Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung

Schriftliche Abiturprüfung

Mathematik

Beispielaufgaben

Heft A

Impressum

Herausgeber:	Freie und Hansestadt Hamburg Behörde für Schule und Berufsbildung Hamburger Straße 31, 22083 Hamburg
Referat:	Mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Unterricht
Referatsleitung:	Monika Seiffert
Fachreferentin Mathematik:	Xenia Rendtel
Redaktion:	Xenia Rendtel Andreas Busse Manfred Bergunde

Internet: http://www.li.hamburg.de/publikationen/abiturpruefung/

Hamburg, am 26. Juli 2017

Inhaltsverzeichnis

Liebe Kolleginnen und Kollegen,
liebe Schülerinnen und Schüler,

die schriftlichen Abiturprüfungen im Fach Mathematik ab 2018 beziehen sich – wie im Jahr 2017 – auf die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife von 2012 und die zur Orientierung durch das IQB veröffentlichte Aufgabensammlung. Zur Implementation der Bildungsstandards Mathematik wurde in Hamburg der Rahmenplan Mathematik gymnasiale Oberstufe durch eine Anlage konkretisiert, die im Sommer 2015 veröffentlicht und im Frühjahr 2016 aktualisiert wurde[1]. Diese Anlage ist verbindliche Grundlage des Unterrichts und der Abiturprüfung.

Neu ab 2018 ist, dass die Schulen kursweise entscheiden können, ob Lineare Algebra oder Analytische Geometrie als Schwerpunkt der Prüfung gewählt werden soll.

Zur Vorbereitung auf die Abiturprüfungen ab 2018 werden zwei neu zusammengestellte Hefte mit Beispielaufgaben zur Verfügung gestellt:

Heft A: Beispielaufgaben für den Prüfungsteil A (hilfsmittelfrei)

Heft B: Beispielaufgaben für den Prüfungsteil B (mit WTR oder CAS)

Das hier vorliegende Heft A enthält Aufgaben zu allen drei mathematischen Sachgebieten, im Bereich Lineare Algebra/Analytische Geometrie zu beiden Schwerpunkten.

Schülerinnen und Schüler, die auf erhöhtem Anforderungsniveau arbeiten, sollten auch die Aufgaben bearbeiten, die für das grundlegende Anforderungsniveau erstellt wurden.
Dies gilt auch umgekehrt – mit Ausnahme weniger Teilaufgaben, die sich explizit auf Inhalte beziehen, die für das grundlegende Anforderungsniveau nicht gefordert sind.

Darüber hinaus werden in Kapitel 1 Übungsaufgaben für das erste Jahr der Studienstufe zur Verfügung gestellt, die aus der zentralen Klausur unter Abiturbedingungen vom 13.12.2016 stammen.

Zur Unterstützung der Prüfungsvorbereitung steht weiterhin die Aufgabensammlung Mathematik des IQB zur Verfügung unter https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik.

Dieses und weiteres Material finden Sie auch auf der Website des IfBQ[2].

Wir hoffen, Ihnen mit dieser Publikation eine geeignete Unterstützung für eine gezielte Vorbereitung der schriftlichen Abiturprüfung geben zu können.

T. Altenburg-Hack

Thorsten Altenburg-Hack, Landesschulrat

[1] siehe http://www.hamburg.de/bildungsplaene/4539524/start-gyo/
[2] siehe http://www.hamburg.de/abitur-2018/4883428/mathematik/

I Aufgaben

1 Übungsaufgaben für das erste Jahr der Studienstufe

1.1 Analysis

1.1.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

Aufgabengruppe 1

Aufgabe 1 **EH S. 62**

Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.

a) **Skizzieren** Sie in Abbildung 2 den Graphen von f'. **(2 BE)**

b) **Geben** Sie näherungsweise aus Abbildung 1 einen Wert für t **an**, sodass $\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ ist.
Begründen Sie Ihre Angabe. **(2 BE)**

c) **Geben** Sie **an**, wie sich der Graph von f ändern würde, wenn beim zugehörigen Funktionsterm 2 subtrahiert würde. **(1 BE)**

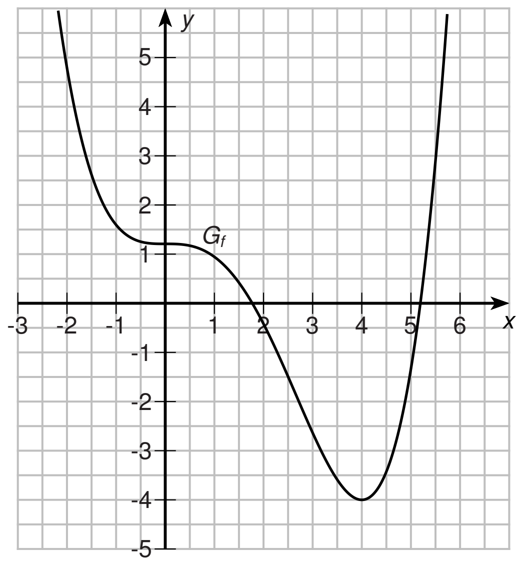


Abb. 1

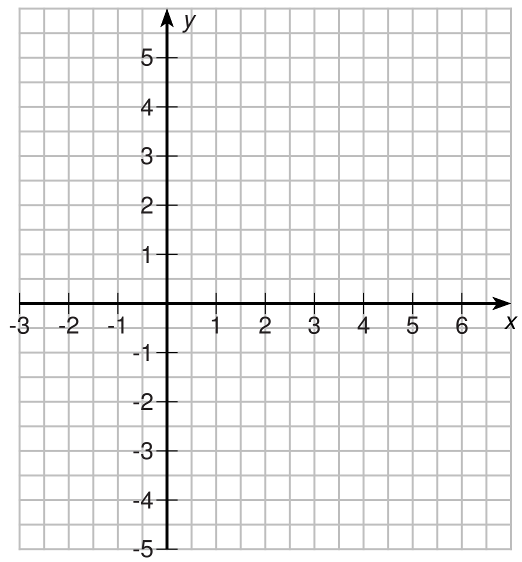


Abb. 2

Aufgabengruppe 2

Aufgabe 2 **EH S. 63**

Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades. Über ihre Ableitung liegen folgende Tabellenwerte vor:

x	-2	0	2	4
$f'(x)$	0	-3	0	9

a) **Entscheiden** Sie, ob die erste Ableitung außer bei $x = 2$ und bei $x = -2$ auch noch eine weitere Nullstelle haben kann. Begründen Sie Ihre Entscheidung. **(2 BE)**

b) **Begründen** Sie, dass die folgende Aussage falsch ist:

„Der Graph von f ist im gesamten Intervall $[2; 4]$ rechtsgekrümmt.“

(1 BE)

c) **Begründen** Sie, dass $f'(-4) = 9$ sein muss. **(2 BE)**

1.1.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

Aufgabengruppe 1

Aufgabe 3 **EH S. 64**

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit

$$f_a(x) = x^3 - 6a \cdot x^2 + (2a + 12a^2) \cdot x - 8a^3,$$

wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist.
Ihre Ableitungsfunktionen sind die Funktionen f_a' mit $f_a'(x) = 3x^2 - 12a \cdot x + (2a + 12a^2)$.
Als ganzrationale Funktion dritten Grades hat jede Funktion f_a genau einen Wendepunkt W_a.

a) **Bestätigen** Sie die Wendepunktkoordinaten $W_a(2a|4a^2)$. **(2 BE)**

b) **Bestätigen** Sie, dass jeder Wendepunkt W_a auf der Normalparabel $y = x^2$ liegt. **(1 BE)**

c) Die jeweilige Wendetangente ist die Tangente, die an den Graphen von f_a im Wendepunkt W_a angelegt wird.
Zeigen Sie, dass alle Wendetangenten Ursprungsgeraden sind. **(2 BE)**

Aufgabengruppe 2

Aufgabe 4 **EH S. 65**

Die Abbildung 3 zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades. Die Nullstellen der Funktion f sind der Reihe nach mit n_1 bis n_4 bezeichnet.

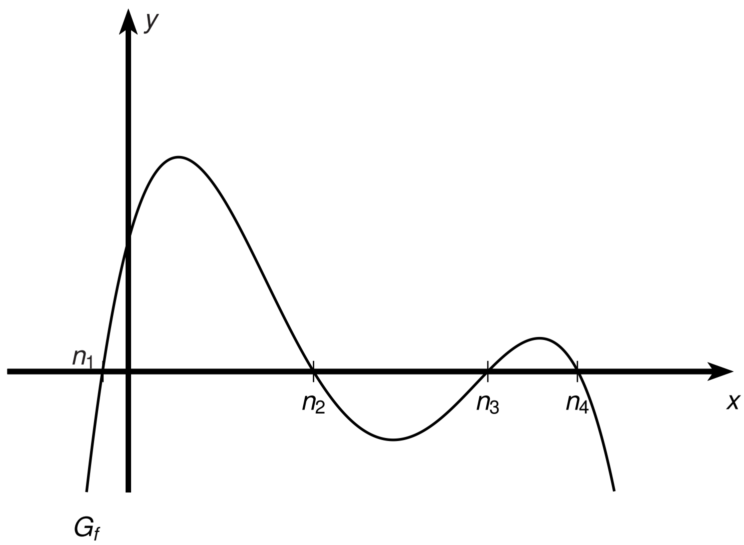


Abb. 3

a) **Zeichnen** Sie in Abbildung 3 eine Tangente ein, die G_f an zwei Stellen berührt. **(1 BE)**

b) Behauptung: Jede ganzrationale Funktion vierten Grades besitzt eine Tangente an ihren Graphen mit zwei Berührpunkten.
Widerlegen Sie die Behauptung. **(2 BE)**

c) **Skizzieren** Sie in Abbildung 4 den Graphen der Funktion u mit $u(x) = \sqrt{(f(x))^2}$. **(2 BE)**

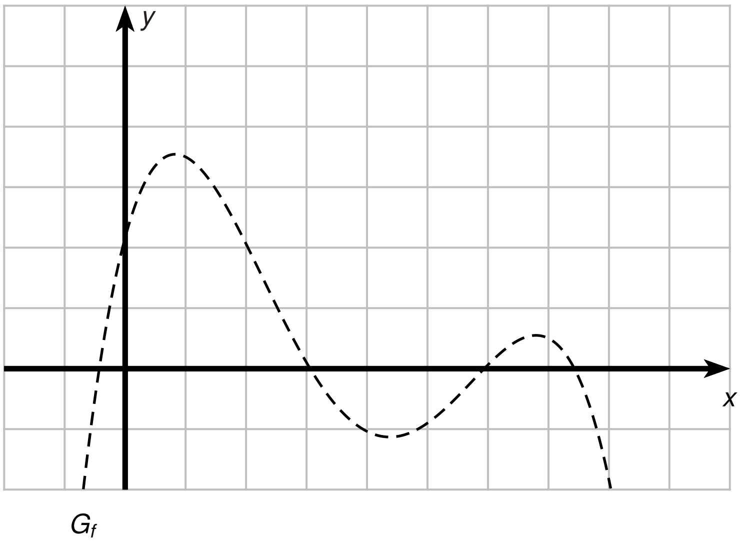


Abb. 4

1.2 Analytische Geometrie

1.2.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

Aufgabengruppe 1

Aufgabe 5 **EH S. 66**

Gegeben ist ein ebenes Viereck $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(6|-6|3)$, $C(7|2|7)$ und $D(1|8|4)$. Es gilt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) **Weisen** Sie **nach**:

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und
2. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$.

(2 BE)

b) **Entscheiden** Sie, ob das Viereck $ABCD$ bei A einen spitzen, rechten oder stumpfen Winkel hat. Begründen Sie Ihre Entscheidung. **(2 BE)**

c) **Nennen** Sie den exakten Fachbegriff für die besondere Form des Vierecks $ABCD$. **(1 BE)**

1.2.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

Aufgabengruppe 1

Aufgabe 6 EH S. 67

Gegeben sind die Punkte $A(0|0|0)$, $B(0|0|9)$, $C(4|-2|4)$ und $D(-2|4|4)$.

Folglich ist $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) **Bestätigen** Sie, dass $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}|$ gilt. **(1 BE)**

b) **Bestätigen** Sie, dass die Dreiecke ABC und ABD jeweils bei A den gleichen Winkel haben. **(2 BE)**

c) **Begründen** Sie, dass die Dreiecke ABC und ABD den gleichen Flächeninhalt haben. **(2 BE)**

1.3 Stochastik

1.3.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

Aufgabengruppe 1

Aufgabe 7 **EH S. 68**

Eine Musikschule bietet Kurse für Blasinstrumente (B) und für Tasteninstrumente (T) an. Die Kurse können als Einzelunterricht (E) oder als Gruppenunterricht (G) gebucht werden. Erfahrungsgemäß lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für die Auswahl bei einem neuen Kunden durch das nachfolgende Baumdiagramm beschreiben.

