE)**

2. Betrachtet werden die Triebwerke eines bestimmten Flugzeugs der oben beschriebenen Art. In jedem Triebwerk befinden sich 18 Einspritzdüsen. Wenn in einem Triebwerk genau eine Einspritzdüse ausfällt, ist dies nicht ohne Weiteres zu bemerken. Erst mit dem Ausfall von mindestens zwei Einspritzdüsen in einem Triebwerk wird vom Piloten ein Leistungsabfall festgestellt. Gehen Sie davon aus, dass sich der Ausfall von Einspritzdüsen als Bernoullikette modellieren lässt. Die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall einer Einspritzdüse hat den Wert 0,003.

a) **Interpretieren** Sie jeweils die Bedeutung der folgenden Terme im Sachkontext:

(I) $0,003^{54}$

(II) $\left(\sum_{i=2}^{18} \binom{18}{i} \cdot 0,003^i \cdot 0,997^{18-i} \right)^3$

(3 BE)

b) Der Pilot stellt im linken Triebwerk keinen Leistungsabfall fest.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass trotzdem genau eine der 18 Einspritzdüsen ausgefallen ist. (3 BE)

3. Zu Ausbildungszwecken werden 20 Testflüge durchgeführt. Zunächst werden aus diesen 20 Flügen k ausgewählt, bei denen ein Triebwerksproblem an den Schweißnähten simuliert wird. In einem zweiten Schritt werden unter allen 20 Flügen zwei ausgewählt, bei denen ein Druckabfall nachgestellt wird. Untersucht wird das Ereignis E mit E : „Im zweiten Schritt wird kein Flug ausgewählt, bei dem schon ein Triebwerksproblem vorgesehen ist.“

a) **Erläutern** Sie mithilfe eines zweistufigen Baumdiagramms am Beispiel $k = 3$ den Zusammenhang

$$P(E) = \frac{20-k}{20} \cdot \frac{19-k}{19}. \quad (2 \text{ BE})$$

b) **Begründen** Sie, dass $P(E)$ für alle infrage kommenden Werte für k monoton fällt. (2 BE)

32.2 CAS-Fassung

Die CAS Aufgabe Triebwerke ist eine Modifikation der Aufgabe Triebwerke für WTR (siehe Seite 89). Die hier fehlenden Vortexte sind identisch.

1. Die Aufgabenteile **a)** bis **c)** sind identisch zur WTR-Fassung.
2. Betrachtet werden die Triebwerke eines bestimmten Flugzeuges der oben beschriebenen Art. In jedem Triebwerk befinden sich 18 Einspritzdüsen. Wenn in einem Triebwerk genau eine Einspritzdüse ausfällt, ist dies nicht ohne Weiteres zu bemerken. Erst mit dem Ausfall von mindestens zwei Einspritzdüsen in einem Triebwerk wird vom Piloten ein Leistungsabfall festgestellt. Gehen Sie davon aus, dass sich der Ausfall von Einspritzdüsen als Bernoullikette modellieren lässt. Die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall einer Einspritzdüse wird mit p bezeichnet.

2. **a) Interpretieren** Sie jeweils die Bedeutung der folgenden Terme im Sachkontext:

(I) p^{54}

(II) $\left(\sum_{i=2}^{18} \binom{18}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{18-i} \right)^3$

(3 BE)

2. **b)** Um die Folgen einer kostengünstigeren, aber auch weniger präzisen Herstellung der Einspritzdüsen abzuschätzen, wird die folgende Situation untersucht:
Der Pilot stellt im linken Triebwerk keinen Leistungsabfall fest. Die Wahrscheinlichkeit, dass trotzdem genau eine der 18 Einspritzdüsen ausgefallen ist, soll höchstens 1 % betragen.
Bestimmen Sie für diesen Fall den maximal möglichen Wert für p . **(3 BE)**

3. **a)** Identisch zur WTR-Fassung. **(2 BE)**

3. **b) Ermitteln** Sie den maximalen Wert für k , damit gilt $P(E) \geq 0,25$. **(2 BE)**

Aufgabe 33: Smartphones**EH S. 220****33.1 WTR-Fassung**

Ein Hersteller bringt ein neues Smartphone auf den Markt.

Hinweis: Zur Bearbeitung der folgenden Aufgabe kann nach Bedarf die Tabelle 1 in der Anlage genutzt werden.

1. Ein Händler erhält eine Lieferung dieser Smartphones.

- a) Die gelieferten Geräte haben sechs verschiedene Farben. Für die Auslage einiger Geräte im Schaufenster sollen vier Farben ausgewählt werden.

Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für diese Auswahl. **(2 BE)**

- b) Die Lieferung umfasst 50 Geräte; davon sind drei fehlerhaft. Aus der Lieferung werden zehn Geräte zufällig ausgewählt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: „Von den zehn ausgewählten Geräten ist keines fehlerhaft.“

B: „Von den zehn ausgewählten Geräten ist mindestens eines fehlerhaft.“ **(3 BE)**

2. Die Geräte werden in vier Werken in jeweils großer Stückzahl hergestellt. Der Tabelle können für jedes Werk folgende Daten entnommen werden:

- der Anteil der in diesem Werk hergestellten Geräte an der Gesamtzahl aller hergestellten Geräte;
- der Anteil der fehlerhaften Geräte unter den in diesem Werk hergestellten Geräten.

Werk	A	B	C	D
Anteil an der Gesamtzahl	10 %	30 %	20 %	40 %
Anteil der fehlerhaften Geräte	5 %	3 %	4 %	2 %

- a) **Weisen** Sie nach, dass der Anteil der fehlerhaften Geräte unter allen hergestellten Geräten 3 % beträgt. **(2 BE)**

- b) Ein unter allen hergestellten Geräten zufällig ausgewähltes Gerät ist fehlerhaft.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es im Werk A hergestellt wurde.

(3 BE)

- c) Von im Werk A hergestellten Geräten werden 250 zufällig ausgewählt.

Ermitteln Sie die Anzahl fehlerhafter Geräte, die darunter mit der größten Wahrscheinlichkeit auftritt. **(2 BE)**

d) **Geben** Sie einen Wert von s an, für den mit dem Term $200 \cdot 0,98^s \cdot 0,02 + 0,98^{200}$ im Sachzusammenhang die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnet werden kann.
Beschreiben Sie das zugehörige Ereignis. **(4 BE)**

e) **Ermitteln** Sie, wie viele im Werk C hergestellte Geräte mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit sich darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens ein fehlerhaftes Gerät befindet. **(4 BE)**

Anlage zur Aufgabe „Smartphones“

k	p							
	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5		
1	0,0000							248
2	0,0003							247
3	0,0013							246
4	0,0046							245
5	0,0131							244
6	0,0314							243
7	0,0650							242
8	0,1186	0,0000						241
9	0,1946	0,0001						240
10	0,2909	0,0004						239
11	0,4016	0,0009						238
12	0,5175	0,0021						237
13	0,6293	0,0046						236
14	0,7288	0,0093						235
15	0,8113	0,0175						234
16	0,8750	0,0309						233
17	0,9212	0,0513						232
18	0,9526	0,0808						231
19	0,9729	0,1207						230
20	0,9851	0,1719						229
21	0,9922	0,2342						228
22	0,9961	0,3063						227
23	0,9981	0,3857						226
24	0,9991	0,4692						225
25	0,9996	0,5530						224
26	0,9998	0,6336	0,0000					223
27	0,9999	0,7079	0,0001					222
28	1,0000	0,7736	0,0002					221
29		0,8296	0,0003					220
	0,95	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5		k
	p							

Tab. 1: Summierte Binomialverteilung $P(X \leq k)$ für $n = 250$

k	p						
	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	
30		0,8753	0,0006				219
31		0,9114	0,0011				218
32		0,9389	0,0019				217
33		0,9590	0,0033				216
34		0,9733	0,0055				215
35		0,9831	0,0088				214
36		0,9896	0,0139				213
37		0,9938	0,0212				212
38		0,9964	0,0314				211
39		0,9979	0,0453				210
40		0,9989	0,0637				209
41		0,9994	0,0872				208
42		0,9997	0,1164				207
43		0,9998	0,1517				206
44		0,9999	0,1933				205
45		1,0000	0,2408				204
46		1,0000	0,2938				203
47		1,0000	0,3513	0,0000			202
48		1,0000	0,4121	0,0001			201
49			0,4748	0,0001			200
50			0,5378	0,0002			199
51			0,5995	0,0004			198
52			0,6585	0,0007			197
53			0,7137	0,0011			196
54			0,7640	0,0018			195
55			0,8088	0,0029			194
56			0,8479	0,0045			193
57			0,8811	0,0068			192
58			0,9087	0,0101			191
59				0,0147			190
60				0,0210			189
61				0,0295			188
62				0,0404			187
63				0,0545			186
64				0,0721			185
65				0,0937			184
66				0,1196			183
67				0,1501			182
68				0,1853			181
69				0,2251	0,0000		180
70				0,2692	0,0001		179
71				0,3171	0,0001		178
72				0,3681	0,0001		177
73				0,4215	0,0002		176
74				0,4762	0,0004		175
	0,95	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	k
	p						

Tab. 1: Summierte Binomialverteilung $P(X \leq k)$ für $n = 250$

k	p						
	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	
75				0,5311	0,0007		174
76				0,5854	0,0010		173
77				0,6380	0,0016		172
78				0,6879	0,0025		171
79				0,7345	0,0037		170
80				0,7772	0,0054		169
81				0,8156	0,0079		168
82				0,8496	0,0113		167
83				0,8790	0,0158		166
84				0,9041	0,0219		165
85				0,9251	0,0297		164
86				0,9423	0,0398		163
87				0,9563	0,0524		162
88				0,9673	0,0680		161
89				0,9760	0,0870		160
90				0,9826	0,1096		159
91				0,9876	0,1360		158
92				0,9913	0,1665		157
93				0,9940	0,2011	0,0000	156
94				0,9959	0,2395	0,0001	155
95				0,9972	0,2816	0,0001	154
96				0,9982	0,3270	0,0001	153
97				0,9988	0,3749	0,0002	152
98				0,9992	0,4249	0,0004	151
99				0,9995	0,4760	0,0006	150
100				0,9997	0,5274	0,0009	149
101				0,9998	0,5784	0,0014	148
102				0,9999	0,6280	0,0022	147
103				0,9999	0,6755	0,0032	146
104				1,0000	0,7203	0,0047	145
105					0,7618	0,0067	144
106					0,7996	0,0095	143
107					0,8336	0,0133	142
108					0,8636	0,0183	141
109					0,8896	0,0249	140
110					0,9119	0,0332	139
111					0,9306	0,0438	138
112					0,9461	0,0568	137
113					0,9587	0,0728	136
114					0,9688	0,0920	135
115					0,9767	0,1147	134
116					0,9829	0,1411	133
117					0,9876	0,1714	132
118					0,9912	0,2055	131
119					0,9938	0,2433	130
	0,95	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	k
	p						

Tab. 1: Summierte Binomialverteilung $P(X \leq k)$ für $n = 250$

k	p							
	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5		
120					0,9957	0,2847	129	
121					0,9971	0,3290	128	
122					0,9980	0,3760	127	
123					0,9987	0,4248	126	
124					0,9991	0,4748	125	
125					0,9994	0,5252	124	
126					0,9996	0,5752	123	
127					0,9998	0,6240	122	
128					0,9999	0,6710	121	
129					0,9999	0,7153	120	
130					1,0000	0,7567	119	
131						0,7945	118	
132						0,8286	117	
133						0,8589	116	
134						0,8853	115	
135						0,9080	114	
136						0,9272	113	
137						0,9432	112	
138						0,9562	111	
139						0,9668	110	
140						0,9751	109	
141						0,9817	108	
142						0,9867	107	
143						0,9905	106	
144						0,9933	105	
145						0,9953	104	
146						0,9968	103	
147						0,9978	102	
148						0,9986	101	
149						0,9991	100	
150						0,9994	99	
151						0,9996	98	
152						0,9998	97	
153						0,9999	96	
154						0,9999	95	
155						0,9999	94	
156						1,0000	93	
	0,95	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	k	
	p							

Tab. 1: Summierte Binomialverteilung $P(X \leq k)$ für $n = 250$

33.2 CAS-Fassung

Die CAS Aufgabe Smartphones ist eine Modifikation der Aufgabe Smartphones für WTR (siehe Seite 92). Die hier fehlenden Vortexte sind identisch.

1. Die Aufgabenteile **a)** und **b)** sind identisch zur WTR-Fassung.
2. Die Aufgabenteile **a)** bis **d)** sind identisch zur WTR-Fassung.
 - e) **Ermitteln** Sie, wie viele im Werk *C* hergestellte Geräte mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit sich darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens 500 Geräte befinden, die nicht fehlerhaft sind. **(4 BE)**

5.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

Aufgabe 34: Möbelfabrik

EH S. 222

WTR-Aufgabe

In einer Möbelfabrik werden Regale hergestellt. Es werden 3 Regaltypen produziert: A , B und C . Diese werden gepackt und als Bausatz verkauft.

In jedes Paket gehören Böden, Seitenteile und ein Tütchen mit Kleinmaterial (Schrauben, Winkel, Regalhalterungen ...). Die Pakete zu A , B und C unterscheiden sich in den Böden und Seitenteilen. Das Tütchen mit dem Kleinmaterial ist aus Rationalisierungsgründen bei den Paketen A und B dasselbe. Bei C wird ein anderes Tütchen verwendet, das sich aber äußerlich nicht vom Tütchen 1 unterscheidet.

Paket A	Paket B	Paket C
Böden A	Böden B	Böden C
Seitenteile A	Seitenteile B	Seitenteile C
Tütchen 1	Tütchen 1	Tütchen 2

Beim Packen können Fehler passieren, z. B. werden die Böden B in das Paket C gepackt.

1. a) Jedes Paket enthält genau eine Sorte der Böden, genau eine Sorte der Seitenteile und genau eines der beiden Materialtütchen.

Ermitteln Sie, auf wie viele Weisen man ein Paket packen kann. **(2 BE)**

- b) In einer Dose befinden sich zufällig gemischt acht Tütchen des Typs 1 und zwei Tütchen des Typs 2. Beim Öffnen der Dose fallen versehentlich fünf Tütchen auf einmal auf den Boden.

Widerlegen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass beide Tütchen des Typs 2 zu den auf den Boden gefallenen gehören, durch $\binom{5}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3$ gegeben ist. **(2 BE)**

Aufgrund langjähriger Erfahrungen kann angenommen werden, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Paket fehlerhaft gepackt ist, 9 % beträgt.

An einem durchschnittlichen Tag werden 117 Pakete gepackt.

- c) **Interpretieren** Sie den folgenden Term im Sachkontext der vorliegenden Aufgabe:

$$1 - 0,09^{117} - 117 \cdot 0,91 \cdot 0,09^{116} \quad \textbf{(2 BE)}$$

- d) Manchmal werden mehr Pakete als erwartet falsch gepackt.

Ermitteln Sie für einen Stichprobenumfang von 117 Paketen auf dem 5 %-Niveau eine Entscheidungsregel zu der Nullhypothese, dass sich die Wahrscheinlichkeit, dass ein Paket fehlerhaft gepackt ist, nicht über 9 % erhöht hat.

Verwenden Sie dabei die Sigmaregeln und **begründen** Sie deren Anwendbarkeit. **(5 BE)**

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Paket falsch gepackt ist, nicht mehr auf 9 % festgelegt ist.

2. Die Pakete werden von drei verschiedenen Personen gepackt: Person I, Person II und Person III.

Langfristig hat sich gezeigt, dass die Personen I und III jeweils 11 % ihrer Pakete fehlerhaft packen, während Person II nur 3,5 % ihrer Pakete fehlerhaft packt. Diese relativen Häufigkeiten sollen im Folgenden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden.

Die Ereignisse E und F sind folgendermaßen definiert:

E : Das Paket ist falsch gepackt.

F : Das Paket wurde von Person II gepackt.

Mit den Variablen

x : Anteil der Pakete, die Person II packt

y : $P(F|E)$

wird die Funktion $f : x \rightarrow y$, $x \in D$, definiert. Ihr Graph ist in Abbildung 40 dargestellt.

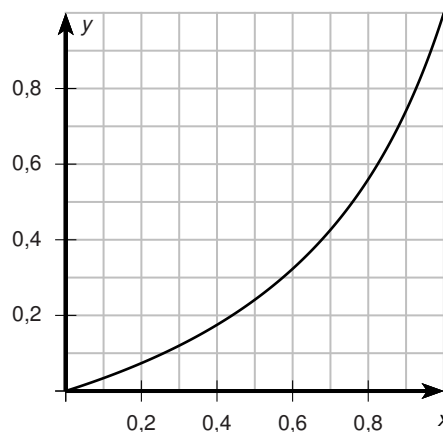


Abb. 40

- a) **Beurteilen** Sie anhand des Graphen folgende Aussagen:

- (1) „Wenn Person II die Hälfte aller Pakete packt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein falsch gepacktes Paket von ihr stammt, ungefähr 0,25.“
- (2) „Die Wahrscheinlichkeit, dass ein falsch gepacktes Paket von Person II stammt, steigt proportional mit dem Anteil der Pakete, die sie packt.“

(4 BE)

- b) **Bestimmen** Sie mit den im Text angegebenen Wahrscheinlichkeiten eine Funktionsgleichung der Funktion f .

Geben Sie die im Sachkontext sinnvolle Definitionsmenge D von f an.

(4 BE)

3. Die Dauer (gemessen in Minuten), die eine bestimmte Person benötigt, um ein Paket des Typs C zu packen, schwankt. Mit guter Näherung zeigt sich, dass diese Dauer bei Person I und Person II normalverteilt ist, während sich bei Person III keine Normalverteilung erkennen lässt. Die jeweiligen Verteilungsparameter sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

	Erwartungswert in Minuten	Standardabweichung in Minuten
Person I	$\mu_1 = 2,8$	$\sigma_1 = 0,5$
Person II	$\mu_2 = 2,8$	$\sigma_2 = 0,25$

Tab. 2

- a) In Abbildung 41 sehen Sie den Graphen zu der normalverteilten Packdauer bezogen auf Person II.

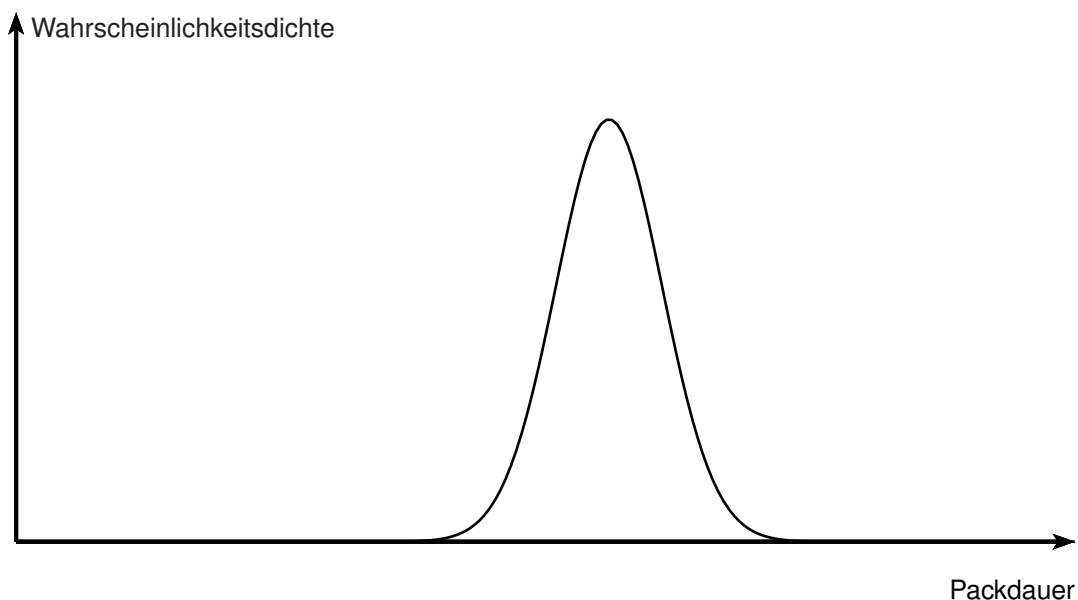


Abb. 41

Skizzieren Sie in dasselbe Koordinatensystem den entsprechenden Graphen zu Person I. **(2 BE)**

- b) **Ermitteln** Sie den Wert t so, dass die Wahrscheinlichkeiten der folgenden beiden Ereignisse gleich groß sind:
- Die Packdauer von Person I beträgt maximal t Minuten.
 - Die Packdauer von Person II beträgt maximal 3 Minuten.

Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit. **(4 BE)**

Aufgabe 35: Triebwerke**EH S. 225****35.1 WTR-Fassung**

Ein bestimmter Flugzeugtyp hat drei Triebwerke: zwei an den Tragflächen und ein mittig angebrachtes. Jeweils nach der Fertigstellung des Flugzeugs wird ein Testflug vorgenommen.



Abb. 42: Quelle: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AMd11front.jpg> von Hornet Driver

Vereinfachend wird angenommen, dass jedes Triebwerk bei einem Testflug mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,25 % Probleme an den Schweißnähten zeigt, die jedoch nicht zum Absturz führen. Nehmen Sie an, dass die Anzahl der Triebwerke mit diesem Defekt binomialverteilt ist.

1. a) **Berechnen** Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei 12 Testflügen mindestens ein Triebwerk Probleme an den Schweißnähten aufweist. **(3 BE)**

- b) **Untersuchen** Sie, ob die folgenden realen Situationen der oben genannten Annahme, dass die Anzahl der Triebwerke mit Problemen an den Schweißnähten binomialverteilt ist, entgegenstehen.
Begründen Sie Ihre Darlegungen:
 - (I) Einer der zuständigen Monteure ist frisch verliebt und ist mit seinen Gedanken während der Arbeit oft nicht bei der Sache.
 - (II) Beim Testflug reisen zwei Mitglieder des Vorstands des Triebwerkherstellers mit. Diese unterhalten sich während des Fluges miteinander über mögliche Triebwerksprobleme. **(4 BE)**

- c) **Berechnen** Sie, wie viele Testflüge es mindestens geben muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens einmal ein linkes Triebwerk Probleme an den Schweißnähten aufweist. **(3 BE)**

2. Betrachtet werden die Triebwerke eines bestimmten Flugzeugs der oben beschriebenen Art. In jedem Triebwerk befinden sich 18 Einspritzdüsen. Wenn in einem Triebwerk genau eine Einspritzdüse ausfällt, ist dies nicht ohne Weiteres zu bemerken. Erst mit dem Ausfall von mindestens zwei Einspritzdüsen in einem Triebwerk wird vom Piloten ein Leistungsabfall festgestellt. Gehen Sie davon aus, dass sich der Ausfall von Einspritzdüsen als Bernoullikette modellieren lässt. Die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall einer Einspritzdüse wird mit p bezeichnet.

a) **Interpretieren** Sie jeweils die Bedeutung der folgenden Terme im Sachkontext:

(I) p^{54}

(II) $\left(\sum_{i=2}^{18} \binom{18}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{18-i} \right)^3$

(3 BE)

b) Jetzt ist $p = 0,003$. Der Pilot stellt im linken Triebwerk keinen Leistungsabfall fest.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass trotzdem genau eine der 18 Einspritzdüsen ausgefallen ist. (3 BE)

3. Es wird vermutet, dass die Einspritzdüsen nach einer gewissen Zeit nicht mehr die ursprüngliche Zuverlässigkeit besitzen. Dies soll mit einem Hypothesentest auf dem Signifikanzniveau von 5 % überprüft werden. Es werden 4500 Einspritzdüsen einzeln getestet. Die zu untersuchende Nullhypothese H_0 lautet:

H_0 : Die Wahrscheinlichkeit p für den Ausfall einer Einspritzdüse beträgt höchstens 0,6 %.

a) **Bestimmen** Sie mithilfe einer σ -Regel eine Entscheidungsregel zu H_0 . (5 BE)

b) Vor der Durchführung des Tests wurde festgelegt, die Einspritzdüsen durch teurere und sicherere zu ersetzen, falls die Nullhypothese H_0 aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden müsste. Im Rahmen der Vorüberlegungen zum Hypothesentest wurde auch diskutiert, ob man nicht besser die folgende Nullhypothese \tilde{H}_0 testen sollte:

\tilde{H}_0 : Die Wahrscheinlichkeit p für den Ausfall einer Einspritzdüse beträgt mindestens 0,6 %.

Entscheiden Sie mathematisch **begründet**, welche der beiden Nullhypothesenvarianten eher das Interesse der Flugsicherheit und welche eher das Interesse der Kostenersparnis berücksichtigt (2 BE)

4. Zu Ausbildungszwecken werden 20 Testflüge durchgeführt. Zunächst werden aus diesen 20 Flügen k ausgewählt, bei denen ein Triebwerksproblem an den Schweißnähten simuliert wird. In einem zweiten Schritt werden unter allen 20 Flügen zwei ausgewählt, bei denen ein Druckabfall nachgestellt wird. Untersucht wird das Ereignis E mit
- E : „Im zweiten Schritt wird kein Flug ausgewählt, bei dem schon ein Triebwerksproblem vorgesehen ist.“

Erläutern Sie mithilfe eines zweistufigen Baumdiagramms am Beispiel $k = 3$ den Zusammenhang

$$P(E) = \frac{20-k}{20} \cdot \frac{19-k}{19}. \quad (2 \text{ BE})$$

35.2 CAS-Fassung

Die CAS Aufgabe Triebwerke ist eine Modifikation der Aufgabe Triebwerke für WTR (siehe Seite 101). Die hier fehlenden Vortexte sind identisch.

1. Die Aufgabenteile **a)** bis **d)** sind identisch zur WTR-Fassung.
2. **a)** Identisch zur WTR-Fassung. (3 BE)
2. **b)** Um die Folgen einer kostengünstigeren, aber auch weniger präzisen Herstellung der Einspritzdüsen abzuschätzen, wird die folgende Situation untersucht:
Der Pilot stellt im linken Triebwerk keinen Leistungsabfall fest. Die Wahrscheinlichkeit, dass trotzdem genau eine der 18 Einspritzdüsen ausgefallen ist, soll höchstens 1 % betragen.
Bestimmen Sie für diesen Fall den maximal möglichen Wert für p . (3 BE)
3. **a)** **Bestimmen** Sie eine Entscheidungsregel zu H_0 . (3 BE)
3. **b)** Identisch zur WTR-Fassung. (2 BE)
4. **a)** Identisch zur WTR-Fassung, Aufgabe 4. (2 BE)
- b)** **Ermitteln** Sie den maximalen Wert für k , damit gilt $P(E) \geq 0,25$. (2 BE)

Aufgabe 36: Samenkörner**EH S. 229****WTR-Aufgabe**

Ein Großhändler bietet Samenkörner für Salatgurken in zwei Qualitätsstufen an. Ein Samenkorn der höheren Qualitätsstufe A keimt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %, eines der Qualitätsstufe B mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 %. Ein Gemüseanbaubetrieb kauft Samenkörner beider Qualitätsstufen, davon 65 % der Qualitätsstufe A .

Durch ein Versehen werden alle Samenkörner vollständig vermischt. Eines dieser Samenkörner wird nach der Aussaat zufällig ausgewählt

Hinweis: Zur Bearbeitung der folgenden Teilaufgaben können nach Bedarf die Tabellen 3 und 4 in der Anlage genutzt werden.

a) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm **dar**. **(3 BE)**

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich bei einem zufällig ausgewählten keimenden Samenkorn um ein Samenkorn der Qualitätsstufe B handelt. **(3 BE)**

Ein anderer Anbaubetrieb kauft ausschließlich Samenkörner der Qualität B .

c) Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

E : „Von 200 gesäten Samenkörnern der Qualitätsstufe B keimen genau 140.“

F : „Von 200 gesäten Samenkörnern der Qualitätsstufe B keimen mehr als 130 und weniger als 150.“

(3 BE)

d) Beschreiben Sie die Bedeutung des folgenden Terms im Sachzusammenhang:

$$1 - \left(\sum_{i=0}^{120} \binom{200}{i} \cdot 0,7^i \cdot 0,3^{200-i} + \sum_{i=160}^{200} \binom{200}{i} \cdot 0,7^i \cdot 0,3^{200-i} \right)$$

(2 BE)

e) Der Preis pro Samenkorn beträgt für die Qualitätsstufe A 17 Cent und für die Qualitätsstufe B 12 Cent. Keimt ein Samenkorn, so wächst daraus eine Gurkenpflanze heran. Dabei besteht das Risiko, dass die Pflanze aufgrund von Wettereinflüssen oder Schädlingen keine Früchte trägt. Dieses Risiko beträgt für alle gekeimten Samenkörner der Qualitätsstufe A 15 % und für alle gekeimten Samenkörner der Qualitätsstufe B 25 %. Die Anzahl der Gurken, die pro fruchttragender Pflanze im Mittel geerntet werden können, ist unabhängig von der Qualitätsstufe der Samenkörner. Der Anbaubetrieb verkauft alle geernteten Gurken zum gleichen Preis.

Prüfen Sie, ob es für den Anbaubetrieb finanziell sinnvoll wäre, sich auf Samenkörner der Qualitätsstufe B zu beschränken. **(6 BE)**

f) Der Großhändler behauptet, dass sich die Wahrscheinlichkeit für das Keimen eines Samenkorns der Qualitätsstufe B durch eine Weiterentwicklung auf mehr als 70 % erhöht habe. Deshalb soll die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit für das Keimen eines Samenkorns der Qualitätsstufe B ist höchstens 70 %.“ auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Dazu werden nach der Weiterentwicklung 100 Samenkörner der Qualitätsstufe B zufällig ausgewählt und gesät.

Bestimmen Sie die Entscheidungsregel des Tests. (5 BE)

g) Für eine Qualitätsstufe C wird vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit für das Keimen eines Samenkorns 60 % beträgt. Es werden 50 Samenkörner gesät; davon keimen 27.

Eine Wahrscheinlichkeit von 60 % ist bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % mit der angegebenen Anzahl keimender Samenkörner verträglich, wenn 27 im Intervall $[\mu - 1,96\sigma; \mu + 1,96\sigma]$ liegt. Dabei ist μ der Erwartungswert und σ die Standardabweichung einer $B_{50;0,6}$ -verteilten Zufallsgröße.

Untersuchen Sie, ob die vermutete Wahrscheinlichkeit von 60 % bei der angegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit damit verträglich ist, dass 27 Samenkörner keimen. (3 BE)

Anlage zur Aufgabe „Samenkörner“

k	p						
	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	
5	0,0000						194
6	0,0001						193
7	0,0005						192
8	0,0014						191
9	0,0035						190
10	0,0081						189
11	0,0168						188
12	0,0320						187
13	0,0566						186
14	0,0929						185
15	0,1431						184
16	0,2075						183
17	0,2849						182
18	0,3724						181
19	0,4655	0,0000					180
20	0,5592	0,0001					179
21	0,6484	0,0002					178
22	0,7290	0,0005					177
23	0,7983	0,0010					176
24	0,8551	0,0020					175
	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	k

Tab. 3: Summierte Binomialverteilung $P(X \leq k)$ für $n = 200$

k	p						
	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	
25	0,8995	0,0036					174
26	0,9328	0,0064					173
27	0,9566	0,0110	0,0000				172
28	0,9729	0,0179	0,0001				171
29	0,9837	0,0283	0,0002				170
30	0,9905	0,0430	0,0004				169
31	0,9946	0,0632	0,0008				168
32	0,9971	0,0899	0,0014				167
33	0,9985	0,1239	0,0026				166
34	0,9992	0,1656	0,0044				165
35	0,9996	0,2151	0,0073	0,0000			164
36	0,9998	0,2717	0,0117	0,0001			163
37	0,9999	0,3345	0,0182	0,0001			162
38	1,0000	0,4019	0,0276	0,0003			161
39		0,4718	0,0405	0,0005			160
40		0,5422	0,0578	0,0009			159
41		0,6108	0,0804	0,0016			158
42		0,6758	0,1089	0,0027			157
43		0,7355	0,1438	0,0045			156
44		0,7887	0,1852	0,0072			155
45		0,8349	0,2332	0,0111			154
46		0,8738	0,2870	0,0169			153
47		0,9056	0,3458	0,0249			152
48		0,9310	0,4083	0,0359			151
49		0,9506	0,4729	0,0506			150
50		0,9655	0,5379	0,0695			149
51		0,9764	0,6017	0,0934			148
52		0,9843	0,6626	0,1228			147
53		0,9897	0,7192	0,1579	0,0000		146
54		0,9934	0,7707	0,1988	0,0001		145
55		0,9959	0,8162	0,2455	0,0002		144
56		0,9975	0,8555	0,2972	0,0003		143
57		0,9985	0,8885	0,3532	0,0005		142
58		0,9991	0,9157	0,4123	0,0008		141
59		0,9995	0,9375	0,4733	0,0013		140
60		0,9997	0,9546	0,5348	0,0021		139
61		0,9998	0,9677	0,5953	0,0034		138
62		0,9999	0,9774	0,6533	0,0052		137
63		1,0000	0,9846	0,7079	0,0080		136
64			0,9897	0,7579	0,0119		135
	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	k
	p						

Tab. 3: Summierte Binomialverteilung $P(X \leq k)$ für $n = 200$

k	p						
	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	
65			0,9932	0,8028	0,0173		134
66			0,9956	0,8421	0,0247		133
67			0,9972	0,8758	0,0346		132
68			0,9983	0,9040	0,0475		131
69			0,9990	0,9272	0,0639		130
70			0,9994	0,9458	0,0844		129
71			0,9996	0,9604	0,1094		128
72			0,9998	0,9716	0,1393	0,0000	127
73			0,9999	0,9800	0,1742	0,0001	126
74			0,9999	0,9862	0,2142	0,0001	125
75			1,0000	0,9906	0,2590	0,0002	124
76				0,9938	0,3080	0,0004	123
77				0,9959	0,3607	0,0007	122
78				0,9974	0,4161	0,0011	121
79				0,9984	0,4732	0,0018	120
80				0,9990	0,5307	0,0028	119
81				0,9994	0,5875	0,0044	118
82				0,9996	0,6424	0,0066	117
83				0,9998	0,6945	0,0097	116
84				0,9999	0,7428	0,0141	115
85				0,9999	0,7868	0,0200	114
86				1,0000	0,8261	0,0280	113
87					0,8603	0,0384	112
88					0,8897	0,0518	111
89					0,9143	0,0687	110
90					0,9345	0,0895	109
91					0,9508	0,1146	108
92					0,9637	0,1444	107
93					0,9737	0,1790	106
94					0,9812	0,2184	105
95					0,9869	0,2623	104
96					0,9910	0,3104	103
97					0,9939	0,3619	102
98					0,9960	0,4160	101
99					0,9974	0,4718	100
100					0,9983	0,5282	99
101					0,9989	0,5840	98
102					0,9993	0,6381	97
103					0,9996	0,6896	96
104					0,9998	0,7377	95
	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	k
	p						

Tab. 3: Summierte Binomialverteilung $P(X \leq k)$ für $n = 200$

k	p						
	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	
105					0,9999	0,7816	94
106					0,9999	0,8210	93
107					1,0000	0,8556	92
108						0,8854	91
109						0,9105	90
110						0,9313	89
111						0,9482	88
112						0,9616	87
113						0,9720	86
114						0,9800	85
115						0,9859	84
116						0,9903	83
117						0,9934	82
118						0,9956	81
119						0,9972	80
120						0,9982	79
121						0,9989	78
122						0,9993	77
123						0,9996	76
124						0,9998	75
125						0,9999	74
126						0,9999	73
127						1,0000	72
	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	k

Tab. 3: Summierte Binomialverteilung $P(X \leq k)$ für $n = 200$

k	p						
	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	
0	0,0000						99
1	0,0003						98
2	0,0019						97
3	0,0078						96
4	0,0237						95
5	0,0576	0,0000					94
6	0,1172	0,0001					93
7	0,2061	0,0003					92
8	0,3209	0,0009					91
9	0,4513	0,0023	0,0000				90
10	0,5832	0,0057	0,0001				89
11	0,7030	0,0126	0,0004				88
12	0,8018	0,0253	0,0010	0,0000			87
13	0,8761	0,0469	0,0025	0,0001			86
14	0,9274	0,0804	0,0054	0,0002			85
15	0,9601	0,1285	0,0111	0,0004			84
16	0,9794	0,1923	0,0211	0,0010			83
17	0,9900	0,2712	0,0376	0,0022			82
18	0,9954	0,3621	0,0630	0,0045			81
19	0,9980	0,4602	0,0995	0,0089			80
20	0,9992	0,5595	0,1488	0,0165			79
21	0,9997	0,6540	0,2114	0,0288	0,0000		78
22	0,9999	0,7389	0,2864	0,0479	0,0001		77
23	1,0000	0,8109	0,3711	0,0755	0,0003		76
24		0,8686	0,4617	0,1136	0,0006		75
25		0,9125	0,5535	0,1631	0,0012		74
26		0,9442	0,6417	0,2244	0,0024		73
27		0,9658	0,7224	0,2964	0,0046		72
28		0,9800	0,7925	0,3768	0,0084		71
29		0,9888	0,8505	0,4623	0,0148		70
30		0,9939	0,8962	0,5491	0,0248	0,0000	69
31		0,9969	0,9307	0,6331	0,0398	0,0001	68
32		0,9984	0,9554	0,7107	0,0615	0,0002	67
33		0,9993	0,9724	0,7793	0,0913	0,0004	66
34		0,9997	0,9836	0,8371	0,1303	0,0009	65
35		0,9999	0,9906	0,8839	0,1795	0,0018	64
36		0,9999	0,9948	0,9201	0,2386	0,0033	63
37		1,0000	0,9973	0,9470	0,3068	0,0060	62
38			0,9986	0,9660	0,3822	0,0105	61
39			0,9993	0,9790	0,4621	0,0176	60
40			0,9997	0,9875	0,5433	0,0284	59
	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	k

Tab. 4: Summierte Binomialverteilung $P(X \leq k)$ für $n = 100$

k	p						
	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	
41			0,9999	0,9928	0,6225	0,0443	58
42			0,9999	0,9960	0,6967	0,0666	57
43			1,0000	0,9979	0,7635	0,0967	56
44				0,9989	0,8211	0,1356	55
45				0,9995	0,8689	0,1841	54
46				0,9997	0,9070	0,2421	53
47				0,9999	0,9362	0,3086	52
48				0,9999	0,9577	0,3822	51
49				1,0000	0,9729	0,4602	50
50					0,9832	0,5398	49
51					0,9900	0,6178	48
52					0,9942	0,6914	47
53					0,9968	0,7579	46
54					0,9983	0,8159	45
55					0,9991	0,8644	44
56					0,9996	0,9033	43
57					0,9998	0,9334	42
58					0,9999	0,9557	41
59					1,0000	0,9716	40
60						0,9824	39
61						0,9895	38
62						0,9940	37
63						0,9967	36
64						0,9982	35
65						0,9991	34
66						0,9996	33
67						0,9998	32
68						0,9999	31
69						1,0000	30
	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	k
	p						

Tab. 4: Summierte Binomialverteilung $P(X \leq k)$ für $n = 100$

Aufgabe 37: Glutenunverträglichkeit**EH S. 232****CAS-Aufgabe**

In Deutschland liegt bei 1 % der Bevölkerung eine Glutenunverträglichkeit vor. Die betroffenen Personen reagieren auf den Verzehr von bestimmten Getreidesorten mit körperlichen Beschwerden. Ob eine Glutenunverträglichkeit vorliegt oder nicht, kann mithilfe eines Schnelltests diagnostiziert werden. Zeigt das Ergebnis dieses Tests die Glutenunverträglichkeit an, so bezeichnet man es als positiv.

1. Liegt bei einer Person eine Glutenunverträglichkeit vor, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % positiv. Liegt bei einer Person keine Glutenunverträglichkeit vor, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Testergebnis dennoch positiv ist, 4 %.

Bei einer Person, die aus der Bevölkerung Deutschlands zufällig ausgewählt wurde, wird der Test durchgeführt.

- a) **Erstellen** Sie zu dem beschriebenen Sachzusammenhang ein beschriftetes Baumdiagramm. **(3 BE)**

- b) **Ermitteln** Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

A: „Bei der Person liegt eine Glutenunverträglichkeit vor und das Testergebnis ist positiv.“

B: „Das Testergebnis ist negativ.“

(3 BE)

- c) **Ermitteln** Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, wenn das Testergebnis positiv ist. **(3 BE)**

2. Im Rahmen einer Studie werden aus der Bevölkerung Deutschlands 20000 Personen zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der ausgewählten Personen an, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt.

Berechnen Sie in einem geeigneten Modell die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der ausgewählten Personen, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, um mehr als 10 % vom Erwartungswert von X abweicht. **(4 BE)**

3. Der Test wird mithilfe eines Teststreifens durchgeführt, auf dem ein Indikator aufgebracht ist. Ist die Indikatormenge auf einem Teststreifen kleiner als 15mg, so ist dieser unbrauchbar. Der Hersteller der Teststreifen verfolgt das Ziel, dass höchstens 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, und führt deshalb regelmäßig eine Qualitätskontrolle durch. Dazu wird der laufenden Produktion eine Stichprobe von 100 Teststreifen entnommen. Nur wenn sich darunter mindestens 16 unbrauchbare Teststreifen befinden, entscheidet man sich dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern.

a) **Beschreiben** Sie, welche Fehlentscheidungen bei dieser Qualitätskontrolle auftreten können. **(4 BE)**

b) Der Hersteller entschließt sich, die Kontrolle künftig mit einer größeren Stichprobe von 200 Teststreifen durchzuführen. Die Wahrscheinlichkeit für eine unnötige Verbesserung des Herstellungsverfahrens soll sich durch diese Änderung jedoch nicht erhöhen.

Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl unbrauchbarer Teststreifen, ab der man sich dafür entscheidet das Herstellungsverfahren zu verbessern, nun mindestens sein muss. **(4 BE)**

c) Die Indikatormenge auf den Teststreifen ist normalverteilt. Vor einer Verbesserung des Herstellungsverfahrens hatte der Erwartungswert 20 mg und die Standardabweichung 4,0 mg betragen.

Durch die Verbesserung konnte die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Teststreifen aufgrund der Indikatormenge unbrauchbar ist, halbiert werden. Der Erwartungswert für die Indikatormenge blieb dabei unverändert.

Bestimmen Sie die geänderte Standardabweichung. **(4 BE)**

II Erwartungshorizonte

1 Übungsaufgaben für das erste Lernjahr der Studienstufe

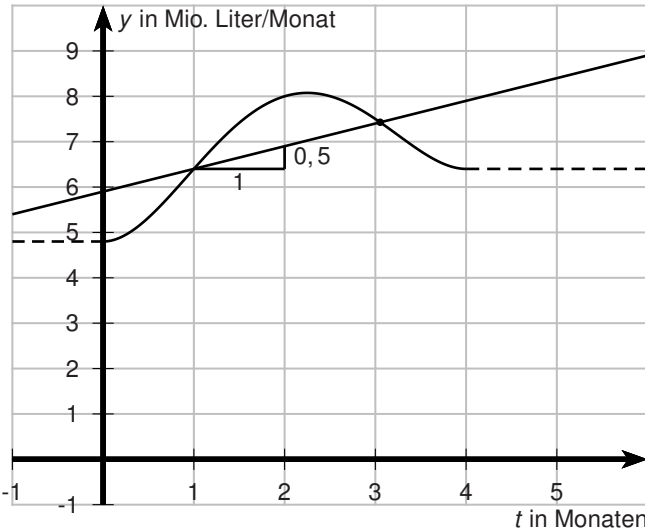
1.1 Analysis

1.1.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

Aufgabe 1: Werbeaktion

1.1 WTR-Fassung

	Lösungsskizze	BE
1. a)	Vor der Aktion liegt die Verkaufsrate konstant bei 4,8 Mio. Liter pro Monat. Die Verkaufsrate steigt während der Aktion an, bis sie ein Maximum erreicht. Nach dem Maximum nimmt die Verkaufsrate ab, bis sie am Ende des Aktionszeitraums ein Minimum bei ca. 6,4 Liter pro Monat erreicht und fortan konstant bleibt.	4
b)	$f(0) = 4,8$ und $f(4) = 6,4$, beide Werte werden außerhalb des Bereichs $0 \leq t \leq 4$ konstant fortgesetzt.	2
c)	<p>Es ist $f'(t) = 0,6t^3 - 3,75t^2 + 5,4t$.</p> <p>Notwendige Bedingung für einen Extremwert:</p> $f'(t) = 0$ $t \cdot (0,6t^2 - 3,75t + 5,4) = 0$ <p>Möglichen Nullstellen der ersten Ableitung außer $t_1 = 0$:</p> $t^2 - 6,25t + 9 = 0$ $t_{2,3} = 3,125 \pm \sqrt{3,125^2 - 9}$ $t_{2,3} = 3,125 \pm \sqrt{\frac{49}{64}}$ $t_2 = 4; \quad t_3 = \frac{9}{4} = 2,25$ <p>Die in Frage kommende Nullstelle ist $t_3 = 2,25$. Einsetzen liefert $f(2,25) \approx 8,1$. Die höchste erwartete Verkaufsrate beträgt ca. 8,1 Mio. Liter / Monat.</p>	5

	Lösungsskizze	BE
<p>d)</p>	<p>Deutung: Die Verkaufsrate ist während der Werbeaktion vom Zeitpunkt $t = 1$ bis zum Zeitpunkt t pro Monat um durchschnittlich $\frac{1}{2}$ Mio. Liter / Monat gestiegen.</p>  <p>Die Lösung ist der Schnittpunkt der Geraden mit der Funktion f, also $t \approx 3,0$.</p>	4
<p>e)</p>	<p>Der Zeitpunkt liegt ca. 1 Monat nach Beginn der Werbeaktion. <i>Hinweis: Angaben von 0,8 bis zu 1,3 Monaten sind als richtig zu bewerten.</i> Notwendige Bedingung: $f''(t) = 0$</p>	2
<p>f)</p>	<p>Es ist</p> $\int_0^4 (f(t) - 4,8) dt = [0,03t^5 - 0,3125t^4 + 0,9t^3]_0^4$ $= 0,03 \cdot 4^5 - 0,3125 \cdot 4^4 + 0,9 \cdot 4^3 - 0 = 8,32.$ <p>Es werden voraussichtlich 8,32 Mio. Liter mehr verkauft.</p>	5
<p>2.</p>	<p><i>Mögliche Lösung:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Der Term $(4 - t_0) \cdot 6,4$ gibt die im Zeitraum von $t = t_0$ bis $t = 4$ produzierte Menge an Limonade an. • Der Term $-t_0 \cdot 4,8$ gibt die vom Zeitpunkt $t = t_0$ bis zum Beginn der Werbeaktion erwartete Verkaufsmenge an. • Der Term $\int_0^4 f(t) dt$ gibt die während der Werbeaktion erwartete Verkaufsmenge an. <p>Die im Zeitraum von $t = t_0$ bis $t = 4$ produzierte Limonademenge muss mindestens gleich der in diesem Zeitraum erwarteten Verkaufsmenge sein. Also ist t_0 die Lösung der Gleichung $(4 - t_0) \cdot 6,4 = -t_0 \cdot 4,8 + \int_0^4 f(t) dt$.</p>	4

	Lösungsskizze	BE
3. a)	(1) $w'_a(0) = 0; w'_a(2,5) = 0; w'_a(4) = 0$ (2) $w_a(0) = 4,8$	2
b)	Der Koeffizientenvergleich für t^4 ergibt mit $3 \cdot a = 0,15$, dass $a = 0,05$ sein muss. Setzt man dies in die weiteren Koeffizienten ein, so ergibt sich $w_{0,05}(t) = 0,15t^4 - 1,3t^3 + 3t^2 + 4,8$. Dies entspricht nicht der Funktion f . (Es kann auch begründet werden, dass für f der Hochpunkt bei $t = 2,25$ liegt und nicht bei $t = 2,5$.)	2
c)	Für $a = 0$ ergäbe sich $w_0(t)$ als konstant gleich 4,8. Die Werbeaktion hätte keinen Einfluss auf die Verkaufsrate.	2
d)	Es ist zunächst $w_a(4) = 64 \cdot a + 4,8$. Ein durchschnittlicher Anstieg je Monat um 0,5 Mio. Liter / Monat führt zu einem gesamten Anstieg von $w_a(t)$ um 2. $w_a(4) = 2 + 4,8 \Leftrightarrow a = \frac{2}{64} = \frac{1}{32}$ Damit die Verkaufsrate während des Aktionszeitraums durchschnittlich je Monat um 0,5 Mio. Liter / Monat steigt, muss $a = \frac{1}{32}$ sein.	2
e)	Es ist $5,6 \leq 64a + 4,8 \leq 8 \Leftrightarrow 0,0125 \leq a \leq 0,05$ und $w_a(2,5) = 85,9375a + 4,8$. Mit $a \in [0,0125; 0,05]$ ergibt sich $85,9375 \cdot 0,0125 + 4,8 \leq w_a(2,5) \leq 85,9375 \cdot 0,05 + 4,8$. Die möglichen Extremwerte liegen zwischen ca. 5,874 und ca. 9,097.	6
Insgesamt		40

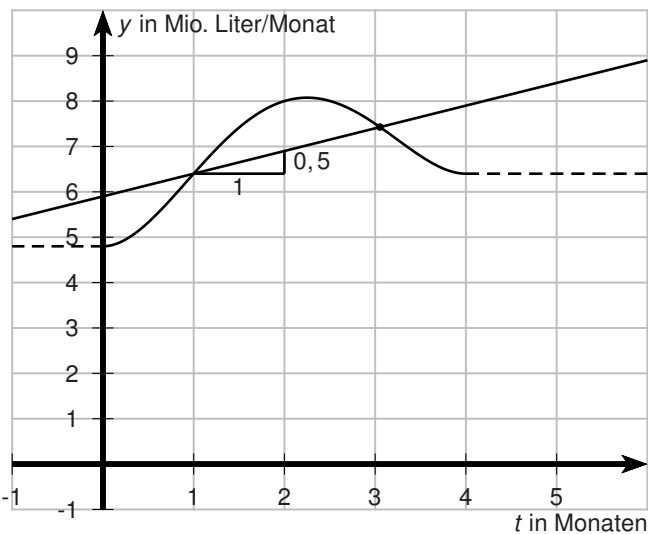
Standardbezug zur Aufgabe „Werbeaktion (WTR-Fassung)“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	4				X			I	I		I	X			
b)	2				X			I		I		X			
c)	5		X		X			I		I		X			
d)	4				X		I	II	II	I			X		
e)	2		X		X		I			II		II		X	
f)	5		X		X			I	II		I			X	
2.	4				X			II	III			III			X

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
3. a)	2				X		I				I		X		
b)	2				X		II	II						X	
c)	2				X				II			I		X	
d)	2				X		II		II		I			X	
e)	6		X		X		III	II	II		III				X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)	Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)
32,5 %	42,5 %	25 %

1.2 CAS-Fassung

	Lösungsskizze	BE
1. d)	Der Term gibt die über die Werbeaktion hinaus bleibende Erhöhung der Verkaufsrate an.	2
e)	<p>Deutung: Die Verkaufsrate ist während der Werbeaktion vom Zeitpunkt $t = 1$ bis zum Zeitpunkt t pro Monat um durchschnittlich $\frac{1}{2}$ Mio. Liter / Monat gestiegen. Die Lösung ist der Schnittpunkt der Geraden mit der Funktion f, also $t \approx 3,05$. Veranschaulichung:</p> 	4
3. d)	<p>Der Graph hat bei $t = 0$ und bei $t = 4$ je einen Hochpunkt. Der Hochpunkt bei $t = 4$ liegt tiefer. Zwischen den Hochpunkten liegt ein Tiefpunkt.</p> <p>Mögliche Begründung für negatives a: Bei negativem a würde beschrieben werden, dass durch die Werbeaktion die Verkaufsrate gesenkt wird. Für $a < 0$ ist beispielsweise $w_a(4) = 64a + 4,8 < 4,8$.</p>	4

Lösungsskizze		BE
f)	<p>Es ist $5,6 \leq 64a + 4,8 \leq 8 \Leftrightarrow 0,0125 \leq a \leq 0,05$ und $w_a(2,5) = 85,9375a + 4,8$. Mit $a \in [0,0125; 0,05]$ ergibt sich $85,9375 \cdot 0,0125 + 4,8 \leq w_a(2,5) \leq 85,9375 \cdot 0,05 + 4,8$. Die möglichen Extremwerte liegen zwischen ca. 5,874 und ca. 9,097.</p>	6

Standardbezug zur Aufgabe „Werbeaktion (CAS-Fassung)“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III			
1. a)	4				X				I	I			I			X		
b)	2				X								I			X		
c)	3		X		X								I			X		
d)	2				X											X		
e)	4		X		X				I	II	II		I				X	
f)	3		X		X					I	II			I			X	
2.	4				X					II	III							X
3. a)	2				X				I					I		X		
b)	2				X				II	II							X	
c)	2				X						II						X	
d)	4				X				II		II			II	II		X	
e)	2		X		X						II			I			X	
f)	6				X				II	II				III				X

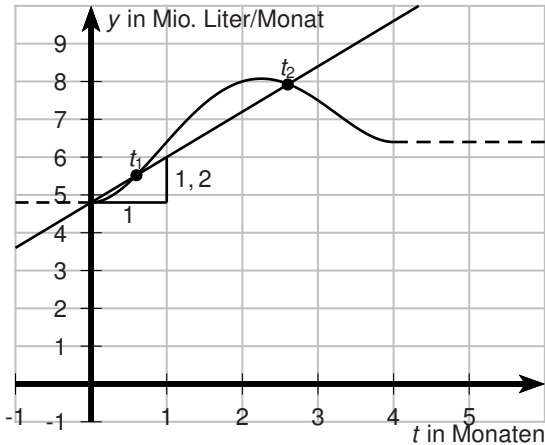
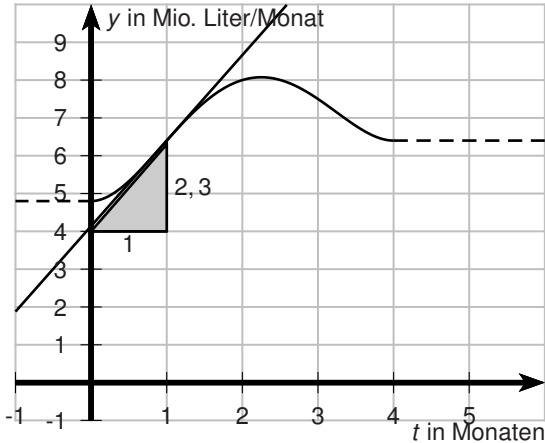
Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)	Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)
32,5 %	42,5 %	25 %

1.1.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

Aufgabe 2: Werbeaktion

2.1 WTR-Fassung

	Lösungsskizze	BE
1. a)	Vor der Aktion liegt die Verkaufsrate konstant bei 4,8 Mio. Liter pro Monat. Die Verkaufsrate steigt während der Aktion an, bis sie ein Maximum erreicht. Nach dem Maximum nimmt die Verkaufsrate ab, bis sie am Ende des Aktionszeitraums ein Minimum bei ca. 6,4 Liter pro Monat erreicht und fortan konstant bleibt.	4
b)	$f(0) = 4,8$ und $f(4) = 6,4$, beide Werte werden außerhalb des Bereichs $0 \leq t \leq 4$ konstant fortgesetzt.	2
c)	<p>Es ist $f'(t) = 0,6t^3 - 3,75t^2 + 5,4t$.</p> <p>Notwendige Bedingung für einen Extremwert:</p> $f'(t) = 0$ $t \cdot (0,6t^2 - 3,75t + 5,4) = 0$ <p>Möglichen Nullstellen der ersten Ableitung außer $t_1 = 0$:</p> $t^2 - 6,25t + 9 = 0$ $t_{2,3} = 3,125 \pm \sqrt{3,125^2 - 9}$ $t_{2,3} = 3,125 \pm \sqrt{\frac{49}{64}}$ $t_2 = 4; \quad t_3 = \frac{9}{4} = 2,25$ <p>Die in Frage kommende Nullstelle ist $t_3 = 2,25$. Einsetzen liefert $f(2,25) \approx 8,1$. Die höchste erwartete Verkaufsrate beträgt ca. 8,1 Mio. Liter / Monat.</p>	5

Lösungsskizze		BE
d)	<p>Deutung: Die Verkaufsrage ist während der Werbeaktion bis zum Zeitpunkt t pro Monat um durchschnittlich 1,2 Mio. Liter / Monat gestiegen.</p>  <p>Die Lösungen sind die Schnittpunkte der Geraden mit der Funktion f, also $t_1 \approx 0,6$ und $t_2 \approx 2,6$.</p>	6
e)	<p>Graphische Lösung:</p>  <p>Die maximale lokale Änderungsrate beträgt ca. 2,3. Für die exakte Berechnung wären</p> <ul style="list-style-type: none"> • die Nullstellen von f'' zu bestimmen, • die Nullstelle von f'' im steigenden Bereich auszuwählen, • diese Nullstelle in $f'(t)$ einzusetzen. 	6

	Lösungsskizze	BE
2.	<p>Die im Zeitraum von $t = t_0$ bis $t = 4$ produzierte Limonadenmenge muss mindestens gleich der in diesem Zeitraum erwarteten Verkaufsmenge sein. Die produzierte Menge ist zu berechnen durch $(4 - t_0) \cdot 6,4$.</p> <p>Die erwartete Verkaufsmenge ist $-t_0 \cdot 4,8 + \int_0^4 f(t) dt$.</p> <p>$t_0$ ist Lösung der Gleichung $(4 - t_0) \cdot 6,4 = -t_0 \cdot 4,8 + \int_0^4 f(t) dt$.</p>	4
3. a)	Die fünf Bedingungen ergeben fünf zu bestimmende Koeffizienten. Erst vom Grad vier an haben ganzrationale Funktionen fünf Koeffizienten, die aufgrund der Gleichungen bestimmt werden können.	2
b)	<p>Mögliche Lösung über den Koeffizientenvergleich von t^4:</p> <p>Es ist $0,15 = \frac{3}{80 \cdot (\rho - 2)} \Leftrightarrow \rho = 2,25$.</p> <p>Für $\rho = 2,25$ ergibt sich $-\frac{\rho+4}{20 \cdot (\rho-2)} = -1,25$ und $\frac{3\rho}{10 \cdot (\rho-2)} = 2,7$, also ist $f_{2,25}(t) = 0,15t^4 - 1,25t^3 + 2,7t^2 + 4,8 = f(t)$ für alle $t \in [0; 4]$.</p>	5
c)	<p>Es ist $f_3(t) = \frac{3}{80}t^4 - \frac{7}{20}t^3 + \frac{9}{10}t^2 + 4,8$.</p> <p>Aus der Forderung $f_3(t) = 4,8$ ergibt sich:</p> $\frac{3}{80}t^4 - \frac{7}{20}t^3 + \frac{9}{10}t^2 = 0$ <p>$\Leftrightarrow t = 0 \vee \frac{3}{80}t^2 - \frac{7}{20}t + \frac{9}{10} = 0$</p> <p>Also ist noch die quadratischen Gleichung zu lösen:</p> $\frac{3}{80}t^2 - \frac{7}{20}t + \frac{9}{10} = 0$ <p>$\Leftrightarrow (t - \frac{14}{3})^2 = -\frac{20}{9}$</p> <p>Diese Gleichung hat keine Lösung, also ist $t = 0$ die einzige Stelle, an der $f_3(t) = 4,8$ ist.</p>	4
d)	<p>Man erhält $f_{2,2}(2,2) \approx 8,7$ und $f_{2,1}(2,1) \approx 11,6$.</p> <p>Für $\rho = 2,2$ liegt das Extremum der Verkaufsrate gerade noch unter 9 Mio. Liter / Monat.</p>	2
e)	<p>Der Leitkoeffizient wäre negativ. Dies führt dazu, dass die Funktion bei $t = 0$ und $t = 4$ Hochpunkte hat und dazwischen bei $t = \rho$ einen Tiefpunkt.</p> <p>Im Sachkontext würde das bedeuten, dass die Werbeaktion zunächst die Verkaufsrate senken würde. Das passt nicht zu einer „gelungenen“ Werbeaktion.</p> <p><i>Hinweis: Sollten Prüflinge zwar den Verlauf der Modellfunktion argumentativ richtig darstellen, aber zu dem Schluss kommen, dass die Werbeaktion dennoch „gelingen“ sei, weil ja an ihrem Ende eine höhere Verkaufsrate als an ihrem Anfang herauskommt, so ist die Beurteilung ebenfalls als richtig zu bewerten.</i></p>	4

Lösungsskizze		BE
f)	<p>Es ist $g'(x) = 4a \cdot x^3 + 3b \cdot x^2 + 2c \cdot x + d$. Aus $g'(0) = 0$ folgt $d = 0$, d. h. $g'(x) = 4a \cdot x^3 + 3b \cdot x^2 + 2c \cdot x$. Aus $g'(q) = 0$ und $g'(-q) = 0$ folgt:</p> <p>I) $4a \cdot q^3 + 3b \cdot q^2 + 2c \cdot q = 0$ II) $-4a \cdot q^3 + 3b \cdot q^2 - 2c \cdot q = 0$</p> <p>Mit der Addition beider Gleichungen ergibt sich $b = 0$. Der Funktionsterm $g(x) = a \cdot x^4 + c \cdot x^2 + e$ enthält nur gerade Potenzen von x, also ist sein Graph achsensymmetrisch zur y-Achse.</p>	6
Insgesamt		50

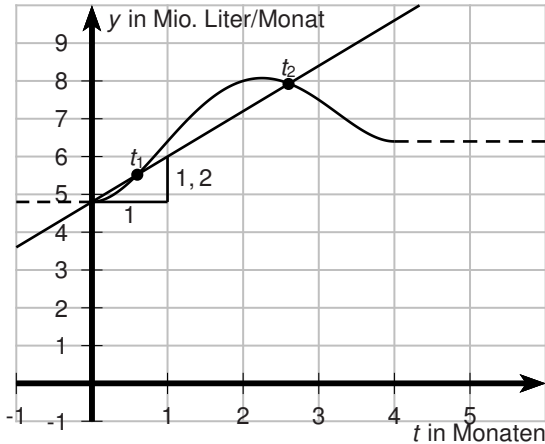
Standardbezug zur Aufgabe „Werbeaktion (WTR-Fassung)“

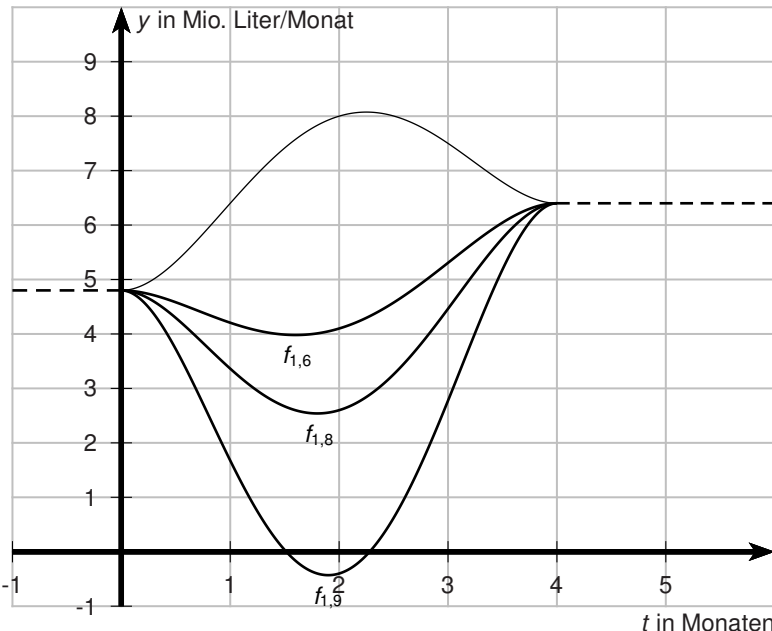
Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	4				X				I	I		I	X		
b)	2				X				I		I		X		
c)	5		X		X				I		I		X		
d)	6		X		X			I	II	II	I			X	
e)	6		X		X			I	II	II		II		X	
2.	4		X		X			III	III			III			X
3. a)	2	X			X		II							X	
b)	5				X		I	II			I			X	
c)	4				X		I		I		II			X	
d)	2				X			II	I		II	I		X	
e)	4				X		III		III			III			X
f)	6	X			X		III	II			III				X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
22 %	50 %	28 %

2.2 CAS-Fassung

Lösungsskizze		BE
1. d)	Der Term gibt die über die Werbeaktion hinaus bleibende Erhöhung der Verkaufsrate an.	2

	Lösungsskizze	BE
e)	<p>Deutung: Die Verkaufsrage ist während der Werbeaktion bis zum Zeitpunkt t pro Monat um durchschnittlich 1,2 Mio. Liter / Monat gestiegen. Die Lösungen sind die Schnittpunkte der Geraden mit der Funktion f, also $t_1 \approx 0,60$ und $t_2 \approx 2,61$. Graphische Veranschaulichung:</p> 	6
f)	<p>Nullstellen von f'' sind $t_{E1} \approx 0,93$ und $t_{E2} \approx 3,24$. Es ist $f'''(0,93) \approx -4,2 < 0$; $f'''(3,24) \approx 4,2 > 0$. Die maximale Änderungsrate liegt entweder an der Stelle $t_{E1} \approx 0,93$ oder am Rand des Intervalls. Die Randwerte von f' sind gleich Null. Es ist $f'(t_{E1}) \approx 2,26$. Damit beträgt die maximale Änderungsrate ca. 2,26.</p>	6
g)	<p>Man wähle den linken Wendepunkt aus, der ungefähr bei $t = 1$ liegt, und zeichne die Wendetangente ein. Dann bestimme man die Steigung der Wendetangente mithilfe eines Steigungsdreiecks.</p>	3
2.	<p>Die im Zeitraum von $t = t_0$ bis $t = 4$ produzierte Limonadenmenge muss mindestens gleich der in diesem Zeitraum erwarteten Verkaufsmenge sein. Die produzierte Menge ist zu berechnen durch $(4 - t_0) \cdot 6,4$. Die erwartete Verkaufsmenge ist $-t_0 \cdot 4,8 + \int_0^4 f(t) dt$. t_0 ist Lösung der Gleichung $(4 - t_0) \cdot 6,4 = -t_0 \cdot 4,8 + \int_0^4 f(t) dt$. Es ergibt sich $t_0 = -1,2$. Die höhere Produktionsrate muss spätestens 1 Monat und 6 Tage vor Beginn der Werbeaktion einsetzen.</p>	6

	Lösungsskizze	BE
3. c)	<p>Das Extremum der Verkaufsrates liegt im Modell an der Stelle $t = p$. Anhand von Probewerten zeigt sich, dass der Wert des Extremums steigt, wenn p sich von oben der 2 nähert. Die Gleichung $f_p(p) = 9$ hat die einzige positive Lösung $p = 2,1793$. Es muss $p > 2,1793$ bleiben.</p>	4
d)	<p>In der folgenden Grafik sind für verschiedene p die Graphen von f_p gezeichnet.</p>  <p>Man erkennt, dass für $1,5 < p < 2$ die Funktion bei $t = 0$ und $t = 4$ Hochpunkte hat und dazwischen bei $t = p$ einen Tiefpunkt.</p> <p>Im Sachkontext würde das bedeuten, dass die Werbeaktion zunächst die Verkaufsratesenken würde. Das passt nicht zu einer „gelungenen“ Werbeaktion.</p> <p><i>Hinweis: Sollten Prüflinge zwar den Verlauf der Modellfunktion argumentativ richtig darstellen, aber zu dem Schluss kommen, dass die Werbeaktion dennoch „gelungen“ sei, weil ja an ihrem Ende eine höhere Verkaufsrates als an ihrem Anfang herauskommt, so ist die Beurteilung ebenfalls als richtig zu bewerten.</i></p> <p><i>(Es lässt sich auch über das Vorzeichen des Leitkoeffizienten argumentieren.)</i></p> <p><i>(Eine Darstellung der Graphen wird nicht erwartet.)</i></p>	3

Lösungsskizze		BE
e)	<p>Die allgemeine ganzrationale Funktion g vierten Grades hat die Form $g(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ ($a \neq 0$).</p> <p>Es ist $g'(x) = 4a \cdot x^3 + 3b \cdot x^2 + 2c \cdot x + d$.</p> <p>Aus $g'(0) = 0$ folgt $d = 0$, d. h. $g'(x) = 4a \cdot x^3 + 3b \cdot x^2 + 2c \cdot x$.</p> <p>Aus $g'(q) = 0$ und $g'(-q) = 0$ folgt:</p> <p>I) $4a \cdot q^3 + 3b \cdot q^2 + 2c \cdot q = 0$</p> <p>II) $-4a \cdot q^3 + 3b \cdot q^2 - 2c \cdot q = 0$</p> <p>Mit der Addition beider Gleichungen ergibt sich $b = 0$.</p> <p>Der Funktionsterm $g(x) = a \cdot x^4 + c \cdot x^2 + e$ enthält nur gerade Potenzen von x, also ist sein Graph achsensymmetrisch zur y-Achse.</p> <p>(Auch ein stärker rechnergestützter Bearbeitungsweg ist zu akzeptieren.)</p>	5

Standardbezug zur Aufgabe „Werbeaktion (CAS-Fassung)“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	4				X				I	I			X		
b)	2				X				I		I		X		
c)	3		X		X				I		I		X		
d)	2				X				I			I	X		
e)	6		X		X			I	II	II	I			X	
f)	6		X		X						II	I		X	
g)	3		X		X					II		II		X	
2.	6		X		X			III	III		II	II			X
3. a)	2	X			X		II							X	
b)	4				X		I	II			I			X	
c)	4				X				I		II	I		X	
d)	3				X		III	III	I			III			X
e)	5	X			X		III	II			II				X

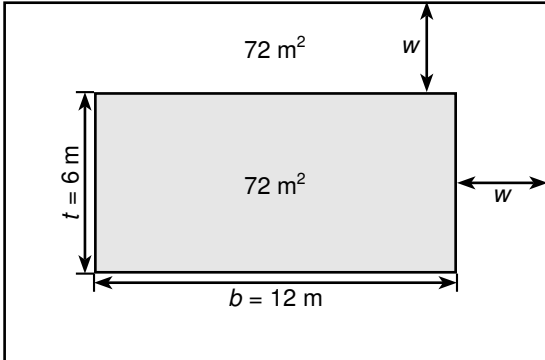
Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
22 %	50 %	28 %

1.2 Analytische Geometrie

1.2.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

Aufgabe 3: Haus

	Lösungsskizze	BE
a)	<p>Es ist $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{BF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.</p> <p>Es ist $\vec{ON} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \vec{BF} + \frac{1}{2}\vec{GF} + \frac{1}{2}\vec{FE}$.</p>	4
b)	<p>Es liegen z. B. die Punkte $(0 -2,5 7,5)$ und $(3 -1 9)$ in der ebenen Darstellung des dreidimensionalen Koordinatensystems auf dem Punkt H.</p>	2
c)	<p>Es sind $\vec{EF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{KL} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ kollinear. Also sind zwei gegenüberliegende Seiten parallel.</p> <p>Da $\vec{EF} = 12$ und $\vec{KL} = 4$ sind die gegenüberliegenden Seiten nicht gleich lang. Somit liegt kein Rechteck vor.</p> <p>Für den gesuchten Winkel α gilt:</p> $\cos(\alpha) = \frac{\vec{KE} \circ \vec{KL}}{ \vec{KE} \cdot \vec{KL} }$ $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \right \cdot \left \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right }$ $\cos(\alpha) = \frac{-16}{\sqrt{41} \cdot 4} \approx 0,62$ <p>$\alpha \approx 128,66^\circ$</p> <p>Der Innenwinkel des Trapezes beträgt ca. $128,66^\circ$.</p>	4
d)	<p>(I.) Es sind \vec{EF} und \vec{KL} die untere und obere Kante der vorderen Dachfläche $EFLK$ und \vec{NP} dessen Höhe. Somit ist $\frac{ \vec{EF} + \vec{KL} }{2} \cdot \vec{NP}$ die Fläche dieses Trapezes. Und insgesamt ist $2 \cdot \frac{ \vec{EF} + \vec{KL} }{2} \cdot \vec{NP}$ die Fläche der vorderen und hinteren trapezförmigen Dachflächen.</p> <p>(II.) $\vec{FG} \cdot \vec{ML}$ ist die Fläche eines Parallelogramms mit den Kanten \vec{FG} und der Höhe \vec{ML}. Dies sind die Flächen der beiden seitlichen dreieckigen Dachflächen FGL und EHK zusammen.</p> <p>(Alternative Antwort: Es handelt sich um die verdoppelte Fläche des Dreiecks FGL, da hier die Grundseite mit der dazugehörigen Höhe multipliziert wird aber nicht durch 2 dividiert wird.)</p>	3