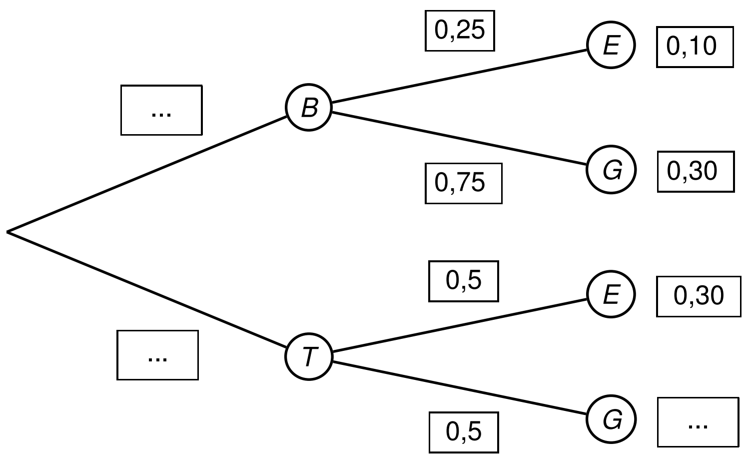


Abb. 5

a) **Ermitteln** Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass ein neuer Kunde

1. ein Blasinstrument,
2. ein Tasteninstrument

wählen wird. **(2 BE)**

Die monatlichen Kursgebühren für einen Kunden sind: Blasinstrument im Einzelunterricht 120 €, Tasteninstrument im Einzelunterricht 100 €, Gruppenunterricht generell 50 €.

b) **Berechnen** Sie den Erwartungswert für die Kursgebühr eines neuen Kunden. **(3 BE)**

1.3.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

Aufgabengruppe 1

Aufgabe 8 EH S. 69

Ein Großlieferant beliefert eine Supermarktkette mit abgepackten Zucchini. Seine Verpackungsmaschine stellt erfahrungsgemäß 4 % fehlerhafte Packungen her.
Alle hergestellten Packungen durchlaufen automatisch eine optische Kontrolle. Die optische Kontrolle hat folgende Eigenschaften:

- 90 % der fehlerhaften Packungen werden erkannt und aussortiert.
- Allerdings werden auch 15 % der fehlerfreien Packungen aussortiert.

Diese relativen Häufigkeiten werden für das Weitere als Wahrscheinlichkeiten gedeutet. In der folgenden Vierfeldertafel sind einige Wahrscheinlichkeiten notiert.

	aussortiert (+)	nicht aussortiert (−)	Summe
fehlerhaft (f)	0,036	...	0,04
fehlerfrei ($\overline{f}$)	0,144	...	0,96
Summe	0,180		1

a) **Berechnen** Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine aussortierte Packung tatsächlich fehlerhaft ist. **(1 BE)**

Nach längerer Betriebsdauer wird beobachtet, dass, abweichend vom Ergebnis in Aufgabenteil a), unter den aussortierten Packungen 40 % fehlerhafte sind. Es wird angenommen, dass dieser veränderte Prozentsatz allein durch einen veränderten Anteil fehlerhafter Packungen in der Herstellung zu erklären ist, dass aber die oben genannten Eigenschaften der optischen Kontrolle erhalten bleiben.

b) **Bestimmen** Sie unter dieser Annahme den Anteil fehlerhafter Packungen in der Herstellung, der zu dem neuen Prozentsatz von 40 % geführt haben muss. **(4 BE)**

2 Analysis

2.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

2.1.1 Aufgabengruppe 1

Aufgabe 9 **EH S. 70**

Die Abbildung 6 zeigt den Graphen einer ganzrationalen Funktion f.

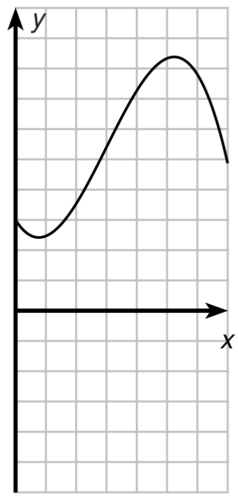


Abb. 6

a) **Skizzieren** Sie in der Abbildung den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f. **(3 BE)**

b) **Begründen** Sie, dass der Grad der Funktion f mindestens drei ist. **(2 BE)**

Aufgabe 10 **EH S. 71**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a) **Bestimmen** Sie die Nullstellen der Funktion f. **(2 BE)**

b) **Zeigen** Sie, dass die Funktionsgleichung $t(x) = -e \cdot x - 1$ die Tangente an den Graphen von f bei $x = -1$ beschreibt. **(3 BE)**

Aufgabe 11 **EH S. 71**

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f, g und h durch

$f(x) = x^2 + 2,$
$g(x) = (x-1)^2 + 1$ und
$h(x) = x^3 - 2x^2 + 2.$

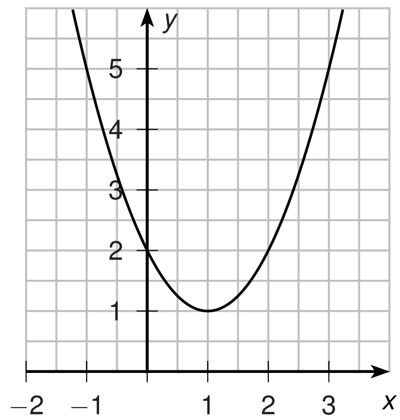


Abb. 7

a) Die Abbildung 7 zeigt den Graphen einer der drei Funktionen.
Geben Sie **an**, um welche Funktion es sich handelt.
Begründen Sie, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt. **(3 BE)**

b) **Bestimmen** Sie die Gleichung der Tangente, die den Graphen von h bei $x = 0$ berührt. **(2 BE)**

Aufgabe 12 **EH S. 71**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -2x^2 + 4x$, wobei $x \in \mathbb{R}$ gilt.

a) **Berechnen** Sie die Nullstellen von f. **(2 BE)**

b) Sei nun $a > 0$.
Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den $\int_0^a f(x)\,dx = 0$ gilt. **(3 BE)**

Aufgabe 13 **EH S. 72**

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto x^3 + 2x^2$.

a) **Bestätigen** Sie, dass $x_1 = -2$ und $x_2 = 0$ die einzigen Nullstellen von f sind. **(2 BE)**

b) **Berechnen** Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt. **(3 BE)**

Aufgabe 14 **EH S. 72**

Die Abbildung 8 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x}$.
Für die erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(x) = -e^{-\frac{1}{2}x}$.

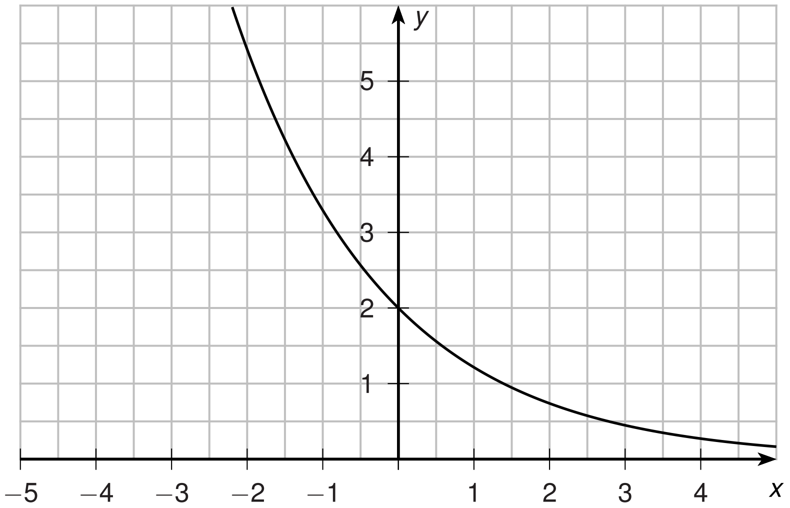


Abb. 8

a) **Bestimmen** Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f in seinem Schnittpunkt mit der y-Achse. **(2 BE)**

b) **Zeichnen** Sie in die Abbildung 8 ein Flächenstück ein, das vom Graphen von f, der x-Achse, der y-Achse sowie einer zur y-Achse parallelen Geraden eingeschlossen wird und dessen Flächeninhalt etwa 1,5 beträgt.

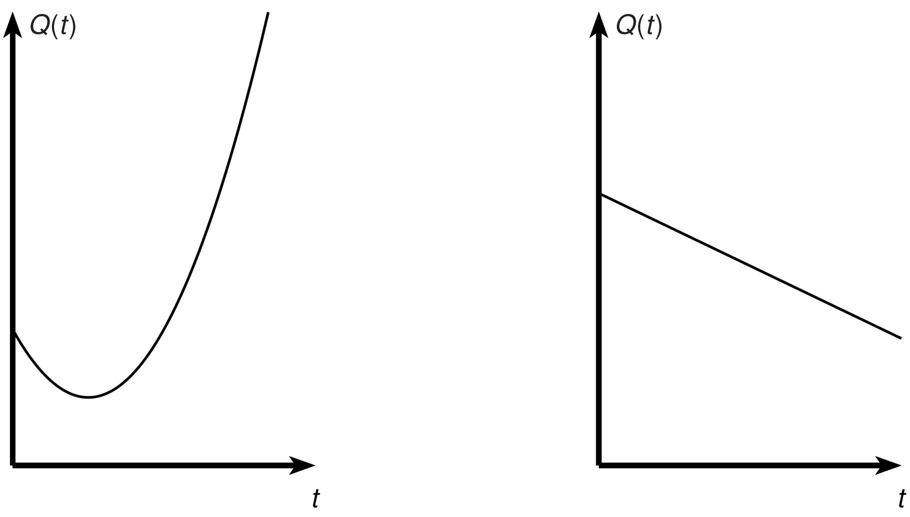
Geben Sie einen Term **an**, mit dem der Inhalt des von Ihnen eingezeichneten Flächenstücks berechnet werden kann. **(3 BE)**

Aufgabe 15 **EH S. 73**

Eine Windkraftanlage liefert elektrische Ladung an einen Akku. Außerdem wird dem Akku durch eine Wasserpumpe elektrische Ladung entzogen.
Die im Akku enthaltene Ladungsmenge wird in Abhängigkeit von der Zeit t ($t \in \mathbb{R}^+$) innerhalb des Beobachtungszeitraums $0 \leq t \leq 4$ modellhaft durch eine Funktion Q beschrieben.
Es gilt $Q'(t) = 10 \cdot t - 5$.

a) **Geben** Sie für den Beobachtungszeitraum einen allgemeinen Term für $Q(t)$ **an.** **(1 BE)**

b) **Wählen** Sie aus, welche der folgenden Graphiken schematisch die Funktion Q im Zeitraum $0 \leq t \leq 4$ beschreibt.
Begründen Sie für die nicht ausgewählte Graphik, warum sie nicht die Funktion Q beschreibt.



I II

(2 BE)

c) Am Ende des Beobachtungszeitraums enthält der Akku die Ladungsmenge $Q(4) = 80$, als der Wind aussetzt aus und der Akku nicht mehr geladen wird. Die Wasserpumpe läuft unverändert weiter und entnimmt dem Akku gleichmäßig 5 Mengeneinheiten der Ladungsmenge pro Zeiteinheit.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Akku keine elektrische Ladung mehr enthält, wenn es windstill bleibt. **(2 BE)**

2.1.2 Aufgabengruppe 2

Aufgabe 16 **EH S. 73**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -6x^2 + 12x + 18$, $x \in \mathbb{R}$.
Die Abbildung 9 zeigt den Graphen von f, der durch die Punkte $H(1|24)$ und $N(3|0)$ verläuft.

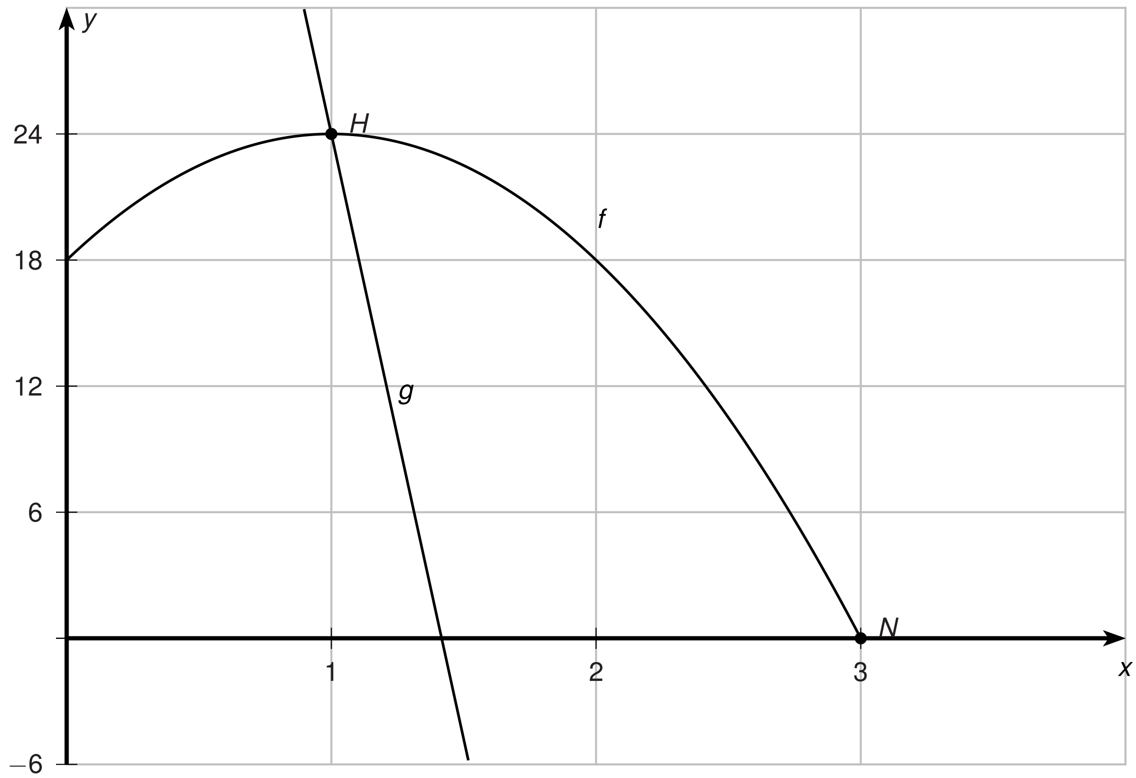


Abb. 9

a) **Zeigen** Sie, dass $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 22$ gilt. **(2 BE)**

b) Die Fläche, die der Graph von f im ersten Quadranten mit den Koordinatenachsen einschließt, hat den Inhalt 54. Eine Gerade g verläuft durch den Punkt H und hat die Steigung $m = -57{,}6$.
Zeigen Sie, dass die Gerade g die Fläche, die der Graph von f im ersten Quadranten mit den Koordinatenachsen einschließt, in zwei Teilflächen gleichen Inhalts teilt. **(3 BE)**

Aufgabe 17 **EH S. 74**

Die Abbildung 10 zeigt den Graphen einer Funktion f. Mit x_1 bis x_6 sind diejenigen Stellen gekennzeichnet, an denen der Graph von f besondere Punkte hat (Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte).