	Lösungsskizze	BE
e)	<p>K_2 sei die Spitze der Antenne mit $K_2(0 0 z)$. Es ist \vec{s} kollinear zu $\overrightarrow{K_2L}$. Also ist ein k gesucht mit $\overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OK_2} = k \cdot \vec{s}$. Es ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 - z \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$. Die Gleichung ist für $k = 8$ und $z = 10 + 8 \cdot 0,5 = 14$ erfüllt. $\overrightarrow{KK_2}$ ist die Länge der Antenne. Sie ist also 4 m lang. <i>(Es gibt auch Lösungswege, die Mittel der Elementargeometrie bzw. Trigonometrie nutzen)</i></p>	3
f)	<p>Die Skizze:</p>  <p>Die Bodenfläche des Hauses beträgt $6 \cdot 12 = 72\text{m}^2$. Damit beträgt die Wegfläche ebenfalls 72m^2. Der Weg soll eine konstante Breite w haben. Damit ergibt sich: $(6 + 2w) \cdot (12 + 2 \cdot w) = 144$ $4w^2 + 36w - 72 = 0$ Also ist: $w^2 + 9w - 18 = 0$ $w_{1,2} = -4,5 \pm \sqrt{4,5^2 + 18} = -4,5 \pm \sqrt{\frac{153}{4}}$ $w_1 \approx -10,68$ und $w_2 \approx 1,68$ Die negative Lösung entfällt. Damit ergeben sich die Eckpunkte $A_1(4,68 -5,68 0)$, $B_1(4,68 9,68 0)$, $C_1(-4,68 9,68 0)$ und $D_1(-4,68 -5,68 0)$.</p>	4
Insgesamt		20

Standardbezug zur Aufgabe „Haus“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a)	4			X				I		I		I	X		
b)	2			X				I		I			X		
c)	4		X	X			II	II			I			X	
d)	3		X	X			II		II	II				X	
e)	3		X	X			II	II			II			X	
f)	4		X	X	X			III			III	III			X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)	Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)
30 %	50 %	20 %

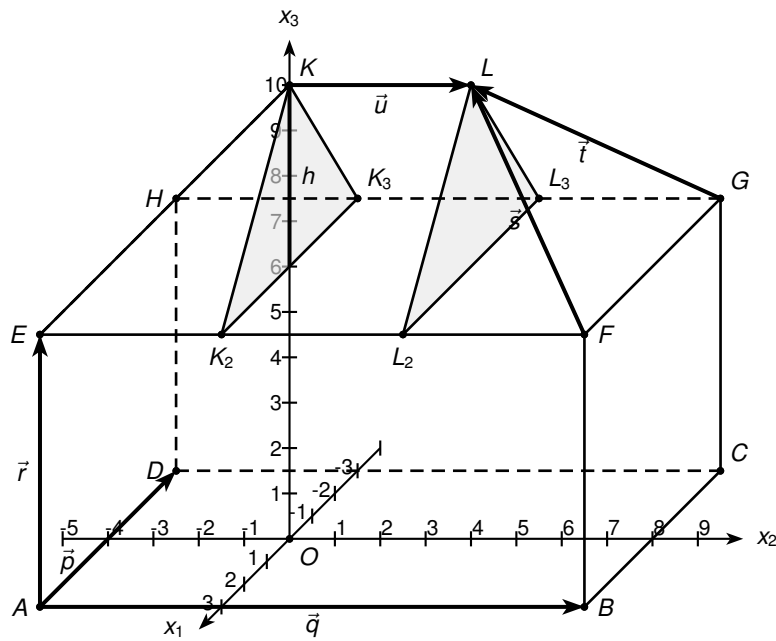
1.2.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

Aufgabe 4: Haus

4.1 WTR-Fassung

	Lösungsskizze	BE
a)	Es ist z. B. $\vec{AF} = \vec{q} + \vec{r}$, $\vec{CL} = \vec{r} + \vec{t}$ und $\vec{AK} = \vec{q} + \vec{r} + \vec{s} - \vec{u}$.	3
b)	Es liegen z. B. die Punkte $(0 -2,5 7,5)$ und $(3 -1 9)$ in der ebenen Darstellung des dreidimensionalen Koordinatensystems auf dem Punkt H .	2
c)	<p>Es ist $\vec{s} = \left \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right = \sqrt{3^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{41} \approx 6,4$,</p> <p>$\vec{t} = \left \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right = \sqrt{3^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{41} \approx 6,4$</p> <p>und $\vec{p} = \left \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right = \sqrt{6^2} = 6$.</p> <p>Damit ist das Dreieck FGL kein gleichseitiges Dreieck, sondern nur ein gleichschenkliges Dreieck.</p> <p>Der Basiswinkel α kann wie folgt berechnet werden:</p> $\cos(\alpha) = \frac{\vec{s} \circ \vec{p}}{ \vec{s} \cdot \vec{p} }$ $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right \cdot \left \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right } = \frac{18}{\sqrt{41} \cdot 6}$ $\cos(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{41}}$ <p>$\alpha \approx 62,1^\circ$</p> <p>Die Basiswinkel des Dreiecks FGJ sind rund $62,1^\circ$ groß.</p>	3

Lösungsskizze		BE
<p>d) In die gegebene Abbildung können z. B. folgende weiteren Hilfslinien eingezeichnet werden. <i>(Diese sind aber nicht gefordert.)</i></p>	<p>4</p>	



- (I.) Es ist $|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot |\vec{r}|$ das Volumen des Quaders $ABCDEFGH$ und damit das Volumen des Hauses ohne Dachgeschoss.
- (II.) $(|\vec{OK}| - |\vec{r}|)$ ist die Höhe h des Dachgeschosses, bzw. die des eingezeichneten Dreiecks.
 $|\vec{p}|$ ist die Tiefe des Dachgeschosses bzw. die Grundseite des Dreiecks K_2K_3K .
 Der Term $\frac{1}{2}|\vec{p}| \cdot (|\vec{OK}| - |\vec{r}|)$ beschreibt den Flächeninhalt des linken eingezeichneten Dreiecks K_2K_3K .
 $|\vec{u}|$ ist der Abstand der beiden Dreiecke K_2K_3K und L_2L_3L .
 Damit beschreibt der Term $\frac{1}{2}|\vec{p}| \cdot (|\vec{OK}| - |\vec{r}|) \cdot |\vec{u}|$ das Volumen eines Dreiecksprismas mit der Dreiecksfläche K_2K_3K und der Höhe $|\vec{u}|$ und damit das Volumen des mittleren Dachabschnittes.
- (III.) Mit dem Term $(|\vec{q}| - |\vec{u}|) \cdot |\vec{p}|$ wird der Flächeninhalt eines Rechtecks bestimmt, welches durch Zusammenfügen der Bodenflächen links von K_2 und rechts von L_2 entsteht und die Kantenlängen $(|\vec{q}| - |\vec{u}|)$ und $|\vec{p}|$ besitzt.
 $(|\vec{OK}| - |\vec{r}|)$ ist wieder die Höhe h des Dachgeschosses und somit ist $\frac{1}{3}(|\vec{q}| - |\vec{u}|) \cdot |\vec{p}| \cdot (|\vec{OK}| - |\vec{r}|)$ das Volumen der Rechteckpyramide, die sich durch Zusammenfügen der beiden äußeren Dachgeschosssteile ergibt.

	Lösungsskizze	BE
e)	<p>Die drei möglichen Rechnungen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Es ist M_1 der Mittelpunkt von \overline{FG}. Dann ist $M_1(0 8 6)$. Die Seitenhalbierende $\overline{M_1L}$ hat den Vektor $\overrightarrow{M_1L} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$ Es ist $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{M_1L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{20}{3} \\ \frac{22}{3} \end{pmatrix}.$ Somit teilt der Punkt S die Seitenhalbierende $\overline{M_1L}$ im Verhältnis 1 : 2. • Es ist M_2 der Mittelpunkt von \overline{FL}. Dann ist $M_2(1,5 6 8)$. Die Seitenhalbierende $\overline{M_2G}$ hat den Vektor $\overrightarrow{M_2G} = \begin{pmatrix} -4,5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$ Es ist $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OG} - \frac{2}{3}\overrightarrow{M_2G} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -4,5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{20}{3} \\ \frac{22}{3} \end{pmatrix}.$ Somit teilt der Punkt S die Seitenhalbierende $\overline{M_2G}$ im Verhältnis 1 : 2. • Es ist M_3 der Mittelpunkt von \overline{LG}. Dann ist $M_3(-1,5 6 8)$. Die Seitenhalbierende $\overline{M_3F}$ hat den Vektor $\overrightarrow{M_3F} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$ Es ist $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OF} - \frac{2}{3}\overrightarrow{M_3F} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 4,5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{20}{3} \\ \frac{22}{3} \end{pmatrix}.$ Somit teilt der Punkt S die Seitenhalbierende $\overline{M_3F}$ im Verhältnis 1 : 2. 	5
f)	<p>Sei S_2 die Spitze der Antenne mit $S_2(0 \frac{20}{3} z)$. Es ist \vec{v} kollinear zu $\overrightarrow{S_2L}$, also ist ein $k \in \mathbb{R}$ gesucht mit $\overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OS_2} = k \cdot \vec{v}$. Es ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{20}{3} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{8}{3} \\ 10 - z \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -0,5 \end{pmatrix}$. Die Gleichung ist für $k = 2$ und $z = 10 + 2 \cdot 0,5 = 11$ erfüllt. Die Antenne ist dann $\overline{SS_2}$ lang, also rund 3,67 m. (Es gibt auch Lösungswege, die Mittel der Elementargeometrie bzw. Trigonometrie nutzen)</p>	4

Lösungsskizze		BE
g)	<p>Die Bodenfläche des Hauses beträgt $6 \cdot 12 = 72$. Damit beträgt die Wegfläche ebenfalls 72 m^2. Der Weg soll eine konstante Breite w haben. Damit ergibt sich:</p> $(6 + 2w) \cdot (12 + 2 \cdot w) = 144$ $4w^2 + 36w - 72 = 0$ <p>Also ist:</p> $w^2 + 9w - 18 = 0$ $w_{1,2} = -4,5 \pm \sqrt{4,5^2 + 18} = -4,5 \pm \sqrt{\frac{153}{4}}$ $w_1 \approx -10,68 \quad \text{und} \quad w_2 \approx 1,68$ <p>Die negative Lösung entfällt. Damit ergeben sich die Eckpunkte $A_1(4,68 -5,68 0)$, $B_1(4,68 9,68 0)$, $C_1(-4,68 9,68 0)$ und $D_1(-4,68 -5,68 0)$.</p>	4
Insgesamt		25

Standardbezug zur Aufgabe „Haus (WTR-Fassung)“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a)	3			X				I		I		I	X		
b)	2			X				I		I			X		
c)	3		X	X			II	II			I			X	
d)	4		X	X			III		III	II					X
e)	5		X	X			II				II	II		X	
f)	4		X	X			II	II			II			X	
g)	4		X	X	X			III	III		III				X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
20 %	48 %	32 %

4.2 CAS-Fassung

	Lösungsskizze	BE
f)	<p>Sei S_2 der Befestigungspunkt der Stange an der Antenne mit $S_2(0 \frac{20}{3} z)$. Es sind die Vektoren $\vec{S_2L}$ und $\vec{S_2S}$ zu betrachten. Diese sind $\vec{S_2L} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{8}{3} \\ 10-z \end{pmatrix}$ und $\vec{S_2S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{22}{3}-z \end{pmatrix}$. Es ist die Gleichung $\cos(60^\circ) = \frac{\vec{S_2L} \cdot \vec{S_2S}}{ \vec{S_2L} \cdot \vec{S_2S} }$ nach z aufzulösen. Es ergibt sich dabei $z \approx 11,54$. Also ist die halbe Antenne rund 4,2 m lang und die ganze Antenne 8,4 m. (Es gibt auch Lösungswege, die Mittel der Elementargeometrie bzw. Trigonometrie nutzen)</p>	5
g)	<p>Die Bodenfläche des Hauses beträgt $6 \cdot 12 = 72$. Damit beträgt die Wegfläche ebenfalls 72 m^2. Der Weg soll eine konstante Breite w haben. Damit ergibt sich: $(6 + 2w) \cdot (12 + 2 \cdot w) = 144$ $4w^2 + 36w - 72 = 0$ Es ergeben sich die beiden Lösungen $w_1 = -10,68$ und $w_2 = 1,68$. Die negative Lösung entfällt. Damit ergeben sich die Eckpunkte $A_1(4,68 -5,68 0)$, $B_1(4,68 9,68 0)$, $C_1(-4,68 9,68 0)$ und $D_1(-4,68 -5,68 0)$.</p>	3

Standardbezug zur Aufgabe „Haus (CAS-Fassung)“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a)	3			X				I		I		I	X		
b)	2			X				I		I			X		
c)	3		X	X			II	II			I			X	
d)	4		X	X			III		III	II					X
e)	5		X	X			II				II	II		X	
f)	5		X	X			II	II			II			X	
g)	3		X	X	X			III	III		III				X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
20 %	52 %	28 %

1.3 Stochastik

1.3.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

Aufgabe 5: Physiotherapie

	Lösungsskizze	BE																
a)	$\frac{79+61+14+82}{250+160} = 0,5756... \approx 57,6 \%$ Der Anteil der Zufriedenen beträgt ca. 57,6 %.	2																
b)	Es ist $\bar{X}_B = \frac{14 \cdot 1 + 82 \cdot 2 + 34 \cdot 3 + 30 \cdot 4}{160} = \frac{400}{160} = 2,5$.	2																
c)	$s_A^2 = \frac{(1-2,5)^2 \cdot 79 + (2-2,5)^2 \cdot 61 + (3-2,5)^2 \cdot 16 + (4-2,5)^2 \cdot 94}{250} = 1,634 > 2 \cdot 0,8$ Die Bewertungen von Therapeutin B liegen enger am Mittelwert als die von Therapeutin A, damit ist die Varianz Ersterer kleiner.	3																
d)	Die ausgefüllte Tabelle: <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th>Z</th> <th>\bar{Z}</th> <th></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>$\frac{118}{205} - \frac{48}{205} = \frac{14}{41}$</td> <td>$\frac{25}{41} - \frac{14}{41} = \frac{11}{41}$</td> <td>$1 - \frac{16}{41} = \frac{25}{41}$</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>$\frac{16}{41} \cdot \frac{3}{5} = \frac{48}{205}$</td> <td>$\frac{16}{41} - \frac{48}{205} = \frac{32}{205}$</td> <td>$\frac{16}{41}$</td> </tr> <tr> <td></td> <td>$\frac{118}{205}$</td> <td>$1 - \frac{118}{205} = \frac{87}{205}$</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>		Z	\bar{Z}		A	$\frac{118}{205} - \frac{48}{205} = \frac{14}{41}$	$\frac{25}{41} - \frac{14}{41} = \frac{11}{41}$	$1 - \frac{16}{41} = \frac{25}{41}$	B	$\frac{16}{41} \cdot \frac{3}{5} = \frac{48}{205}$	$\frac{16}{41} - \frac{48}{205} = \frac{32}{205}$	$\frac{16}{41}$		$\frac{118}{205}$	$1 - \frac{118}{205} = \frac{87}{205}$	1	4
	Z	\bar{Z}																
A	$\frac{118}{205} - \frac{48}{205} = \frac{14}{41}$	$\frac{25}{41} - \frac{14}{41} = \frac{11}{41}$	$1 - \frac{16}{41} = \frac{25}{41}$															
B	$\frac{16}{41} \cdot \frac{3}{5} = \frac{48}{205}$	$\frac{16}{41} - \frac{48}{205} = \frac{32}{205}$	$\frac{16}{41}$															
	$\frac{118}{205}$	$1 - \frac{118}{205} = \frac{87}{205}$	1															
e)	Da unter der Voraussetzung von A entweder Z oder \bar{Z} und kein anderes Ereignis eintritt, ergänzen sich die beiden Wahrscheinlichkeiten zu 1. Aus dem in der Aufgabenstellung abgebildeten Baumdiagramm ergibt sich: $P(Z A) = 1 - \frac{11}{25} = 0,56$ Aus der abgebildeten Vierfeldertafel und dem abgebildeten Baumdiagramm ergibt sich: $P(B Z) = \frac{\frac{16}{41} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{118}{205}} = \frac{24}{59}$	5																
f)	Es ist t der Anteil der Patienten, die von Therapeutin A bzw. Therapeutin B behandelt werden. Dann gilt unter Verwendung der Daten aus dem Baumdiagramm für einen zufällig ausgewählten Patienten: $P(Z) = t \cdot 0,56 + t \cdot 0,6 + (1 - 2t) \cdot 0,57 = 0,02t + 0,57$ Aus der Gleichung $0,02t + 0,57 = 0,575$ ergibt sich $0,02t = 0,005$ und daraus $t = 0,25$. Die Therapeutinnen A und B müssen also jeweils 25 % der Patienten behandeln.	4																
	Insgesamt	20																

Standardbezug zur Aufgabe „Physiotherapie“

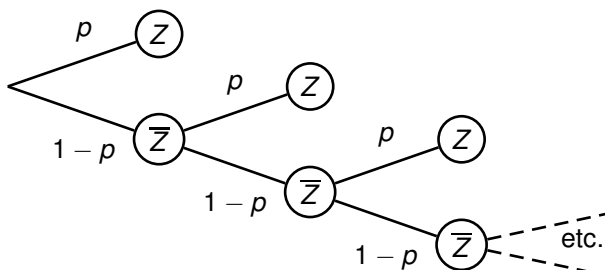
Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a)	2		X			X				I	I		X		
b)	2		X			X			I	I	I		X		
c)	3		X			X				I	I	I	X		
d)	4					X			II	II	I			X	
e)	5					X	I	I		II		II		X	
f)	4				X	X		III	III						X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)	Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)
35 %	45 %	20 %

1.3.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

Aufgabe 6: Physiotherapie

	Lösungsskizze	BE																
1. a)	Es ist $\bar{X}_B = \frac{14 \cdot 1 + 82 \cdot 2 + 34 \cdot 3 + 30 \cdot 4}{160} = \frac{400}{160} = 2,5$.	2																
b)	$s_A^2 = \frac{(1-2,5)^2 \cdot 79 + (2-2,5)^2 \cdot 61 + (3-2,5)^2 \cdot 16 + (4-2,5)^2 \cdot 94}{250} = 1,634 > 2 \cdot 0,8$ Die Bewertungen von Therapeutin B liegen enger am Mittelwert als die von Therapeutin A , damit ist die Varianz Ersterer kleiner.	3																
c)	Die ausgefüllte Tabelle: <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th>Z</th> <th>\bar{Z}</th> <th></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>$\frac{118}{205} - \frac{48}{205} = \frac{14}{41}$</td> <td>$\frac{25}{41} - \frac{14}{41} = \frac{11}{41}$</td> <td>$1 - \frac{16}{41} = \frac{25}{41}$</td> </tr> <tr> <td>$B$</td> <td>$\frac{16}{41} \cdot \frac{3}{5} = \frac{48}{205}$</td> <td>$\frac{16}{41} - \frac{48}{205} = \frac{32}{205}$</td> <td>$\frac{16}{41}$</td> </tr> <tr> <td></td> <td>$\frac{118}{205}$</td> <td>$1 - \frac{118}{205} = \frac{87}{205}$</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>		Z	\bar{Z}		A	$\frac{118}{205} - \frac{48}{205} = \frac{14}{41}$	$\frac{25}{41} - \frac{14}{41} = \frac{11}{41}$	$1 - \frac{16}{41} = \frac{25}{41}$	B	$\frac{16}{41} \cdot \frac{3}{5} = \frac{48}{205}$	$\frac{16}{41} - \frac{48}{205} = \frac{32}{205}$	$\frac{16}{41}$		$\frac{118}{205}$	$1 - \frac{118}{205} = \frac{87}{205}$	1	4
	Z	\bar{Z}																
A	$\frac{118}{205} - \frac{48}{205} = \frac{14}{41}$	$\frac{25}{41} - \frac{14}{41} = \frac{11}{41}$	$1 - \frac{16}{41} = \frac{25}{41}$															
B	$\frac{16}{41} \cdot \frac{3}{5} = \frac{48}{205}$	$\frac{16}{41} - \frac{48}{205} = \frac{32}{205}$	$\frac{16}{41}$															
	$\frac{118}{205}$	$1 - \frac{118}{205} = \frac{87}{205}$	1															
d)	Da unter der Voraussetzung von A entweder Z oder \bar{Z} und kein anderes Ereignis eintritt, ergänzen sich die beiden Wahrscheinlichkeiten zu 1. Aus dem in der Aufgabenstellung abgebildeten Baumdiagramm ergibt sich: $P(Z A) = 1 - \frac{11}{25} = 0,56$ Aus der abgebildeten Vierfeldertafel und dem abgebildeten Baumdiagramm ergibt sich: $P(B Z) = \frac{\frac{16}{41} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{118}{205}} = \frac{24}{59}$	5																
e)	Die beiden Ereignisse Z und B sind stochastisch nicht unabhängig. Die Zufriedenheitswahrscheinlichkeit der Patienten nach einer physiotherapeutischen Behandlung durch Therapeutin B unterscheidet sich von der allgemeinen Zufriedenheitswahrscheinlichkeit nach einer Physiotherapie in der Praxis. <i>Hinweis: Auch kausal formulierte Interpretationen können als korrekt bewertet werden.</i>	3																

		Lösungsskizze	BE
f)	Es gilt $P(Z) = \frac{1-c}{2} \cdot 0,56 + \frac{1-c}{2} \cdot 0,6 + c \cdot 0,57$ $= 0,28 \cdot (1 - c) + 0,3 \cdot (1 - c) + 0,57c = -0,01c + 0,58$ Es gilt weiterhin $-0,01 \cdot 1 + 0,58 = 0,57$ und $-0,01 \cdot 0 + 0,58 = 0,58$. Also ist der kleinstmögliche Wert für die Wahrscheinlichkeit 0,57 und der größtmögliche Wert 0,58. Der Unterschied von 0,01 ist sehr klein, also ist die Aussage korrekt. <i>Hinweis: Ermittelt ein Schüler oder eine Schülerin dasselbe Intervall, beurteilt die Differenz von 0,01 jedoch als relevant und stimmt der zu beurteilenden Aussage aus diesem Grunde nicht zu, ist trotzdem die volle Punktzahl zu erteilen.</i>	4	
2.	Ausdruck (2) ist korrekt.  Aus dem Baumdiagramm ergibt sich: $P(Z) = p + (1 - p) \cdot p + (1 - p)^2 \cdot p + \dots$ Dies lässt sich verallgemeinernd zusammenfassen zu $P(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - p)^k p$.	4	
Insgesamt			25

Standardbezug zur Aufgabe „Physiotherapie“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	2		X			X			I	I	I		X		
b)	3		X			X				I	I	I	X		
c)	4					X			II	II	I			X	
d)	5					X	I	I		II		II		X	
e)	3					X			II			II		X	
f)	4				X	X	II	III				II			X
2.	4					X		III		III		II			X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
20 %	48 %	32 %

2 Analysis

2.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

Aufgabe 7: Photovoltaik

	Lösungsskizze	BE
1. a)	Um 08:18:44 Uhr sind 29924 Sekunden vergangen, um 16:43:30 Uhr 60210 Sekunden. Der Mittelwert beträgt 45067 Sekunden. Die Mitte entspricht der Uhrzeit 12:31:07 Uhr.	3
b)	Der jeweilige Funktionsterm hat für alle a ausschließlich gerade Exponenten in den Potenzen von x .	1
c)	Notwendige Bedingung für einen lokalen Extrempunkt ist $g'_a(t) = 0$. $0,16 \cdot t^3 - 16 \cdot t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 10 \vee t = -10$ Die Zeiten $t = 10$ und $t = -10$ liegen nach (1) außerhalb der Grenzen des Modellierungszeitraums, da ansonsten zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang mindestens 20 Stunden liegen müssten.	3
d)	Es ist $g_{222}(t) = 0,04 \cdot t^4 - 8 \cdot t^2 + 222$ und damit $g_{222}(4,220) = g_{222}(-4,220) \approx 92 > 0$. Die Bedingung (1) ist ausschlaggebend für den Modellierungszeitraum.	3
e)	Es ist $g_{244}(t) = 0,04 \cdot t^4 - 8 \cdot t^2 + 244$. Einsetzen der Werte liefert $g_{244}(6,128) = g_{244}(-6,128) \approx -0,012$ Die angegebenen Grenzen sind in guter Näherung Nullstellen der Modellfunktion.	3

	Lösungsskizze	BE
f)		3
g)	<p>Die Ableitungen von g sind: $g'_a(t) = 0,16 \cdot t^3 - 16 \cdot t$ und $g''_a(t) = 0,48 \cdot t^2 - 16$. Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von g'_a ist $g''_a(t) = 0$. Also ergibt sich $t = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{3} \vee t = -\frac{10 \cdot \sqrt{3}}{3}$. Aus $\frac{10 \cdot \sqrt{3}}{3} \approx 5,774 < 6,128$ folgt, dass die beiden möglichen lokalen Extremstellen innerhalb des Modellierungszeitraums liegen. Unter Nutzung der Punktsymmetrie des Graphen von g'_a: $g'_a(\pm \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{3}) \approx \mp 61,584$ Der größte Betrag von $g'_a(t)$ ist also ca. 61,584.</p>	5
h)	<p>Es ist $\int_{-6,128}^{6,128} (0,04 \cdot t^4 - 8 \cdot t^2 + 244) dt = 2 \cdot [0,008 \cdot t^5 - \frac{8}{3} \cdot t^3 + 244 \cdot t]_0^{6,128}$ $\approx 1901,4.$ Die Menge an Energie beträgt ca. 1901,4 kWh.</p>	5
2.	<p><i>Mögliche Lösung:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • $w(t) = 0,5 \cdot t^2 + 0,5$ • $w(-1) = 0,5 \cdot 1 + 0,5 = 1$ • $w(1) = 0,5 \cdot 1 + 0,5 = 1$ • $w(0) = 0,5$ <p>Der Graph von w ist eine nach oben geöffnete Parabel mit Symmetrie zur y-Achse. Ihr Scheitelpunkt ist ein lokaler Tiefpunkt mit den Koordinaten $(0 0,5)$.</p>	6

	Lösungsskizze	BE
3. a)	Es ist $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \sin(x) = 0$. Die Nullstellen der Funktion s sind Nullstellen der Funktion f , unter ihnen ist die Nullstelle $x = 0$ bereits enthalten.	1
b)	Es ist $f'(x) = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)$. Die Extremstellen der Funktion s sind die Nullstellen der Kosinusfunktion. An diesen ist $\sin(x) = 1$ bzw. $\sin(x) = -1$, sodass sich $f'(x)$ dort von 0 unterscheidet. Somit kann die Funktion f an diesen Stellen keine Extremstellen besitzen.	3
c)	Graph D ist richtig. <i>Mögliche Argumente gegen andere Graphen:</i> <ul style="list-style-type: none"> • $F(-\pi) = \int_{-\pi}^{-\pi} f(t) dt = 0$; das spricht gegen Graph A. • $f(x)$ ist im gesamten Integrationsbereich größer gleich Null, daher kann $F(x)$ keine negativen Werte haben; das spricht gegen Graph A und Graph C; auch kann $F(x)$ nicht monoton fallen, das spricht gegen die Graphen B und C. 	4
Insgesamt		40

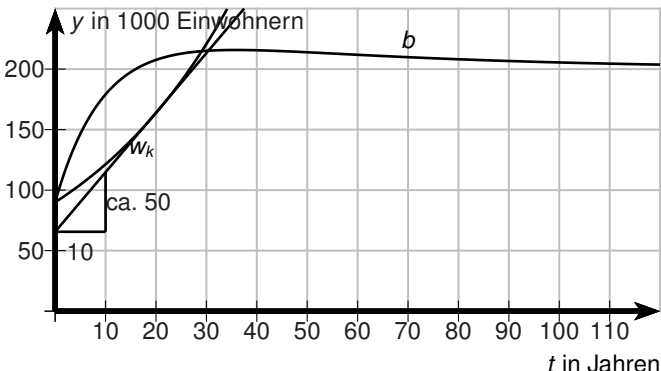
Standardbezug zur Aufgabe „Photovoltaik“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	3				X				II					X	
b)	1				X		I						X		
c)	3		X		X		II		II		I			X	
d)	3				X		II		II					X	
e)	3				X		I		I				X		
f)	3				X					I			X		
g)	5		X		X		II				II	II		X	
h)	5		X		X				I		I		X		
2.	6		X		X		II	III			II				X
3. a)	1				X		I				I		X		
b)	3		X		X		II				I			X	
c)	4				X		III	III		III					X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)	Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)
32,5 %	42,5 %	25 %

Aufgabe 8: Planspiel**8.1 WTR-Fassung**

	Lösungsskizze	BE
1. a)	Es ist $p(0) = 15$ und $b(0) = 90$. Zu Modellierungsbeginn beträgt die Größe der Grünfläche 600 km^2 , die zulässige Bevölkerungsdichte $15\,000$ Einwohner pro 100 km^2 und die zulässige Einwohnerzahl $90\,000$ Einwohner.	4
b)	Es ist $f(0) - f(20) = 0,3296\dots \approx 0,330$. Die Grünfläche nimmt um ca. 33 km^2 ab. (Auch die Angabe in FE ist zulässig.)	2
c)	In beiden Termen steht t nur im Exponenten und hat einen negativen Vorfaktor. Die Exponentialterme fallen daher monoton. Im Term von f wird der Exponentialterm zu einer Konstanten addiert, daher fallen die Funktionswerte monoton. Im Term von p wird der positiv vervielfachte Exponentialterm von einer Konstanten subtrahiert, daher steigen die Funktionswerte monoton. Es ist $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 5$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 40$. (Die Monotonie kann auch mithilfe von Vorzeichenbetrachtungen über die Ableitungsterme begründet werden.)	6
d)	Es gilt $f'(t) = -0,02 \cdot e^{-0,02 \cdot t}$ und $p'(t) = -25 \cdot (-0,1) \cdot e^{-0,1 \cdot t} = 2,5 \cdot e^{-0,1 \cdot t}$. Nach der Produktregel ist $b'(t) = f'(t) \cdot p(t) + f(t) \cdot p'(t)$ $= -0,02 \cdot e^{-0,02 \cdot t} \cdot (40 - 25 \cdot e^{-0,1 \cdot t}) + (5 + e^{-0,02 \cdot t}) \cdot 2,5 \cdot e^{-0,1 \cdot t}$	4
e)	Es ist $b'(35) = 0,025\dots$ und $b'(36) = -0,0079\dots$ Ab dem 36. vollendeten Jahr beginnt die zulässige Einwohnerzahl zu sinken.	3
2. a)	Die tatsächliche Einwohnerzahl überschreitet ca. 29 Jahre nach Modellierungsbeginn die zulässige Einwohnerzahl.	1

	Lösungsskizze	BE
b)	 <p>Die Änderungsrate beträgt ca. 5000 Einwohner pro Jahr.</p>	2
c)	<p>Aus dem Graphen liest man den Punkt (20 165) ab, also $w_k(20) \approx 165$. Damit folgt $90 \cdot e^{20k} \approx 165$, es ergibt sich $k \approx \frac{\ln(\frac{165}{90})}{20} \approx 0,03$.</p>	3
d)	<p>Die Anzahl der tatsächlichen Einwohner, die über die Anzahl der zulässigen Einwohner hinausgeht, wird im Modell beschrieben durch $w_k(t) - b(t)$. Dieser Term ist zugleich die lokale Änderungsrate der Hilfsgütermenge in ME. Die gesamte Menge in ME ist dann für den Zeitraum von $t = 40$ bis $t = 50$ zu berechnen als $\int_{40}^{50} (w_k(t) - b(t)) dt$.</p>	4
3. a)	<p><i>Mögliche Beschreibungen:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Aus dem Faktor 4 geht hervor, dass die Funktionswerte zwischen 4 und -4 liegen müssen. • Da der Term außerhalb der Klammer keine additive Konstante hat, ist die Mittellage in der Höhe $y = 0$. • Da der Term in der Klammer keine additive Konstante hat, liegt bei $x = 0$ ein Durchgang vom Negativen ins Positive. • Aus dem Faktor $\frac{2\pi}{3}$ geht die Periodenlänge 3 hervor. <p>(Es werden nur zwei Beschreibungen erwartet.)</p>	2
b)	<p>$c = 4$</p>	1
c)	<p>$4 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} \cdot x - \frac{\pi}{2}\right)$ oder $4 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right)\right)$ oder $4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} \cdot x\right)$ (Weitere Varianten sind möglich.)</p>	3

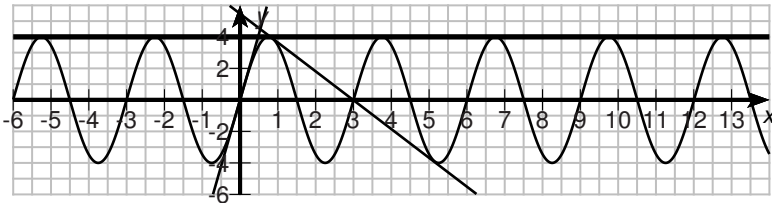
Lösungsskizze		BE
d)	Es werden zwei verschiedene Zahlen angegeben, die sich um 3 oder ein Vielfaches von 3 unterscheiden. Also z. B. $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$.	1
e)	Eine Stammfunktion von s ist die Funktion S mit $S(x) = -4 \cdot \frac{3}{2\pi} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} \cdot x\right) + C$. Da $S(0) = 0$ sein soll, ist $C = \frac{6}{\pi}$. Die Bestätigung ergibt sich, indem man die Stammfunktion wieder ableitet, dann muss die Ausgangsfunktion wieder herauskommen: $S'(x) = 4 \cdot \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot x\right) = 4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot x\right) = s(x)$	4
Insgesamt		40

Standardbezug zur Aufgabe „Planspiel (WTR-Fassung)“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	4				X				I		I		X		
b)	2				X				I		I		X		
c)	6	X			X		II	I			II			X	
d)	4		X		X						II			X	
e)	3		X		X				I		I		X		
2. a)	1		X		X					I			X		
b)	2		X		X					II	II	II		X	
c)	3	X			X			II			II	I		X	
d)	4		X		X		III	III	III				II		X
3. a)	2				X		I			I		I	X		
b)	1		X		X			I		I			X		
c)	3				X		II		II		II			X	
d)	1		X		X					I	I		X		
e)	4		X		X			II			III				X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)	Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)
35 %	45 %	20 %

8.2 CAS-Fassung

	Lösungsskizze	BE
1. d)	Im Übergang vom Steigen zum Fallen muss $b'(t) = 0$ sein. Die Gleichung $b'(t) = 0$ hat die einzige Lösung $t \approx 35,7486$. $b'(36) \approx -0,00796 < 0$ Ab dem 36. vollendeten Jahr fällt die zulässige Einwohnerzahl.	3
2. a)	Interpretation: Im Laufe von 20 Jahren wächst die tatsächliche Einwohnerzahl auf das 1,5-fache. Bestimmung von k : Die Gleichung $w_k(t + 20) = 1,5 \cdot w_k(t)$ wird durch $k = \frac{1}{20} \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ gelöst.	3
e)	Die Gleichung $w_k(50) = b(50)$ hat die ungefähre Lösung $k \approx 0,0173$. Damit w_k langsamer steigt, muss $k < 0,0173$ sein.	3
3. b)	$4 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} \cdot x - \frac{\pi}{2}\right)$ oder $4 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right)\right)$ oder $4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} \cdot x\right)$ (Weitere Varianten sind möglich.)	3
c)	 <p>Vergrößert man die Berührstelle der eingezeichneten Tangente zu $n = 3$ etwas, so geht der Berührungspunkt in der Nähe von $x = 5$ verloren, sodass man einen Fall $n = 2$ bekommt. Verkleinert man hingegen die Berührstelle, so werden zunächst aus dem Berührungspunkt zwei Schnittpunkte, dann kommt ein neuer Berührungspunkt, der wieder in zwei Schnittpunkte übergeht, usw.</p>	4

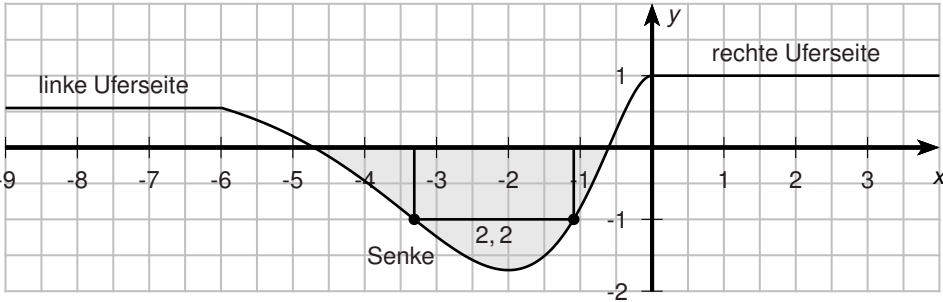
Standardbezug zur Aufgabe „Planspiel (CAS-Fassung)“

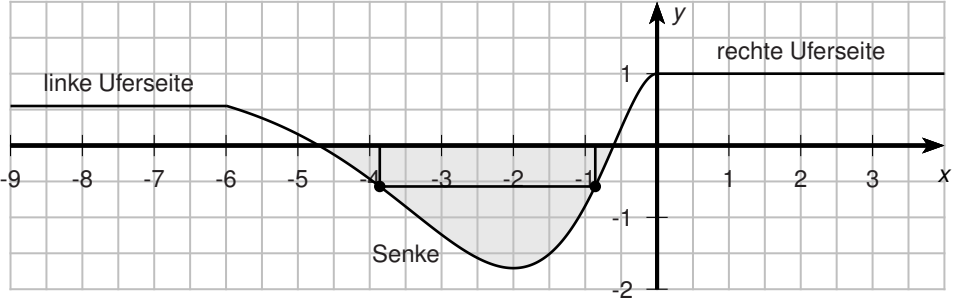
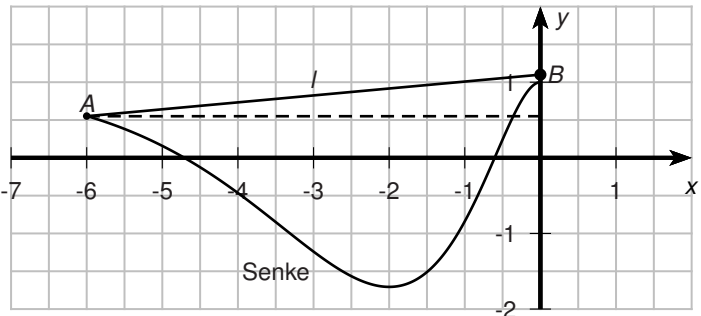
Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	4				X				I		I		X		
b)	2				X				I		I		X		
c)	6	X			X		II	I			II			X	
d)	3		X		X		I		I		I		X		

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
2. a)	3		X		X			I	II		I	II		X	
b)	1		X		X				I				X		
c)	2		X		X				II	II	II		X		
d)	3				X			II		II	I		X		
e)	3				X			II	II		II		X		
f)	4		X		X		III	III	III			II		X	
3. a)	2				X		I			I		I	X		
b)	3				X			II			II			X	
c)	4		X		X		III	III				III		X	

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)	Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)
30 %	50 %	20 %

Aufgabe 9: Fluss

	Lösungsskizze	BE
1. a)	Es ist $f(0) - f(-6) \approx 1 - 0,5538 = 0,4462$. Die Uferzonen haben einen Höhenunterschied von rund 45 cm.	2
b)	 <p>Es lässt sich ablesen, dass die Senke in der Tiefe von 1 m eine Breite von 2,2 m hat.</p>	2

	Lösungsskizze	BE
<p>c)</p>	<p>Die Gleichung $f(x + 3) = f(x)$ sagt aus, dass der Fluss an der Stellen x und $x + 3$, also 3 m weiter, die gleiche Tiefe hat.</p>  <p>Dies ist für $x \approx -3,9$ der Fall.</p>	3
<p>d)</p>	<p>Es ist $f'(x) = -10 \cdot x \cdot e^x - 5x^2 \cdot e^x = -5x \cdot (2 + x) \cdot e^x$. Dies entspricht der angegebenen Ableitung.</p>	3
<p>e)</p>	<p>Notwendige Bedingung für einen Extremwert:</p> $f'(x) = 0$ $-5x \cdot (2 + x) \cdot e^x = 0$ $x_1 = 0; \quad x_2 = -2$ <p>Aus der Abbildung 1 entnimmt man, dass der Tiefpunkt bei $x_2 = -2$ liegt. Es ist $f(-2) \approx -1,7$. Die maximale Tiefe des Wassers ist 1,7 m.</p>	4
<p>f)</p>	<p>Eine nicht notwendige Skizze:</p>  <p>Die Länge der Brücke:</p> $l = \sqrt{6^2 + (1,1 - f(-6))^2}$ $= \sqrt{6^2 + 0,5462^2} \approx 6,025$ <p>Die Brücke hat eine Länge von rund 6 m. Die Steigung der Brücke ist: $\frac{1,1 - f(-6)}{6} = \frac{0,5462}{6} \approx 0,091$. Die Brücke hat eine Steigung von rund 9 %.</p>	4

	Lösungsskizze	BE
g)	Es ist $\frac{1,1-f(-6)}{b} = 0,06$ zu lösen, also ergibt sich $b = \frac{0,5462}{0,06} \approx 9,103$. Damit liegt das Ende der Brücke 3,1 m vom Rand der Senke entfernt.	3
h)	Notwendige Bedingung für ein lokales Maximum von f' : $f''(x) = 0$ $-10e^x - 20x \cdot e^x - 5x^2 \cdot e^x = 0$ $(-10 - 20x - 5x^2) \cdot e^x = 0$ $x^2 + 4x + 2 = 0$ $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 2} = -2 \pm \sqrt{2}$ $x_1 \approx -0,586; \quad x_2 \approx -3,414$ <p>Nur x_1 liegt im vorgegebenen Bereich. Für den größten Neigungswinkel α gilt damit $\tan \alpha = f'(x_1) = 2,306$ und somit ergibt sich $\alpha \approx 67^\circ$.</p>	5
i)	Die Durchflussrate ist $0,5 \cdot \left \int_{-4,7}^{-0,6} f(x) dx \right = 0,5 \cdot \left [F(x)]_{-4,7}^{-0,6} \right = 0,5 \cdot F(-0,6) - F(-4,7) $ $= 0,5 \cdot -10,3688 + 6,2230 = 0,5 \cdot 4,1458 = 2,0729.$ <p>Die Durchflussrate beträgt etwa $2,1 \text{ m}^3/\text{s}$.</p>	5
2. a)	Als Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades hat der Graph von g höchstens drei Extrempunkte. Diese liegen im dargestellten Bereich.	3
b)	$a = 4$ und $a = 5$	2
c)	Der Graph von g ist im Punkt $(3 g(3))$ streng monoton fallend und rechtsgekrümmt. Damit ist $g'(3) < 0$ und $g''(3) < 0$, also ist $g'(3) \cdot g''(3)$ positiv.	4
Insgesamt		40

Standardbezug zur Aufgabe „Fluss“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	2		X	X	X				I		I	I	X		
b)	2		X	X	X				I	I		I	X		
c)	3	X			X			III	II	II					X
d)	3				X						II			X	
e)	4	X	X		X				I		I		X		
f)	4		X	X					I		I	I	X		
g)	3	X	X	X	X			III			II				X
h)	5	X	X	X	X				I		II	I		X	
i)	5		X	X	X				II		II	II		X	
2. a)	3				X		II			II	II			X	
b)	2	X			X		II	II		II				X	
c)	4				X		III			II		II			X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)	Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)
30 %	45 %	25 %

Aufgabe 10: Flüssigkeit

	Lösungsskizze	BE
1. a)	Es ist $f(0) = 23$ und $f(2) \approx 55,7$. Die prozentuale Abweichung beträgt zu Beginn 0 % und zwei Minuten später $\frac{f(2)-54,0}{54,0} \approx 0,032 = 3,2$ %.	3
b)	Extremum: Notwendige Bedingung $f'(t) = 0$ Einzige Lösung: $t = 10$. Da $f''(10) = -\frac{2}{e} < 0$ ist, liegt bei $f(10) = \frac{200}{e} + 23 \approx 96,6$ ein Extremum. Die Temperatur von etwa 96,6 °C ist deutlich größer als die Messwerte.	4

	Lösungsskizze	BE
c)	<p>Für große Werte von t nähert sich der Graph von f der Geraden mit der Gleichung $y = 23$ an. Die Temperatur der Flüssigkeit nähert sich auf Dauer 23 °C an.</p>	4
d)	<p>Mit $f(t) \geq 77$ erhält man den Zeitabschnitt $[t_1; t_2]$ mit $t_1 \approx 4$ und $t_2 \approx 20$.</p>	3
e)	<p>Aus den beiden Gleichungen $h(20) = 77$ und $h'(20) = -3,5$ erhält man $b = \frac{54}{\sqrt[27]{e^{35}}} \approx 197,4$ und $c = -\frac{7}{108} \approx -0,065$.</p>	4
f)	<p>Es ist nun $h(t) = 23 + 197,4 \cdot e^{-0,065 \cdot t}$. Die stärkste Abweichung der beiden Funktionen f und h erhält man bei einem Extremum von d mit $d(t) = f(t) - h(t) = 20xe^{-\frac{1}{10}t} - \frac{987}{5}e^{-\frac{13}{200}x}$. Mit $d'(t) = 0$ erhält man $t \approx 25,8606$ und $t \approx 56,7388$. Es ist $d(25,8606) \approx 2,199$ und $d(56,7388) \approx -1,042$. Die größte Abweichung zwischen f und h beträgt rund $2,2\text{ °C}$. (Die Feststellungen, dass $d(20) = 0,336$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} d(t) = 0$ sind, werden nicht erwartet.)</p>	5
2. a)	<p>$k = 0,5$: C, $k = 2$: B, $k = 5$: A</p>	2
b)	<p>Es gilt $f_k(t) \geq 23$ für alle $t \geq 0$. Der Graph D liegt für große Werte von t unterhalb der Geraden mit der Gleichung $y = 23$.</p>	2

	Lösungsskizze	BE
c)	<p>Notwendige Bedingung für ein lokales Maximum: $f'_k(t) = 0$ Dies ergibt $t = \frac{10}{k}$. Aus $f_k\left(\frac{10}{k}\right) = 98$ folgt $k = \frac{8}{3e} \approx 0,98$. Für $k \approx 0,98$ wird die Höchsttemperatur von 98°C erreicht.</p>	4
d)	<p>Aus $f''_k(t) = 0$ ergibt sich $t = \frac{20}{k}$. Einsetzen in f_k liefert $f_k\left(\frac{20}{k}\right) = 23 + \frac{400}{ke^2}$. Der Wendepunkt liegt bei $\left(\frac{20}{k} \mid 23 + \frac{400}{ke^2}\right)$. Die x-Koordinate des Wendepunkts gibt den Zeitpunkt an, zu dem die Änderung der Flüssigkeitstemperatur am größten ist.</p>	4
e)	<p>Durch Abschätzen des Inhalts der Fläche zwischen dem Graphen und der Zeitachse, z. B. durch Kästchenzählen, ergibt sich, dass die Temperatur in den ersten vier Minuten um rund 12° steigt.</p> <div style="text-align: center;"> <p style="text-align: center;">(Der exakte Wert ist 12,4.)</p> </div>	5
Insgesamt		40

Standardbezug zur Aufgabe „Flüssigkeit“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	3				X						I		X		
b)	4	X			X		I		I		I		X		
c)	4				X				I	I		I	X		
d)	3	X			X				I		II	I		X	
e)	4	X	X		X			II	II		II			X	
f)	5		X		X			III			II				X
2. a)	2				X		I			I			X		
b)	2				X		II			II		II		X	
c)	4	X			X			II	I		II			X	
d)	4	X			X		II		II			II		X	
e)	5		X	X	X			III	II	III					X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)	Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)
32,5 %	42,5 %	25 %

Aufgabe 11: Murrelbahn

	Lösungsskizze	BE																		
1. a)	<p>Tiefpunkt: $(-3,0 -1,3)$</p>	2																		
b)	<table border="1"> <thead> <tr> <th>ungefähres Intervall</th> <th>Steigungsverhalten</th> <th>Krümmungsverhalten</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>-10 bis -4,5</td> <td>streng monoton fallend</td> <td>rechtsgekrümmt</td> </tr> <tr> <td>-4,5 bis -3</td> <td>streng monoton fallend</td> <td>linksgekrümmt</td> </tr> <tr> <td>-3 bis -1,5</td> <td>streng monoton steigend</td> <td>linksgekrümmt</td> </tr> <tr> <td>-1,5 bis 0</td> <td>streng monoton steigend</td> <td>rechtsgekrümmt</td> </tr> <tr> <td>0 bis 1</td> <td>streng monoton steigend</td> <td>linksgekrümmt</td> </tr> </tbody> </table>	ungefähres Intervall	Steigungsverhalten	Krümmungsverhalten	-10 bis -4,5	streng monoton fallend	rechtsgekrümmt	-4,5 bis -3	streng monoton fallend	linksgekrümmt	-3 bis -1,5	streng monoton steigend	linksgekrümmt	-1,5 bis 0	streng monoton steigend	rechtsgekrümmt	0 bis 1	streng monoton steigend	linksgekrümmt	3
ungefähres Intervall	Steigungsverhalten	Krümmungsverhalten																		
-10 bis -4,5	streng monoton fallend	rechtsgekrümmt																		
-4,5 bis -3	streng monoton fallend	linksgekrümmt																		
-3 bis -1,5	streng monoton steigend	linksgekrümmt																		
-1,5 bis 0	streng monoton steigend	rechtsgekrümmt																		
0 bis 1	streng monoton steigend	linksgekrümmt																		

	Lösungsskizze	BE
c)	<ul style="list-style-type: none"> Die erste Aussage ist falsch, da für alle reellen x-Werte der Zusammenhang $f(x) = -f(-x)$ gelten müsste. Begründung durch das Gegenbeispiel $x = 1$: Aus der Abbildung ergibt sich $f(1) \approx 2,5$ und $-f(-1) \approx 0,4$. Die zweite Aussage ist falsch. Begründung: Bei Achsensymmetrie eines Funktionsgraphen zur y-Achse müssen alle x-Werte, die zu 0 denselben Abstand haben, auch denselben Funktionswert haben. Analog gilt, dass bei Achsensymmetrie eines Funktionsgraphen zur Geraden $x = -3$ alle x-Werte, die zu -3 denselben Abstand haben, denselben Funktionswert haben müssen. Dies ist im vorliegenden Fall nicht erfüllt. Zum Beispiel haben die x-Werte -7 und 1 beide den Abstand 4 zum x-Wert -3. Aus der Abbildung lässt sich aber entnehmen, dass $f(-7) < 0$ und $f(1) > 0$, also $f(-7) \neq f(1)$. 	4
d)	<p>(I) Es gilt $\frac{a+b}{2} = \frac{-4+0}{2} = -2$, also $f' \left(\frac{a+b}{2} \right) = f'(-2)$. Die Steigung von f an der Stelle $x = -2$ ist größer als die Steigung $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ der hier betrachteten Geraden. Der Term (I) ist also nicht geeignet.</p> <p>(II) Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass $f'(-4) < 0$ und $f'(0) = 0$. Der Ausdruck $\frac{f'(a)+f'(b)}{2}$ ist damit negativ und somit ungeeignet, die offensichtlich positive Steigung der Geraden anzugeben.</p> <p>(III) Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung gilt $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$ und damit $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f'(x) dx = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Der Term $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ definiert die Steigung zwischen den Punkten $(a f(a))$ und $(b f(b))$, somit gibt Term (III) die entsprechende Steigung an.</p>	5
e)	<p>Es ist</p> $k'(x) = e^x \cdot (x^3 - 1) + e^x \cdot 3x^2$ $= e^x \cdot (x^3 + 3x^2 - 1).$	2

	Lösungsskizze	BE
f)	<p>Mit $k(x) = h(x)$ erhält man: $e^x \cdot (x^3 - 1) = x^3 - 1 \Leftrightarrow (e^x - 1) \cdot (x^3 - 1) = 0$ Ein Produkt hat genau dann den Wert Null, wenn mindestens einer der beiden Faktoren Null ist. 1. Faktor: $e^x - 1 = 0$ $e^x = 1$ $x = 0$ b 2. Faktor: $x^3 - 1 = 0$ $x^3 = 1$ $x = 1$</p> <p>Die beiden Graphen schneiden sich an den Stellen $x = 0$ und $x = 1$. Es gilt $h'(x) = 3x^2$ und damit $h'(0) = 0$ und $h'(1) = 3$. Außerdem gilt mit $k'(x) = e^x \cdot (x^3 + 3x^2 - 1)$ an den Schnittstellen $k'(0) = -1$ und $k'(1) = 3e$. Damit gilt für den Betrag des Schnittwinkel φ an der Stelle $x = 0$: $\varphi = \tan^{-1}(0) - \tan^{-1}(-1) = 45^\circ$ Für den Betrag des Schnittwinkels ϑ an der Stelle $x = 1$ gilt analog: $\vartheta = \tan^{-1}(3) - \tan^{-1}(3e) \approx 11,4^\circ$ <i>Hinweis: Es wird nur die Berechnung eines Schnittwinkels erwartet.</i></p>	5
g)	<p>Nach Aufgabenteil e) sind die Schnittstellen 0 und 1. Für den Inhalt A der eingeschlossenen Fläche gilt:</p> $A = \left \int_0^1 (k(x) - h(x)) dx \right $ $= \left \left[(x^3 - 3x^2 + 6x - 7) \cdot e^x - \left(\frac{x^4}{4} - x \right) \right]_0^1 \right $ $= 7,75 - 3e \approx -0,405 = 0,405$	4
h)		3

	Lösungsskizze	BE
i)	$t = 0$	2
2. a)	<p>Es gilt $k_t'(0) = e^0 \cdot (0^3 + 3 \cdot 0^2 + t) = t$. Da der Übergang knickfrei sein soll, muss $k_t'(0) = -\frac{1}{2}$ gelten, woraus $t = -\frac{1}{2}$ folgt. Mit $t = -\frac{1}{2}$ folgt $k_{-\frac{1}{2}}(0) = e^0 \cdot (0^3 - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$. Für die Geradengleichung gilt also $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.</p>	3
b)	<p>y-Wert der Murmelposition beim Start: $k_t(-10) = e^{-10} \cdot ((-10)^3 - \frac{1}{2}) = -1000,5 \cdot e^{-10}$ Da zu dem genannten späteren Zeitpunkt der Höhenunterschied zum Start 2 dm beträgt, ist der y-Wert der Murmelposition dann gegeben entweder durch $-1000,5 \cdot e^{-10} - 2 \approx -2$ oder durch $-1000,5 \cdot e^{-10} + 2 \approx +2$. Da sich die Murmel zu diesem späteren Zeitpunkt im geradlinigen, d. h. im monoton fallenden Abschnitt der Bahn befindet, muss die y-Koordinate ihrer Position kleiner als $-\frac{1}{2}$ sein. Damit ist die y-Koordinate der Murmelposition gegeben durch $-1000,5 \cdot e^{-10} - 2$. Berechnung des dazugehörigen x-Wertes: $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = -1000,5 \cdot e^{-10} - 2$ $-\frac{1}{2}x = -1000,5 \cdot e^{-10} - 1,5$ $x = 2001 \cdot e^{-10} + 3$ Für den horizontalen Abstand d gilt also: $d = 10 + 2001 \cdot e^{-10} + 3 = 13 + 2001 \cdot e^{-10} \approx 13,1$ Der horizontale Abstand beträgt ca. 1,31 m.</p>	4
c)	<p>Die Gleichung $(x + 1) \cdot (r(x) - k_{-\frac{1}{2}}(x)) = 0$ hat $x = -1$ sowie die Stellen gemeinsamer Punkte der Graphen von r und $k_{-\frac{1}{2}}$ als Lösungen. Es sind also zwei Fälle zu unterscheiden:</p> <p>(I) $x = -1$ ist die Stelle eines gemeinsamen Punktes der Graphen von r und $k_{-\frac{1}{2}}$. In diesem Fall trifft die Aussage zu, da die durch den Linearfaktor erzeugte Nullstelle $x = -1$ auch eine Nullstelle des zweiten Faktors ist.</p> <p>(II) $x = -1$ ist nicht die Stelle eines gemeinsamen Punktes der Graphen von r und $k_{-\frac{1}{2}}$. Hier trifft die Aussage nicht zu, da es in diesem Fall mehr Lösungen als gemeinsame Punkte gibt.</p>	3
Insgesamt		40

Standardbezug zur Aufgabe „Murmelbahn“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	2				X					I			X		
b)	3			X	X					I		I	X		
c)	4			X	X		II			II		II		X	
d)	5		X	X	X		III			II		III			X
e)	2		X		X		I				I		X		
f)	5	X	X	X	X			II			II			X	
g)	4		X			X				II				X	
h)	3				X			I		I	I		X		
i)	2				X			I		I	I		X		
2. a)	3	X	X		X			II	II		II			X	
b)	4	X	X	X	X			II	I		II			X	
c)	3	X			X		III	III				III			X

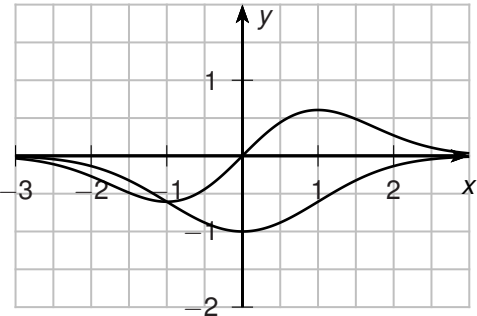
Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)	Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)
30 %	50 %	20 %

2.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

Aufgabe 12: Photovoltaik

	Lösungsskizze	BE
1. a)	Um um 08:18:44 Uhr sind 29924 Sekunden vergangen, um 16:43:30 Uhr 60210 Sekunden. Der Mittelwert beträgt 45067 Sekunden. Die Mitte entspricht der Uhrzeit 12:31:07 Uhr.	3
b)	Notwendige Bedingung für einen lokalen Extrempunkt ist $g'_a(t) = 0$. $0,16 \cdot t^3 - 16 \cdot t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 10 \vee t = -10$ Die Zeiten $t = 10$ und $t = -10$ liegen nach (1) außerhalb der Grenzen des Modellierungszeitraums, da ansonsten zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang mindestens 20 Stunden liegen müssten.	3
c)	Es ist $g_{222}(t) = 0,04 \cdot t^4 - 8 \cdot t^2 + 222$ und damit $g_{222}(4,220) = g_{222}(-4,220) \approx 92 > 0$. Die Bedingung (1) ist ausschlaggebend für den Modellierungszeitraum.	3
d)	Es ist zunächst $g_{244}(t) = 0,04 \cdot t^4 - 8 \cdot t^2 + 244$. Nullstellen von g_{244} : $0,04 \cdot t^4 - 8 \cdot t^2 + 244 = 0 \Leftrightarrow t^4 - 200 \cdot t^2 + 6100 = 0$ Substitution $t^2 = z$: $z^2 - 200 \cdot z + 6100 = 0 \Leftrightarrow z = 100 + 10 \cdot \sqrt{39} \vee z = 100 - 10 \cdot \sqrt{39}$ Für $z = 100 + 10 \cdot \sqrt{39}$ ist: $t^2 = 100 + 10 \cdot \sqrt{39}$ $\Leftrightarrow t = \sqrt{100 + 10 \cdot \sqrt{39}} \vee t = -\sqrt{100 + 10 \cdot \sqrt{39}}$ $\Leftrightarrow t \approx 12,75 \vee t \approx -12,75$ Diese Lösungen sind im Sachkontext sinnlos, weil sie auf den vorangegangenen bzw. folgenden Tag verweisen. Für $z = 100 - 10 \cdot \sqrt{39}$ ist: $t^2 = 100 - 10 \cdot \sqrt{39}$ $\Leftrightarrow t = \sqrt{100 - 10 \cdot \sqrt{39}} \vee t = -\sqrt{100 - 10 \cdot \sqrt{39}}$ $\Leftrightarrow t \approx 6,128 \vee t \approx -6,128$ Die Grenzen liegen bei $t \approx 6,128$ und $t \approx -6,128$.	7

	Lösungsskizze	BE
e)	<p>Der größte Betrag ist ein Extremwert, der als lokales Extremum oder als Randwert auftreten kann.</p> <p>Die Ableitungen von g sind: $g'_a(t) = 0,16 \cdot t^3 - 16 \cdot t$ und $g''_a(t) = 0,48 \cdot t^2 - 16$.</p> <p>Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von g'_a ist $g''_a(t) = 0$. Also ergibt sich $t = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{3} \vee t = -\frac{10 \cdot \sqrt{3}}{3}$.</p> <p>Aus $\frac{10 \cdot \sqrt{3}}{3} \approx 5,774 < 6,128$ folgt, dass die beiden möglichen lokalen Extremstellen innerhalb des Modellierungszeitraums liegen.</p> <p>Vergleich der möglichen lokalen Extremwerte mit den Randwerten unter Nutzung der Punktsymmetrie des Graphen von g'_a: $g'_a(\pm \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{3}) \approx \mp 61,584$ und $g'_a(\pm 6,128) \approx \mp 61,229$ Der größte Betrag von $g'_a(t)$ ist also ca. 61,584.</p>	7
f)	<p>Es ist</p> $\int_{-6,128}^{6,128} (0,04 \cdot t^4 - 8 \cdot t^2 + 244) dt = 2 \cdot \left[0,008 \cdot t^5 - \frac{8}{3} \cdot t^3 + 244 \cdot t \right]_0^{6,128}$ <p style="text-align: center;">$\approx 1901,4$.</p> <p>Die Menge an Energie beträgt ca. 1901,4 kWh.</p>	5
2. a)	<p>Nach der Produktregel ist $h'_a(t) = g'_a(t) \cdot w(t) + g_a(t) \cdot w'(t)$. Also ist $h'_a(1) = g'_a(1) \cdot w(1) + g_a(1) \cdot w'(1)$. Nach Voraussetzung ist $w(1) = 1$ und $w'(1) = 0$, es folgt also $h'_a(1) = g'_a(1)$. Damit ist die Knickfreiheit gezeigt.</p>	5
b)	<p><i>Mögliche Lösungen:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • $w(t) = 0,75 - 0,25 \cdot \cos(\pi \cdot t)$ <p>Es gilt:</p> <ul style="list-style-type: none"> – $w(0) = 0,75 - 0,25 \cdot \cos(0) = 0,5$ – $w(1) = 0,75 - 0,25 \cdot \cos(\pi) = 1$ – $w(-1) = 0,75 - 0,25 \cdot \cos(-\pi) = 1$ – $w'(t) = 0,25\pi \cdot \sin(\pi \cdot t)$ mit den Nullstellen $t = 1$ und $t = -1$. – Da die Kosinusfunktion an der Stelle $t = 0$ ein lokales Maximum hat, hat der Graph von w dort einen lokalen Tiefpunkt mit den Koordinaten $(0 0,5)$. 	5

	Lösungsskizze	BE
	<ul style="list-style-type: none"> • $w(t) = -0,5 \cdot t^4 + t^2 + 0,5$ Es gilt: <ul style="list-style-type: none"> – $w(0) = 0,5$ – $w(1) = w(-1) = -0,5 \cdot 1 + 1 + 0,5 = 1$ – $w'(t) = -2 \cdot t^3 + t$ – $w'(1) = w'(-1) = 0$ – $w'(0) = 0$ <p>Aufgrund des negativen Leitkoeffizienten hat der Graph der Funktion an den Intervallgrenzen Hochpunkte und in der Mitte des Intervalls den Tiefpunkt $T(0 0,5)$.</p>	
3. a)	Es ist $F'(x) = (-1) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = f(x)$ und damit ist F eine Stammfunktion von f .	2
b)	<div style="text-align: center;">  </div> <p>In der Skizze muss deutlich werden, dass ...</p> <ul style="list-style-type: none"> • der Hochpunkt bei $x = 1$ und der Tiefpunkt bei $x = -1$ liegt. • der Ursprung auf der Kurve liegt. • der Graph sich für betragsmäßig große Argumente der x-Achse asymptotisch nähert. 	2

		Lösungsskizze	BE
c)	<p>Es ist:</p> $\int_0^x f(t) dt = r \Leftrightarrow F(x) - F(0) = r$ $\Leftrightarrow -e^{-\frac{1}{2}x^2} + 1 = r$ $\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}x^2} = 1 - r$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 = \ln(1 - r)$ <p>Damit es für x eine Lösung gibt, muss</p> <ul style="list-style-type: none"> • $(1 - r) > 0$ sein, da sonst der \ln-Term nicht definiert ist, • $(1 - r) \leq 1$ sein, damit $\ln(1 - r)$ nicht positiv ist. <p>Es ist $0 < (1 - r) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq r < 1$. Die Gleichung hat für x genau zu denjenigen r Lösungen, für die $0 \leq r < 1$ ist.</p>	6	
d)	<p>Der Faktor $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ändert sich nicht bei Vorzeichenänderung von x. Also ist die Symmetrie bestimmt durch den Faktor x^n. Für alle geraden Zahlen n hat der Graph von f_n eine Achsensymmetrie zur Ordinate, für alle ungeraden Zahlen n hat der Graph von f_n eine Punktsymmetrie zum Ursprung.</p>	2	
Insgesamt			50

Standardbezug zur Aufgabe „Photovoltaik“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	3				X				II					X	
b)	3		X		X		II		II		I			X	
c)	3				X		II		II					X	
d)	7	X			X				I		I		X		
e)	7		X		X		II				II	II		X	
f)	5		X		X				I		I		X		
2. a)	5		X		X		III	II			II				X
b)	5		X		X		II	III			II				X
3. a)	2		X		X						II			X	
b)	2		X		X					II	II			X	
c)	6	X	X		X		III	II			III				X
d)	2				X			II			II	II		X	

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
24 %	44 %	32 %

Aufgabe 13: Planspiel**13.1 WTR-Fassung**

	Lösungsskizze	BE
1. a)	Es ist $p(0) = 15$ und $b(0) = 90$. Zu Modellierungsbeginn beträgt die Größe der Grünfläche 600 km^2 , die zulässige Bevölkerungsdichte $15\,000$ Einwohner pro 100 km^2 und die zulässige Einwohnerzahl $90\,000$ Einwohner.	4
b)	In beiden Termen steht t nur im Exponenten und hat einen negativen Vorfaktor. Die Exponentialterme fallen daher monoton. Im Term von f wird der Exponentialterm zu einer Konstanten addiert, daher fallen die Funktionswerte monoton. Im Term von p wird der positiv vervielfachte Exponentialterm von einer Konstanten subtrahiert, daher steigen die Funktionswerte monoton. Es ist $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 5$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 40$. (Die Monotonie kann auch mithilfe von Vorzeichenbetrachtungen über die Ableitungsterme begründet werden.)	6
c)	Es gilt $f'(t) = -0,02 \cdot e^{-0,02 \cdot t}$ und $p'(t) = -25 \cdot (-0,1) \cdot e^{-0,1 \cdot t} = 2,5 \cdot e^{-0,1 \cdot t}$. Nach der Produktregel ist $b'(t) = f'(t) \cdot p(t) + f(t) \cdot p'(t)$ $= -0,02 \cdot e^{-0,02 \cdot t} \cdot (40 - 25 \cdot e^{-0,1 \cdot t}) + (5 + e^{-0,02 \cdot t}) \cdot 2,5 \cdot e^{-0,1 \cdot t}$	4
d)	Es ist $b'(35) = 0,025\dots$ und $b'(36) = -0,0079\dots$ Ab dem 36. vollendeten Jahr beginnt die zulässige Einwohnerzahl zu sinken.	3
2. a)	Die tatsächliche Einwohnerzahl überschreitet ca. 29 Jahre nach Modellierungsbeginn die zulässige Einwohnerzahl.	1
b)	Aus dem Graphen liest man den Punkt $(20 165)$ ab, also $w_k(20) \approx 165$. Damit folgt $90 \cdot e^{20k} \approx 165$, es ergibt sich $k \approx \frac{\ln(\frac{165}{90})}{20} \approx 0,03$.	3
c)	Beide Funktionen haben bei $t = 0$ den gleichen Funktionswert. Die Funktion b hat zunächst einen rechtsgekrümmten Graphen, d. h. ihre Steigung nimmt ab. Dagegen nimmt die Steigung der Funktion w_k permanent zu, sodass der Graph von w_k sich zunehmend nach oben von dem Graphen von b entfernt. Wenn der Graph von b in Linkskrümmung übergeht, ist er schon in einem Bereich, in dem er nur noch fällt. Daher kommen sich die beiden Graphen auch weiterhin nicht mehr näher.	5

	Lösungsskizze	BE
d)	Ein sofortiges Überschreiten ist gegeben, wenn $w'_k(0) \geq b'(0)$ ist. Die Ableitung von w_k hat die Funktionsgleichung $w'_k(t) = 90k \cdot e^{k \cdot t}$. Es ergeben sich die Werte $w'_k(0) = 90k$ und $b'(0) = 14,7$. Also erhält man die Ungleichung $90k \geq 14,7$ bzw. $k \geq \frac{49}{300}$. Für alle $k \geq \frac{49}{300}$ überschreitet die tatsächliche Einwohnerzahl von Anfang an die zulässige Einwohnerzahl.	5
3. a)	Verschiebung in negative x -Richtung um a , Streckung in y -Richtung mit Streckfaktor a .	2
b)	Für $a_1 \neq a_2$ gilt: $\frac{a_1}{x+a_1} = \frac{a_2}{x+a_2} \Rightarrow a_1 \cdot (x+a_2) = a_2 \cdot (x+a_1) \Rightarrow a_1 x = a_2 x \Rightarrow x = 0$ Also ist $P(0 1)$ der einzige gemeinsame Punkt. (Für eine formal korrekte Lösung müsste noch darauf hingewiesen werden, dass die Nenner ungleich Null sind. Dieser Hinweis wird hier nicht erwartet, da er aus dem Eingangstext unmittelbar hervorgeht.)	3
c)	Es ist $V_a = \pi \cdot \int_0^a \frac{a^2}{(x+a)^2} dx = \pi \cdot a^2 \cdot \left[-\frac{1}{x+a} \right]_0^a = \pi \cdot a^2 \cdot \left(-\frac{1}{2a} + \frac{1}{a} \right) = \frac{\pi \cdot a}{2}$.	4
d)	Die Ableitung von r_a hat die Gleichung $r'_a(x) = -\frac{a}{(x+a)^2}$. Die Steigung im Punkt P ist $r'_a(0) = -\frac{1}{a}$. Somit ist die Tangente $t_a(x) = -\frac{1}{a} \cdot (x-0) + r_a(0) = -\frac{1}{a} \cdot (x-a)$.	4
e)	Es wird die Funktion $r_1(x) = \frac{1}{x+1}$ betrachtet. Dann ist die zugehörige Tangente $t_1(x) = -x + 1$. Diese schneidet die x -Achse für $t_1(x) = 0$, also bei $x = 1$. Der Flächeninhalt von M ist $A = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$. Unter der Tangente liegt ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $A_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Sein Anteil an dem Flächeninhalt von M beträgt $\frac{\frac{1}{2}}{\ln(2)} \approx 0,721$. (Hinweis: Ein Verweis darauf, dass der Graph von r_1 im Integrationsbereich oberhalb der x -Achse verläuft, wird wegen Offensichtlichkeit nicht erwartet.)	6
	Insgesamt	50

Standardbezug zur Aufgabe „Planspiel (WTR-Fassung)“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	4				X				I		I		X		
b)	6	X			X		II	I			II			X	
c)	4		X		X						II			X	
d)	3		X		X				I		I		X		
2. a)	1				X					I			X		
b)	3	X			X			II		II	II			X	
c)	5	X			X		III								X
d)	5		X		X			III	II		II				X
3. a)	2				X			I			I		X		
b)	3	X			X		II	II			I			X	
c)	4		X		X						II			X	
d)	4		X		X			I			II			X	
e)	6		X		X			II			II	III			X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
20 %	48 %	32 %