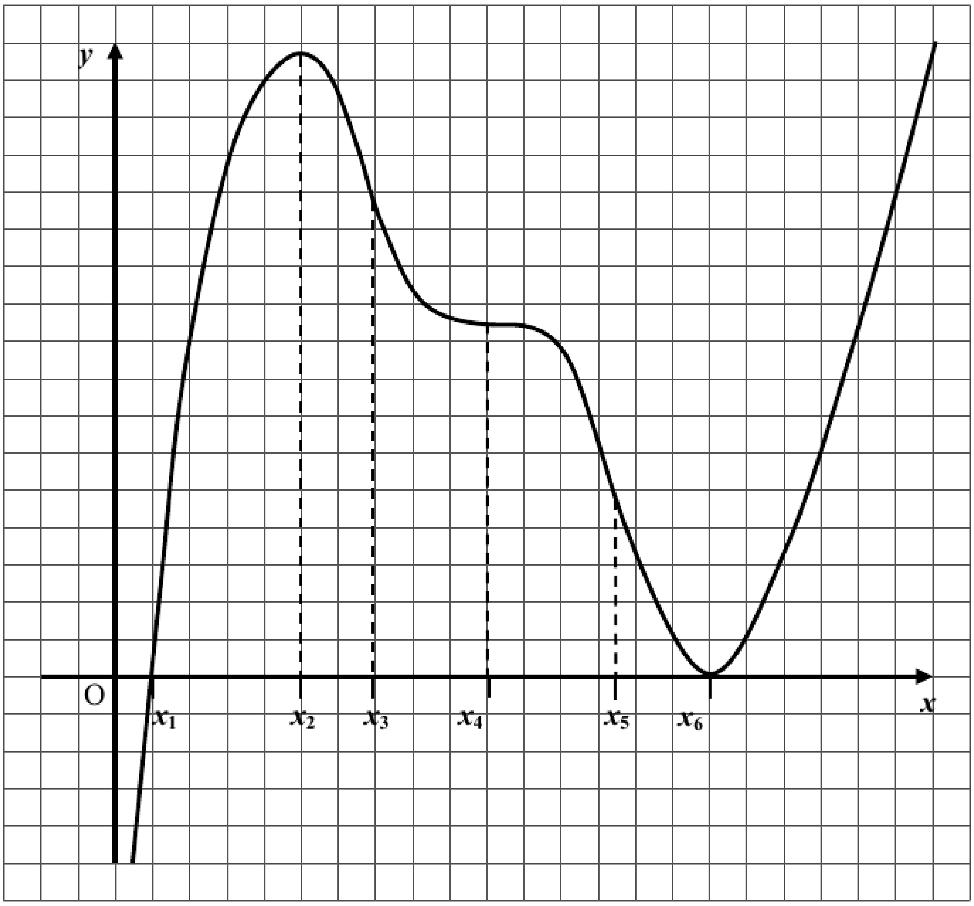


Abb. 10

a) Die Funktion F sei eine Stammfunktion der Funktion f.
Begründen Sie, dass der Graph von F im dargestellten Bereich genau einen Tiefpunkt hat. **(2 BE)**

b) **Skizzieren** Sie in die Darstellung hinein schematisch den Graphen der ersten Ableitung f' im Bereich $x_2 \le x \le x_6$. **(3 BE)**

Aufgabe 18 **EH S. 74**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 + x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$. Ihr Graph hat genau einen Wendepunkt.

a) **Weisen** Sie nach, dass der Wendepunkt die Koordinaten $(0|1)$ hat. **(3 BE)**

Es werden Faktoren a und b vor den Potenzen von x eingeführt:

$$f_{a,b}(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x + 1 \quad (a \neq 0)$$

b) **Begründen** Sie, dass a und b keinen Einfluss auf die Lage des Wendepunktes haben. **(2 BE)**

Aufgabe 19 **EH S. 75**

a) Die Abbildung zeigt die Graphen einer Funktion und deren erster Ableitungsfunktion.

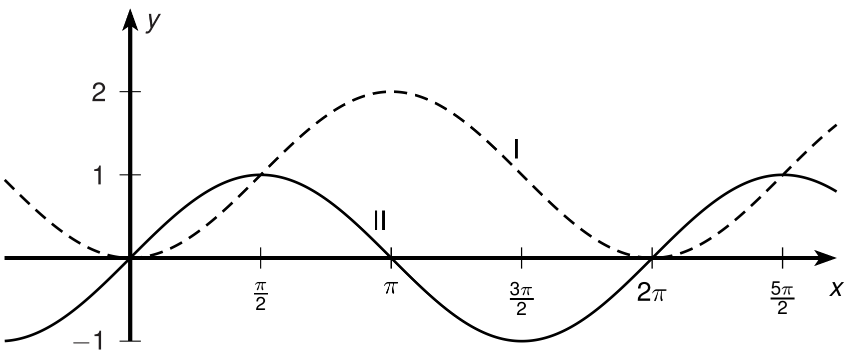


Abb. 11

Geben Sie **an**, welcher der beiden Graphen I und II die Ableitungsfunktion darstellt, und **begründen** Sie Ihre Angabe. **(2 BE)**

b) Für einen Wert von k mit $k \in \mathbb{R}^+$ wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = k \cdot \sin(x)$ betrachtet. Für $0 \leq x \leq \pi$ schließt der Graph von f mit der x-Achse ein Flächenstück mit dem Inhalt $\frac{1}{2}$ ein.
Bestimmen Sie den Wert von k. **(3 BE)**

Aufgabe 20 **EH S. 75**

Eine Windkraftanlage liefert elektrische Ladung an einen Akku. Außerdem wird dem Akku durch eine Wasserpumpe elektrische Ladung entzogen.
Die im Akku enthaltene Ladungsmenge wird in Abhängigkeit von der Zeit t ($t \in \mathbb{R}^+$) innerhalb des Beobachtungszeitraums $0 \leq t \leq 4$ modellhaft durch eine Funktion Q beschrieben. Diese ist zunächst monoton fallend, nimmt dann ein Minimum an und steigt danach monoton.
Es gilt $Q'(t) = 10 \cdot t - 5$.

a) **Bestimmen** Sie den Zeitpunkt im Beobachtungszeitraum, zu dem $Q(t)$ minimal ist. **(2 BE)**

b) Zu Beobachtungsbeginn enthält der Akku die elektrische Ladungsmenge $Q(0) = 20$.
Geben Sie eine Gleichung der Form

$$\int_{...}^{...} ...\, \mathrm{dt} = ...$$

an, mit der sich der Zeitpunkt t^* berechnen lässt, zu dem der Akku die elektrische Ladungsmenge $Q(t^*) = 50$ enthält.
Erläutern Sie Ihre angegebene Gleichung. **(3 BE)**

2.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

2.2.1 Aufgabengruppe 1

Aufgabe 21 **EH S. 76**

Die Abbildung 12 zeigt den Graphen G_f einer für $-1 \leq x \leq 3$ mit $x \in \mathbb{R}$ definierten Funktion f, die bei $x = -1$, $x = 1$ und $x = 3$ Nullstellen besitzt.
Die Funktion F mit $F(x) = -\frac{1}{6} \cdot \left(\sqrt{-x^2 + 2x + 3}\right)^3$ ist eine Stammfunktion von f.

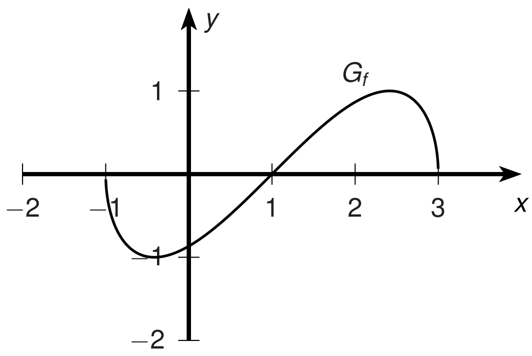


Abb. 12

a) **Begründen** Sie, dass die Funktion H mit $H(x) = -\frac{1}{6} \cdot \left(\sqrt{-x^2 + 2x + 3}\right)^3 + 1$ ebenfalls eine Stammfunktion von f ist. **(1 BE)**

b) **Begründen** Sie, dass der Wert des Integrals $\int_0^3 f(x)\,dx$ nicht mit dem Inhalt der Fläche übereinstimmt, die für $0 \leq x \leq 3$ zwischen G_f und der x-Achse liegt. **(2 BE)**

c) **Berechnen** Sie den Inhalt der Fläche, die G_f im ersten Quadranten mit der x-Achse einschließt. **(2 BE)**

Aufgabe 22 **EH S. 76**

Die Abbildung 13 zeigt den Graphen einer ganzrationalen Funktion f.

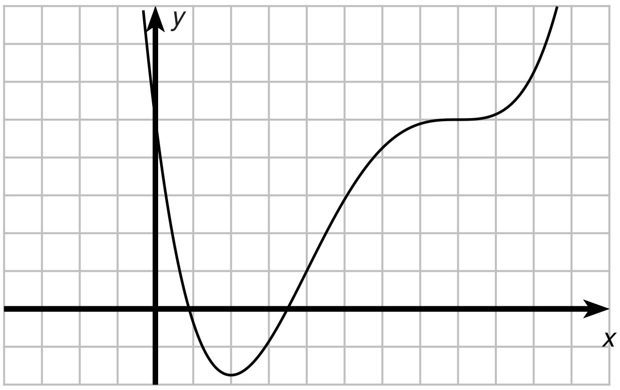


Abb. 13

a) **Skizzieren** Sie in der Abbildung den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f. **(3 BE)**

b) **Begründen** Sie, dass der Grad der Funktion mindestens vier ist. **(2 BE)**

Aufgabe 23 **EH S. 77**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^x \cdot \left(2 \cdot x + x^2\right) \quad (x \in \mathbb{R})$.

a) **Bestimmen** Sie die Nullstellen der Funktion f. **(2 BE)**

b) **Zeigen** Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = x^2 \cdot e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ eine Stammfunktion von f ist.
Geben Sie eine Gleichung einer weiteren Stammfunktion G von f **an**, für die $G(1) = 2e$ gilt.
(3 BE)

Aufgabe 24 **EH S. 77**

Für jeden Wert von a ($a \in \mathbb{R}$) ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = -x^2 + a \quad (x \in \mathbb{R})$.

a) **Begründen** Sie mithilfe der Lage des Graphen von f_1 im Koordinatensystem, dass $\int_{-1}^{1} f_1(x)\,\mathrm{dx} > 0$ gilt. **(2 BE)**

b) **Bestimmen** Sie denjenigen Wert von a, für den $\int_{-1}^{1} f_a(x)\,\mathrm{dx} = 0$ gilt. **(3 BE)**

Aufgabe 25 **EH S. 78**

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f, g und h durch

$f(x) = x^2 - x + 1$,
$g(x) = x^3 - x + 1$ und
$h(x) = x^4 + x^2 + 1$.

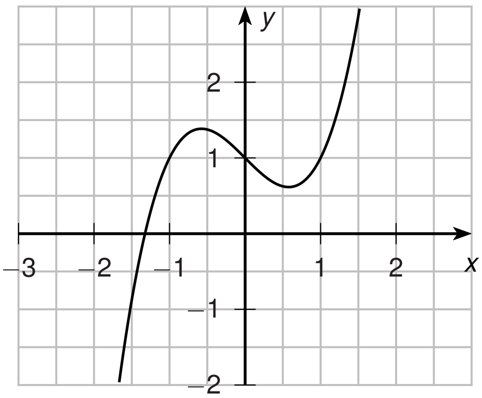


Abb. 14

a) Die Abbildung 14 zeigt den Graphen einer der drei Funktionen.
Geben Sie **an**, um welche Funktion es sich handelt.
Begründen Sie, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt. **(3 BE)**

b) Die erste Ableitungsfunktion von h ist h'.
Bestimmen Sie den Wert von $\int_{0}^{1} h'(x)\,\mathrm{dx}$. **(2 BE)**

Aufgabe 26 **EH S. 78**

Für jeden Wert von a ($a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) ist eine Funktion f_a durch

$$f_a(x) = a \cdot x^6 - x^4 \quad (x \in \mathbb{R})$$

gegeben.

a) **Bestimmen** Sie diejenigen Werte von a, für die f_a mehr als eine Nullstelle hat. **(3 BE)**

b) Für genau einen Wert von a hat f_a an der Stelle $x = 1$ ein Minimum.
Bestimmen Sie diesen Wert von a. **(2 BE)**

Aufgabe 27 **EH S. 78**

Gegeben sind die Funktionen f_a mit $f_a(x) = -a \cdot x \cdot (x - a)$, wobei $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt.

a) **Geben** Sie die Nullstellen der Funktionen f_a **an.** **(1 BE)**

b) **Bestimmen** Sie denjenigen Wert von a, für den $\int_0^a f_a(x)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}$ gilt. **(4 BE)**

Aufgabe 28 **EH S. 79**

Die Abbildung 15 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.

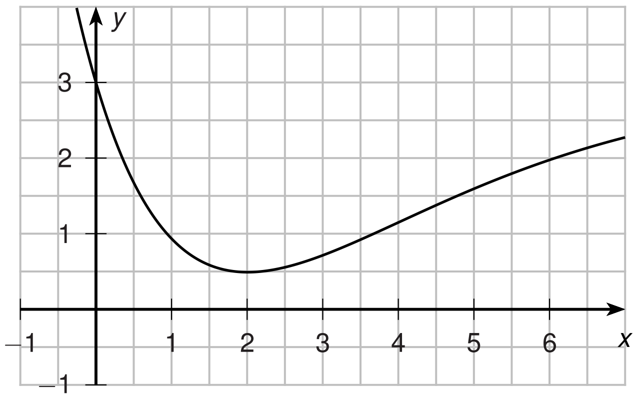


Abb. 15

a) **Bestimmen** Sie mithilfe der Abbildung 15 einen Näherungswert für $\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$. **(2 BE)**

Die Funktion F ist die in $\mathbb{R}$ definierte Stammfunktion von f mit $F(3) = 0$.

b) **Geben** Sie mithilfe der Abbildung 15 einen Näherungswert für die Ableitung von F an der Stelle $x = 2$ **an.** **(1 BE)**

c) **Zeigen** Sie, dass $F(b) = \int_3^b f(x)\,\mathrm{d}x$ mit $b \in \mathbb{R}$ gilt. **(2 BE)**

Aufgabe 29 **EH S. 79**

Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) **Ermitteln** Sie die Nullstelle der Funktion f. **(2 BE)**

b) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck.
Weisen Sie **nach**, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist. **(3 BE)**

Aufgabe 30 **EH S. 80**

An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen pro Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen pro Kubikmeter zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t) = 3t^2 - 60t + 500$ mit $t \in IR$, $0 \leq t \leq 10$, beschrieben werden.

a) **Bestimmen** Sie die mittlere Änderung der Anzahl der Pollen pro Kubikmeter und Stunde während der ersten beiden Stunden der Messung. **(3 BE)**

b) **Ermitteln** Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane zeitliche Änderung der Anzahl der Pollen pro Kubikmeter und Stunde -30 beträgt. **(2 BE)**

Aufgabe 31 **EH S. 80**

Eine Windkraftanlage liefert elektrische Ladung an einen Akku. Außerdem wird dem Akku durch eine Wasserpumpe elektrische Ladung entzogen.
Die im Akku enthaltene Ladungsmenge wird in Abhängigkeit von der Zeit t ($t \in \mathbb{R}^+$) innerhalb des Beobachtungszeitraums $0 \leq t \leq 4$ modellhaft durch eine Funktion Q beschrieben.

a) Für den Beobachtungszeitraum ergibt sich $Q(t) = 5 \cdot t^2 - 5 \cdot t + C$.
Interpretieren Sie die Bedeutung von C im Sachkontext. **(1 BE)**

b) Die Ladungsmenge im Akku zum Zeitpunkt $t = \frac{1}{2}$ beträgt $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 18\frac{3}{4}$.
Am Ende des Beobachtungszeitraums setzt der Wind aus, der Akku wird nicht mehr geladen. Die Wasserpumpe läuft unverändert weiter und entnimmt dem Akku gleichmäßig 5 Mengeneinheiten der Ladungsmenge pro Zeiteinheit.
Bestimmen Sie die Zeitdauer bis zur vollständigen Entladung des Akkus, wenn es windstill bleibt. **(4 BE)**

2.2.2 Aufgabengruppe 2

Aufgabe 32 **EH S. 80**

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = -6x^2 + 12x + 18, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Abbildung 16 zeigt den Graphen von f, der durch die Punkte $H(1|24)$ und $N(3|0)$ verläuft.

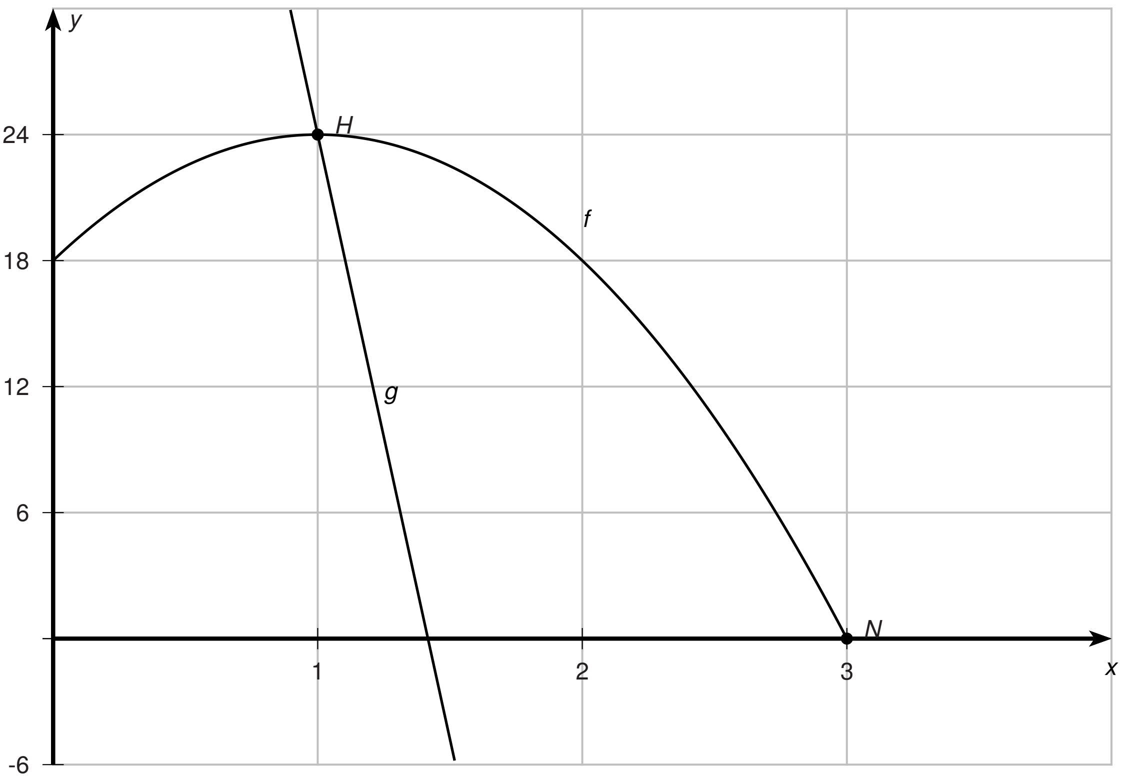


Abb. 16

a) **Zeigen** Sie, dass $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 22$ gilt. **(2 BE)**

b) Die Fläche, die der Graph von f im ersten Quadranten mit den Koordinatenachsen einschließt, hat den Inhalt 54. Eine Gerade g, die durch den Punkt H verläuft, teilt diese Fläche in zwei Teilflächen gleichen Inhalts.
Bestimmen Sie rechnerisch die Stelle, an der die Gerade g die x-Achse schneidet. **(3 BE)**

Aufgabe 33 **EH S. 81**

Die Abbildung 17 zeigt den Graphen einer Funktion f.

a) **Beschreiben** Sie für $a \leq x \leq b$ den Verlauf des Graphen einer Stammfunktion von f. **(2 BE)**

b) **Skizzieren** Sie in der Abbildung den Graphen einer Stammfunktion von f im gesamten dargestellten Bereich. **(3 BE)**

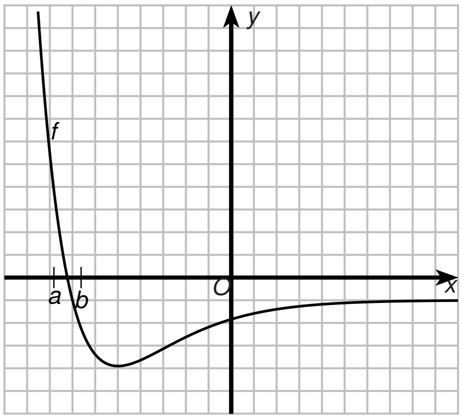


Abb. 17

Aufgabe 34 **EH S. 82**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6$ ($x \in \mathbb{R}$).

a) **Weisen** Sie **nach**, dass der Wendepunkt des Graphen von f auf der Geraden mit der Gleichung $y = x - 2$ liegt. **(3 BE)**

b) Der Graph von f wird verschoben. Der Punkt $(2\,|\,0)$ des Graphen der Funktion f besitzt nach der Verschiebung die Koordinaten $(3\,|\,2)$. Der verschobene Graph gehört zu einer Funktion h.
Geben Sie eine Gleichung von h **an**. **(2 BE)**

Aufgabe 35 **EH S. 82**

Für jeden Wert von a ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) ist die Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = a \cdot e^{a+x}$ ($x \in \mathbb{R}$). Die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(-1|f_a(-1))$ wird mit t_a bezeichnet.

a) **Weisen** Sie **nach**, dass für jeden Wert von a die Tangente t_a durch die Gleichung $y = a \cdot e^{a-1} \cdot x + 2 \cdot a \cdot e^{a-1}$ beschrieben werden kann. **(3 BE)**

b) Für jeden Wert von a schließen die Tangente t_a und die beiden Koordinatenachsen ein Dreieck ein.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von a. **(2 BE)**

Aufgabe 36 **EH S. 83**

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 12x$. Die Abbildung 18 zeigt den Graphen von f sowie dessen Hochpunkt $H(2|16)$.

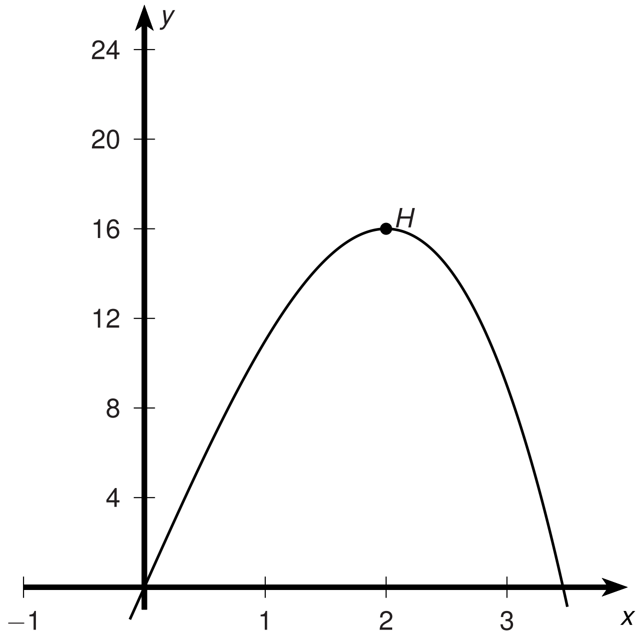


Abb. 18

a) Der Graph von f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ schließen für $0 \leq x \leq 2$ eine Fläche ein.
Zeigen Sie, dass diese Fläche den Inhalt 20 besitzt. **(2 BE)**

b) Die Gerade g verläuft durch den Punkt H und besitzt eine negative Steigung. Der Graph von f, die y-Achse und die Gerade g schließen für $0 \leq x \leq 2$ eine Fläche mit dem Inhalt 20 ein.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden g mit der y-Achse. **(3 BE)**

Aufgabe 37 **EH S. 84**

Eine Windkraftanlage liefert elektrische Ladung an einen Akku. Außerdem wird dem Akku durch eine Wasserpumpe elektrische Ladung entzogen.
Die im Akku enthaltene Ladungsmenge wird in Abhängigkeit von der Zeit t ($t \in \mathbb{R}^+$) innerhalb des Beobachtungszeitraums $0 \leq t \leq 4$ modellhaft durch eine Funktion Q beschrieben.

a) Für den Beobachtungszeitraum ist $Q(t) = 5 \cdot t^2 - 5 \cdot t + C$. Es ist $Q(0) = 20$.
Geben Sie C **an.** **(1 BE)**

b) **Interpretieren** Sie die Gleichung $\int\limits_0^T Q'(t)\,\mathrm{d}t = 0$ für $T \in [0; 4]$ im Sachkontext und **lösen** Sie die Gleichung. **(4 BE)**

Aufgabe 38 **EH S. 85**

Gegeben sind die Graphen der beiden auf $\mathbb{R}^+$ definierten Funktionen f und g mit

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

und

$$g(x) = \frac{1}{x^2}.$$

In Abbildung 19 sind die beiden Graphen dargestellt, ihr einziger Schnittpunkt ist (1|1).

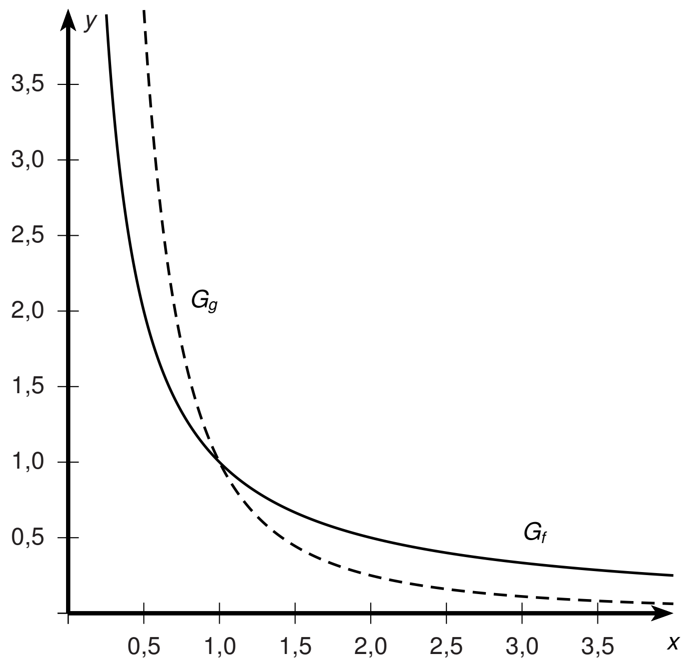


Abb. 19

Es gibt mindestens einen Wert $a > 1$, für den gilt: $\int_1^a (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{e}$

a) Begründen Sie, dass a eindeutig bestimmt ist. **(2 BE)**

b) Ermitteln Sie a. **(3 BE)**

3 Analytische Geometrie

3.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

3.1.1 Aufgabengruppe 1

Aufgabe 39 **EH S. 86**

Betrachtet wird der abgebildete Würfel *ABCDEFGH*. Die Eckpunkte *D*, *E*, *F* und *H* dieses Würfels besitzen in einem kartesischen Koordinatensystem die folgenden Koordinaten:
$D(0\,|0\,|-2\,)$, $E(2\,|0\,|0\,)$, $F(2\,|2\,|0\,)$ und $H(0\,|0\,|0\,)$.