13.2 CAS-Fassung

	Lösungsskizze	BE
1. b)	Es ist $f(0) - f(20) = 0,3296\dots \approx 0,330$. Die Grünfläche nimmt um ca. 33 km ² ab. (Auch die Angabe in FE ist zulässig.)	2
d)	Im Übergang vom Steigen zum Fallen muss $b'(t) = 0$ sein. Die Gleichung $b'(t) = 0$ hat die einzige Lösung $t \approx 35,7486$. $b'(36) \approx -0,00796 < 0$ Ab dem 36. vollendeten Jahr fällt die zulässige Einwohnerzahl.	3
2. a)	Interpretation: Im Laufe von 20 Jahren wächst die tatsächliche Einwohnerzahl auf das 1,5-fache. Bestimmung von k : Die Gleichung $w_k(t + 20) = 1,5 \cdot w_k(t)$ wird durch $k = \frac{1}{20} \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ gelöst.	3
c)	Die Ungleichung $w_k(50) \geq b(50)$ hat die ungefähre Lösung $k \geq 0,0173$. Für $k \geq 0,0173$ überschreitet die tatsächliche Einwohnerzahl die zulässige Einwohnerzahl frühestens 50 Jahre nach Modellierungsbeginn.	3

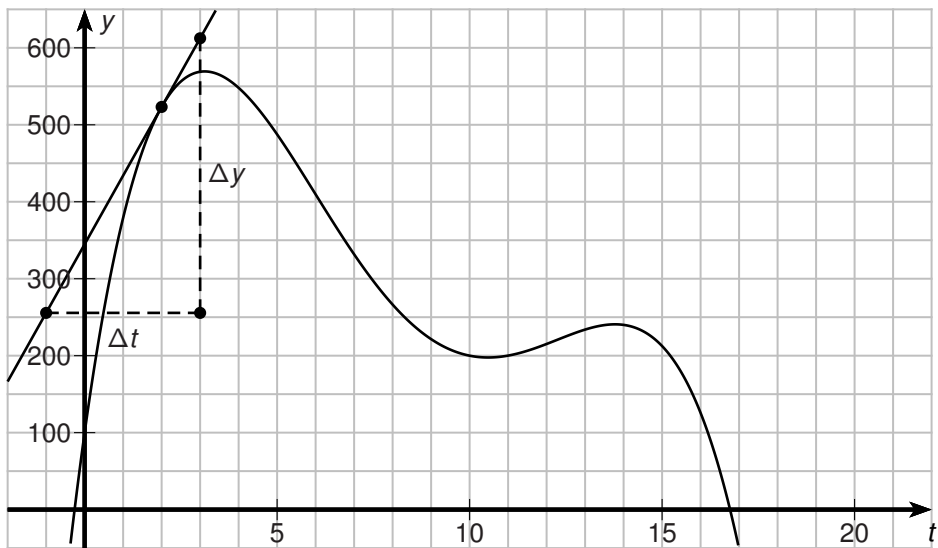
		Lösungsskizze	BE
3. c)	<p>Es ist $V_a = \pi \cdot \int_0^a \frac{a^2}{(x+a)^2} dx = \frac{\pi \cdot a}{2}$</p> <p>Der Parameter a ist mit dem konstanten Faktor $\frac{\pi}{2}$ multipliziert. Damit ist der Zusammenhang zwischen V_a und a eine Proportionalität.</p>	3	
e)	<p>$t_a(x) = 0 \Leftrightarrow x = a$</p> <p>Der Flächeninhalt von M ist $A = \int_0^a \frac{a}{x+a} dx = a \cdot \ln(2)$.</p> <p>Unter der Tangente liegt ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $A_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot a = \frac{a}{2}$.</p> <p>Sein Anteil an dem Flächeninhalt von M beträgt $\frac{\frac{a}{2}}{a \cdot \ln(2)} = \frac{1}{2 \cdot \ln(2)}$, was unabhängig von a ist.</p> <p><i>(Ein Verweis darauf, dass der Graph von r_a im Integrationsbereich oberhalb der x-Achse verläuft, wird wegen Offensichtlichkeit nicht erwartet.)</i></p>	5	
f)	<p>Die Gleichung $\frac{2}{x+2} = m \cdot x$ hat für $m \neq 0$ die Lösungen</p> $x = \frac{\sqrt{m^2+2m}-m}{m} \text{ und } x = \frac{-\sqrt{m^2+2m}-m}{m}$ <p>Es gibt keine Lösung, wenn $m^2 + 2m < 0$ ist. Das ist der Fall für $-2 < m < 0$. Die Ursprungsgeraden mit einem Steigungsfaktor $m \in]-2; 0[$ haben keinen gemeinsamen Punkt mit G_2.</p> <p><i>(Wenn der CAS-Rechner ein anderes Ergebnis zur Lösung der Gleichung liefert, dies aber folgerichtig vom Prüfling interpretiert wird, ist die volle Punktzahl zu geben.)</i></p>	3	

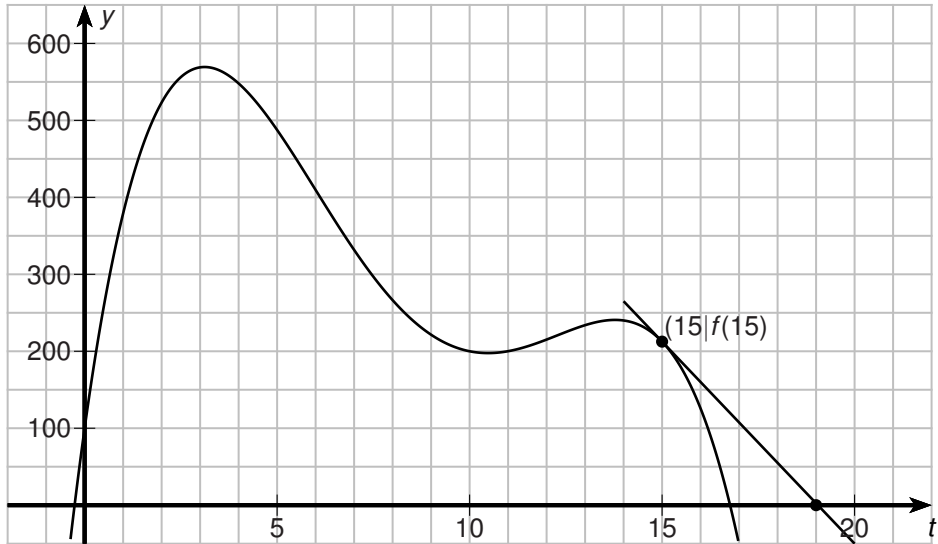
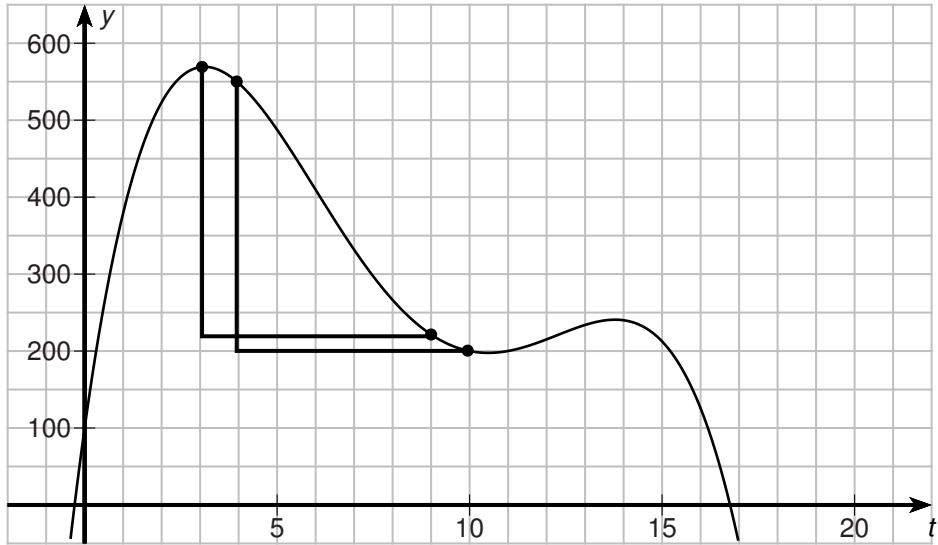
Standardbezug zur Aufgabe „Planspiel (CAS-Fassung)“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	4				X				I		I		X		
b)	2				X				I		I		X		
c)	6	X			X		II	I			II			X	
d)	3		X		X		I		I		I		X		
2. a)	3		X		X			I	II		II			X	
b)	3				X			II		II	I			X	
c)	3				X			II	II		II			X	
d)	5	X			X		III								X
e)	3		X		X			III	II		II				X
3. a)	2				X			I			I		X		
b)	2	X			X		II	II			I			X	
c)	3		X		X		I	II			I			X	
d)	3		X		X			I			II			X	
e)	5		X		X			II			II	III			X
f)	3	X			X		III	II			III				X

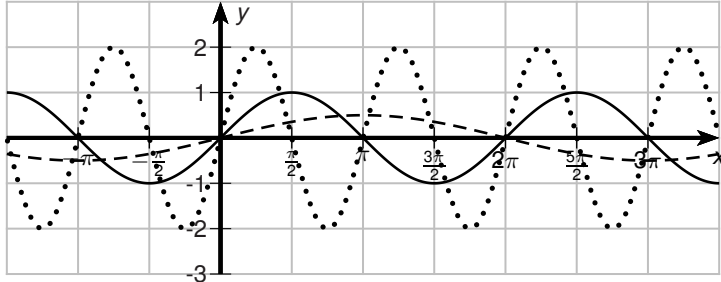
Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
22 %	46 %	32 %

Aufgabe 14: Wasserbecken

	Lösungsskizze	BE
1. a)	<p>Aus der Grafik lässt sich ablesen: Das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt etwa $f(5) \approx 490 \text{ m}^3$. Der Zeitraum, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt, beginnt etwa 0,9 Stunden und endet etwa 6,8 Stunden nach Beobachtungsbeginn.</p>	3
b)	 <p>Die Tangente im Punkt $(2 f(2))$ hat die Steigung $\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx \frac{360}{4} = 90$. Die momentane Änderungsrate beträgt etwa $90 \text{ m}^3/\text{h}$.</p>	4

Lösungsskizze		BE
<p>c) Zeichnet man die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(15 f(15))$ in die Abbildung ein, so liefert die t-Koordinate des Schnittpunkts dieser Tangente mit der t-Achse den gesuchten Zeitpunkt.</p>		<p>3</p>
<p>Das Becken enthält etwa 19 Stunden nach Beobachtungsbeginn kein Wasser mehr.</p>		
<p>d) Die Lösung der Gleichung liefert diejenigen Zeitpunkte, zu denen das Volumen des Wassers 350 Kubikmeter größer ist als sechs Stunden später.</p>		<p>4</p>
<p>Durch Probieren und Ablesen erhält man beispielsweise: $t \approx 3$ oder $t \approx 4$. <i>(Es wird nur eine Lösung verlangt.)</i></p>		

	Lösungsskizze	BE
e)	<p>Der Graph einer Funktion der Form I ist symmetrisch zur y-Achse. Der Graph von f ist nicht achsensymmetrisch.</p> <p>Der Graph einer Funktion der Form II hat höchstens zwei Extrempunkte. Der Graph von f besitzt drei Extrempunkte.</p>	3
2. a)	<p>Die erste Ableitung von g ist $g'(t) = 0,4 \cdot (6t^2 - 78t + 180)$. Notwendige Bedingung für einen lokalen Extremwert:</p> $g'(t) = 0$ $0,4 \cdot (6t^2 - 78t + 180) = 0$ $t^2 - 13t + 30 = 0$ $t_{1;2} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - 30} = \frac{13}{2} \pm \frac{7}{2}$ $t_1 = 10; \quad t_2 = 3$ <p>Wegen $g(0) = 0$, $g(3) = 97,2$, $g(10) = -40$ und $g(15) = 270$ ist die momentane Änderungsrate 15 Stunden nach Beobachtungsbeginn maximal.</p>	5
b)	<p>Nullstellen von g:</p> $0,4 \cdot (2t^3 - 39t^2 + 180t) = 0$ $2t \cdot \left(t^2 - \frac{39}{2}t + 90\right) = 0$ $t_1 = 0 \quad \vee \quad t_{2,3} = \frac{39}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{39}{4}\right)^2 - 90} = \frac{39}{4} \pm \frac{9}{4}$ $t_1 = 0; \quad t_2 = 12; \quad t_3 = 7,5$ <p>Da z. B. $g(10) < 0$, liegt der Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt, zwischen 7,5 h und 12 h nach Beobachtungsbeginn.</p>	4
c)	<p>Es ist</p> $350 - \int_0^3 g(t) dt = 350 - [G(t)]_0^3$ $= 350 - G(3) + G(0)$ $= 350 - 199,8 + 0 = 150,2.$ <p>Zu Beobachtungsbeginn enthielt das Becken etwa 150 m^3 Wasser.</p>	4

	Lösungsskizze	BE
d)	$\int_0^x g(t) dt = 0$ $G(x) - G(0) = 0$ $0,2 \cdot (x^4 - 26x^3 + 180x^2) = 0$ $x = 0 \quad \vee \quad x^2 - 26x + 180 = 0$ $x = 0; \quad x_{1,2} = 13 \pm \sqrt{13^2 - 180} = 13 \pm \sqrt{-11}$ <p>Die Gleichung $G(x) = 0$ besitzt nur die Lösung $x = 0$. Es gibt damit also keinen weiteren Zeitpunkt nach dem Beobachtungsbeginn, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.</p>	5
3. a)	 <p>Der Graph zu $c = \frac{1}{2}$ ist gestrichelt, der zu $c = 2$ gepunktet dargestellt.</p>	4
b)	<p>Es ist $u = \frac{\pi}{c}$.</p> <p>Der gesuchte Flächeninhalt ist:</p> $\int_0^u h_c(x) dx = [-\cos(c \cdot x)]_0^u = -\cos(c \cdot u) + \cos(c \cdot 0)$ $= -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$ <p>Der Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von h_c für $0 \leq x \leq u$ mit der x-Achse einschließt, beträgt 2.</p>	5
c)	<p>Ein Tiefpunkt liegt bei dreiviertel der Periode, zwischen der Nullstelle u und $2u$, also bei $\frac{3}{2}u$. Als y-Wert lässt sich der allen Tiefpunkten gemeinsame Wert $-c$ übernehmen.</p> <p>Ein möglicher Tiefpunkt ist $(\frac{3\pi}{2c} -c)$.</p>	3
d)	<p>Es ist $h_c^{(103)}(x) = -c^{104} \cdot \cos(c \cdot x)$.</p>	3
	Insgesamt	50

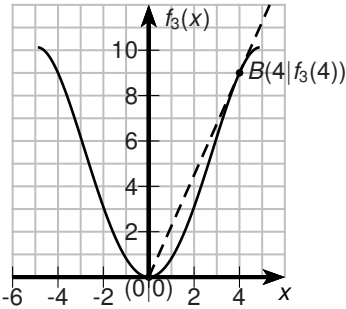
Standardbezug zur Aufgabe „Wasserbecken“

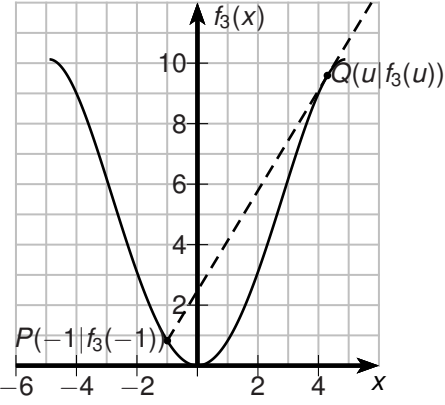
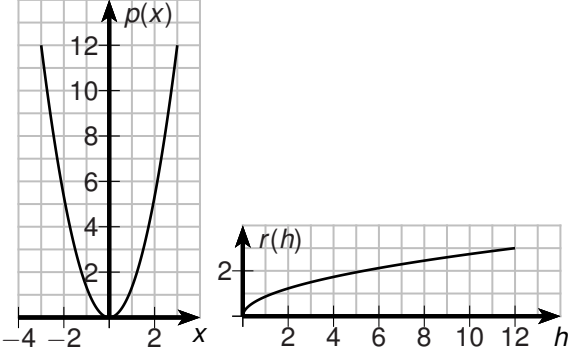
Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	3		X		X					I		I	X		
b)	4		X	X	X				I	I	I		X		
c)	3		X	X	X				II	II		II		X	
d)	4	X			X			III	II	II					X
e)	3				X		II			II	II			X	
2. a)	5	X			X		I		I		II			X	
b)	4	X			X		I		II		II			X	
c)	4		X	X	X			III	II		II				X
d)	5	X	X	X	X			III	II		III				X
3. a)	4				X					I	I		X		
b)	5		X	X	X			II			II			X	
c)	3				X		II	II				II		X	
d)	3				X		III	III			II				X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
22 %	46 %	32 %

Aufgabe 15: Gläser

	Lösungsskizze	BE
1. a)	Likörglas: Graph V Cocktailglas: Graph II	2
b)	Die Gleichung $f_k(3) = 12$ liefert die beiden Lösungen $k \approx -3,5$ und $k \approx 4,06$. Wegen $k > 0$ ist $k \approx 4,06$.	2
c)	Der Term von f_k enthält nur Potenzen von x mit geradem Exponenten.	2
d)	Gesucht sind die Extremstellen von f_k . Notwendige Bedingung für Extremstellen: $f'_k(x) = 0$ Lösungen: $x_1 = -2 \cdot \sqrt{2 \cdot k}$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot k}$ Einsetzen in die zweite Ableitung ergibt $f''_k(-2\sqrt{2k}) < 0$, $f''_k(0) > 0$ und $f''_k(2\sqrt{2k}) < 0$. Damit hat f_k ein Minimum bei $x_2 = 0$ sowie Maxima bei $x_1 = -2\sqrt{2k}$ und $x_3 = 2\sqrt{2k}$.	5

	Lösungsskizze	BE
e)	<p>Extremstelle mit positiver x-Koordinate: $x = 2\sqrt{2k}$.</p> $f_k(2\sqrt{2k}) = \frac{3}{8}k^3$ $\frac{3}{4096} \cdot (2\sqrt{2k})^6 = \frac{3}{8}k^3$ <p>Beide Funktionen haben an der Stelle $2\sqrt{2k}$ den gleichen Funktionswert.</p>	3
2. a)	<p>Maximale Höhe des Cocktailglases: $f_3(2\sqrt{6}) = \frac{81}{8}$</p> <p>Höhe der Linie: $\frac{81}{8} - 2 = \frac{65}{8}$</p> <p>Für den Radius x dieser Linie gilt: $f_3(x) = \frac{65}{8}$ bzw. $x = \frac{2\sqrt{30}}{3} \approx 3,65$</p> <p>Die Länge der Linie ist der Kreisumfang $2\pi \cdot \frac{2\sqrt{30}}{3} \approx 22,94$.</p> <p>Die eingeschliffene Linie 2 cm unterhalb des Randes ist etwa 23 cm lang.</p>	5
b)	<p>Der Abbildung ist zu entnehmen, dass das Cocktailglas in seinem unteren Bereich konvex ist.</p> <p>$f_3''(x) = 0$ ergibt die Lösungen $x = \pm 2\sqrt{2}$.</p> <p>Damit ist das Cocktailglas in dem Intervall für $x \in [-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$ konvex.</p>	3
c)	<p>Der Strohhalm ist Teil der Tangente im Punkt $(4 f_3(4))$ mit der Gleichung $y = \frac{9}{4}x$.</p> <p>Die Tangente schneidet f_3 im Punkt $(0 0)$.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Damit hat der Strohhalm innerhalb des Glases die Länge</p> $l = \sqrt{4^2 + (f_3(4))^2} = \sqrt{97},$ <p>außerhalb des Glases noch $20 - \sqrt{97} \approx 10,2$ cm.</p> <p>(Zeichnung wird nicht erwartet.)</p>	4

Lösungsskizze		BE
<p>d) Die Gleichung der Tangente im Punkt Q ist $t_Q(x) = f'_3(u) \cdot (x - u) + f_3(u)$.</p>		4
<p>Da P auf der Tangente liegt, erhält man mit $f_3(-1) = t_Q(-1)$ für u die Lösungen $u_1 = \frac{-\sqrt{142+1}}{3}$, $u_2 = 0$ und $u_3 = \frac{\sqrt{142+1}}{3}$. Wegen $u > 0$, ist die einzige Lösung $u_3 = \frac{\sqrt{142+1}}{3} \approx 4,31$.</p>		
<p>3. a) Den Koordinaten des Hochpunkts lässt sich entnehmen, dass das Sektglas im Gegensatz zu den anderen Gläsern zum Rand hin nicht senkrecht zur Rotationsachse ausläuft, den Koordinaten des Wendepunkts, dass das Sektglas im Gegensatz zu den anderen Gläsern vollständig konvex ist.</p>		4
<p>b) Für die Höhe h des Glases in Abhängigkeit vom Radius r: $h = \frac{4}{3}r^2$ mit $r \geq 0$ Löst man dies nach r auf, so erhält man $r = \frac{1}{2}\sqrt{3 \cdot h}$.</p>		3
<p>c) Die Graphen:</p>		2
<p>d) Das Volumen der Flüssigkeit bei einer Füllhöhe von 6 cm ist $V = \pi \cdot \int_0^6 (r(h))^2 dh \approx 42,41$. Das Volumen der Flüssigkeit beträgt etwa 42 cm^3.</p>		4

Lösungsskizze		BE
4.	<p>Der Graph von f_2 hat den Tiefpunkt $(0 0)$ und den Hochpunkt $(2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 f_2(4)) = (4 3)$.</p> <p>Der Wendepunkt des Graphen ergibt sich aus $f_2''(w) = 0$ mit $w > 0$, also $w = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2,31$.</p> <p>Die Funktionen p_1 und p_2 sind von der Gestalt $p_1(x) = a_1 x^2$ und $p_2(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$ mit $a_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$.</p> <p>Es ergeben sich die Bedingungen:</p> <p>I. $p_2(4) = 3$ III. $p_1(w) = p_2(w)$ V. $p_1(w) = f_2(w)$</p> <p>II. $p_2'(4) = 0$ IV. $p_1'(w) = p_2'(w)$</p> <p>Mit den Gleichungen erhält man $a_1 = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{16}$, $a_2 = \frac{-3 \cdot \sqrt{3} - 9}{32}$, $b_2 = \frac{3 \cdot \sqrt{3} + 9}{4}$ und $c_2 = \frac{-3 \cdot \sqrt{3} - 3}{2}$.</p> <p>Also $p_1(x) = \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{16} x^2$ und</p> $p_2(x) = \frac{1}{32} \cdot (-\sqrt{3} \cdot 3 - 9) \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{3} \cdot 3 + 9) x + \frac{1}{2} (-\sqrt{3} \cdot 3 - 3).$	7
Insgesamt		50

Standardbezug zur Aufgabe „Gläser“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	2				X		I			I			X		
b)	2	X	X		X				II		II			X	
c)	2			X	X		I				I	I	X		
d)	5	X			X		I				I		X		
e)	3				X		II		II			I		X	
2. a)	5	X	X	X	X			II	II		II			X	
b)	3	X		X	X				I		II	II		X	
c)	4		X	X	X			II	II		II			X	
d)	4	X		X	X			III	II		III				X
3. a)	4			X	X				II	II		II		X	
b)	3	X		X	X		II		II		II			X	
c)	2				X					I			X		
d)	4		X	X	X			III	III		II				X
4.	7	X			X			III			II	III			X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
22 %	48 %	30 %

Aufgabe 16: Marmorbahn

	Lösungsskizze	BE																		
1. a)	<p>Tiefpunkt: $(-3,0) \mid (-1,3)$</p>	2																		
b)	<table border="1"> <thead> <tr> <th>ungefähres Intervall</th> <th>Steigungsverhalten</th> <th>Krümmungsverhalten</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>-10 bis -4,5</td> <td>streng monoton fallend</td> <td>rechtsgekrümmt</td> </tr> <tr> <td>-4,5 bis -3</td> <td>streng monoton fallend</td> <td>linksgekrümmt</td> </tr> <tr> <td>-3 bis -1,5</td> <td>streng monoton steigend</td> <td>linksgekrümmt</td> </tr> <tr> <td>-1,5 bis 0</td> <td>streng monoton steigend</td> <td>rechtsgekrümmt</td> </tr> <tr> <td>0 bis 1</td> <td>streng monoton steigend</td> <td>linksgekrümmt</td> </tr> </tbody> </table>	ungefähres Intervall	Steigungsverhalten	Krümmungsverhalten	-10 bis -4,5	streng monoton fallend	rechtsgekrümmt	-4,5 bis -3	streng monoton fallend	linksgekrümmt	-3 bis -1,5	streng monoton steigend	linksgekrümmt	-1,5 bis 0	streng monoton steigend	rechtsgekrümmt	0 bis 1	streng monoton steigend	linksgekrümmt	3
ungefähres Intervall	Steigungsverhalten	Krümmungsverhalten																		
-10 bis -4,5	streng monoton fallend	rechtsgekrümmt																		
-4,5 bis -3	streng monoton fallend	linksgekrümmt																		
-3 bis -1,5	streng monoton steigend	linksgekrümmt																		
-1,5 bis 0	streng monoton steigend	rechtsgekrümmt																		
0 bis 1	streng monoton steigend	linksgekrümmt																		
c)	<ul style="list-style-type: none"> Die erste Aussage ist falsch, da für alle reellen x-Werte der Zusammenhang $f(x) = -f(-x)$ gelten müsste. Begründung durch das Gegenbeispiel $x = 1$: Aus der Abbildung ergibt sich $f(1) \approx 2,5$ und $-f(-1) \approx 0,4$. Die zweite Aussage ist falsch. Begründung: Bei Achsensymmetrie eines Funktionsgraphen zur y-Achse müssen alle x-Werte, die zu 0 denselben Abstand haben, auch denselben Funktionswert haben. Analog gilt, dass bei Achsensymmetrie eines Funktionsgraphen zur Geraden $x = -3$ alle x-Werte, die zu -3 denselben Abstand haben, denselben Funktionswert haben müssen. Dies ist im vorliegenden Fall nicht erfüllt. Zum Beispiel haben die x-Werte -7 und 1 beide den Abstand 4 zum x-Wert -3. Aus der Abbildung lässt sich aber entnehmen, dass $f(-7) < 0$ und $f(1) > 0$, also $f(-7) \neq f(1)$. 	4																		

	Lösungsskizze	BE
d)	<p>(I) Es gilt $\frac{a+b}{2} = \frac{-4+0}{2} = -2$, also $f' \left(\frac{a+b}{2} \right) = f'(-2)$. Die Steigung von f an der Stelle $x = -2$ ist größer als die Steigung $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ der hier betrachteten Geraden. Der Term (I) ist also nicht geeignet.</p> <p>(II) Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass $f'(-4) < 0$ und $f'(0) = 0$. Der Ausdruck $\frac{f'(a)+f'(b)}{2}$ ist damit negativ und somit ungeeignet, die offensichtlich positive Steigung der Geraden anzugeben.</p> <p>(III) Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung gilt $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$ und damit $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f'(x) dx = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Der Term $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ definiert die Steigung zwischen den Punkten $(a f(a))$ und $(b f(b))$, somit gibt Term (III) die entsprechende Steigung an .</p>	5
e)	<p>Es ist</p> $k'(x) = e^x \cdot (x^3 - 1) + e^x \cdot 3x^2$ $= e^x \cdot (x^3 + 3x^2 - 1) .$	2

	Lösungsskizze	BE
f)	<p>Mit $k(x) = h(x)$ erhält man $e^x \cdot (x^3 - 1) = x^3 - 1 \Leftrightarrow (e^x - 1) \cdot (x^3 - 1) = 0$.</p> <p>Ein Produkt hat genau dann den Wert Null, wenn mindestens einer der beiden Faktoren Null ist.</p> <p>1. Faktor: $e^x - 1 = 0$ $e^x = 1$ $x = 0$</p> <p>2. Faktor: $x^3 - 1 = 0$ $x^3 = 1$ $x = 1$</p> <p>Die beiden Graphen schneiden sich an den Stellen $x = 0$ und $x = 1$. Es gilt $h'(x) = 3x^2$ und damit $h'(0) = 0$ und $h'(1) = 3$. Außerdem gilt mit $k'(x) = e^x \cdot (x^3 + 3x^2 - 1)$ an den Schnittstellen $k'(0) = -1$ und $k'(1) = 3e$.</p> <p>Damit gilt für den Betrag des Schnittwinkel φ an der Stelle $x = 0$: $\varphi = \tan^{-1}(0) - \tan^{-1}(-1) = 45^\circ$</p> <p>Für den Betrag des Schnittwinkels ϑ an der Stelle $x = 1$ gilt analog: $\vartheta = \tan^{-1}(3) - \tan^{-1}(3e) \approx 11,4^\circ$</p> <p><i>Hinweis: Es wird nur die Berechnung eines Schnittwinkels erwartet.</i></p>	5
g)	<p>Nach Aufgabenteil e) sind die Schnittstellen 0 und 1. Für den Inhalt A der eingeschlossenen Fläche gilt:</p> $A = \left \int_0^1 (k(x) - h(x)) dx \right $ $= \left \left[(x^3 - 3x^2 + 6x - 7) \cdot e^x - \left(\frac{x^4}{4} - x \right) \right]_0^1 \right $ $= 7,75 - 3e \approx -0,405 = 0,405$	4
h)		3

	Lösungsskizze	BE
i)	$t = 0$	2
2. a)	<p>Es gilt $k_t'(0) = e^0 \cdot (0^3 + 3 \cdot 0^2 + t) = t$.</p> <p>Da der Übergang knickfrei sein soll, muss $k_t'(0) = -\frac{1}{2}$ gelten, woraus $t = -\frac{1}{2}$ folgt.</p> <p>Mit $t = -\frac{1}{2}$ folgt $k_{-\frac{1}{2}}(0) = e^0 \cdot (0^3 - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$.</p> <p>Für die Geradengleichung gilt also $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.</p>	3
b)	<p>y-Wert der Murmelposition beim Start: $k_t(-10) = e^{-10} \cdot ((-10)^3 - \frac{1}{2}) = -1000,5 \cdot e^{-10}$</p> <p>Da zu dem genannten späteren Zeitpunkt der Höhenunterschied zum Start 2 dm beträgt, ist der y-Wert der Murmelposition dann gegeben entweder durch $-1000,5 \cdot e^{-10} - 2 \approx -2$ oder durch $-1000,5 \cdot e^{-10} + 2 \approx +2$.</p> <p>Da sich die Murmel zu diesem späteren Zeitpunkt im geradlinigen, d. h. im monoton fallenden Abschnitt der Bahn befindet, muss die y-Koordinate ihrer Position kleiner als $-\frac{1}{2}$ sein. Damit ist die y-Koordinate der Murmelposition gegeben durch $-1000,5 \cdot e^{-10} - 2$.</p> <p>Berechnung des dazugehörigen x-Wertes:</p> $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = -1000,5 \cdot e^{-10} - 2$ $-\frac{1}{2}x = -1000,5 \cdot e^{-10} - 1,5$ $x = 2001 \cdot e^{-10} + 3$ <p>Für den horizontalen Abstand d gilt also: $d = 10 + 2001 \cdot e^{-10} + 3 = 13 + 2001 \cdot e^{-10} \approx 13,1$</p> <p>Der horizontale Abstand beträgt ca. 1,31 m.</p>	4
c)	<p>Die Gleichung $(x + 1) \cdot (r(x) - k_{-\frac{1}{2}}(x)) = 0$ hat $x = -1$ sowie die Stellen gemeinsamer Punkte der Graphen von r und $k_{-\frac{1}{2}}$ als Lösungen.</p> <p>Es sind also zwei Fälle zu unterscheiden:</p> <p>(I) $x = -1$ ist die Stelle eines gemeinsamen Punktes der Graphen von r und $k_{-\frac{1}{2}}$.</p> <p>In diesem Fall trifft die Aussage zu, da die durch den Linearfaktor erzeugte Nullstelle $x = -1$ auch eine Nullstelle des zweiten Faktors ist.</p> <p>(II) $x = -1$ ist nicht die Stelle eines gemeinsamen Punktes der Graphen von r und $k_{-\frac{1}{2}}$.</p> <p>Hier trifft die Aussage nicht zu, da es in diesem Fall mehr Lösungen als gemeinsame Punkte gibt.</p>	3

	Lösungsskizze	BE
3. a)	<ul style="list-style-type: none"> Es gilt: $g'_a(x) = 3e^{3x+a} - a$ und $g''_a(x) = 9e^{3x+a}$. <p>Notwendig für die Existenz eines Tiefpunktes an der Stelle x ist:</p> $0 = 3e^{3x+a} - a$ $a = 3e^{3x+a}$ $\frac{1}{3}a = e^{3x+a}$ $\ln\left(\frac{1}{3}a\right) = 3x + a$ $x = \frac{1}{3} \left(\ln\left(\frac{1}{3}a\right) - a\right)$ <p>Da nach Voraussetzung $a > 0$ gilt, ist der berechnete Ausdruck definiert. Höchstens an dieser Stelle könnte ein Tiefpunkt vorliegen.</p> <p>Wegen $g''_a(x) = 9e^{3x+a} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ hat jede Scharkurve G_{g_a} mit $a > 0$ an der Stelle $x = \frac{1}{3} \left(\ln\left(\frac{1}{3}a\right) - a\right)$ einen Tiefpunkt.</p> <ul style="list-style-type: none"> Für $a = 3$ liegt der Tiefpunkt bei $x = \frac{1}{3} \left(\ln\left(\frac{1}{3} \cdot 3\right) - 3\right) = -1$. <p>Der zugehörige y-Wert ist $g_3(-1) = e^{3 \cdot (-1)+3} - 3 \cdot (-1) = 4$.</p> <p>Wegen $-1 \neq 4$ liegt dieser Tiefpunkt nicht auf der Geraden $y = x$.</p>	6
b)	<p>Es gilt:</p> $V_{Rot} = \pi \cdot \int_0^z (g_0(x))^2 dx$ $= \pi \cdot \int_0^z e^{6x} dx$ $= \pi \cdot \left[\frac{1}{6} \cdot e^{6x}\right]_0^z$ $= \pi \cdot \left(\frac{1}{6}e^{6z} - \frac{1}{6}e^{6 \cdot 0}\right)$ $= \frac{\pi}{6} \cdot (e^{6z} - 1)$ <p>Es ergibt sich:</p> $\frac{\pi}{6} \cdot (e^{6z} - 1) = 10$ $\frac{60}{\pi} + 1 = e^{6z}$ $6z = \ln\left(\frac{60}{\pi} + 1\right)$ $z = \frac{1}{6} \cdot \ln\left(\frac{60}{\pi} + 1\right)$	4
Insgesamt		50

Standardbezug zur Aufgabe „Murmelbahn“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	2				X					I			X		
b)	3			X	X					I		I	X		
c)	4			X	X		II			II		II		X	
d)	5		X	X	X		III			II		III			X
e)	2		X		X		I				I		X		
f)	5	X	X	X	X			II			II			X	
g)	4		X			X					II			X	
h)	3				X			I		I	I		X		
i)	2				X			I		I	I		X		
2. a)	3	X	X		X			II	II		II			X	
b)	4	X	X	X	X			II	I		II			X	
c)	3	X			X		III	III				III			X
3. a)	6	X	X		X		III	III			III				X
b)	4	X	X		X					I	II			X	