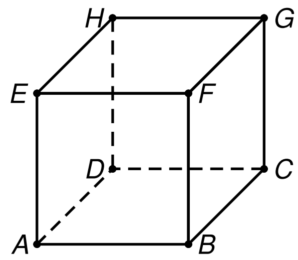


Abb. 20

a) **Zeichnen** Sie in die Abbildung 20 die Koordinatenachsen ein und bezeichnen Sie diese.
Geben Sie die Koordinaten des Punktes *A* **an**. **(2 BE)**

b) **Zeigen** Sie, dass der Punkt $P(1{,}5|1{,}5|-0{,}5)$ auf der Geraden liegt, welche durch die Punkte *F* und *D* geht. **(3 BE)**

Aufgabe 40 **EH S. 87**

Gegeben ist das Quadrat *ABCD* mit $A(3|3|4)$, $B(6|7|4)$, $C(2|10|4)$ und $D(-1|6|4)$.
Das Quadrat liegt in der Ebene mit der Gleichung $z = 4$.

a) **Weisen** Sie nach, dass das Quadrat den Flächeninhalt 25 besitzt. **(2 BE)**

b) Es gibt Punkte *S*, für die die Pyramide *ABCDS* das Volumen 50 hat.
Bestimmen Sie die *z*-Koordinate eines dieser Punkte. **(3 BE)**

Aufgabe 41 **EH S. 87**

Gegeben sind die Punkte $A\,(-2|1|-2)$, $B\,(1|2|-1)$ und $C\,(1|1|4)$ sowie für eine reelle Zahl d der Punkt $D\,(d|1|4)$.

a) **Zeigen** Sie, dass A, B und C Eckpunkte eines Dreiecks sind, und **geben** Sie eine Gleichung der Ebene **an**, in der dieses Dreieck liegt. **(3 BE)**

b) Das Dreieck ABD ist im Punkt B rechtwinklig.
Ermitteln Sie den Wert von d. **(2 BE)**

3.1.2 Aufgabengruppe 2

Aufgabe 42 **EH S. 87**

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

$$2 \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

a) **Bestimmen** Sie r. **(2 BE)**

b) Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|4)$, $B(-4|0|6)$ und $C(3|-10|8)$ im kartesischen Koordinatensystem.
Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist mit rechtem Winkel in B. **(3 BE)**

Aufgabe 43 **EH S. 88**

Gegeben sind der Punkt $P(-3|2|1)$, die Gerade $g : \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ sowie für eine reelle Zahl a der Punkt $Q(0|a|0)$. Die Strecke $\overline{PQ}$ steht senkrecht zu g.

a) **Bestimmen** Sie den Wert von a. **(2 BE)**

b) Zwei Werte r_1 und r_2 des Parameters r liefern die Ortsvektoren zweier Punkte R_1 und R_2 der Geraden g.
Geben Sie alle Wertepaare $(r_1; r_2)$ an, für die R_1 und R_2 den gleichen Abstand vom Punkt Q haben.
Begründen Sie Ihre Angabe. **(3 BE)**

Aufgabe 44 **EH S. 89**

Gegeben sind die Punkte $A(-4|5|2)$, $B(8|-1|14)$ und $C(-2|9|4)$. Sie bestimmen eindeutig eine Ebene ε.

a) Der Punkt $D(-14|15|-8)$ bildet mit A, B und C ein Parallelogramm $ABCD$.
S ist der Schnittpunkt der Parallelogrammdiagonalen.
Bestimmen Sie den Vektor $\overrightarrow{AS}$. **(2 BE)**

b) Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist $M(2|2|8)$.
Zur Strecke $\overline{AB}$ wird in der Ebene ε ein Thaleskreis geschlagen.
Zeigen Sie, dass C auf diesem Thaleskreis liegt. **(3 BE)**

3.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

3.2.1 Aufgabengruppe 1

Aufgabe 45 **EH S. 90**

Gegeben sind die Punkte $A\,(-1|1|4)$, $B\,(-3|5|6)$ und $C_t\,(-2+t|3|5+t)$ mit $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$.

a) **Zeigen** Sie, dass jedes der Dreiecke ABC_t gleichschenklig ist. **(3 BE)**

b) **Bestimmen** Sie diejenigen Werte von t, für die das jeweils zugehörige Dreieck ABC_t gleichseitig ist. **(2 BE)**

Aufgabe 46 **EH S. 90**

Gegeben sind die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$ und die Geraden

$h_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} -a \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot a + 3 \\ 2 \\ 1 + a \end{pmatrix}$ $(s \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R})$.

a) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den die Richtungsvektoren von g und h_a zueinander senkrecht sind. **(2 BE)**

b) Weisen Sie nach, dass sich für $a = -2$ die Geraden g und h_a schneiden. **(3 BE)**

Aufgabe 47 **EH S. 91**

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c_t} = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix}$ spannen für jeden Wert von t mit $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ einen Körper auf. Die Abbildung 21 zeigt den Sachverhalt beispielhaft für einen Wert von t.

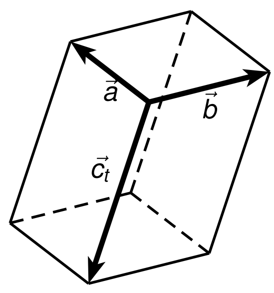


Abb. 21

a) **Zeigen** Sie, dass die aufgespannten Körper Quader sind. **(2 BE)**

b) **Bestimmen** Sie diejenigen Werte von t, für die der jeweils zugehörige Quader das Volumen 15 besitzt. **(3 BE)**

Aufgabe 48 **EH S. 91**

Die Abbildung 22 zeigt ein gerades Prisma *ABCDEF* mit $A(0|0|0)$, $B(8|0|0)$, $C(0|8|0)$ und $D(0|0|4)$.

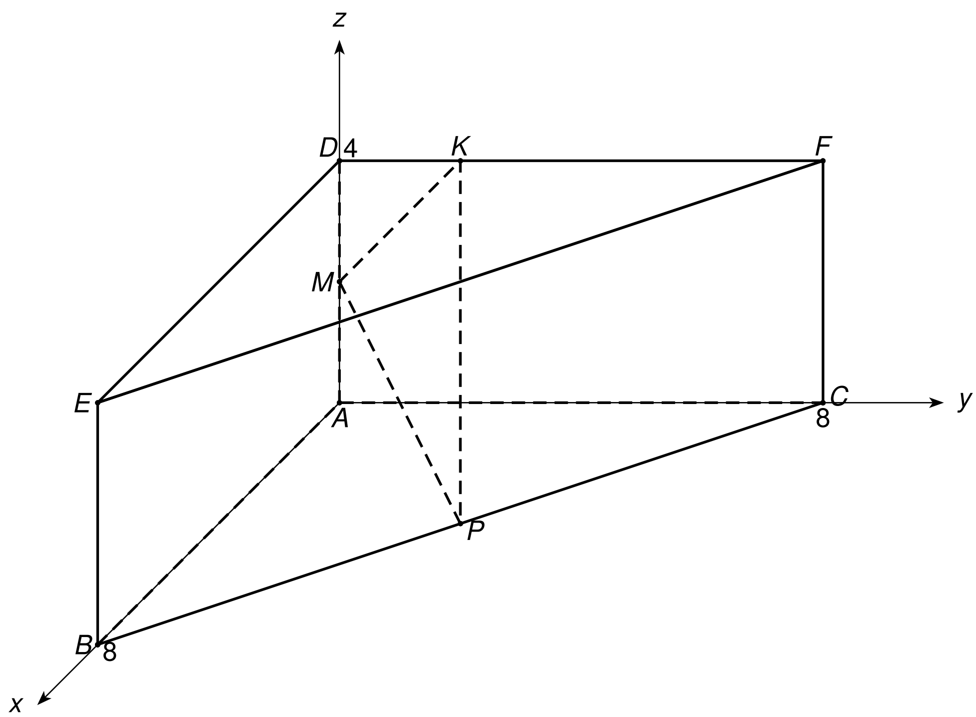


Abb. 22

a) **Bestimmen** Sie den Abstand der Eckpunkte B und F. **(2 BE)**

b) Die Punkte M und P sind die Mittelpunkte der Kanten $\overline{AD}$ bzw. $\overline{BC}$.
Der Punkt $K(0|y_K|4)$ liegt auf der Kante $\overline{DF}$.
Bestimmen Sie y_K so, dass das Dreieck *KMP* in M rechtwinklig ist. **(3 BE)**

Aufgabe 49 **EH S. 92**

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(0|1|2)$ und $B(2|5|6)$.

a) **Zeigen** Sie, dass die Punkte A und B den Abstand 6 haben.
Die Punkte C und D liegen auf g und haben von A jeweils den Abstand 12.
Bestimmen Sie die Koordinaten von C und D. **(3 BE)**

b) Die Punkte A, B und $E(1|2|5)$ sollen mit einem weiteren Punkt die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden. Für die Lage des vierten Eckpunktes gibt es mehrere Möglichkeiten.
Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten die Koordinaten des vierten Eckpunktes an. **(2 BE)**

Aufgabe 50 **EH S. 92**

Betrachtet wird die Pyramide $ABCDS$ mit $A(0|0|0)$, $B(4|4|2)$, $C(8|0|2)$, $D(4|-4|0)$ und $S(1|1|-4)$. Die Grundfläche $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

a) **Weisen** Sie **nach**, dass das Parallelogramm ABCD ein Rechteck ist. **(2 BE)**

b) Die Kante $\overline{AS}$ steht senkrecht auf der Grundfläche $ABCD$.
Der Flächeninhalt der Grundfläche beträgt $24 \cdot \sqrt{2}$.
Ermitteln Sie das Volumen der Pyramide. **(3 BE)**

Aufgabe 51 **EH S. 93**

Betrachtet wird der abgebildete Würfel $ABCDEFGH$. Die Eckpunkte D, E, F und H dieses Würfels besitzen in einem kartesischen Koordinatensystem die folgenden Koordinaten:
$D(0|0|-2)$, $E(2|0|0)$, $F(2|2|0)$ und $H(0|0|0)$.

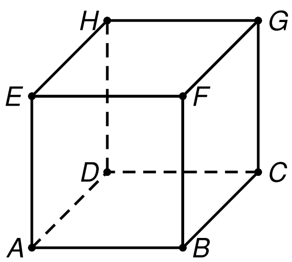


Abb. 23

a) **Zeichnen** Sie in die Abbildung 23 die Koordinatenachsen ein und bezeichnen Sie diese.
Geben Sie die Koordinaten des Punktes A **an**. **(2 BE)**

b) Der Punkt P liegt auf der Kante $\overline{FB}$ des Würfels und hat vom Punkt H den Abstand 3.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P. **(3 BE)**

Aufgabe 52 **EH S. 93**

Gegeben sind die Ebene $E : 2x + y + 2z = 6$ sowie die Punkte $P(1|0|2)$ und $Q(5|2|6)$.

a) **Zeigen** Sie, dass die Gerade durch die Punkte P und Q senkrecht zur Ebene E verläuft. **(2 BE)**

b) Die Punkte P und Q liegen symmetrisch zu einer Ebene F.
Ermitteln Sie eine Gleichung von F. **(3 BE)**

Aufgabe 53 **EH S. 94**

Das Dreieck ABC mit den Punkten $A(3|3|3)$, $B(6|7|3)$ und $C(2|10|3)$ ist im Punkt B rechtwinklig und liegt in der Ebene mit der Gleichung $z = 3$.

a) **Weisen** Sie **nach**, dass das Dreieck ABC den Flächeninhalt $\frac{25}{2}$ besitzt. **(2 BE)**

b) **Bestimmen** Sie die Koordinaten eines Punkts D so, dass das Volumen der Pyramide $ABCD$ gleich 25 ist. **(3 BE)**

Aufgabe 54 **EH S. 94**

Gegeben sind die Ebene $E : x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ und die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Zeichnen Sie in die Abbildung die Schnittgerade von E mit der x_2x_3-Ebene **ein.**

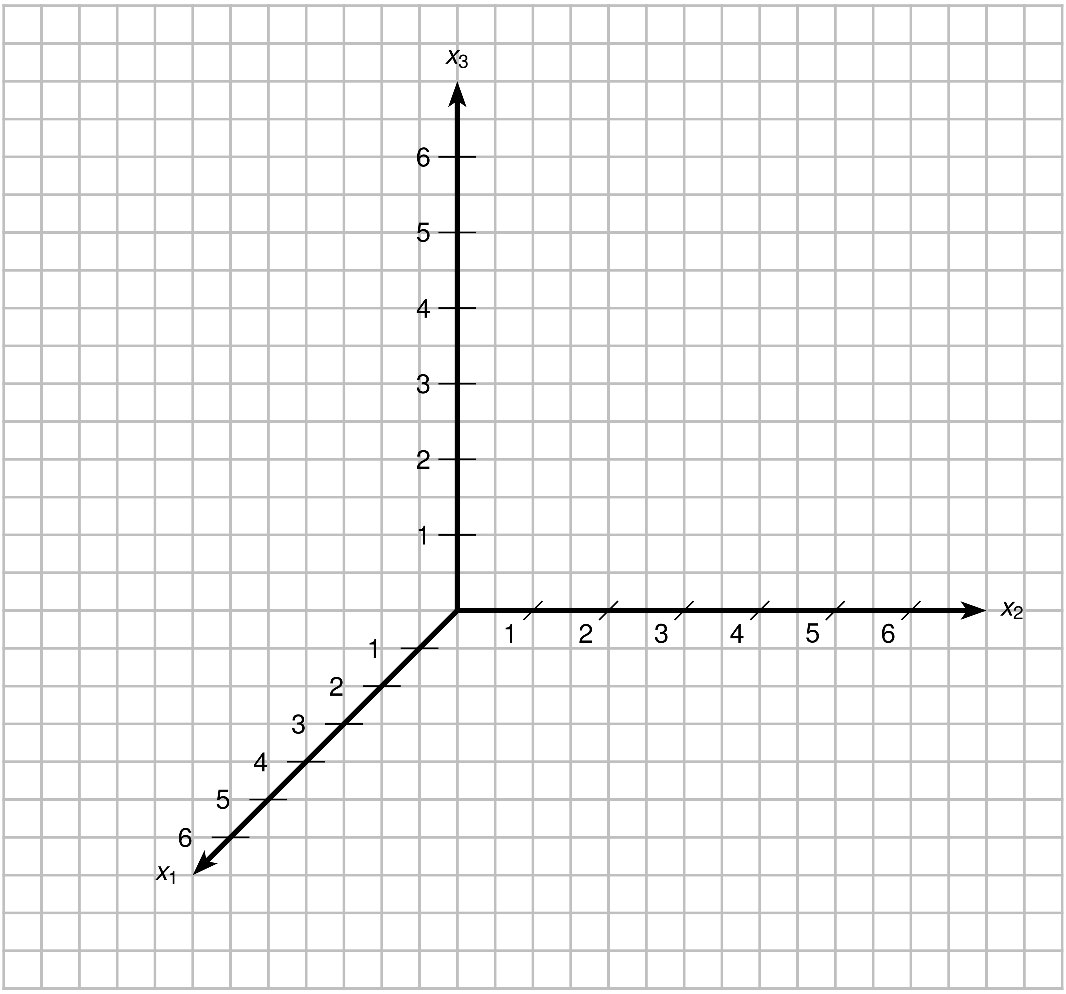


Abb. 24

(2 BE)

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von E und g. **(3 BE)**

3.2.2 Aufgabengruppe 2

Aufgabe 55 **EH S. 95**

Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $(r \in \mathbb{R})$.

a) Es existiert ein Wert von a $(a \in \mathbb{R})$, für den sich die Geraden g und $h_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ a \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(s \in \mathbb{R})$ schneiden.
Bestimmen Sie diesen Wert von a. **(3 BE)**

b) Eine Gerade k schneidet die Gerade g in einem Punkt S.
Ein Punkt R auf der Geraden g und ein Punkt T auf der Geraden k sollen mit dem Punkt S ein gleichschenkliges Dreieck mit vorgegebenem Flächeninhalt bilden.
Begründen Sie, dass die Längen der Dreiecksseiten nicht eindeutig festgelegt sind, wenn sich die Geraden g und k nicht rechtwinklig schneiden. **(2 BE)**

Aufgabe 56 **EH S. 96**

Die Abbildung 25 zeigt die Pyramide $ABCDS$ mit quadratischer Grundfläche $ABCD$. Der Pyramide ist eine Stufenpyramide einbeschrieben, die aus Würfeln mit der Kantenlänge 1 besteht.

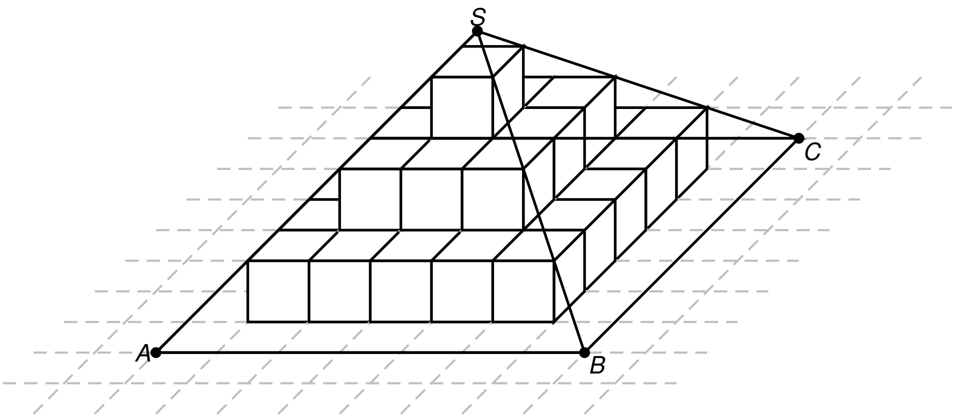


Abb. 25

a) **Geben** Sie das Volumen der Stufenpyramide und die Höhe der Pyramide $ABCDS$ **an**. **(2 BE)**

b) **Bestimmen** Sie unter Verwendung eines geeignet gewählten kartesischen Koordinatensystems eine Gleichung für die Gerade, die durch die Punkte B und S verläuft.
Zeichnen Sie das gewählte Koordinatensystem in die Abbildung 25 **ein**.

(3 BE)

Aufgabe 57 **EH S. 96**

Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|4)$ und $B(-4|0|6)$.

a) **Bestimmen** Sie die Koordinaten des Punktes C so, dass gilt: $\overrightarrow{CA} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$. **(2 BE)**

b) Durch die Punkte A und B verläuft die Gerade g.
Betrachtet werden Geraden, für welche die Bedingungen I und II gelten:

I Jede dieser Geraden schneidet die Gerade g orthogonal.
II Der Abstand jeder dieser Geraden vom Punkt A beträgt 3.

Ermitteln Sie eine Gleichung für eine dieser Geraden. **(3 BE)**

Aufgabe 58 **EH S. 97**

Gegeben ist die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

a) Der Schnittpunkt von E mit der x_1-Achse, der Schnittpunkt von E mit der x_2-Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks. **(2 BE)**

b) **Ermitteln** Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punkts der Ebene E ist. **(3 BE)**

Aufgabe 59 **EH S. 97**

Die Punkte P, Q und R bestimmen eindeutig eine Ebene ε und der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PQ}$ hat zu jedem der drei Punkte den gleichen Abstand.

a) **Begründen** Sie für den Flächeninhalt A_{PQR} des Dreiecks PQR die Beziehung

$$A_{PQR} \leq \left|\overrightarrow{MP}\right|^2.$$

(2 BE)

b) **Begründen** Sie, dass $\overrightarrow{RP} \circ \overrightarrow{RQ} = 0$ ist. **(3 BE)**

4 Lineare Algebra

4.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

4.1.1 Aufgabengruppe 1

Aufgabe 60 **EH S. 99**

Eine Firma produziert in einem ersten Schritt aus den Rohstoffen R_1 und R_2 die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2. Daraus werden in einem zweiten Produktionsschritt die Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt. Die nachfolgenden Tabellen zeigen, wie viele Mengeneinheiten (ME) in den jeweiligen Produktionsschritten zur Herstellung von je einer ME der Zwischen- bzw. Endprodukte verarbeitet werden:

von / nach	Z_1	Z_2
R_1	2	1
R_2	0	2

von / nach	E_1	E_2
Z_1	1	0
Z_2	1	2

a) Ermitteln Sie den jeweiligen Rohstoffbedarf an R_1 und an R_2

- für 100 ME von E_1,
- für 100 ME von E_2 sowie
- für 50 ME von Z_2.

(3 BE)

Durch eine Änderung des Produktionsverfahrens ändert sich der Bedarf an Rohstoff R_1 so, dass der Produktionsprozess wie folgt dargestellt werden kann:

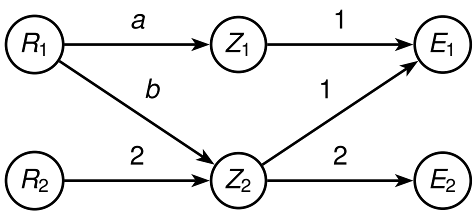


Abb. 26

Es werden nun

- für jede ME von E_1 nur noch 2 ME von R_1 und
- für jede ME von E_2 nur noch 1 ME von R_1

benötigt.

b) Bestimmen Sie a und b. **(2 BE)**

Aufgabe 61 **EH S. 99**

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ & & 3x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \end{array} \right|$$

a) **Bestimmen** Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems. **(3 BE)**

b) Dem Gleichungssystem soll eine vierte Gleichung der Form $ax_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2$ hinzugefügt werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert.
Geben Sie den geeigneten Wert von a **an**.
Begründen Sie Ihre Angabe. **(2 BE)**

Aufgabe 62 **EH S. 100**

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) **Entscheiden** Sie für jeden der Terme $A + B$ und $A \cdot B$, ob er definiert ist.
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung. **(2 BE)**

b) **Bestimmen** Sie für die Matrix $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Werte von a, b, c und d so, dass

$B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt. **(3 BE)**

Aufgabe 63 **EH S. 100**

Eine Matrix, die die folgenden beiden Bedingungen erfüllt, heißt stochastisch.

1. Alle Spaltensummen haben den Wert 1.
2. Kein Matrixelement ist negativ.

a) **Ergänzen** Sie die Leerstellen der Matrix $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{2} & \square \\ 0 & \square & \square \\ \square & \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ durch Zahlen, sodass die Matrix

M stochastisch ist. **(2 BE)**

b) Es sei $N = \begin{pmatrix} 0{,}5 & t \\ 0{,}5 & 1-t \end{pmatrix}$ mit $t \in [0; 1]$ eine stochastische Matrix, $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = N \cdot \vec{v}$.
Entscheiden Sie rechnerisch begründet, ob die beiden Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ dieselbe Spaltensumme haben. **(3 BE)**

4.1.2 Aufgabengruppe 2

Aufgabe 64 **EH S. 101**

Eine Matrix, die die folgenden beiden Bedingungen erfüllt, heißt stochastisch.

1. Alle Spaltensummen haben den Wert 1.
2. Kein Matrixelement ist negativ.

Die Matrix $T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}$ mit und $0 \leq a \leq 1$ ist stochastisch.

Es gilt $S = T \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & a \cdot (2-a) \\ 0 & (1-a)^2 \end{pmatrix}$.

a) **Zeigen** Sie, dass für die Matrix S die erste Bedingung erfüllt ist. **(2 BE)**

b) **Begründen** Sie, dass für die Matrix S die zweite Bedingung erfüllt ist. **(3 BE)**

4.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

4.2.1 Aufgabengruppe 1

Aufgabe 65 **EH S. 102**

In einem System verteilt sich ein Gesamtbestand auf die Zustände A und B. Die Verteilung wird durch Zustandsvektoren $\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix}$ beschrieben. Pro Zeiteinheit finden zwischen den Zuständen die in der Abbildung 27 dargestellten Übergänge statt.

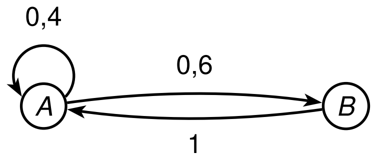


Abb. 27

a) **Geben** Sie die zugehörige Übergangsmatrix M **an.**
Bestimmen Sie die Matrix N, die die Übergänge in zwei aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten zusammenfassend beschreibt. **(3 BE)**

b) Für große natürliche Zahlen n nähert sich die Potenz M^n der Matrix $G = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$.
Beschreiben Sie, welche Folgen sich daraus für die Verteilung des Gesamtbestandes auf die Zustände A und B ergeben. **(2 BE)**

Aufgabe 66 **EH S. 102**

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem durch:

$$\begin{array}{lrrrrrrr} \text{I:} & 2x_1 & +3 & x_2 & + & 5x_3 & = & 13 \\ \text{II:} & -2x_1 & +2 & x_2 & & & = & -8 \\ \text{III:} & & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

a) **Zeigen** Sie, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat. **(3 BE)**

b) Es gibt eine Zahl, durch die man die Zahl 2 auf der rechten Seite der dritten Gleichung ersetzen kann, sodass das geänderte Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.
Geben Sie diese Zahl **an** und **begründen** Sie Ihre Antwort. **(2 BE)**

Aufgabe 67 **EH S. 103**

Eine Firma produziert in einem ersten Schritt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1 und Z_2. Daraus werden in einem zweiten Produktionsschritt die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 hergestellt. Nachfolgend ist angegeben, wie viele Mengeneinheiten (ME) in den jeweiligen Produktionsschritten zur Herstellung von je einer ME der Zwischen- bzw. Endprodukte verarbeitet werden:

nach \ von	Z_1	Z_2
R_1	2	6
R_2	4	4
R_3	6	2

nach \ von	E_1	E_2	E_3
Z_1	5	2	8
Z_2	5	8	2

a) **Berechnen** Sie, wie viele ME von R_3 insgesamt benötigt werden, um jeweils eine ME von E_1, E_2 und E_3 herzustellen. **(3 BE)**

Aufgrund von Lieferschwierigkeiten kann die Firma für R_3 nur noch auf einen Lagerbestand von 40 ME zurückgreifen.

b) **Berechnen** Sie, wie viele ME von Zwischenprodukten noch produziert werden können, wenn Z_1 und Z_2 in der gleichen Anzahl von ME produziert werden müssen. **(2 BE)**

Aufgabe 68 **EH S. 103**

Gegeben sind die Matrix A mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{u}$ mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) **Berechnen** Sie das Produkt $A \cdot \vec{u}$.
Geben Sie zwei von $\vec{u}$ verschiedene Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ **an**, sodass gilt:

$$A \cdot \vec{u} = A \cdot \vec{v} = A \cdot \vec{w}$$

(3 BE)

b) **Zeigen** Sie, dass für alle Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$ gilt: $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. **(2 BE)**

Aufgabe 69 **EH S. 104**

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 23 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 13 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 8 \end{array} \right|$$

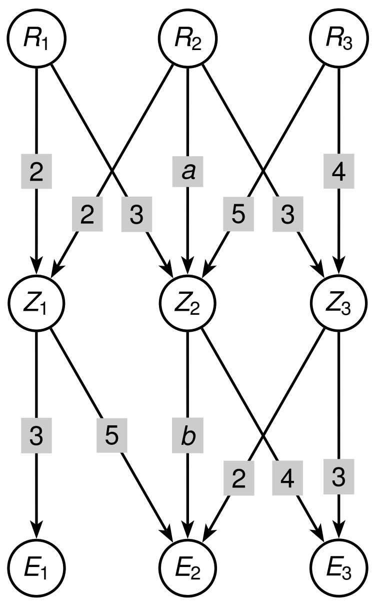
a) **Bestimmen** Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems. **(3 BE)**

b) Eine der letzten beiden Gleichungen des Gleichungssystems kann weggelassen werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert.
Geben Sie diese Gleichung **an** und **begründen** Sie Ihre Angabe. **(2 BE)**

Aufgabe 70 **EH S. 104**

Ein Betrieb erzeugt aus drei Rohstoffen (R_1, R_2, R_3) drei Zwischenprodukte (Z_1, Z_2, Z_3), die zu drei Endprodukten (E_1, E_2, E_3) weiterverarbeitet werden.
Es gibt Werte für a und b, so dass die Zusammenhänge durch den folgenden Verflechtungsgraphen und die Rohstoff-Endprodukt-Tabelle gegeben sind.