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
24 %	48 %	28 %

	Lösungsskizze	BE
c)	<p>Die allgemeine Koordinatenform einer Ebene lautet: $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sind.</p> <p>Setzt man die Koordinaten der drei Punkte A, B und S in diese Gleichung ein, so erhält man die drei Gleichungen:</p> <p>I) $2a - 2b = d$</p> <p>II) $2a + 3b = d$</p> <p>III) $0,5b + 3c = d$</p> <p>Aus I) und II) folgt mit dem Additionsverfahren $b = 0$ und somit $a = \frac{d}{2}$. Einsetzen in III) liefert $c = \frac{d}{3}$.</p> <p>Mit frei wählbarem d erhält man z. B. für $d = 2 \cdot 3 = 6$ die Ebenengleichung $E_1 : 3x_1 + 2x_3 = 6$.</p>	3
d)	<p>Die Grundfläche der Pyramide liegt in $x_3 = 0$.</p> <p>Ein passender Normalenvektor ist $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.</p> <p>Ein Normalenvektor für das Dreieck ABS ist $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.</p> <p>Für den Winkel α zwischen den beiden Ebenen gilt:</p> $\cos(\alpha) = \frac{ \vec{n}_1 \circ \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 } = \frac{2}{\sqrt{13}}.$ <p>Daraus ergibt sich $\alpha \approx 56,3^\circ$.</p> <p>Der Neigungswinkel von ABS zur Grundfläche ist rund 56°.</p>	3
e)	<p>Die Kante \overline{DS} wird durch die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2,5 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in [0; 1]$ beschrieben.</p> <p>Es ist also $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2,5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ zu lösen.</p> <p>Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda = 1$ und aus der zweiten $\lambda = 0,8$.</p> <p>Dies ergibt einen Widerspruch und somit schneidet die Kante \overline{DS} nicht die x_3-Achse.</p> <p><i>Alternative:</i></p> <p>S liegt in der x_2-x_3-Ebene, der Punkt D nicht. Daher kann die Strecke \overline{DS} mit der x_2-x_3-Ebene nur den Punkt S gemeinsam haben. S liegt nicht auf der x_3-Achse, also schneidet die Kante \overline{DS} die x_3-Achse nicht.</p>	3

Lösungsskizze		BE
f)	<p>Der Diamant wird als punktförmig angenommen. Es ist K der Punkt auf der Kante \overline{AB}, in dem der Diamant befestigt wird. Damit liegt K auf der Geraden $g_1 : \vec{x} = \vec{OA} + t \cdot \vec{AB}$ mit $t = \frac{2}{5}$ oder $t = \frac{3}{5}$.</p> <p>Dann ist $\vec{OK}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.</p> <p>und $\vec{OK}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.</p> <p>Die möglichen Koordinaten sind $K_1(2 0 0)$ und $K_2(2 1 0)$.</p>	3
g)	<p>Es ist zunächst $\vec{AD} = 4$. Das Volumen der Pyramide berechnet sich mit $V = \frac{1}{3} \cdot \vec{AD} \cdot \vec{AB}_2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \vec{AB}_2 \cdot 2 = 9$. Damit ergibt sich $\vec{AB}_2 = 3,375$. Eine mögliche neue Spitze liegt im Punkt $(0 0 2)$. Die neuen Eckpunkte liegen in $(2 1,375 0)$ und $(-2 1,375 0)$.</p>	2
Insgesamt		20

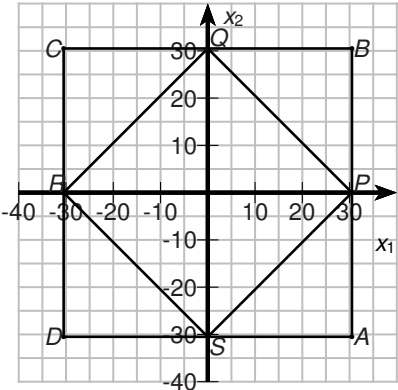
Standardbezug zur Aufgabe „Designerentwurf“

Teilaufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III			
a)	3			X						I			I			X		
b)	3		X	X			I					I			X			
c)	3	X		X			II			I		II				X		
d)	3		X	X				I				II				X		
e)	3			X			II	II					II			X		
f)	3			X				III				II	II					X
g)	2		X	X			II	III				II						X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)	Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)
30 %	45 %	25 %

Aufgabe 18: One World Trade Center

18.1 WTR-Fassung

	Lösungsskizze	BE
a)	 <p>Projiziert man die Punkte der Deckfläche in die x_1-x_2-Ebene, so erhält man $\vec{OP} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \begin{pmatrix} 30,5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{OQ} = \vec{OC} + \frac{1}{2}\vec{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30,5 \end{pmatrix}$, $\vec{OR} = \vec{OD} + \frac{1}{2}\vec{DC} = \begin{pmatrix} -30,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{OS} = \vec{OD} + \frac{1}{2}\vec{DA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -30,5 \end{pmatrix}$. <i>(Die folgende Argumentation wäre auch möglich: Alle Punkte auf der Strecke \overline{AB} haben die x_1-Koordinate 30,5. Die x_2-Koordinate muss zwischen $-30,5$ und $30,5$ liegen. Der projizierte Punkt von P $(30,5 0)$ erfüllt diese Bedingung. Analoge Argumentationen für die anderen Punkte ergeben sich.)</i></p>	4
b)	<p>Die Längen der Dreiecksseiten ergeben sich mit $\vec{BP} = \begin{pmatrix} 0 \\ -30,5 \\ 361 \end{pmatrix}$, $\vec{BQ} = \begin{pmatrix} -30,5 \\ 0 \\ 361 \end{pmatrix}$, $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} -30,5 \\ 30,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu $\vec{BP} = \vec{BQ} = \sqrt{30,5^2 + 361^2} \approx 362,3$. Da $\vec{PQ} = \sqrt{30,5^2 + 30,5^2} \approx 43,13$, ist das Dreieck nicht gleichseitig, sondern nur gleichschenkelig.</p>	2
c)	<p>Alle drei Punkte haben die x_1-Koordinate 30,5. Folglich müssen allen Punkte dieser Ebene ebenfalls die Bedingung erfüllen. x_2 und x_3 können beliebig sein. Die Ebenengleichung lautet also $x_1 = 30,5$.</p>	1

	Lösungsskizze	BE
d)	<p>Die allgemeine Koordinatenform einer Ebene lautet: $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sind.</p> <p>Setzt man die Koordinaten der drei Punkte P, B und Q in diese Gleichung ein, so erhält man die drei Gleichungen:</p> <p style="margin-left: 20px;">I) $30,5a + 361c = d$</p> <p style="margin-left: 20px;">II) $30,5a + 30,5b = d$</p> <p style="margin-left: 20px;">III) $30,5b + 361c = d$</p> <p>Aus I) und III) folgt $a = b$. Einsetzen in II) liefert $a = b = \frac{1}{61}d$. Mit I) oder III) erhält man dann $c = \frac{1}{722}d$.</p> <p>Mit d frei wählbar erhält man z. B. für $d = 722 \cdot 61 = 422042$ die Ebenengleichung $E : 722x_1 + 722x_2 + 61x_3 = 44042$.</p>	3
e)	<p>Ein Normalenvektor für die Wand PBQ ist $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 722 \\ 722 \\ 61 \end{pmatrix}$, ein Normalenvektor für die Grundfläche ist $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.</p> <p>Für den Winkel α gilt:</p> $\cos(\alpha) = \frac{ \vec{n}_1 \circ \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 } = \frac{61}{\sqrt{722^2 + 722^2 + 61^2}}$ <p>Daraus ergibt sich $\alpha \approx 86,6^\circ$.</p>	3
f)	<p>Es ist zunächst $g_{BP} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 30,5 \\ 30,5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -30,5 \\ 361 \end{pmatrix}$ und</p> <p>$h_{BQ} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 30,5 \\ 30,5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -30,5 \\ 0 \\ 361 \end{pmatrix}$ für $r, s \in \mathbb{R}$</p> <p>Also ist $361r = 200$ und $361s = 200$ gesucht. Dies ist für $r = s = \frac{200}{361}$ erfüllt.</p> <p>Setzt man dies in die Geradengleichungen ein, erhält man die Punkte $P_2(30,5 \frac{9821}{722} 200)$ und $Q_2(\frac{9821}{722} 30,5 200)$.</p> <p>Für den Abstand der Punkte bei $x_3 = 200$ ergibt sich</p> $ \overline{P_2Q_2} = \left \begin{pmatrix} 30,5 \\ \frac{9821}{722} \\ 200 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{9821}{722} \\ 30,5 \\ 200 \end{pmatrix} \right = \left \begin{pmatrix} \frac{6100}{361} \\ -\frac{6100}{361} \\ 0 \end{pmatrix} \right \approx 23,9.$ <p>Die Länge $\overline{P_2Q_2}$ ist etwa 24.</p>	4

Lösungsskizze		BE
g)	<p>Wegen Aufgabenteil a) liegt das Lot von P in die x_1-x_2-Ebene auf der Strecke \overline{AB}. Analoges gilt für das Lot von R und die Strecke \overline{DC}. g_1 und g_2 liegen daher in den zueinander parallelen Ebenen ABP bzw. DCR, g_1 und g_2 schneiden sich also nicht.</p> <p>Da der Vektor $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30,5 \\ 361 \end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\overrightarrow{CR} = \begin{pmatrix} 0 \\ -30,5 \\ 361 \end{pmatrix}$ ist, sind die beiden Vektoren nicht kollinear, die beiden Geraden also nicht parallel. Also sind sie windschief.</p>	3
Insgesamt		20

Standardbezug zur Aufgabe „One World Trade Center (WTR-Fassung - Klausur unter Abiturbedingungen 2017, grundlegendes Anforderungsniveau)“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a)	4		X	X			I			I	I	I	X		
b)	2		X	X			I	I			I		X		
c)	1			X			II	I				II		X	
d)	3	X		X						I	II			X	
e)	3		X	X				I			II			X	
f)	4		X	X				III			II	III			X
g)	3		X	X			II	I				II		X	

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)	Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)
30 %	50 %	20 %

18.2 CAS-Fassung

Lösungsskizze		BE
g)	<p>Die Grundfläche des Turms hat einen Flächeninhalt von $61 \cdot 61 = 3721$. Die Deckfläche des Turms hat einen Flächeninhalt von 1860,5. Es muss also gelten $F(0) = 3721$ und $F(361) = 1860,5$. Damit ergibt sich $b = 3721$ und $a = -\frac{3721}{260642}$. Die Gleichung $F(h) = 0,7 \cdot 3721$ hat als Lösungen $h_{1/2} = \pm 279,63$. In einer Höhe von ca. 280 m beträgt der Flächeninhalt der Querschnittfläche 70 % des Flächeninhalts der Grundfläche.</p>	3

Standardbezug zur Aufgabe „One World Trade Center (CAS-Fassung)“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a)	4		X	X			I			I	I	I	X		
b)	2		X	X			I	I			I		X		
c)	2	X		X						I	II			X	
d)	2		X	X				I			II			X	
e)	4		X	X				III			II	III			X
f)	3		X	X			II	I				II		X	
g)	3		X	X				II			II			X	

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)	Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)
30 %	50 %	20 %

Aufgabe 19: Pagode

Lösungsskizze		BE
a)		3

	Lösungsskizze	BE
b)	<p>Wegen $\overrightarrow{A_1B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{A_2B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind diese beiden Vektoren kollinear und damit die Seiten $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{A_2B_2}$ parallel. Das Viereck ist also ein Trapez.</p> <p>Es gilt weiterhin $\overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix} -3,5 \\ 3,5 \\ 2,1 \end{pmatrix}$ und damit $\overrightarrow{A_1A_2} = \sqrt{3,5^2 + 3,5^2 + 2,1^2}$</p> <p>sowie $\overrightarrow{B_1B_2} = \begin{pmatrix} -3,5 \\ -3,5 \\ 2,1 \end{pmatrix}$ und damit $\overrightarrow{B_1B_2} = \sqrt{3,5^2 + 3,5^2 + 2,1^2}$.</p> <p>Also sind zwei gegenüberliegende Seiten des Trapezes gleich lang.</p> <p>Da $\overrightarrow{A_1A_2}$ und $\overrightarrow{B_1B_2}$ nicht kollinear sind, sind die Seiten $\overline{A_1A_2}$ und $\overline{B_1B_2}$ nicht parallel. Das Trapez ist damit kein Parallelogramm.</p>	3
c)	<p>Es ist $M_1(5,5 0 6)$ und $M_2(2 0 8,1)$.</p> <p>Die Dachfläche der gesamten unteren Dachetage setzt sich zusammen aus vier gleichen Trapezen. Eines dieser Trapeze ist $A_1B_1B_2A_2$ mit der Fläche</p> $\frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\left \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} \right + \left \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right \right) \cdot \left \begin{pmatrix} -3,5 \\ 0 \\ 2,1 \end{pmatrix} \right $ $= \frac{1}{2} \cdot (11 + 4) \cdot \sqrt{3,5^2 + 2,1^2}$ $= 7,5 \cdot 4,0817 \approx 30,6.$ <p>Die untere Dachetage hat einen Flächeninhalts von etwa 122 m².</p>	5
d)	<p>Die Gerade g durch die Punkte A_1 und A_2 ist</p> $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5,5 \\ -5,5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3,5 \\ 3,5 \\ 2,1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}.$ <p>Der Schnittpunkt ergibt sich aus der Gleichung: $\begin{pmatrix} 5,5 \\ -5,5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3,5 \\ 3,5 \\ 2,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$.</p> <p>Also hat man die Gleichungen:</p> <p>(I) $5,5 - 3,5r = 0$</p> <p>(II) $-5,5 + 3,5r = 0$</p> <p>(III) $6 + 2,1r = z$</p> <p>(I) und (II) liefern $r = \frac{11}{7}$ und dies in III. eingesetzt führt zu $z = 6 + 2,1 \cdot \frac{11}{7} = 9,3$. Damit schneidet g die z-Achse in dem Punkt $(0 0 9,3)$.</p>	3
e)	<p>Ein Normalenvektor für die Dachfläche ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, ein Normalenvektor für die Horizontale ist $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.</p> <p>Für den Winkel α gilt: $\cos \alpha = \frac{\vec{n} \circ \vec{m}}{ \vec{n} \cdot \vec{m} } = \frac{5}{\sqrt{3^2 + 5^2}} \approx 0,8575$. Daraus ergibt sich $\alpha \approx 30,96^\circ$. Der Neigungswinkel der Dachfläche ist etwa 31°.</p>	2

Lösungsskizze		BE
f)	<p>III: Dachfläche der mittleren Etage VI: Dachfläche der oberen Etage</p> <p>Die drei Dachflächen auf der Südseite der Pagode müssen in Ebenen liegen, die den gleichen Normalenvektor haben wie die Ebene E. Damit kommen nur die Gleichungen II, III, V und VI infrage.</p> <p>Da die Ebenen höher liegen als die Ebene E, muss für alle Punkte dieser Ebenen bei gleicher x-Koordinate die zugehörige z-Komponente größer sein.</p> <p>Damit muss d in der allgemeinen Form $ax + by + cz = d$ größer sein als für die Ebene E. Also kommen nur die Ebenengleichungen III und VI in Frage.</p>	4
Insgesamt		20

Standardbezug zur Aufgabe „Pagode“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a)	3	X		X						I		I	X		
b)	3	X	X	X			II	II			I			X	
c)	5	X	X	X					I		II			X	
d)	3	X		X				I			I		X		
e)	2	X	X	X					I		II			X	
f)	4			X			III	III	II						X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)	Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)
30 %	50 %	20 %

Aufgabe 20: Pyramide

	Lösungsskizze	BE
a)	<p>Die Pyramide:</p> <p>(Die gepunkteten Linien sind für den Aufgabenteil a) nicht notwendig.)</p>	3
b)	<p>Alle Seiten des Vierecks $ABCD$ haben die Länge 5. Da A der Koordinatenursprung ist sowie B und D auf den Koordinatenachsen liegen, hat das Viereck bei A einen rechten Winkel.</p>	2
c)	<p>Mit der Hilfslinie s in der Skizze unter Aufgabenteil a) erhält man z. B. für den Flächeninhalt A_D des Dreiecks CDS:</p> $A_D = \frac{ CD \cdot s}{2}$ $= \frac{5 \cdot \sqrt{3,9^2 + 2,5^2}}{2}$ $\approx 11,6$ <p>Eine Seitenfläche der Pyramide hat einen Flächeninhalt von rund 11,6 FE. (Die Hilfslinien sind nicht gefordert.)</p>	2

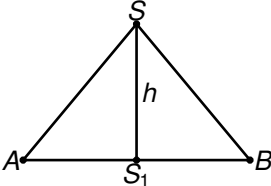
	Lösungsskizze	BE
d)	<p>Die allgemeine Koordinatenform einer Ebene lautet: $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sind. Setzt man die Koordinaten der drei Punkte A, B und S in diese Gleichung ein, so erhält man die drei Gleichungen:</p> <p>I) $0 = d$ II) $5a = d$ III) $2,5a + 2,5b + 3,9c = d$ Da c frei wählbar, erhält man z. B. für $c = 25$ die Ebenengleichung $E : -39y + 25z = 0$.</p>	3
e)	<p>Die Zeltwand ABS liegt in der Ebene E, also ist ein Normalenvektor für diese Wand $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ -39 \\ 25 \end{pmatrix}$.</p> <p>Ein Normalenvektor für die Horizontale ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.</p> <p>Für den Winkel α zwischen den beiden Ebenen gilt: $\cos \alpha = \frac{ \vec{n} \circ \vec{m} }{ \vec{n} \cdot \vec{m} }$ Daraus ergibt sich $\alpha \approx 57,3^\circ$. Die Größe des Neigungswinkel einer Zeltwand gegenüber der Horizontalen ist rund $57,3^\circ$.</p>	2
f)	<p>Für das Sonnenlicht durch das Loch L in der Zeltwand erhält man die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} x_L \\ y_L \\ 1,3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7,5 \\ -12,5 \\ -3,9 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$.</p> <p>Es muss dann die Gleichung $\begin{pmatrix} x_L \\ y_L \\ 1,3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7,5 \\ -12,5 \\ -3,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ erfüllt sein. Für $t = \frac{1}{3}$ erhält man $x_L \approx 2,5$ und $y_L \approx 4,17$.</p>	3

Lösungsskizze		BE
g)	<p>Eine mögliche Skizze:</p> <p>Der Flächenanteil der nutzbaren Fläche für ein 1,2 m großes Kind an der Gesamfläche des Zelt berechnen sich mit $\frac{(2 \cdot b)^2}{5^2}$.</p> <p>Also ist $\frac{(2 \cdot (2,5 - \frac{1,2}{3,9} \cdot 2,5))^2}{5^2} \approx 0,4793$.</p> <p>Auf rund 48 % der Fläche des Zeltbodens kann ein 1,2 m großes Kind aufrecht stehen.</p>	5
Insgesamt		20

Standardbezug zur Aufgabe „Pyramide“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a)	3	X		X						I			X		
b)	2	X	X	X			I			I	I		X		
c)	2	X	X	X				I		I			X		
d)	3	X		X						II				X	
e)	2	X	X	X					I	II				X	
f)	3	X		X				II	II		II			X	
g)	5		X	X			II	III		II					X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)	Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)
35 %	40 %	25 %

	Lösungsskizze	BE
b)	<p>Die Grundfläche der Pyramide ist $A_G = \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 5 \cdot 4 = 20$. Die Grundseite des Dreiecks ABS hat die Länge $\vec{AB} = 5$.</p>  <p>Die Höhe h des Dreiecks ist die Länge des Vektors $\vec{S_1S}$, wobei S_1 die Koordinaten $(2 0,5 0)$ hat.</p> <p>Dann ist $\vec{S_1S} = \left \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \approx 3,61$.</p> <p>Damit ergibt sich die Dreiecksfläche A_{D1} zu $A_{D1} = \frac{5 \cdot \sqrt{13}}{2} \approx 9,01$.</p> <p>Die Grundseite des Dreiecks BCS hat die Länge $\vec{BC} = 4$.</p> <p>Die Höhe beträgt $\left \begin{pmatrix} 0 \\ -2,5 \\ 3 \end{pmatrix} \right = \frac{\sqrt{61}}{2} \approx 3,91$.</p> <p>Damit ergibt sich eine Fläche von $A_{D2} = \frac{\sqrt{61}}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{61} \approx 7,81$.</p> <p>Da die Dreiecke DCS und ABS, sowie die Dreiecke ADS und BCS kongruent sind, ergibt sich für die Oberfläche:</p> $O = 20 + 2 \cdot \left(\frac{5 \cdot \sqrt{13}}{2} + \sqrt{61} \right) \approx 53,65$ <p>Die Oberfläche der Pyramide beträgt rund 54 cm^2.</p>	3
c)	<p>Die allgemeine Koordinatenform einer Ebene lautet: $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sind.</p> <p>Setzt man die Koordinaten der drei Punkte A, B und S in diese Gleichung ein, so erhält man die drei Gleichungen:</p> <p>I) $2a - 2b = d$</p> <p>II) $2a + 3b = d$</p> <p>III) $0,5b + 3c = d$</p> <p>Aus I) und II) folgt mit dem Additionsverfahren $b = 0$ und somit $a = \frac{d}{2}$. Einsetzen in III) liefert $c = \frac{d}{3}$.</p> <p>Mit frei wählbarem d erhält man z. B. für $d = 2 \cdot 3 = 6$ die Ebenengleichung $E_1 : 3x_1 + 2x_3 = 6$.</p>	3

	Lösungsskizze	BE
d)	<p>Es ist zunächst die Ebene E_2 in Koordinatenform umzuwandeln. Man erhält das Gleichungssystem</p> <p>I) $x_1 = s$</p> <p>II) $x_2 = t$</p> <p>III) $x_3 = 3,6 - 1,2 \cdot t$</p> <p>Da II) und III) unabhängig von s sind, liefert Einsetzen von II) in III) die Gleichung $x_3 = 3,6 - 1,2x_2$, also $1,2x_2 + x_3 = 3,6$.</p> <p>Also ist ein passender Normalenvektor der Ebene E_2 der Vektor $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,2 \\ 1 \end{pmatrix}$.</p> <p>Ein Normalenvektor für das Dreieck ABS ist $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.</p> <p>Für den Winkel α zwischen den beiden Dreiecken gilt:</p> $\cos(\alpha) = \frac{ \vec{n}_1 \circ \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 } = \frac{2}{\frac{\sqrt{793}}{5}}$ <p>Daraus ergibt sich $\alpha \approx 69,2^\circ$.</p> <p>Der Winkel zwischen den beiden Dreiecken ABS und BCS beträgt rund 69°.</p>	5
e)	<p>Die Kante \overline{DS} wird durch die Gerade</p> $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2,5 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in [0; 1] \text{ beschrieben.}$ <p>Es ist also $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2,5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ zu lösen.</p> <p>Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda = 1$ und aus der zweiten $\lambda = 0,8$.</p> <p>Dies ergibt einen Widerspruch und somit schneidet die Kante \overline{DS} nicht die x_3-Achse.</p> <p><i>Alternative:</i></p> <p>S liegt in der x_2-x_3-Ebene, der Punkt D nicht. Daher kann die Strecke \overline{DS} mit der x_2-x_3-Ebene nur den Punkt S gemeinsam haben. S liegt nicht auf der x_3-Achse, also schneidet die Kante \overline{DS} die x_3-Achse nicht.</p>	3
f)	<p>Der Diamant wird als punktförmig angenommen.</p> <p>Es ist K der Punkt auf der Kante \overline{AB}, in dem der Diamant befestigt wird.</p> <p>Damit liegt K auf der Geraden $g_1: \vec{x} = \vec{OA} + t \cdot \vec{AB}$ mit $t = \frac{2}{5}$ oder $t = \frac{3}{5}$.</p> <p>Dann ist $\vec{OK}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$</p> <p>und $\vec{OK}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.</p> <p>Die möglichen Koordinaten sind $K_1(2 0 0)$ und $K_2(2 1 0)$.</p>	3

		Lösungsskizze	BE
2.	<p>F_3 und F_5 sind orthogonal zu F. Ein Normalenvektor von F ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ebene F_1 ist die Ebene F in Parameterform. • Ebene F_2 ist parallel zu F, da die Normalenvektoren kollinear sind. • Ein Normalenvektor von F_3 ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, damit ist das Produkt der beiden Normalenvektoren von F und F_3 gleich 0 und somit stehen die Ebenen senkrecht aufeinander. • Ebene F_4 ist parallel zu F, da die Normalenvektoren identisch sind. • Ein Normalenvektor von F_5 ist $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, damit ist das Produkt der beiden Normalenvektoren von F und F_5 gleich 0 und somit stehen die Ebenen senkrecht aufeinander. • Ein Normalenvektor von F_6 ist $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, damit ist das Produkt der beiden Normalenvektoren F und F_6 ungleich 0 und somit stehen die Ebenen nicht senkrecht aufeinander. 	5	
Insgesamt			25

Standardbezug zur Aufgabe „Designerentwurf“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	3			X						I		I	X		
b)	3		X	X			I			I			X		
c)	3	X		X			II		I	II				X	
d)	5	X	X	X				II		II				X	
e)	3			X			II	II			II			X	
f)	3			X				III		II	II				X
2.	5			X			III	III			II				X

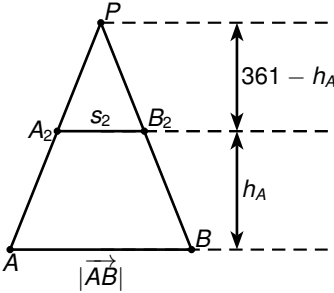
Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
24 %	44 %	32 %

Aufgabe 22: One World Trade Center

22.1 WTR-Fassung

	Lösungsskizze	BE
a)	<p>Projiziert man die Punkte der Deckfläche in die x_1-x_2-Ebene, so erhält man</p> $\vec{OP} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \begin{pmatrix} 30,5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{OQ} = \vec{OC} + \frac{1}{2}\vec{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30,5 \end{pmatrix},$ $\vec{OR} = \vec{OD} + \frac{1}{2}\vec{DC} = \begin{pmatrix} -30,5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{OS} = \vec{OD} + \frac{1}{2}\vec{DA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -30,5 \end{pmatrix}.$ <p>(Die folgende Argumentation wäre auch möglich: Alle Punkte auf der Strecke \overline{AB} haben die x_1-Koordinate 30,5. Die x_2-Koordinate muss zwischen $-30,5$ und $30,5$ liegen. Der projizierte Punkt von P (30,5 0) erfüllt diese Bedingung. Analoge Argumentationen für die anderen Punkte ergeben sich.)</p>	4
b)	<p>Die Längen der Dreiecksseiten ergeben sich mit</p> $\vec{BP} = \begin{pmatrix} 0 \\ -30,5 \\ 361 \end{pmatrix}, \quad \vec{BQ} = \begin{pmatrix} -30,5 \\ 0 \\ 361 \end{pmatrix}, \quad \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -30,5 \\ 30,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ <p>zu $\vec{BP} = \vec{BQ} = \sqrt{30,5^2 + 361^2} \approx 362,3$.</p> <p>Da $\vec{PQ} = \sqrt{30,5^2 + 30,5^2} \approx 43,13$, ist das Dreieck nicht gleichseitig, sondern nur gleichschenkelig.</p>	2

	Lösungsskizze	BE
c)	<p>Die allgemeine Koordinatenform einer Ebene lautet: $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sind.</p> <p>Setzt man die Koordinaten der drei Punkte P, B und Q in diese Gleichung ein, so erhält man die drei Gleichungen:</p> <p>I) $30,5a + 361c = d$</p> <p>II) $30,5a + 30,5b = d$</p> <p>III) $30,5b + 361c = d$</p> <p>Aus I) und III) folgt $a = b$. Einsetzen in II) liefert $a = b = \frac{1}{61}d$. Mit I) oder III) erhält man dann $c = \frac{1}{722}d$.</p> <p>Mit d frei wählbar erhält man z. B. für $d = 722 \cdot 61 = 44042$ die Ebenengleichung $E : 722x_1 + 722x_2 + 61x_3 = 44042$.</p>	3
d)	<p>Die Wand APB liegt in der Ebene $x_1 = 30,5$.</p> <p>Ein Normalenvektor für die Wand PBQ ist $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 722 \\ 722 \\ 61 \end{pmatrix}$,</p> <p>ein Normalenvektor für die Wand APB ist $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.</p> <p>Für den Winkel α zwischen den beiden Ebenen gilt:</p> $\cos(\alpha) = \frac{ \vec{n}_1 \circ \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 } = \frac{722}{\sqrt{722^2 + 722^2 + 61^2}} \approx 0,7058.$ <p>Daraus ergibt sich $\alpha \approx 45,1^\circ$.</p> <p>Der Neigungswinkel von PBQ zu APB ist rund 45°.</p>	3
e)	<p>Wegen Aufgabenteil a) liegt das Lot von P in die x_1-x_2-Ebene auf der Strecke \overline{AB}. Analoges gilt für das Lot von R und die Strecke \overline{DC}.</p> <p>g_1 und g_2 liegen daher in den zueinander parallelen Ebenen ABP bzw. DCR, g_1 und g_2 schneiden sich also nicht.</p> <p>Da der Vektor $\vec{AP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30,5 \\ 361 \end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\vec{CR} = \begin{pmatrix} 0 \\ -30,5 \\ 361 \end{pmatrix}$ ist, sind die beiden Vektoren nicht kollinear, die beiden Geraden also nicht parallel. Also sind sie windschief.</p>	3

	Lösungsskizze	BE
f)	<p>Der Vektor \vec{PR} steht senkrecht auf g_1, weil $\vec{PR} \circ \vec{AP} = \begin{pmatrix} -61 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 30,5 \\ 361 \end{pmatrix} = 0$.</p> <p>Ebenso steht \vec{PR} senkrecht auf g_2, weil $\vec{PR} \circ \vec{CR} = \begin{pmatrix} -61 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -30,5 \\ 361 \end{pmatrix} = 0$.</p> <p>$\vec{PR}$ ist also der gemeinsame Normalenvektor von g_1 und g_2.</p> <p>Da P auf g_1 liegt und R auf g_2 liegt, ist der Betrag von \vec{PR} gleich dem Abstand der beiden Geraden. Es ist $\vec{PR} = 61$.</p> <p>Die beiden Geraden g_1 und g_2 haben also den Abstand 61.</p>	3
g)	 <p>Es gilt aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke ABP und A_2B_2P:</p> $\frac{s_2}{ \vec{AB} } = \frac{361 - h_A}{361}$ $s_2 = \frac{361 - h_A}{361} \cdot \vec{AB} = \left(1 - \frac{h_A}{361}\right) \cdot \vec{AB} $ <p>Somit ist $s_2 = \left(1 - \frac{h_A}{361}\right) \cdot \vec{AB}$ gezeigt.</p>	4
h)	<p>Für ein regelmäßiges Achteck muss gelten $s_1 = s_2$.</p> $\frac{h_A}{361} \cdot \vec{PQ} = \left(1 - \frac{h_A}{361}\right) \cdot \vec{AB} $ $\frac{h_A}{361} \cdot \left \begin{pmatrix} -30,5 \\ 30,5 \\ 0 \end{pmatrix} \right = \left(1 - \frac{h_A}{361}\right) \cdot \left \begin{pmatrix} 0 \\ 61 \\ 0 \end{pmatrix} \right $ $\frac{h_A}{361} \cdot \sqrt{1860,5} = \left(1 - \frac{h_A}{361}\right) \cdot 61$ $h_A = \frac{61 \cdot 361}{\sqrt{1860,5} + 61} \approx 211,46$ <p>In einer Höhe von rund 211 m über der Grundfläche des Turms ist die Querschnittfläche nahezu ein regelmäßiges Achteck.</p>	3
Insgesamt		25

Standardbezug zur Aufgabe „One World Trade Center (WTR-Fassung)“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a)	4		X	X			I			I	I	I	X		
b)	2			X			I	I			I		X		
c)	3			X						I	II			X	
d)	3		X	X				I			II			X	
e)	3		X	X			II	I				II		X	
f)	3		X	X			II			II	II	II		X	
g)	4			X	X		II	III		II					X
h)	3		X	X	X		III				III				X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
24 %	48 %	28 %

22.2 CAS-Fassung

	Lösungsskizze	BE
i)	<p>Die Grundfläche des Turms hat einen Flächeninhalt von $61 \cdot 61 = 3721$. Die Deckfläche des Turms hat einen Flächeninhalt von 1860,5. Es muss also gelten $F(0) = 3721$ und $F(361) = 1860,5$. Damit ergibt sich $b = 3721$ und $a = -\frac{3721}{260642}$. Die Gleichung $F(h) = 0,7 \cdot 3721$ hat als Lösungen $h_{1/2} = \pm 279,63$. In einer Höhe von ca. 280 m beträgt der Flächeninhalt der Querschnittfläche 70 % des Flächeninhalts der Grundfläche.</p>	3

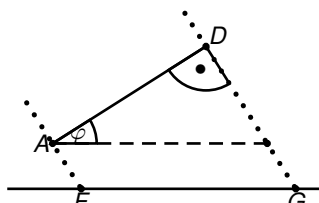
Standardbezug zur Aufgabe „One World Trade Center (CAS-Fassung)“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a)	4		X	X			I			I	I	I	X		
b)	2			X			I	I			I		X		
c)	2	X		X						I	II			X	
d)	2		X	X				I			II			X	
e)	3		X	X			II	I				II		X	
f)	2		X	X			II			II	II	II		X	
g)	4				X		II	III		II					X
h)	3		X	X	X		III				III				X
i)	3			X				II			II			X	

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
24 %	48 %	28 %

Aufgabe 23: Solarmodule

	Lösungsskizze	BE
a)	Die x_3 -Koordinaten der Punkte A und B stimmen überein.	2
b)	Es sind $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ identisch. Also sind die gegenüberliegenden Seiten parallel und gleich lang. Da $\vec{AB} \circ \vec{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$, liegt im Punkt A ein rechter Winkel vor, somit ist das Viereck $ABCD$ ein Rechteck. Es ist $M(-2 4 3)$.	4
c)	Die allgemeine Koordinatenform einer Ebene lautet: $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sind. Setzt man die Koordinaten der drei Punkte A, B und C in diese Gleichung ein, so erhält man die drei Gleichungen: I) $c = d$ II) $2a + 6b + c = d$ III) $-4a + 8b + 5c = d$ Aus I) erhält man $c = d$. Aus II) + III) ergibt sich dann $b = -\frac{1}{5}d$. Diese eingesetzt in II) führt zu $a = \frac{3}{5}d$. Mit d frei wählbar, erhält man z. B. für $d = 5$ die Ebenengleichung $E : 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 5$.	4
d)	Ein Normalenvektor für die Modulfläche ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und für die x_1 - x_2 -Ebene $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für den Neigungswinkel φ zwischen den beiden Ebenen gilt: $\cos \varphi = \frac{ \vec{m} \circ \vec{n} }{ \vec{m} \cdot \vec{n} } = \frac{5}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 5^2}} \approx 0,845$. Daraus ergibt sich $\varphi \approx 32,31^\circ$. Der Neigungswinkel der Modulfläche gegenüber der Horizontalen beträgt rund 32° . Damit ist die Bedingung erfüllt.	3

Lösungsskizze		BE
e)	<p>Da die Gerade AB parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft, ist \vec{AB} die Breite des Rechtecks, das den Schatten im Modell darstellt. Da $\cos \varphi = \frac{ \vec{AD} }{ \vec{FG} }$ gilt, ist $\frac{ \vec{AD} }{\cos \varphi}$ die Länge dieses Rechtecks. Durch den Faktor $(0,8 \text{ m})^2$ wird der Maßstab berücksichtigt.</p> 	5
f)	<p>L sei der Fußpunkt des Lots von A auf die Strecke, mit der das Metallrohr beschrieben werden kann. Wegen $M(-2 4 3)$ ist $L(-2 4 1)$. Es ist $\vec{LA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit ergibt sich $\vec{LA} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$. Aufgrund des Maßstabes erhält man als Radius r des Kreises $r = \sqrt{20} \cdot 0,8 \text{ m} \approx 3,6 \text{ m}$.</p>	4
g)	<p>A und B haben vom Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks $ABCD$ den gleichen Abstand. Die Strecke \overline{AB} verläuft parallel zur x_1-x_2-Ebene, die Strecke, die das Metallrohr darstellt, senkrecht dazu. Damit haben A und B von der Strecke, die das Metallrohr darstellt, den gleichen Abstand.</p>	3
Insgesamt		25

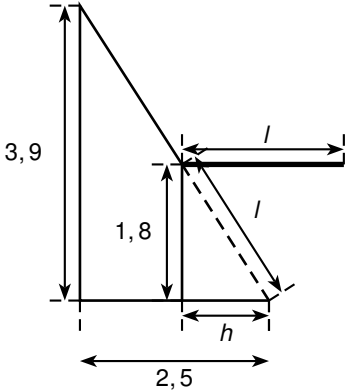
Standardbezug zur Aufgabe „Solarmodule“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a)	2	X		X			I				I		X		
b)	4	X		X			I				I		X		
c)	4	X		X							II			X	
d)	3	X	X	X					I		II	I		X	
e)	5		X	X				III	III	II					X
f)	4	X	X	X				II			I	I		X	
g)	3			X			III	III				II			X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
24 %	44 %	32 %

Aufgabe 24: Zelt

Lösungsskizze		BE
a)	$B(5 0 0)$, $D(0 5 0)$, $M(2,5 2,5 0)$, $S(2,5 2,5 3,9)$ 	5
b)	<p>Ein Normalenvektor der Ebene, in der das Dreieck ADS liegt, ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} -39 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix}$.</p> <p>Ein Normalenvektor der Ebene E ist $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ -39 \\ 25 \end{pmatrix}$.</p> <p>Für den Winkel α gilt:</p> $\cos \alpha = \frac{\vec{m} \circ \vec{n}}{ \vec{m} \cdot \vec{n} }$ <p>Daraus ergibt sich $\alpha \approx 73,1^\circ$.</p> <p>Die Größe des Winkels zwischen zwei benachbarten Zeltwänden ist rund $180^\circ - 73,1^\circ = 106,9^\circ$.</p>	4

	Lösungsskizze	BE
c)	<p>Die Lichtquelle L ist direkt unter S aufgehängt. Also ist $L(2,5 2,5 z_L)$ für $z_L \in [0; 3,9]$. Ein Punkt der Ebene E ist der Punkt A. Der Normalenvektor der Ebene E ist $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ -39 \\ 25 \end{pmatrix}$. Dann gilt die Gleichung $\frac{\left \left(\begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ z_L \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -39 \\ 25 \end{pmatrix} \right }{\left \begin{pmatrix} 0 \\ -39 \\ 25 \end{pmatrix} \right } = 0,8$ und somit $\left \frac{-39 \cdot 2,5 + 25 \cdot z_L}{\sqrt{39^2 + 25^2}} \right = 0,8$.</p> <p>Man erhält die beiden Lösungen $z_{L,1} \approx 2,42$ und $z_{L,2} \approx 5,38$. Da nur die erste Lösung innerhalb des Definitionsbereichs liegt, ist die gesuchte Lichtquelle in $L(2,5 2,5 2,42)$.</p>	4
d)	<p>Es ist $\vec{OP} = r \cdot \vec{OC} + s \cdot \vec{OS}$ $= (1 - s) \cdot \vec{OC} + s \cdot \vec{OS} \quad (r = 1 - s)$ $= \vec{OC} + s \cdot (\vec{OS} - \vec{OC})$ $= \vec{OC} + s \cdot \vec{CS}$.</p> <p>Da $s \in [0; 1]$, liegt P auf der Strecke \overline{CS}.</p>	3
e)	<p>Überlegungsskizze (nicht gefordert):</p>  <p>Vordachlänge: Es ergibt sich $h = \frac{1,8}{3,9} \cdot 2,5 \approx 1,15$. Mit dem Satz des Pythagoras erhält man $l = \sqrt{1,8^2 + h^2} = \sqrt{1,8^2 + \left(\frac{1,8}{3,9} \cdot 2,5\right)^2} \approx 2,14$. Das Vordach ist rund 2,14 m lang.</p> <p>y-Koordinate: Die y-Koordinate des Vordachs ergibt sich zu $5 - h + l \approx 5,98$.</p>	4

Lösungsskizze		BE
f)	<p>Bezeichnet man die Koordinaten des gesuchten Lochs V im Vordach mit $V(x_V y_V z_V)$, so gelten die Bedingungen:</p> <p>I) $x_V \in [1,8; 3,2]$</p> <p>II) $y_V \in [5,98 - 2,14; 5,98] = [3,85; 5,98]$</p> <p>III) $z_V = 1,8$</p> <p>IV) $\begin{pmatrix} x_V \\ y_V \\ z_V \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -4,2 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$</p> <p>Durch Probieren erhält man die Koordinaten des Lochs im Vordach:</p> <p>$a = -3$: $V(2,2 5,02 1,8)$</p> <p>$a = -4$: $V(2,28 4,39 1,8)$</p> <p>$a = -5$: $V(2,32 4,01 1,8)$</p> <p>(Es ist nur ein Wert von a zu verwenden.)</p>	5
Insgesamt		25

Standardbezug zur Aufgabe „Zelt“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a)	5	X		X					I	I			X		
b)	4	X	X	X				II	I		II			X	
c)	4	X	X	X				II	II		II			X	
d)	3			X			III	III			III				X
e)	4		X	X				II			II	II		X	
f)	5	X		X			II	III	II						X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
20 %	48 %	32 %

4 Lineare Algebra

4.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

Aufgabe 25: Wölfe

	Lösungsskizze	BE
1. a)	<pre> graph TD W((W)) -- 0,4 --> J((J)) W -- 3 --> R((R)) J -- 0,7 --> R R -- 0,8 --> R </pre>	3
b)	0,4 Bei einer Erhöhung der Sterblichkeitsrate der Welpen würde der Wert des Eintrags kleiner werden.	2
c)	Da innerhalb des ersten Jahres nach Beobachtungsbeginn 70 % der Jungtiere zu Rudelführerinnen heranwachsen und 80 % der Rudelführerinnen dieses Jahr überleben, gilt $0,7 \cdot J_0 + 0,8 \cdot 39 = 55$. Also hat man zu Beobachtungsbeginn $J_0 = 34$ Jungtiere.	2
d)	Es ist $M \cdot \vec{v}_4 = \vec{v}_6$ mit $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} W_4 \\ J_4 \\ R_4 \end{pmatrix}$. Daraus erhält man $\vec{v}_4 = M^{-1} \cdot \vec{v}_6 \approx \begin{pmatrix} 313 \\ 92 \\ 87 \end{pmatrix}$. Nach vier Jahren hat man ca. 313 Welpen, 92 Jungtiere und 87 Rudelführerinnen.	2
e)	Es ist $\vec{v}_8 = M \cdot \vec{v}_6 \approx \begin{pmatrix} 1138 \\ 330 \\ 314 \end{pmatrix}$. Nach acht Jahren hat man ca. 1138 Welpen, 330 Jungtiere und 314 Rudelführerinnen.	1

		Lösungsskizze	BE
f)	<p>Es ist $1,38^2 \cdot \begin{pmatrix} 2168 \\ 629 \\ 598 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4129 \\ 1198 \\ 1139 \end{pmatrix}$.</p> <p>Da die einzelnen Einträge nur um höchstens 3 abweichen, wird \vec{v}_{12} in guter Näherung mit dem angegebenen Faktor beschrieben.</p>	2	
g)	<p>Das Modell ist nicht geeignet, weil die Population bei bestimmten Populationsverteilungen wie z. B. \vec{v}_{10} jährlich um den Faktor 1,38 wächst. Da der Lebensraum begrenzt ist, können die so errechneten Werte langfristig nicht eine reale Population beschreiben.</p>	2	
2. a)	<p>Es ist</p> $N \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 4u_3 \\ 0,25u_1 \\ 0,4u_2 + 0,6u_3 \end{pmatrix}.$ <p>Dies entspricht nur dem Nullvektor, wenn $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ ist.</p> <p>Damit gibt es keinen Vektor $\vec{u} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, für den $N \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt.</p>	2	
b)	<p>Es ist das folgende Gleichungssystem zu lösen:</p> <p>I) $4u_3 = u_1$</p> <p>II) $0,25u_1 = u_2$</p> <p>III) $0,4u_2 + 0,6u_3 = u_3$</p> <p>IV) $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1800$</p> <p>Hieraus erhält man die beiden Lösungen $\vec{u} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} -40 \\ -10 \\ -10 \end{pmatrix}$.</p>	4	
Insgesamt			20

Standardbezug zur Aufgabe „Wölfe“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	3	X							I	I		I	X		
b)	2	X					I		I	I			X		
c)	2	X				X		II	II		I			X	
d)	2	X				X			II		I	I		X	
e)	1	X				X			I		I		X		
f)	2	X					II				I	I		X	
g)	2	X				X	II		II			I		X	
2. a)	2	X				X		II			I			X	
b)	4	X				X		III			II				X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)	Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)
30 %	50 %	20 %

Aufgabe 26: Reptilien

26.1 WTR-Fassung

	Lösungsskizze	BE
1. a)	Es ist $\vec{v}_2 = L \cdot \vec{v}_1$. Also ist $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0,16 & 1,6 \\ 0,24 & 0,48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1120 \\ 528 \end{pmatrix}$.	2
b)	$0,24e_1 + 0,48 \cdot 600 = 576$ ergibt $e_1 = 1200$. Die Anzahl der neu gelegten Eier ist $1,6 \cdot 600 = 960$.	3
c)	Der Ansatz $\begin{pmatrix} 0,16 & 1,6 \\ 0,24 & 0,48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 600 \end{pmatrix}$ liefert das folgende lineare Gleichungssystem: $\left(\begin{array}{cc c} 0,16 & 1,6 & 1200 \\ 0,24 & 0,48 & 600 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 3 \longrightarrow \\ \cdot (-2) \longleftarrow \end{array}$ $\left(\begin{array}{cc c} 0,16 & 1,6 & 1200 \\ 0 & 3,84 & 2400 \end{array} \right)$ Die zweite Gleichung liefert $r_0 = 625$. Einsetzen in I) ergibt $0,16e_0 + 1,6 \cdot 625 = 1200$ und damit $e_0 = 1250$. Laut Modell ist der Populationsvektor $\begin{pmatrix} 1250 \\ 625 \end{pmatrix}$ anzunehmen.	4
d)	Eine lebende, sich selbst exakt reproduzierende Population müsste einen Populationsvektor haben, der nicht gleich dem Nullvektor ist und Lösungsvektor der Gleichung ist. Der Nullvektor ist jedenfalls Lösung der Gleichung. Wenn er die einzige Lösung darstellt, kann es keine lebende, sich selbst reproduzierende Population geben.	2
e)	Der Ansatz ist $0,3n + 0,06a = 0,24(n + a)$. Also erhält man: $0,3n + 0,06a = 0,24(n + a)$ $0,06n = 0,18a$ $n : a = 3 : 1$ Das Verhältnis $n : a$ ist $3 : 1$.	3
2. a)	Z. B. $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	1

Lösungsskizze		BE
b)	Z. B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	1
c)	Man erhält die Gleichungen I) $a = -1$ II) $b = 1$ III) $a - b = 0$ Die Gleichungen I) und II) liefern a und b , in Gleichung III) entsteht mit diesen Werten ein Widerspruch. Also gibt es keine reellen Zahlen a und b , die die Gleichung erfüllen.	2
d)	Die verbundenen Eckpunkte sind $A(3 1 2)$ und $B(4 5 3)$. Somit ist $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 5-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.	2
Insgesamt		20

Standardbezug zur Aufgabe „Reptilien“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	2	X							I		I	I	X		
b)	3	X						II	II			I		X	
c)	4	X							II		II	I		X	
d)	2	X				X	III		III			II			X
e)	3	X						II	III	II		III			X
2. a)	1			X				I			I		X		
b)	1		X	X				I			I		X		
c)	2			X			II	II			I			X	
d)	2			X						I	I		X		

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)	Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)
30 %	45 %	25 %

Aufgabe 27: Reptilien

	Lösungsskizze	BE
a)	<pre> graph LR E((E)) -- 0,16 --> E E -- 0,24 --> R((R)) R -- 0,48 --> R R -- 1,6 --> E </pre>	2
b)	<p>Es ist $L^{-1} = \begin{pmatrix} -1,56 & 5,21 \\ 0,78 & -0,52 \end{pmatrix}$.</p> <p>Das Ergebnis von $L^{-1} \cdot \vec{v}_1$ ist der Populationsvektor, der nach dem Modell ein halbes Jahr vor der ersten Zählung anzunehmen ist.</p>	2
c)	<p>Es ist $\vec{v}_2 = L \cdot \vec{v}_1$.</p> <p>Also ist $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0,16 & 1,6 \\ 0,24 & 0,48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1120 \\ 528 \end{pmatrix}$.</p>	2
d)	<p>$0,24e_1 + 0,48 \cdot 600 = 576$ ergibt $e_1 = 1200$.</p> <p>Die Anzahl der neu gelegten Eier ist $1,6 \cdot 600 = 960$.</p>	3
e)	<p>8 Jahre nach der zweiten Zählung ist nach dem Modell der Populationsvektor \vec{v}_{18} zu erwarten, mit $\vec{v}_{18} = L^{17} \cdot \vec{v}_1$.</p> <p>Mit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1200 \\ 600 \end{pmatrix}$ ist $\vec{v}_{18} \approx \begin{pmatrix} 599,50 \\ 299,75 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 600 \\ 300 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1200 \\ 600 \end{pmatrix}$.</p> <p>Die Prognose des Forscherteams ist im Rahmen der Modellierung richtig.</p>	4
f)	<p>Die Gleichung $\begin{pmatrix} 0,16 & 1,6 \\ 0,24 & 0,48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ hat als einzige Lösung den Nullvektor.</p> <p>Dieser beschreibt keine lebende Population.</p>	3
g)	<p>Wegen $e_1 = 1200$ ist $n_1 + a_1 = 1200$.</p> <p>Aus diesen Eiern schlüpfen im folgenden Halbjahr $0,24 \cdot 1200 = 288$ Reptilien.</p> <p>Das lineare Gleichungssystem</p> <p>I) $n_1 + a_1 = 1200$</p> <p>II) $0,3n_1 + 0,06a_1 = 288$</p> <p>hat die Lösung $n_1 = 900$ und $a_1 = 300$.</p>	4
Insgesamt		20

Standardbezug zur Aufgabe „Reptilien“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a)	2	X								I	I		X		
b)	2	X								I		I	X		
c)	2	X								I		I	X		
d)	3	X						II	II					X	
e)	4	X							II			I		X	
f)	3	X					II		II			II	II	X	
g)	4	X						II	III	II					X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)	Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)
30 %	50 %	20 %

4.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

Aufgabe 28: Wölfe

	Lösungsskizze	BE
1. a)		3
b)	x stellt den Anteil der Welpen dar, die innerhalb ihres ersten Lebensjahres zu Jungtieren heranwachsen.	1
c)	28 % der Tiere überleben die ersten beiden Lebensjahre und werden zu Rudelführerinnen. Damit ergibt sich aus $0,7 \cdot x = 0,28$, dass $x = 0,4$ ist.	2
d)	Da innerhalb des ersten Jahres nach Beobachtungsbeginn 70 % der Jungtiere zu Rudelführerinnen heranwachsen und 80 % der Rudelführerinnen dieses Jahr überleben, gilt $0,7 \cdot J_0 + 0,8 \cdot 39 = 55$. Also hat man zu Beobachtungsbeginn $J_0 = 34$ Jungtiere.	2
e)	Es ist $M \cdot \vec{v}_6 = \vec{v}_8$, also $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3,75 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0,24 & 0,45 & 0,56 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 173 \\ 165 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1138 \\ 330 \\ 314 \end{pmatrix}.$ Nach acht Jahren hat man ca. 1138 Welpen, 330 Jungtiere und 314 Rudelführerinnen.	2
f)	Es ist $1,38^2 \cdot \begin{pmatrix} 2168 \\ 629 \\ 598 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4129 \\ 1198 \\ 1139 \end{pmatrix}.$ Da die einzelnen Einträge nur um höchstens 3 abweichen, wird \vec{v}_{12} in guter Näherung mit dem angegebenen Faktor beschrieben.	2

	Lösungsskizze	BE
g)	<p>Es ist</p> $938 \cdot 1,38^{t-6} = 45000$ $1,38^{t-6} = \frac{45000}{938}$ $t = \log_{1,38} \left(\frac{45000}{938} \right) + 6 \approx 18.$ <p>Die Zahl 45000 sagt aus, dass 18 Jahre nach Beobachtungsbeginn eine Population von 45000 Tieren vorliegt.</p>	3
h)	<p>Das Modell ist nicht geeignet, weil die Population bei bestimmten Populationsverteilungen wie z. B. \vec{v}_{10} jährlich um den Faktor 1,38 wächst. Da der Lebensraum begrenzt ist, können die so errechneten Werte langfristig nicht eine reale Population beschreiben.</p>	2
2. a)	<ul style="list-style-type: none"> Es ist: $(N \cdot N^{-1}) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u}$ $E \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u}$ $\vec{u} = a \cdot \vec{u}$ $a = 1$ <p>Damit gibt es einen Wert für a, sodass die erste Gleichung erfüllt ist.</p> Es ist: $(N + N^{-1}) \cdot \vec{u} = N \cdot \vec{u} + N^{-1} \cdot \vec{u} = \vec{u} + N^{-1} \cdot \vec{u}$ $= \vec{u} + N^{-1} \cdot N \cdot \vec{u} = \vec{u} + \vec{u} = 2 \cdot \vec{u}$ <p>Damit ergibt sich $2 \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u}$ und somit $a = 2$.</p> <p>Damit gibt es einen Wert für a, sodass die zweite Gleichung erfüllt ist.</p> 	4
b)	<p>Es ist</p> $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u_3 \\ 0,25u_1 \\ 0,4u_2 + 0,6u_3 \end{pmatrix}.$ <p>Da $N \cdot \vec{u} = \vec{u}$ gelten soll, ist dann</p> $\begin{pmatrix} 4u_3 \\ 0,25u_1 \\ 0,4u_2 + 0,6u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$ <p>Durch Umformungen der letzten Zeile erhält man die Behauptung:</p> $0,4u_2 + 0,6u_3 = u_3$ $0,4u_2 = 0,4u_3$ $u_2 = u_3$	4
Insgesamt		25

Standardbezug zur Aufgabe „Wölfe“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	3	X							I	I			X		
b)	1	X							I	I			X		
c)	2	X						II	II		I			X	
d)	2	X			X			II	II		I			X	
e)	2	X			X				I		I	I	X		
f)	2	X					II				I	I		X	
g)	3	X			X		II		II		II			X	
h)	2	X					II		II			I		X	
2. a)	4	X			X		III	II			II				X
b)	4	X			X		II	III			II				X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
24 %	44 %	32 %

Aufgabe 29: Reptilien

29.1 WTR-Fassung

	Lösungsskizze	BE
1. a)		2
b)	<p>Es ist $\vec{v}_2 = L \cdot \vec{v}_1$.</p> <p>Also ist $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0,16 & 1,6 \\ 0,24 & 0,48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1120 \\ 528 \end{pmatrix}$.</p>	2
c)	<p>Es gibt in der ersten Spalte zwei positive Einträge, daher liefern mehr Eier auch mehr Beiträge zu den Eiern und den Reptilien der nächsten Zählung.</p>	2
d)	<p>$0,24e_1 + 0,48 \cdot 600 = 576$ ergibt $e_1 = 1200$.</p> <p>Die Anzahl der neu gelegten Eier ist $1,6 \cdot 600 = 960$.</p>	3

	Lösungsskizze	BE
e)	<p>Der Ansatz $\begin{pmatrix} 0,16 & 1,6 \\ 0,24 & 0,48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 600 \end{pmatrix}$ liefert das folgende lineare Gleichungssystem:</p> $\left(\begin{array}{cc c} 0,16 & 1,6 & 1200 \\ 0,24 & 0,48 & 600 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 3 \longrightarrow \\ \cdot (-2) \longleftarrow + \end{array}$ $\left(\begin{array}{cc c} 0,16 & 1,6 & 1200 \\ 0 & 3,84 & 2400 \end{array} \right)$ <p>Die zweite Gleichung liefert $r_0 = 625$. Einsetzen in I ergibt $0,16e_0 + 1,6 \cdot 625 = 1200$ und damit $e_0 = 1250$. Laut Modell ist der Populationsvektor $\begin{pmatrix} 1250 \\ 625 \end{pmatrix}$ anzunehmen.</p>	4
f)	<p>Auswahl: Graph II <i>Mögliche Begründungen:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Graph I zeigt einen linearen Abfall, es wird aber Schritt für Schritt multipliziert und nicht subtrahiert. • Graph III stabilisiert sich auf einem Wert, es müsste aber Schritt für Schritt eine Abnahme geben. • Graph III wechselt sein Monotonieverhalten, es ist aber eine überall monoton fallende Kurve zu erwarten. 	2
g)	<p>$\begin{pmatrix} 0,16 & 1,6 \\ u & 0,48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ lässt sich übertragen in ein lineares Gleichungssystem:</p> $\left(\begin{array}{cc c} -0,84 & 1,6 & 0 \\ u & -0,52 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot \frac{40}{13} \\ \cdot \frac{40}{13} \end{array}$ $\left(\begin{array}{cc c} -0,84 & 1,6 & 0 \\ \frac{40}{13}u & -1,6 & 0 \end{array} \right)$ <p>Addition der Gleichungen ergibt:</p> $(-0,84 + \frac{40}{13}u) \cdot x = 0$ $-0,84 + \frac{40}{13}u = 0 \quad \vee \quad x = 0$ <p>Da $x = 0$ auch $y = 0$ zur Folge hat, wäre diese Lösung kein sinnvoller Populationsvektor einer lebenden Population. Also muss $\frac{40}{13}u = 0,84$ bzw. $u = 0,273$ sein.</p>	4
h)	<p>Da $\vec{v}_{8+n} = (L^*)^n \cdot \vec{v}_8$ gilt, werden sich die Populationsvektoren ab \vec{v}_{18} nicht mehr merklich ändern.</p>	2

		Lösungsskizze	BE
2.	<p>P muss eine 2×3-Matrix sein, damit das Produkt $P \cdot M$ eine zweizeilige Matrix ergibt.</p> <p>Q muss eine 3×2-Matrix sein, damit die verlangte Multiplikation $(P \cdot M) \cdot Q$ als Ergebnis eine 2×2-Matrix hat.</p> <p>Durch einen allgemeinen Ansatz für die Matrizen P und Q und Multiplikation der Matrizen gemäß der Aufgabenstellung erhält man $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.</p> <p>Kontrolle:</p> $P \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} + m_{31} & m_{22} + m_{32} & m_{23} + m_{33} \end{pmatrix}$ $(P \cdot M) \cdot Q = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} + m_{31} & m_{22} + m_{32} & m_{23} + m_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} + m_{13} \\ m_{21} + m_{31} & m_{22} + m_{32} + m_{23} + m_{33} \end{pmatrix} = N$	4	
Insgesamt			25

Standardbezug zur Aufgabe „Reptilien“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	2	X								I	I		X		
b)	2	X								I	I	I	X		
c)	2	X					I	I			I		X		
d)	3	X						II	II			I		X	
e)	4	X							II		II	I		X	
f)	2	X				X	II		II	II				X	
g)	4	X					III	III	III		II				X
h)	2	X							II		II	I		X	
2.	4	X						III			III	II			X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
24 %	44 %	32 %

Aufgabe 30: Reptilien

	Lösungsskizze	BE
1. a)	<pre> graph LR E((E)) -- 0,16 --> E E -- 0,24 --> R((R)) R -- 0,48 --> R R -- 1,6 --> E </pre>	2
b)	$0,24e_1 + 0,48 \cdot 600 = 576$ ergibt $e_1 = 1200$. Die Anzahl der neu gelegten Eier ist $0,48 \cdot 600 = 288$.	3
c)	Die Gleichung $\begin{pmatrix} 0,16 & 1,6 \\ 0,24 & 0,48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 600 \end{pmatrix}$ wird gelöst durch den Populationsvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1250 \\ 625 \end{pmatrix}$. Alternativlösung: $\begin{pmatrix} 0,16 & 1,6 \\ 0,24 & 0,48 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1200 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1250 \\ 625 \end{pmatrix}$	2
d)	Unabhängig von i gilt: $\begin{pmatrix} 0,16 & 1,6 \\ 0,24 & 0,48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2r_i \\ r_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,92r_i \\ 0,96r_i \end{pmatrix}$ Also ist $1,92r_i : 0,96r_i = 2 : 1$.	4
e)	Die allgemeine Lösung der Gleichung $L \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,96 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ lautet $x = 2y$ bei beliebigem y . Für $y \neq 0$ muss also $x : y = 2 : 1$ gelten, ein anderes Verhältnis stände im Widerspruch zur allgemeinen Lösung.	3
f)	$(L^*)^{10} \approx (L^*)^{40} \approx G \approx \begin{pmatrix} 0,382 & 1,176 \\ 0,201 & 0,618 \end{pmatrix}$ ist näherungsweise die Grenzmatrix. Der Grenzvektor ist dann $\vec{g} \approx \begin{pmatrix} 0,382 & 1,176 \\ 0,201 & 0,618 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 901 \\ 451 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 874,558 \\ 459,819 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 0,16 & 1,6 \\ 0,273 & 0,48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 875 \\ 460 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 876 \\ 459,675 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 876 \\ 460 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0,16 & 1,6 \\ 0,273 & 0,48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 874 \\ 460 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 875,84 \\ 459,402 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 876 \\ 459 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0,16 & 1,6 \\ 0,273 & 0,48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 875 \\ 459 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 874,4 \\ 459,195 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 874 \\ 459 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0,16 & 1,6 \\ 0,273 & 0,48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 874 \\ 459 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 874,24 \\ 458,922 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 874 \\ 459 \end{pmatrix}$ Als Prognose für die Langzeitentwicklung kann der Populationsvektor $\begin{pmatrix} 874 \\ 459 \end{pmatrix}$ angenommen werden.	5
2. a)	Es ist $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ und damit $B(5 -1 8)$.	2
b)	Es ist $\vec{OC} = \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und damit $C(3 -2 6)$.	2

Lösungsskizze		BE
c)	Es muss $\vec{OA} \circ \vec{OD} = 0$ und D verschieden von O sein. Das ist z. B. für $D(-1 2 0)$ der Fall.	2
Insgesamt		25

Standardbezug zur Aufgabe „Reptilien“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	2	X								I	I		X		
b)	3	X						II	II			I		X	
c)	2	X							II		I	I		X	
d)	4	X					I	II	II		I			X	
e)	3	X					III	III			II	II			X
f)	5	X				X			III		III	III			X
2. a)	2			X							I	I	X		
b)	2			X				I		I		I	X		
c)	2		X	X			I	II			I			X	

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
24 %	44 %	32 %

5 Stochastik

5.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

Aufgabe 31: Möbelfabrik

	Lösungsskizze	BE
1. a)	$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ Auf 18 Weisen lässt sich ein solches Paket packen.	2
b)	Die angegebene Formel bezieht sich auf ein Ziehen mit Zurücklegen. Da die Tütchen zum gleichen Zeitpunkt, nämlich beim Öffnen der Dose, auf den Boden fallen, handelt es sich aber um ein Ziehen ohne Zurücklegen.	2
c)	Der Term gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass höchstens 115 Pakete falsch gepackt sind.	2
d)	Es ist $P(X = 9) = \binom{117}{9} \cdot 0,09^9 \cdot 0,91^{108} \approx 0,12$, damit ergibt sich $\frac{1}{4} \cdot 0,12 = 0,03$. Dann ist: $P(X = 5) = \binom{117}{5} \cdot 0,09^5 \cdot 0,91^{112} \approx 0,03$ $P(X = 16) = \binom{117}{16} \cdot 0,09^{16} \cdot 0,91^{101} \approx 0,03$ Die Anzahlen 5 und 16 erfüllen die Bedingung.	3
2. a)	(1) Das Paket wurde nicht von Person II gepackt. (2) Das Paket wurde von Person II gepackt und es ist falsch gepackt.	3

		Lösungsskizze	BE															
b)	<p>(1) Die Aussage ist korrekt. Am Graph liest man die zu $x = 0,5$ gehörige Wahrscheinlichkeit mit ca. 0,25 ab.</p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>(2) Die Aussage stimmt nicht. Begründung: Zu einer Proportionalität gehört ein geradliniger Verlauf des Graphen. Dies ist hier offensichtlich nicht der Fall.</p>	4																
c)	<p>Lösung mithilfe einer unvollständigen Vierfeldertafel:</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">Das Paket ist fehlerhaft gepackt.</td> <td style="text-align: center;">Das Paket ist nicht fehlerhaft gepackt.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Person II hat das Paket gepackt.</td> <td style="text-align: center;">$0,035x$</td> <td></td> <td style="text-align: center;">x</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Person II hat das Paket nicht gepackt.</td> <td style="text-align: center;">$0,11 \cdot (1 - x)$</td> <td></td> <td style="text-align: center;">$1 - x$</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">$0,035x + 0,11 \cdot (1 - x)$</td> <td></td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> </table> <p>Damit ergibt sich als gesuchte Funktionsgleichung $f(x) = \frac{0,035x}{0,035x + 0,11 \cdot (1 - x)} = \frac{0,035x}{0,11 - 0,075x}$. Die Definitionsmenge ist $D = [0; 1]$. <i>Hinweis: Auch andere Festlegungen der Definitionsmenge können im Sachkontext sinnvoll sein, etwa $D =]0; 1[$. Diese können ebenfalls als korrekt gewertet werden.</i></p>		Das Paket ist fehlerhaft gepackt.	Das Paket ist nicht fehlerhaft gepackt.		Person II hat das Paket gepackt.	$0,035x$		x	Person II hat das Paket nicht gepackt.	$0,11 \cdot (1 - x)$		$1 - x$		$0,035x + 0,11 \cdot (1 - x)$		1	4
	Das Paket ist fehlerhaft gepackt.	Das Paket ist nicht fehlerhaft gepackt.																
Person II hat das Paket gepackt.	$0,035x$		x															
Person II hat das Paket nicht gepackt.	$0,11 \cdot (1 - x)$		$1 - x$															
	$0,035x + 0,11 \cdot (1 - x)$		1															
Insgesamt			20															

Standardbezug zur Aufgabe „Möbelfabrik“

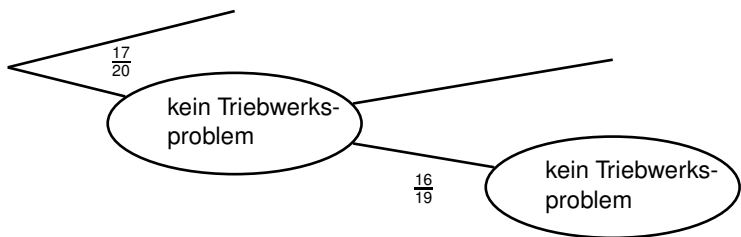
Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	2	X				X		I	I		I		X		
b)	2					X	I		I		I		X		
c)	2					X			II	II		I		X	
d)	3				X	X		II			I			X	
2. a)	3					X		I	I		I		X		
b)	4				X	X	II		I	II				X	
c)	4				X	X			II	III	III				X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)	Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)
35 %	45 %	20 %

Aufgabe 32: Triebwerke

32.1 WTR-Fassung

	Lösungsskizze	BE
1. a)	<p>Die Zufallsvariable X steht für die Anzahl der Triebwerke mit Problemen. Mit $n = 12 \cdot 3 = 36$ und $p = 0,0025$ gilt:</p> $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$ $= 1 - (1 - 0,0025)^{36}$ $\approx 0,0862$ <p>Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Triebwerk Probleme aufweist, ist ca. 0,0862 bzw. 8,6 %.</p>	3
b)	<p>(I) Die Verfassung des Monteurs spielt eine Rolle: Ist er weniger konzentriert, erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, dass ein von ihm gebautes Triebwerk Probleme aufweist. Die für die Binomialverteilung notwendige Konstanz der Erfolgswahrscheinlichkeit ist damit nicht mehr gegeben.</p> <p>(II) Es gibt keinen offensichtlichen Grund anzunehmen, dass sich die Wahrscheinlichkeit eines Triebwerksproblems ändert, wenn in seiner Nähe über Triebwerksprobleme gesprochen wird. Die Annahme der Binomialverteilung ist also weiterhin angemessen.</p> <p><i>Hinweis: Andere Beurteilungen, die in schlüssiger Weise die beschriebenen Situationen in Hinblick auf die Voraussetzungen der Binomialverteilung interpretieren, können als korrekt bewertet werden.</i></p>	4
c)	<p>Aus dem Ansatz $1 - (1 - 0,0025)^n \geq 0,9$ ergibt sich über $0,9975^n \leq 0,1$ die Ungleichung $n \geq \log_{0,9975}(0,1) \approx 919,88\dots$</p> <p>Es müssen also mindestens 920 Flüge stattfinden.</p>	3
2. a)	<p>(I) Der Term beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass alle Einspritzdüsen des Flugzeugs ausfallen.</p> <p>(II) Der Term beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass in jedem der drei Triebwerke mindestens 2 Einspritzdüsen ausfallen.</p>	3

		Lösungsskizze	BE
b)	Die Zufallsvariable Y entspricht der Anzahl der defekten Einspritzdüsen. $P(Y = 1 Y \leq 1) = \frac{18 \cdot 0,003 \cdot 0,997^{17}}{0,997^{18} + 18 \cdot 0,003 \cdot 0,997^{17}} \approx 0,0514$ Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Einspritzdüse im linken Triebwerk defekt ist, wenn kein Leistungsabfall festgestellt wird, beträgt etwa 5,1 %.		3
3. a)	 <p>Aus allen 20 Flügen werden in einem Zufallsversuch diejenigen beiden Flüge gezogen, in denen ein Druckabfall nachgestellt wird. Das entspricht einem Ziehen ohne Zurücklegen in dem gezeigten zweistufigen Baumdiagramm. Wegen $k = 3$ sind im ersten Zug noch $20 - 3$, also 17 Flüge von 20 ohne Triebwerksproblemsimulation, im zweiten Zug stehen dann nur noch $19 - 3$, also 16 Flüge von 19 zur Verfügung. Es ergibt sich</p> $P(E) = \frac{17}{20} \cdot \frac{16}{19} = \frac{20-k}{20} \cdot \frac{19-k}{19}.$		2
b)	Für k kommen nur ganzzahlige Werte aus dem Intervall $[0; 20]$ infrage. Für $k = 19$ und $k = 20$ ist $P(E) = 0$. Für die übrigen Werte ist $P(E)$ wegen $k < 19$ positiv. Da k in beiden Faktoren subtrahiert wird, werden beide Faktoren im Positiven kleiner und damit auch ihr Produkt.		2
Insgesamt			20

Standardbezug zur Aufgabe „Triebwerke (WTR-Fassung)“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	3					X			I		I		X		
b)	4					X	II		I			II		X	
c)	3				X	X		I	I		I		X		
2. a)	3				X	X			II	II	II			X	
b)	3				X	X			III		III				X
3. a)	2					X			II	II		III			X
b)	2				X		II	II				II		X	

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)	Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)
30 %	45 %	25 %

32.2 CAS-Fassung

	Lösungsskizze	BE
2. a)	(I) Der Term beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass alle Einspritzdüsen des Flugzeugs ausfallen. (II) Der Term beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass in jedem der drei Triebwerke mindestens 2 Einspritzdüsen ausfallen.	3
2. b)	Die Zufallsvariable Y entspricht der Anzahl der defekten Einspritzdüsen. Es soll gelten: $P(Y = 1 Y \leq 1) \leq 0,01$ Es ist also ein Wert p gesucht mit $0 \leq p \leq 1$, sodass gilt: $\frac{18 \cdot p \cdot (1 - p)^{17}}{(1 - p)^{18} + 18 \cdot p \cdot (1 - p)^{17}} \leq 0,01$ Es ergibt sich $p \leq 0,00056085$. Die Ausfallwahrscheinlichkeit p darf höchstens ca. 0,056 % betragen.	3
3. b)	Es muss gelten: $\frac{20-k}{20} \cdot \frac{19-k}{19} \geq 0,25$ Es ergibt sich: $k \leq 9,740\dots$ oder $k \geq 29,259\dots$ Wegen $k \leq 20$ ist nur die erste Lösung relevant. Wegen der Ganzzahligkeit von k ist k maximal 9.	2

Standardbezug zur Aufgabe „Triebwerke (CAS-Fassung)“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	3					X			I		I		X		
b)	4					X	II		I			II		X	
c)	3				X	X		I	I		I		X		
2. a)	3				X	X			II	II	II			X	
b)	3				X	X			III		III				X
3. a)	2					X			II	II		III			X
b)	2				X	X	I	II		II	II			X	

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)	Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)
30 %	45 %	25 %