Verflechtungsgraph
Angaben in Mengeneinheiten



Rohstoff-Endprodukt-Tabelle
Anzahl der benötigten Mengeneinheiten der Rohstoffe je Mengeneinheit des Endprodukts

Rohstoff \ Endprodukt	E_1	E_2	E_3
R_1	6	16	12
R_2	2	24	25
R_3	0	18	32

a) Der Zusammenhang Rohstoff-Zwischenprodukt wird durch eine Matrix RZ, der Zusammenhang Zwischenprodukt-Endprodukt durch eine Matrix ZE und der Zusammenhang Rohstoff-Endprodukt durch eine Matrix RE beschrieben.
Geben Sie eine Beziehung zwischen diesen drei Matrizen **an.** **(1 BE)**

b) **Bestimmen** Sie die im Verflechtungsgraphen fehlenden Werte für a und b. **(4 BE)**

Aufgabe 71 **EH S. 105**

a) Untersuchen Sie, ob es Werte für a und b gibt, sodass für die Matrix
$N = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ a & 0{,}5 & 0{,}5 \\ b & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ und den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$ die Bedingungen I und II gelten:

I Der Vektor $\vec{w}$ ist ein Fixvektor der Matrix N.

II Die quadratische Matrix N ist stochastisch, d. h. alle Elemente sind nichtnegative reelle Zahlen und die Spaltensummen sind jeweils gleich eins.

(3 BE)

b) Die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ sind Fixvektoren einer Matrix L.
Begründen Sie, dass auch der Vektor $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ ein Fixvektor von L ist. **(2 BE)**

Alte Aufgabenfassung[1]

Ein Fixvektor $\vec{v}$ einer Matrix M ist ein Vektor, für den gilt: $M \cdot \vec{v} = \vec{v}$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$.

a) Untersuchen Sie, ob es Werte für a und b gibt, sodass für die Matrix
$N = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ a & 0{,}5 & 0{,}5 \\ b & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ und den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$ die Bedingungen I und II gelten:

I Der Vektor $\vec{w}$ ist ein Fixvektor der Matrix N.

II Die quadratische Matrix N ist stochastisch, d. h. alle Elemente sind nichtnegative reelle Zahlen und die Spaltensummen sind jeweils gleich eins.

(3 BE)

b) Die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ mit $\vec{x} + \vec{y} \neq \vec{0}$ sind Fixvektoren einer Matrix L.
Begründen Sie, dass auch der Vektor $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ ein Fixvektor von L ist. **(2 BE)**

Aufgabe 72 **EH S. 105**

Eine Anzahl von Objekten verteilt sich auf zwei Zustände A und B.
In den Verteilungsvektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ gibt a den Anteil der Objekte im Zustand A an und b den Anteil der Objekte im Zustand B.

a) In einem ersten System wird der Übergang von einer Verteilung zu der folgenden durch eine Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ beschrieben.
Bestimmen Sie die Matrix, die zwei Übergänge zusammenfasst. **(2 BE)**

[1] Nach Bildungsstandards kann der Begriff Fixvektor jetzt vorausgesetzt werden.

b) In einem zweiten System wird der Übergang von einer Verteilung zu der folgenden durch eine Übergangsmatrix N beschrieben. Die Anfangsverteilung ist $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Die Abbildung 28 stellt die Entwicklung des Anteils im Zustand A für die ersten zehn Übergänge dar.

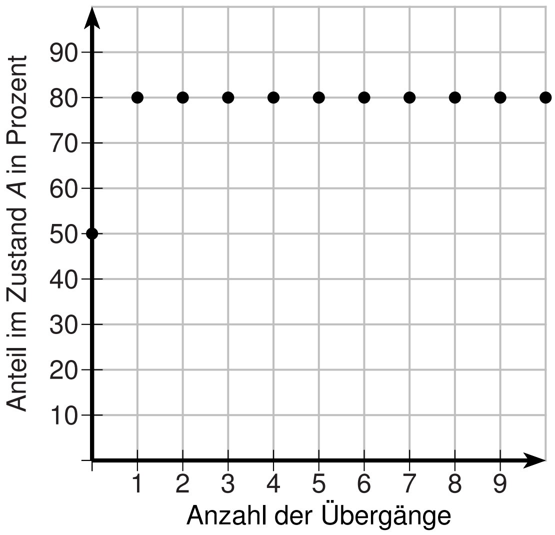


Abb. 28

Begründen Sie, dass $N = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ die zugehörige Übergangsmatrix sein kann. **(3 BE)**

Aufgabe 73 **EH S. 105**

Untersucht werden die Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen.

a) **Bestimmen** Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3 \cdot x_1 & - & 2 \cdot x_2 & & & = & 13 \\ & & x_2 & + & 2 \cdot x_3 & = & 5 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

(2 BE)

b) Betrachtet wird das folgende Gleichungssystem mit einem Parameter $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3 \cdot x_1 & + & 2 \cdot x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 3 \cdot x_1 & + & 2 \cdot x_2 & & & = & 5 \\ 3 \cdot x_1 & + & 2 \cdot x_2 & + & p \cdot x_3 & = & 4 \end{array}$$

Geben Sie einen Wert von p **an**, für den das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

Zeigen Sie, dass es keinen Wert von p gibt, für den das Gleichungssystem genau eine Lösung hat. **(3 BE)**

Aufgabe 74 **EH S. 106**

In einem Labor wird das Wechseln von Ratten zwischen vier miteinander verbundenen Räumen R_1, R_2, R_3 und R_4 beobachtet. Das Wechseln der Ratten von einem Beobachtungszeitpunkt zum nächsten lässt sich durch das abgebildete Übergangsdiagramm beschreiben.

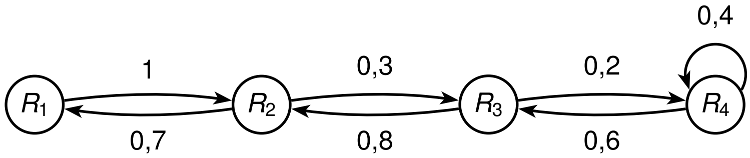
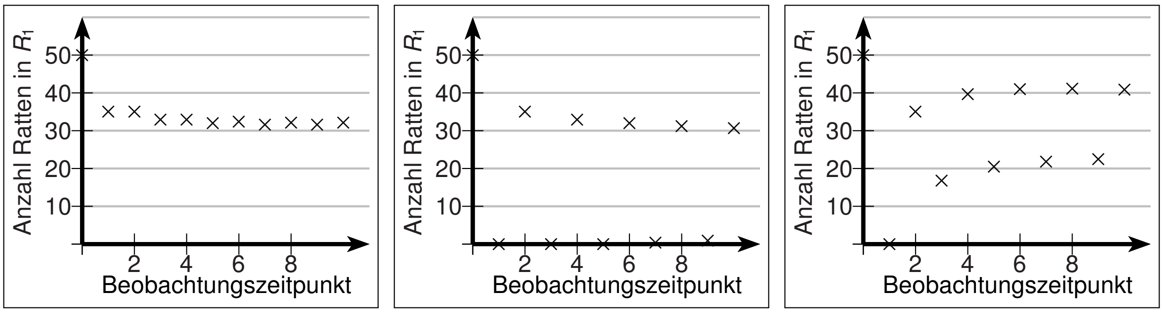


Abb. 29

a) Geben Sie eine zugehörige Übergangsmatrix **an**. **(2 BE)**

b) Zu Beginn einer Beobachtung sind 50 Ratten in R_1, die übrigen drei Räume sind leer. Eine der folgenden Abbildungen beschreibt die zeitliche Entwicklung der Anzahl der Ratten in R_1.



I II III

Geben Sie **an**, um welche Abbildung es sich handelt.
Begründen Sie Ihre Angabe. **(3 BE)**

4.2.2 Aufgabengruppe 2

Aufgabe 75 **EH S. 107**

Die Entwicklung eines Systems kann modelliert werden, indem aus dem Zustandsvektor $\overrightarrow{x_i}$ durch Multiplikation mit einer Übergangsmatrix der Zustandsvektor des folgenden Zustands $\overrightarrow{x}_{i+1}$ bestimmt wird ($i \in \mathbb{N}$).

a) Gegeben ist ein System mit einer Übergangsmatrix M der Form $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $a \cdot b \cdot c = 1$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$).

Weisen Sie **nach**, dass sich für jeden beliebigen Zustandsvektor des Systems nach endlich vielen Entwicklungsschritten wieder der gleiche Zustandsvektor ergibt. **(3 BE)**

b) Für die Übergangsmatrix L eines anderen Systems gilt

$$L^n = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R},\ k > 1 \text{ und } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

Erläutern Sie für dieses andere System den Zusammenhang zwischen einem beliebigen Zustandsvektor $\vec{x}_0$ und dem Zustandsvektor $\vec{x}_n$, der sich aus $\vec{x}_0$ nach n Übergängen ergibt. **(2 BE)**

Aufgabe 76 **EH S. 107**

Zu einem bestimmten Zeitpunkt haben die drei Anbieter $A1$, $A2$ und $A3$ jeweils 10 000 Kunden. Die für das nächste Jahr zu erwartende Kundenwanderung zwischen diesen Anbietern wird durch die Übergangstabelle 1 beschrieben.

von / nach	$A1$	$A2$	$A3$
$A1$	0,90	0,02	0,02
$A2$	0,04	0,90	0,03
$A3$	0,06	0,08	0,95

Tab. 1

a) **Vervollständigen** Sie den Übergangsgraphen in Abbildung 30 zur Kundenwanderung innerhalb des nächsten Jahres.

Geben Sie die Gesamtzahl der Kunden **an**, die innerhalb des nächsten Jahres den Anbieter wechseln. **(2 BE)**

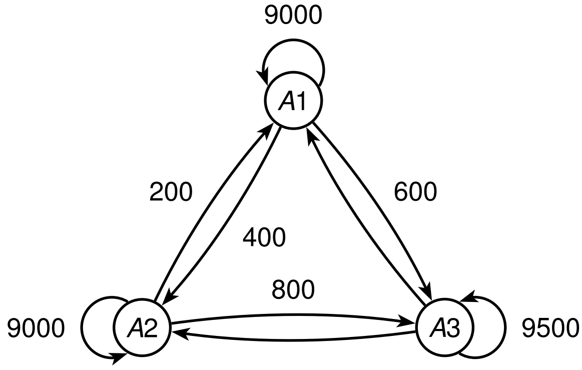


Abb. 30

b) Ausgehend von der Ausgangsverteilung von je 10 000 Kunden wird eine Fusion der Anbieter $A1$ und $A2$ zu einem Anbieter $A1\&A2$ geplant. Im Kundengeschäft behalten beide ihr bekanntes Profil bei, so dass angenommen werden kann, dass die Kundenwanderung im nächsten Jahr weiterhin wie in der obigen Übergangstabelle dargestellt abläuft.

Vervollständigen Sie den Übergangsgraphen in Abbildung 31 zur Kundenwanderung innerhalb des nächsten Jahres unter Berücksichtigung der Fusion.

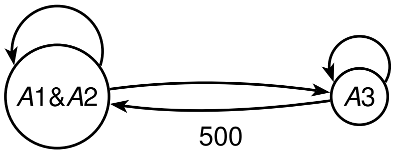


Abb. 31

Vervollständigen Sie die Übergangstabelle 2 zur Kundenwanderung innerhalb des nächsten Jahres unter Berücksichtigung der Fusion.

von / nach	$A1\&A2$	$A3$
$A1\&A2$		
$A3$		0,95

Tab. 2

(3 BE)

Aufgabe 77 **EH S. 108**

Betrachtet werden Umformungen eines Gleichungssystems

$$L \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

in dem L eine 3×3-Matrix ist.
Zeilenumformungen, die bei der Anwendung des Gauß-Verfahrens genutzt werden, lassen sich mithilfe von Matrizenmultiplikationen beschreiben:
Aus $L \cdot \vec{x} = \vec{b}$ wird durch die Umformung $U \cdot L \cdot \vec{x} = U \cdot \vec{b}$.

a) **Geben** Sie die Umformungsmatrix U_1 sowie ihre inverse Matrix U_1^{-1} für die folgende Zeilenumformung **an**:

Multiplikation der ersten Zeile mit 2 und der zweiten Zeile mit -1

(2 BE)

b) **Beschreiben** Sie die Umformung, die durch Multiplikation mit der Matrix

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden kann.