Aufgabe 33: Smartphones**33.1 WTR-Fassung**

	Lösungsskizze	BE
1. a)	Es ist $\binom{6}{4} = 15$.	2
b)	Es ist $P(A) = \frac{\binom{47}{10}}{\binom{50}{10}} \approx 0,5040 \approx 50,4\%$ und $P(B) = 1 - P(A) \approx 0,4960 = 49,6\%$.	3
2. a)	$0,1 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,03 + 0,2 \cdot 0,04 + 0,4 \cdot 0,02 = 0,03 = 3\%$ Damit ist der Anteil der fehlerhaften Geräte unter allen hergestellten Geräten 3%.	2
b)	Es ist $P(\text{Ein fehlerhaftes Smartphone kommt aus Werk A.})$ $= \frac{P(\text{Das Smartphone kommt aus Werk A und das Smartphone ist fehlerhaft.})}{P(\text{Das Smartphone ist fehlerhaft.})} = \frac{0,1 \cdot 0,05}{0,03} = \frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes fehlerhaftes Smartphone aus Werk A stammt, ist $\frac{1}{6}$.	3
c)	Es ist X die Anzahl der fehlerhaften Geräte. Dann ist $E(X) = 250 \cdot 0,05 = 12,5$. Um den Erwartungswert herum erhält man: $P(X = 12) = P(X \leq 12) - P(X \leq 11) \approx 0,5175 - 0,4016 = 0,1159$ und $P(X = 13) = P(X \leq 13) - P(X \leq 12) \approx 0,6293 - 0,5175 = 0,1118$ Damit ist 12 die wahrscheinlichste Anzahl fehlerhafter Geräte. (Auch eine direkte Berechnung mithilfe eines geeigneten wissenschaftlichen Taschenrechners ist zulässig.)	2
d)	$s = 199$ Der angegebene Term beschreibt die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass unter 200 im Werk D hergestellten zufällig ausgewählten Geräten höchstens eines fehlerhaft ist.	4
e)	Ist n die Anzahl auszuwählender Geräte, so gilt: $1 - 0,96^n \geq 0,95$ $0,96^n \leq 0,05$ $n \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,96)} \approx 73,38$ Es müssen mindestens 74 Geräte aus Werk C ausgewählt werden.	4
	Insgesamt	20

Standardbezug zur Aufgabe „Smartphones (WTR-Fassung)“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	2	X				X			I		I		X		
b)	3	X				X			I		I		X		
2. a)	2					X				II	II	I		X	
b)	3					X			II	II	II			X	
c)	2		X		X	X	I	I	I				X		
d)	4					X	II		II			I		X	
e)	4	X				X		III	II		II				X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)	Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)
35 %	45 %	20 %

33.2 CAS-Fassung

	Lösungsskizze	BE
2. e)	<p>Es ist $n > 500$ mit $P(X \geq 500) \geq 0,9$ und $p = 0,96$ gesucht, wobei n die Anzahl der ausgewählten Geräte ist. Durch Probieren erhält man</p> <ul style="list-style-type: none"> • $n = 526: P(500 \leq X \leq 526) \approx 0,885$ und • $n = 527: P(500 \leq X \leq 527) \approx 0,919$. <p>Es müssen mindestens 527 Geräte ausgewählt werden.</p>	4

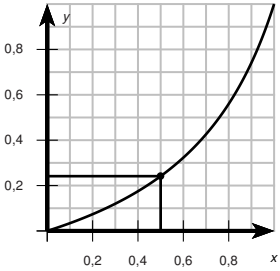
Standardbezug zur Aufgabe „Smartphones (CAS-Fassung)“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	2	X				X			I		I		X		
b)	3	X				X			I		I		X		
2. a)	2					X				II	II	I		X	
b)	3					X			II	II	II			X	
c)	2		X		X	X	I	I	I				X		
d)	4					X	II		II			I		X	
e)	4					X		III	II		II				X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)	Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)
35 %	45 %	20 %

5.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

Aufgabe 34: Möbelfabrik

	Lösungsskizze	BE
1. a)	$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ Auf 18 Weisen lässt sich ein solches Paket packen.	2
b)	Die angegebene Formel bezieht sich auf ein Ziehen mit Zurücklegen. Da die Tütchen zum gleichen Zeitpunkt, nämlich beim Öffnen der Dose, auf den Boden fallen, handelt es sich aber um ein Ziehen ohne Zurücklegen.	2
c)	Der Term gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass höchstens 115 Pakete falsch gepackt sind.	2
d)	Es gilt $\mu = n \cdot p = 117 \cdot 0,09 = 10,53$ und $\sigma = \sqrt{117 \cdot 0,09 \cdot 0,91} \approx 3,0955$. Wegen $\sigma > 3$ ist die Laplace-Bedingung erfüllt und die Sigma-Regeln dürfen angewendet werden. Sei die Zufallsvariable X die Anzahl der fehlerhaft gepackten Pakete. Aufgrund der Einseitigkeit des Tests wird zur Berechnung des kritischen Werts mithilfe der Sigma-Regeln wie folgt angesetzt: $0,95 \approx P(X \leq 10,53 + 1,64 \cdot \sqrt{117 \cdot 0,09 \cdot 0,91}) \approx P(X \leq 15,6)$ Die Nullhypothese wird also verworfen, wenn mehr als 15 Pakete fehlerhaft gepackt sind.	5
2. a)	(1) Die Aussage ist korrekt. Am Graph liest man die zu $x = 0,5$ gehörige Wahrscheinlichkeit mit ca. 0,25 ab.  (2) Die Aussage stimmt nicht. Begründung: Zu einer Proportionalität gehört ein geradliniger Verlauf des Graphen. Dies ist hier offensichtlich nicht der Fall.	4

Lösungsskizze		BE																
b)	<p>Lösung mithilfe einer unvollständigen Vierfeldertafel:</p> <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">Das Paket ist fehlerhaft gepackt.</td> <td style="text-align: center;">Das Paket ist nicht fehlerhaft gepackt.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Person II hat das Paket gepackt.</td> <td style="text-align: center;">$0,035x$</td> <td></td> <td style="text-align: center;">x</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Person II hat das Paket nicht gepackt.</td> <td style="text-align: center;">$0,11 \cdot (1 - x)$</td> <td></td> <td style="text-align: center;">$1 - x$</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">$0,035x + 0,11 \cdot (1 - x)$</td> <td></td> <td style="text-align: center;">1</td> </tr> </table> <p>Damit ergibt sich als gesuchte Funktionsgleichung $f(x) = \frac{0,035x}{0,035x + 0,11 \cdot (1 - x)} = \frac{0,035x}{0,11 - 0,075x}$. Die Definitionsmenge ist $D = [0; 1]$. <i>Hinweis: Auch andere Festlegungen der Definitionsmenge können im Sachkontext sinnvoll sein, etwa $D =]0; 1[$. Diese können ebenfalls als korrekt gewertet werden.</i></p>		Das Paket ist fehlerhaft gepackt.	Das Paket ist nicht fehlerhaft gepackt.		Person II hat das Paket gepackt.	$0,035x$		x	Person II hat das Paket nicht gepackt.	$0,11 \cdot (1 - x)$		$1 - x$		$0,035x + 0,11 \cdot (1 - x)$		1	4
	Das Paket ist fehlerhaft gepackt.	Das Paket ist nicht fehlerhaft gepackt.																
Person II hat das Paket gepackt.	$0,035x$		x															
Person II hat das Paket nicht gepackt.	$0,11 \cdot (1 - x)$		$1 - x$															
	$0,035x + 0,11 \cdot (1 - x)$		1															
3. a)	<div style="text-align: center;"> </div> <p><i>Hinweis: In der Skizze muss deutlich werden, dass die Kurve von Person I flacher und breiter verläuft, sodass die Inhalte der beiden Flächen zwischen dem Graphen und der x-Achse ungefähr gleich sind. Beide Kurven müssen dieselbe Maximalstelle haben. Außerdem müssen in der zu skizzierenden Kurve die achsensymmetrische Glockenform des Graphen sowie der asymptotische Verlauf deutlich werden.</i></p>	2																

Lösungsskizze		BE
b)	<p>Die Zufallsvariablen T_1 bzw. T_2 stehen für die Packdauern von Person I bzw. Person II.</p> <p>Ansatz: $P(0 \leq T_1 \leq t) = P(0 \leq T_2 \leq 3)$</p> <p>Mithilfe der Standardnormalverteilung gilt dann:</p> $\phi\left(\frac{t-2,8}{0,5}\right) - \phi\left(\frac{0-2,8}{0,5}\right) = \phi\left(\frac{3-2,8}{0,25}\right) - \phi\left(\frac{0-2,8}{0,25}\right)$ $\Leftrightarrow \phi\left(\frac{t-2,8}{0,5}\right) - \phi(-5,6) = \phi(0,8) - \phi(-11,2)$ <p>In sehr guter Näherung gilt dann $\phi\left(\frac{t-2,8}{0,5}\right) \approx \phi(0,8)$ und damit $\frac{t-2,8}{0,5} \approx 0,8$, woraus sich $t \approx 3,2$ ergibt.</p> <p>Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit w gilt dann:</p> $w = \phi(0,8) - \phi(-11,2) \approx \phi(0,8) \approx 0,7881$ <p><i>Hinweis: Auch eine direkte Berechnung mithilfe eines geeigneten Taschenrechners ist zulässig. In diesem Fall sind Zwischenschritte entbehrlich</i></p>	4
Insgesamt		25

Standardbezug zur Aufgabe „Möbelfabrik“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	2	X				X		I	I		I		X		
b)	2					X	I		I			I	X		
c)	2					X			II	II		I		X	
d)	5				X	X					II	II		X	
2. a)	4				X	X	II		I	II				X	
b)	4				X	X			II	III	III				X
3. a)	2				X	X		I	I	I			X		
b)	4				X	X		III	II		III				X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
24 %	44 %	32 %

Aufgabe 35: Triebwerke**35.1 WTR-Fassung**

	Lösungsskizze	BE
1. a)	<p>Die Zufallsvariable X steht für die Anzahl der Triebwerke mit Problemen. Mit $n = 12 \cdot 3 = 36$ und $p = 0,0025$ gilt:</p> $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$ $= 1 - (1 - 0,0025)^{36}$ $\approx 0,0862$ <p>Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Triebwerk Probleme aufweist, ist ca. 0,0862 bzw. 8,6 %.</p>	3
b)	<p>(I) Die Verfassung des Monteurs spielt eine Rolle: Ist er weniger konzentriert, erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, dass ein von ihm gebautes Triebwerk Probleme aufweist. Die für die Binomialverteilung notwendige Konstanz der Erfolgswahrscheinlichkeit ist damit nicht mehr gegeben.</p> <p>(II) Es gibt keinen offensichtlichen Grund anzunehmen, dass sich die Wahrscheinlichkeit eines Triebwerksproblems ändert, wenn in seiner Nähe über Triebwerksprobleme gesprochen wird. Die Annahme der Binomialverteilung ist also weiterhin angemessen.</p> <p><i>Hinweis: Andere Beurteilungen, die in schlüssiger Weise die beschriebenen Situationen in Hinblick auf die Voraussetzungen der Binomialverteilung interpretieren, können als korrekt bewertet werden.</i></p>	4
c)	<p>Aus dem Ansatz $1 - (1 - 0,0025)^n \geq 0,9$ ergibt sich über $0,9975^n \leq 0,1$ die Ungleichung $n \geq \log_{0,9975}(0,1) \approx 919,88\dots$</p> <p>Es müssen also mindestens 920 Flüge stattfinden.</p>	3
2. a)	<p>(I) Der Term beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass alle Einspritzdüsen des Flugzeugs ausfallen.</p> <p>(II) Der Term beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass in jedem der drei Triebwerke mindestens 2 Einspritzdüsen ausfallen.</p>	3
b)	<p>Die Zufallsvariable Y entspricht der Anzahl der defekten Einspritzdüsen.</p> $P(Y = 1 Y \leq 1) = \frac{18 \cdot 0,003 \cdot 0,997^{17}}{0,997^{18} + 18 \cdot 0,003 \cdot 0,997^{17}} \approx 0,0514$ <p>Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Einspritzdüse im linken Triebwerk defekt ist, wenn kein Leistungsabfall festgestellt wird, beträgt etwa 5,1 %.</p>	3

	Lösungsskizze	BE
3. a)	<p>Die Zufallsvariable Y entspricht der Anzahl der defekten Einspritzdüsen. Da der Ausfall von Einspritzdüsen als Bernoullikette modelliert werden kann, ist Y binomialverteilt.</p> <p>Mit $n = 4500$ und $p = 0,006$ gilt dann das Folgende: $\mu = 4500 \cdot 0,006 = 27$ und $\sigma = \sqrt{4500 \cdot 0,006 \cdot 0,994} = 5,1805... > 3$</p> <p>Die Laplace-Bedingung ist also erfüllt, somit dürfen die σ-Regeln verwendet werden. Damit gilt näherungsweise $P(Y \leq 27 + 1,64 \cdot \sigma) \approx 0,95$, also $P(Y \leq 35,496) \approx 0,95$.</p> <p>Damit lautet die Entscheidungsregel wie folgt: Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn mindestens 36 Einspritzdüsen defekt sind.</p>	5
b)	<p>Alternative 1:</p> <p>Die verwendete Nullhypothese H_0 erklärt $p \leq 0,006$ zum anzunehmenden Normalfall. Erst eine signifikant hohe Anzahl von Ausfällen würde zu einem Ersatz der Einspritzdüsen und damit zu höheren Kosten und höherer Sicherheit führen.</p> <p>Bei einem Test von \tilde{H}_0 würde $p \geq 0,006$ und damit ein Verbesserungsbedarf als anzunehmender Normalfall angesehen werden. Nur bei einer signifikant geringen Anzahl von Ausfällen würde man auf die Erhöhung von Kosten und Sicherheit verzichten.</p> <p>Beim Test von H_0 steht das Interesse an der Vermeidung von Kosten unter Inkaufnahme von möglicher geringerer Flugsicherheit eher im Vordergrund, beim Test von \tilde{H}_0 steht das Interesse an der Flugsicherheit unter Inkaufnahme von möglicherweise unnötigen Kosten eher im Vordergrund.</p> <p>Alternative 2:</p> <p>Eine Nullhypothese kann nicht bestätigt werden.</p> <p>So erhält man aus dem Test von H_0 keine Bestätigung, dass $p \leq 0,006$ ist. Nur eine signifikant hohe Anzahl von Ausfällen würde zu einem Verwerfen der Nullhypothese und damit zum Ersatz der Einspritzdüsen führen. Hier wird also der Ersatz eher vermieden, das Interesse an Kostenvermeidung steht im Vordergrund.</p> <p>Bei dem Test von \tilde{H}_0 könnte man nicht bestätigen, dass $p \geq 0,006$ ist. Nur eine signifikant kleine Anzahl von Ausfällen würde zu einem Verwerfen der Nullhypothese und damit auf einen Verzicht auf den Ersatz der Einspritzdüsen führen. Hier wird also das Beibehalten der Einspritzdüsen schwer gemacht, das Interesse an der Flugsicherheit steht hier eher im Vordergrund.</p>	2

		Lösungsskizze	BE
		<p>Alternative 3:</p> <p>Der kritische Bereich beginnt im Test von H_0 bei $k = 36$. Bei einer Ausfallanzahl ab 36 aufwärts würden die Einspritzdüsen ersetzt werden.</p> <p>Im Test von \tilde{H}_0 würde der kritische Bereich von 0 bis \tilde{k} gehen, wobei \tilde{k} die größte Zahl ist, für die $P_{0,006}^{4500}(Y \leq \tilde{k}) \leq 0,05$ gilt. Das ist für $\tilde{k} = 18$ der Fall. Bei einer Ausfallanzahl ab 19 aufwärts würden die Einspritzdüsen ersetzt werden. Beim Test von \tilde{H}_0 steht im Vergleich zum Test von H_0 eher das Interesse an der Flugsicherheit im Vordergrund, verbunden mit einer höheren Bereitschaft, eventuell unnötige Kosten in Kauf zu nehmen. Das Interesse an Kostenvermeidung kommt im Vergleich der beiden Tests eher beim Test H_0 zur Geltung.</p>	
4.		<p style="text-align: center;"> $\frac{17}{20}$ kein Triebwerksproblem $\frac{16}{19}$ kein Triebwerksproblem </p> <p>Aus allen 20 Flügen werden in einem Zufallsversuch diejenigen beiden Flüge gezogen, in denen ein Druckabfall nachgestellt wird. Das entspricht einem Ziehen ohne Zurücklegen in dem gezeigten zweistufigen Baumdiagramm. Wegen $k = 3$ sind im ersten Zug noch $20 - 3$, also 17 Flüge von 20 ohne Triebwerksproblemsimulation, im zweiten Zug stehen dann nur noch $19 - 3$, also 16 Flüge von 19 zur Verfügung. Es ergibt sich</p> $P(E) = \frac{17}{20} \cdot \frac{16}{19} = \frac{20-k}{20} \cdot \frac{19-k}{19}$	2
Insgesamt			25

Standardbezug zur Aufgabe „Triebwerke (WTR-Fassung - Klausur unter Abiturbedingungen 2017, erhöhtes Anforderungsniveau)“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	3					X			I		I		X		
b)	4					X	II		I			II		X	
c)	3				X	X		I	I		I		X		
2. a)	3				X	X			II	II	II			X	
b)	3				X	X			III		III				X
3. a)	5					X			II		II	II		X	
b)	2					X	III		III			III			X
4.	2					X			II	II		III			X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
24 %	48 %	28 %

35.2 CAS-Fassung

	Lösungsskizze	BE
2. b)	<p>Die Zufallsvariable Y entspricht der Anzahl der defekten Einspritzdüsen. Es soll gelten: $P(Y = 1 Y \leq 1) \leq 0,01$ Es ist also ein Wert p gesucht mit $0 \leq p \leq 1$, sodass gilt:</p> $\frac{18 \cdot p \cdot (1 - p)^{17}}{(1 - p)^{18} + 18 \cdot p \cdot (1 - p)^{17}} \leq 0,01$ <p>Es ergibt sich $p \leq 0,00056085$. Die Ausfallwahrscheinlichkeit p darf höchstens ca. 0,056 % betragen.</p>	3
3. a)	<p>Die Zufallsvariable Y entspricht der Anzahl der defekten Einspritzdüsen. Da der Ausfall von Einspritzdüsen als Bernoullikette modelliert werden kann, ist Y binomialverteilt. Mit $n = 4500$ und $p = 0,006$ gilt dann das Folgende: $P(Y \leq 35) \approx 0,945$ $P(Y \leq 36) \approx 0,962$ Damit lautet die Entscheidungsregel wie folgt: Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn mindestens 37 Einspritzdüsen defekt sind.</p>	3
b)	<p>Es muss gelten: $\frac{20-k}{20} \cdot \frac{19-k}{19} \geq 0,25$ Es ergibt sich: $k \leq 9,740\dots$ oder $k \geq 29,259\dots$ Wegen $k \leq 20$ ist nur die erste Lösung relevant. Wegen der Ganzzahligkeit von k ist k maximal 9.</p>	2

Standardbezug zur Aufgabe „Triebwerke (CAS-Fassung - Klausur unter Abiturbedingungen 2017, erhöhtes Anforderungsniveau)“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	3					X			I		I		X		
b)	4					X	II		I			II		X	
c)	3				X	X		I	I		I		X		
2. a)	3				X	X			II	II	II			X	
b)	3				X	X			III		III				X

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
3. a)	3					X			II		II	II		X	
b)	2					X	III		III			III			X
4. a)	2					X			II	II		III			X
b)	2				X	X	I	II			II			X	

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
24 %	48 %	28 %

Aufgabe 36: Samenkörner

	Lösungsskizze	BE
a)	<p>A: „Ein Samenkorn gehört zur Qualitätsstufe A.“ B: „Ein Samenkorn gehört zur Qualitätsstufe B.“ K: „Ein Samenkorn keimt.“</p>	3
b)	<p>Es ist $P(B K) = \frac{P(B \cap K)}{P(K)} = \frac{0,35 \cdot 0,7}{0,65 \cdot 0,95 + 0,35 \cdot 0,7} = \frac{98}{345} \approx 0,2841 \approx 28,4 \%$. Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei einem zufällig ausgewähltem keimenden Samenkorn um ein Samenkorn der Qualitätsstufe B handelt, beträgt 28,4 %.</p>	3

	Lösungsskizze	BE
c)	<p>Es ist</p> $P(E) = P(X = 140) = P(X \leq 140) - P(X \leq 139)$ $= 1 - 0,4733 - (1 - 0,5348)$ $= 0,5267 - 0,4652 = 0,0615 \approx 6,2 \%$ <p>und</p> $P(F) = P(130 \leq X < 150)$ $= P(X \leq 149) - P(X \leq 130)$ $= 1 - 0,0695 - (1 - 0,9272)$ $= 0,9305 - 0,0728 = 0,8577 \approx 85,8 \%$ <p>(Steht ein wissenschaftlicher Taschenrechner zur Verfügung, der Werte zur Binomialverteilung liefert, darf dieser anstelle der Tabellen verwendet werden.)</p>	3
d)	<p>Man sieht, dass es hier um eine Grundgesamtheit von 200 Samenkörnern von der Qualitätsstufe <i>B</i> geht. Der Term kann anders geschrieben werden:</p> $1 - (P(X \leq 120) + P(X \geq 160)) = 1 - P(X \leq 120) - P(X \geq 160)$ $= P(121 \leq X \leq 159)$ <p>Also beschreibt der Term die Wahrscheinlichkeit, dass von 200 Samenkörnern der Qualitätsstufe <i>B</i> mindestens 121 und höchstens 159 keimen. (Eine Beschreibung ohne die Umformung ist möglich.)</p>	2
e)	<p>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass aus einem Samenkorn eine fruchttragende Pflanze heranwächst, beträgt für die Qualitätsstufe <i>A</i> $0,95 \cdot 0,85$ und für die Qualitätsstufe <i>B</i> $0,7 \cdot 0,75$.</p> <p>Damit entstehen pro Pflanze für die Qualitätsstufe <i>A</i> Kosten in Höhe von $\frac{17 \text{ ct}}{0,95 \cdot 0,85} \approx 21 \text{ ct}$, für die Qualitätsstufe <i>B</i> in Höhe von $\frac{12 \text{ ct}}{0,7 \cdot 0,75} \approx 23 \text{ ct}$.</p> <p>Für den Anbaubetrieb wäre es finanziell also nicht sinnvoll, sich auf Samenkörner der Qualitätsstufe <i>B</i> zu beschränken.</p>	6
f)	<p>Es ist <i>Z</i> die Anzahl der keimenden Samenkörner. Für $n = 100$ und $p = 0,7$ ist ein möglichst kleiner Wert für <i>k</i> zu finden, sodass $P(Z > k) \leq 5 \%$ gilt. Man erhält:</p> $P(Z > k) \leq 0,05$ $1 - P(Z \leq k) \leq 0,05$ $P(Z \leq k) \geq 0,95$ <p>Mit der Tabelle 2 erhält man $k = 77$, denn es gilt $P(Z \leq 77) = 0,9521$. Keimen also mehr als 77 Samenkörner, so wird die Nullhypothese abgelehnt.</p>	5

Lösungsskizze		BE
g)	<p>Es ist $\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0,6 = 30$ und $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = 2 \cdot \sqrt{3} \approx 3,46$.</p> <p>Dann ist</p> $[\mu - 1,96\sigma; \mu + 1,96\sigma] = [30 - 1,96 \cdot \sqrt{12}; 30 + 1,96 \cdot \sqrt{12}] \approx [23,21; 36,78].$ <p>Damit liegt 27 im Intervall und somit ist die vermutete Wahrscheinlichkeit bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % mit der Anzahl der keimenden Samenkörner verträglich.</p>	3
Insgesamt		25

Standardbezug zur Aufgabe „Samenkörner“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a)	3					X			I	I		I	X		
b)	3					X		II	II		I			X	
c)	3					X			I		I		X		
d)	2	X				X	III	III	III						X
e)	6					X	III	III				II			X
f)	5	X			X	X			II		II	II		X	
g)	3		X		X	X					II	II		X	

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
24 %	44 %	32 %

Aufgabe 37: Glutenunverträglichkeit

	Lösungsskizze	BE
1. a)	<p>G: „Bei der Person liegt eine Glutenunverträglichkeit vor.“ P: „Das Testergebnis ist positiv.“</p> <pre> graph LR Root(()) --- G((G)) Root --- Gbar((Ḡ)) G --- GP((P)) G --- Gpb((P̄)) Gbar --- GbarP((P)) Gbar --- Gbarpb((P̄)) G --- GP --- GPProb[98 %] G --- Gpb --- GpbProb[2 %] Gbar --- GbarP --- GbarPProb[4 %] Gbar --- Gbarpb --- GbarpbProb[96 %] GProb[1 %] --- G GbarProb[99 %] --- Gbar </pre>	3
b)	$P(A) = 0,01 \cdot 0,98 = 0,0098$ $P(B) = 0,01 \cdot 0,02 + 0,99 \cdot 0,96 \approx 0,9506$	3
c)	<p>Es ist $P(G P) = \frac{P(G \cap P)}{P(P)} = \frac{0,01 \cdot 0,98}{0,01 \cdot 0,98 + 0,99 \cdot 0,04} \approx 0,198$. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, wenn das Testergebnis positiv ist, beträgt rund 19,8 %.</p>	3
2.	<p>Der Erwartungswert ist $E(X) = 0,01 \cdot 20000 = 200$. Bei 10 % Abweichung liegt X zwischen 180 und 220. Dann ergibt sich $1 - P_{0,01}^{20000}(180 \leq X \leq 220) \approx 0,145$.</p>	4
3. a)	<p>Folgende Fehlentscheidungen können auftreten:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Obwohl höchstens 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, entscheidet man sich aufgrund des Ergebnisses der Kontrolle dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern. • Obwohl mehr als 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, entscheidet man sich aufgrund des Ergebnisses der Kontrolle nicht dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern. 	4

		Lösungsskizze	BE
b)	<p>Y ist die Anzahl unbrauchbarer Teststreifen. Ist k die Anzahl unbrauchbarer Teststreifen, ab der man sich dafür entscheidet, das Herstellungsverfahren zu verbessern, so muss gelten:</p> $P_{0,1}^{200}(Y \geq k) \leq P_{0,1}^{100}(Y \geq 16)$ <p>Es ist $P_{0,1}^{100}(Y \geq 16) \approx 0,0399$. Durch Probieren erhält man $P_{0,1}^{200}(Y \geq 28) \approx 0,0434$ und $P_{0,1}^{200}(Y \geq 29) \approx 0,0271$. Wenn mehr als 28 Teststreifen unbrauchbar sind, entscheidet man sich dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern.</p>	4	
c)	<p>Z ist die Indikatormenge in mg. Für eine Standardabweichung von 4,0 mg und einem Erwartungswert von 20 mg gilt $P(Z \leq 15) \approx 0,1056$. Unter Beibehaltung des Erwartungswertes $\mu = 20$ ist σ so zu bestimmen, dass $P(Z \leq 15) \approx 0,053$ ergibt. Durch erstes Probieren erhält man $\sigma = 3,0$. Feineres Eingrenzen liefert:</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\sigma = 3,0: P(Z \leq 15) \approx 0,048$ • $\sigma = 3,1: P(Z \leq 15) \approx 0,0534$ • $\sigma = 3,2: P(Z \leq 15) \approx 0,0591$ <p>Damit hat man eine neue Standardabweichung von rund 3,1 mg.</p>	4	
		Insgesamt	25

Standardbezug zur Aufgabe „Glutenunverträglichkeit“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1. a)	3					X			I	I		I	X		
b)	3					X			I		I		X		
c)	3					X		II	II		I			X	
2.	4		X		X	X		II	II		II			X	
3. a)	4					X	II					II		X	
b)	4	X			X	X		III	II			II			X
c)	4	X	X		X	X		III	II		II				X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)	Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)
24 %	44 %	32 %

A Anhang

A.1 Liste der Operatoren

Mehr noch als bei dezentralen Aufgaben, die immer im Kontext gemeinsamer Erfahrungen der Lehrkräfte und Schüler mit vorherigen Klausuren stehen, müssen zentrale Prüfungsaufgaben für die Abiturientinnen und Abiturienten eindeutig hinsichtlich des Arbeitsauftrages und der erwarteten Leistung formuliert sein. Die in den zentralen schriftlichen Abituraufgaben verwendeten Operatoren (Arbeitsaufträge) werden in der folgenden Tabelle definiert und inhaltlich gefüllt. Entsprechende Formulierungen in den Klausuren der Studienstufe sind ein wichtiger Teil der Vorbereitung der Schülerinnen und Schüler auf das Abitur.

Diese Operatoren können hinsichtlich ihrer Bedeutung durch Zusätze (z. B. „rechnerisch“ oder „grafisch“) konkretisiert werden. Zugelassene Hilfsmittel dürfen zur Bearbeitung verwendet werden, sofern kein entsprechender Zusatz dem entgegensteht.

Die Verwendung eines Operators, der im Folgenden nicht genannt wird, ist möglich, wenn aufgrund der alltagssprachlichen Bedeutung dieses Operators in Verbindung mit der Aufgabenstellung davon auszugehen ist, dass die jeweilige Aufgabe im Sinne der Aufgabenstellung bearbeitet werden kann.

Operator	Erläuterung
angeben, nennen	Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung notwendig.
entscheiden	Für die Entscheidung ist keine Begründung notwendig.
beurteilen	Das zu fällende Urteil ist zu begründen.
beschreiben	Bei einer Beschreibung kommt einer sprachlich angemessenen Formulierung und ggf. einer korrekten Verwendung der Fachsprache besondere Bedeutung zu. Eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig.
erläutern	Die Erläuterung liefert Informationen, mithilfe derer sich z. B. das Zustandekommen einer grafischen Darstellung oder ein mathematisches Vorgehen nachvollziehen lassen.
deuten, interpretieren	Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.

Operator	Erläuterung
begründen, nachweisen, zeigen	Aussagen oder Sachverhalte sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
berechnen	Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen.
bestimmen, ermitteln	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
untersuchen	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
grafisch darstellen, zeichnen	Die grafische Darstellung bzw. Zeichnung ist möglichst genau anzufertigen.
skizzieren	Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie das im betrachteten Zusammenhang Wesentliche grafisch beschreibt.

A.2 Mathematische Schreibweisen

Analysis

Funktionen können auf viele verschiedene Weisen definiert werden. Es sind z. B. die folgenden Schreibweisen gängig:

- Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$.
- Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion $f : x \mapsto x^2$ mit dem Graphen G_f .
- Gegeben ist die Schar der in \mathbb{R} definierten Funktionen $f_a : x \mapsto a \cdot x^2$ mit $a \in \mathbb{R}$. Die zugehörigen Graphen werden mit G_a bezeichnet.

$\sum_{i=1}^n a_i$	Summe über alle a_i von $i = 1$ bis n
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	Grenzwert der Funktion f für x gegen ∞ , bzw. x_0
$f'(x_0)$	1. Ableitung von f an der Stelle x_0
$f''(x_0)$	2. Ableitung von f an der Stelle x_0
$f'''(x_0)$	3. Ableitung von f an der Stelle x_0
f', f'', f'''	erste, zweite, dritte Ableitungsfunktion von f
$\int_a^b f(x) dx$	Integral von a bis b über $f(x) dx$
$\int f(x) dx$	Integral über $f(x) dx$

Intervalle im Bereich der reellen Zahlen

$]a; b[$	offenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$[a; b]$	abgeschlossenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
$[a; b[$	halboffenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$]a; b]$	halboffenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Mengen und Mengenoperationen

$\{x \mid \dots\}$	Menge aller x , für die gilt \dots . So können z. B. Definitionsbereiche D angegeben sein.
$\{a; b; \dots\}$	Menge der Elemente $a; b; \dots$
\in, \notin	Element von, nicht Element von
\subset, \subseteq	echte Teilmenge von; Teilmenge von
$\emptyset, \{\}$	leere Menge
$A \cap B$	Schnittmenge (A geschnitten B)
$A \cup B$	Vereinigungsmenge (A vereinigt B)
$A \setminus B$	Differenzmenge (A ohne B)

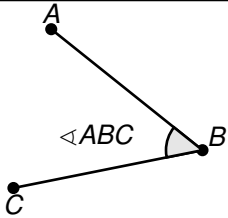
Zahlenbereiche

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{Q}	Menge der rationalen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_{>0}$	Menge der positiven reellen Zahlen (ohne Null)
$\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}_{\geq 0}$	Menge der positiven reellen Zahlen (mit Null)
$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	Menge der reellen Zahlen ohne Null
$[1; \infty[, \mathbb{R}_{\geq 1}$	Menge der reellen Zahlen größer gleich 1

Logik

\neg	nicht (Negation)
\wedge	und (Konjunktion, $A \wedge B$: die Aussage A und B)
\vee	oder auch (Disjunktion, $A \vee B$: die Aussage A oder B (oder beide))
\Leftrightarrow	logische Äquivalenz ($A \Leftrightarrow B$: Die Aussage folgt aus Aussage B und umgekehrt)
\Rightarrow	Implikation ($A \Rightarrow B$: Aus Aussage A folgt die Aussage B)

Geometrie

$\parallel; \perp$	parallel zu; senkrecht zu
AB	Gerade durch die Punkte A und B
\overline{AB}	Strecke mit den Endpunkten A und B , (Seite, Kante)
$\sphericalangle ABC$	Winkel zwischen den Schenkeln BA und BC , wobei im mathematisch positiven Drehsinn auf BC gedreht wird. 
$ \overline{AB} $	Länge der Strecke \overline{AB}
$\triangle ABC$	Dreieck ABC , (weitere mögliche Bezeichnungen sind Viereck $ABCD$ und Pyramide $ABCS$)
$P \in \overline{AB}$	Der Punkt P liegt auf der Strecke \overline{AB} .

Vektoren und Matrizen

\vec{AB}	Vektor von A nach B
$ \vec{AB} $	Betrag (Länge) des Vektors \vec{AB}
$L_{(m,n)}$	Matrix $L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \dots & l_{mn} \end{pmatrix}$ mit m Zeilen und n Spalten
$\vec{a} \circ \vec{b}$	Skalarprodukt der Vektoren \vec{a} und \vec{b}

Stochastik

$P_p^n (X \leq k)$	Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$ für eine Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p .
$B_{n;p}$ -verteilt	binomialverteilt mit den Parametern n und p
$P_A(B); P(B A)$	Die Wahrscheinlichkeit von B , falls A eingetreten ist.
$[\mu - 1,96\sigma; \mu + 1,96\sigma]$	Intervallschreibweise in der Stochastik

Griechisches Alphabet

Die Prüflinge müssen in der Lage sein, griechische Buchstaben in der Formelsprache für Winkel und Parameter als Symbole für die bezeichneten Objekte zu erkennen und in ihren Lösungsdarstellungen zu verwenden.

A.3 Aufgabenverzeichnis

Aufgabe	Titel	Herkunft
1, 2	Werbeaktion	Klausur unter Abitufhrbedingungen 13.12.2016
3, 4	Haus	Klausur unter Abiturbedingungen 13.12.2016
5, 6	Physiotherapie	Klausur unter Abiturbedingungen 13.12.2016
7, 12	Photovoltaik	Beispielsammlung 12/2016
8, 13	Planspiel	Klausur unter Abiturbedingungen 13.12.2016
9	Fluss	Abitur 03.05.2017
10	Flüssigkeit	Abitur 03.05.2017
11, 16	Murmelbahn	Beispielsammlung 07/2017
14	Wasserbecken	Abitur 03.05.2017
15	Gläser	Abitur 03.05.2017
17, 21	Designerentwurf	Beispielsammlung 12/2016
18, 22	One World Trade Center	Klausur unter Abiturbedingungen 13.12.2016
19	Pagode	Abitur 03.05.2017
20	Pyramide	Abitur 03.05.2017
23	Solarmodule	Abitur 03.05.2017
24	Zelt	Abitur 03.05.2017
25, 28	Wölfe	Abitur 03.05.2017
26, 27, 29, 30	Reptilien	Beispielsammlung 07/2017
31, 34	Möbelfabrik	Beispielsammlung 12/2016
32, 35	Triebwerke	Klausur unter Abiturbedingungen 13.12.2016
33	Smartphones	Abitur 03.05.2017
36	Samenkörner	Abitur 03.05.2017
37	Glutenunverträglichkeit	Abitur 03.05.2017