Ermitteln Sie die zugehörige inverse Matrix. **(3 BE)**

5 Stochastik

5.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

5.1.1 Aufgabengruppe 1

Aufgabe 78 **EH S. 109**

Bei der Produktion von Halbleiterbauteilen eines bestimmten Typs ist im Mittel jedes fünfte Bauteil fehlerhaft. Jedes produzierte Bauteil wird abschließend einer Kontrolle unterzogen und dabei entweder als fehlerhaft oder als einwandfrei eingestuft. Im Rahmen der Kontrolle wird ein fehlerhaftes Bauteil mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % als fehlerhaft eingestuft. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein einwandfreies Bauteil als fehlerhaft eingestuft wird, beträgt 40 %.

a) **Bestimmen** Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein nach der Kontrolle zufällig ausgewähltes Bauteil einwandfrei ist und im Rahmen der Kontrolle korrekt eingestuft wurde.
(2 BE)

b) **Ermitteln** Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein nach der Kontrolle zufällig ausgewähltes Bauteil durch die Kontrolleure nicht korrekt eingestuft wurde. **(0 BE)**

Aufgabe 79 **EH S. 109**

Ein Glücksrad ist in einen blauen, einen gelben und in einen roten Sektor unterteilt. Beim Drehen des Glücksrades tritt „Blau“ mit der Wahrscheinlichkeit p und „Rot“ mit der Wahrscheinlichkeit $2p$ ein.

a) **Geben** Sie zwei verschiedene mögliche Werte für p an. **(2 BE)**

b) Das Glücksrad wird zweimal gedreht.
Betrachtet wird das Ereignis E: Es tritt genau zweimal „Gelb“ ein.
Zeigen Sie, dass das Ereignis E mit der Wahrscheinlichkeit $P(E) = 9p^2 - 6p + 1$ eintritt.
(3 BE)

Aufgabe 80 **EH S. 110**

Von einer Wiesenblume gibt es zwei Varianten, eine weiß blühende und eine rot blühende. Erfahrungsgemäß bringen die Samen der weiß blühenden Variante zu 80 % wieder weiß blühende und zu 20 % rot blühende Blumen hervor, während die Samen der rot blühenden Variante zu 40 % weiß blühende und zu 60 % rot blühende Blumen hervorbringen.

a) Auf einer Wiese stehen zu 70 % weiß blühende und zu 30 % rot blühende Varianten dieser Blume.
Bestimmen Sie den Anteil rot blühender Blumen, der von den Samen dieser Blumen erfahrungsgemäß zu erwarten ist. **(2 BE)**

b) Ein Samenlieferant möchte eine Mischung von Samen der beiden Varianten herstellen, die zu 50 % weiß blühende und zu 50 % rot blühende Blumen erwarten lässt.
Ermitteln Sie den Anteil der Samen von der weiß blühenden Variante, den er dieser Mischung beigeben muss. **(3 BE)**

Aufgabe 81 **EH S. 110**

Eine Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Erfolge in einem n-stufigen Bernoulli-Experiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p an. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Größe X ist in der unten stehenden Tabelle vollständig aufgelistet und in der nebenstehenden Abbildung 32 dargestellt.

k	$P(X = k)$
0	0,36
1	0,48
2	0,16

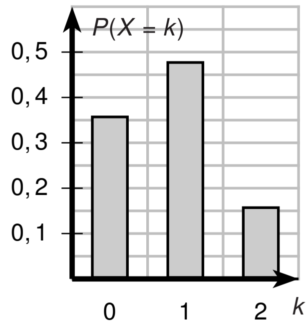


Abb. 32

a) **Bestimmen** Sie n, die Erfolgswahrscheinlichkeit p und den Erwartungswert von X. **(3 BE)**

b) **Beschreiben** Sie, wie sich die Abbildung ändern würde, wenn die Erfolgswahrscheinlichkeit p in die Wahrscheinlichkeit $p^* = 1 - p$ abgewandelt würde. **(2 BE)**

Aufgabe 82 **EH S. 111**

Ein Basketballspieler wirft 10 Freiwürfe.
Die Anzahl seiner Treffer wird mit k bezeichnet und durch die Zufallsgröße X beschrieben.
Die Zufallsgröße X wird als binomialverteilt mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}8$ angenommen.
In der Abbildung 33 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

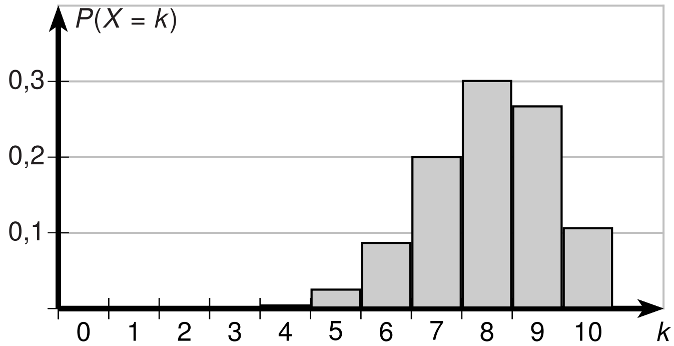


Abb. 33

a) **Ermitteln** Sie mithilfe der Abbildung 33 einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Basketballspieler mindestens 8-mal trifft. **(2 BE)**

b) In der Abbildung 33 sieht es so aus, als wäre $P(X = 2) = 0$.
Begründen Sie, dass dies nicht der Fall ist. **(3 BE)**

Aufgabe 83 **EH S. 111**

Für ein zweistufiges Zufallsexperiment werden eine Münze und zwei Würfel verwendet. Beide Würfel sind auf allen sechs Seiten mit jeweils einer Zahl beschriftet, Würfel A mit 1, 2, 3, 4, 5 und 6, Würfel B mit 1, 1, 2, 2, 3 und 3.
Zunächst wird die Münze geworfen. Zeigt die Münze „Kopf“, so wird anschließend Würfel A einmal geworfen, zeigt sie „Zahl“, so wird Würfel B einmal geworfen. Die geworfene Zahl wird notiert.

a) **Stellen** Sie das Zufallsexperiment in einem beschrifteten Baumdiagramm **dar**. **(3 BE)**

b) **Berechnen** Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gewürfelte Zahl gerade ist. **(2 BE)**

Aufgabe 84 **EH S. 111**

Die Abbildung 34 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit den Parametern n und p.

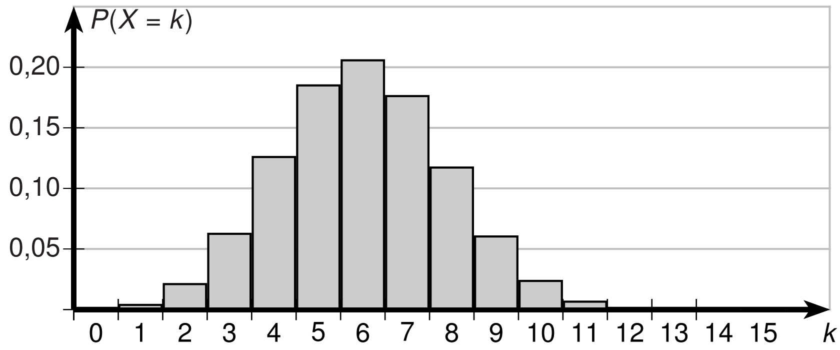


Abb. 34

a) **Bestimmen** Sie mithilfe der Abbildung 34 die Wahrscheinlichkeit $P(5 \leq X \leq 7)$. **(2 BE)**

b) X hat den Erwartungswert 6 und die Varianz 3,6.
Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von n und p. **(3 BE)**

5.1.2 Aufgabengruppe 2

Aufgabe 85 **EH S. 112**

In einer Urne U_1 befinden sich vier rote und zwei gelbe Kugeln, in einer Urne U_2 zwei rote, eine gelbe und eine blaue Kugel.

a) Eine der beiden Urnen wird zufällig ausgewählt. Anschließend wird daraus zweimal hintereinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt.
Geben Sie einen Term **an**, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt werden kann, dass beide entnommenen Kugeln rot sind. **(2 BE)**

b) Eine der beiden Urnen wurde zufällig ausgewählt; aus dieser wurde eine Kugel zufällig entnommen. Die entnommene Kugel ist gelb oder blau.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel aus der Urne U_1 stammt. **(3 BE)**

5.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

5.2.1 Aufgabengruppe 1

Aufgabe 86 **EH S. 113**

Bei der Produktion von Halbleiterbauteilen eines bestimmten Typs ist im Mittel jedes fünfte Bauteil fehlerhaft. Jedes produzierte Bauteil wird abschließend einer Kontrolle unterzogen und dabei entweder als fehlerhaft oder als einwandfrei eingestuft. Im Rahmen der Kontrolle wird ein fehlerhaftes Bauteil mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % als fehlerhaft eingestuft. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein einwandfreies Bauteil als fehlerhaft eingestuft wird, beträgt 40 %.

a) **Bestimmen** Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein nach der Kontrolle zufällig ausgewähltes Bauteil einwandfrei ist *und* im Rahmen der Kontrolle als einwandfrei eingestuft wurde.

(2 BE)

b) **Ermitteln** Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein nach der Kontrolle zufällig ausgewähltes Bauteil fehlerhaft ist, wenn es im Rahmen der Kontrolle als einwandfrei eingestuft wurde.

(3 BE)

Aufgabe 87 **EH S. 113**

Ein Glücksrad ist in einen blauen, einen gelben und in einen roten Sektor unterteilt. Beim Drehen des Glücksrades tritt „Blau“ mit der Wahrscheinlichkeit$p$ und „Rot“ mit der Wahrscheinlichkeit $2p$ ein.

a) **Geben** Sie **an**, welche Werte von p bei diesem Glücksrad möglich sind. **(2 BE)**

b) Das Glücksrad wird zweimal gedreht.
Betrachtet wird das Ereignis E: Es tritt mindestens einmal „Rot“ ein.
Zeigen Sie, dass das Ereignis E mit der Wahrscheinlichkeit $P(E) = 4p - 4p^2$ eintritt. **(3 BE)**

Aufgabe 88 **EH S. 114**

In Urne A befinden sich zwei rote und drei weiße Kugeln. Urne B enthält drei rote und zwei weiße Kugeln.
Betrachtet wird folgendes Zufallsexperiment:

Aus Urne A wird eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt; danach wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne A gelegt.

a) **Geben** Sie alle Möglichkeiten für den Inhalt der Urne A nach der Durchführung des Zufallsexperiments **an**. **(2 BE)**

Betrachtet wird das Ereignis E: Nach Durchführung des Zufallsexperiments befinden sich wieder drei weiße Kugeln in Urne A.

b) **Untersuchen** Sie, ob das Ereignis E eine größere Wahrscheinlichkeit als sein Gegenereignis hat. **(3 BE)**

Aufgabe 89 **EH S. 114**

Die Flächen zweier Würfel 1 und 2 sind mit jeweils einem Buchstaben beschriftet.

Würfel 1: B, B, C, C, C, C

Würfel 2: A, A, A, B, B, C

Für jeden der beiden Würfel wird angenommen, dass jede der Flächen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewürfelt wird.

a) Würfel 1 wird zweimal geworfen. Eine Zufallsgröße beschreibt, wie oft dabei eine Fläche mit dem Buchstaben B gewürfelt wird.
Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Zufallsgröße. **(2 BE)**

b) Einer der beiden Würfel wird zufällig ausgewählt und einmal geworfen; es wird eine Fläche mit dem Buchstaben C gewürfelt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei der Würfel 2 geworfen wurde. **(3 BE)**

Aufgabe 90 **EH S. 115**

Für ein Zufallsexperiment wird eine Zufallsgröße X festgelegt, welche die drei Werte -2, 1 und 2 annehmen kann.
In der Abbildung 35 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

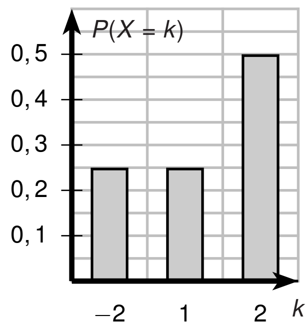


Abb. 35

a) **Ermitteln** Sie mithilfe der Abbildung den Erwartungswert der Zufallsgröße X. **(2 BE)**

b) Das Zufallsexperiment wird zweimal durchgeführt. Dabei wird jeweils der Wert der Zufallsgröße X notiert.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe dieser beiden Werte negativ ist. **(3 BE)**

Aufgabe 91 **EH S. 115**

Bei der Wintersportart Biathlon wird bei jeder Schießeinlage auf fünf Scheiben geschossen. Ein Biathlet tritt bei einem Einzelrennen zu einer Schießeinlage an, bei der er auf jede Scheibe einen Schuss abgibt. Diese Schießeinlage wird modellhaft durch eine Bernoullikette mit der Länge 5 und der Trefferwahrscheinlichkeit p beschrieben.

a) **Geben** Sie für die folgenden Ereignisse jeweils einen Term **an**, der die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses in Abhängigkeit von p beschreibt.

- Der Biathlet trifft bei genau vier Schüssen.
- Der Biathlet trifft nur bei den ersten beiden Schüssen.

(3 BE)

b) **Erläutern** Sie anhand eines Beispiels, dass die modellhafte Beschreibung der Schießeinlage durch eine Bernoullikette unter Umständen der Realität nicht gerecht wird. **(2 BE)**

Aufgabe 92 **EH S. 115**

Ein Basketballspieler wirft 10 Freiwürfe.
Die Anzahl seiner Treffer wird mit k bezeichnet und durch die Zufallsgröße X beschrieben.
Die Zufallsgröße X wird als binomialverteilt mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}8$ angenommen.
In der Abbildung 36 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

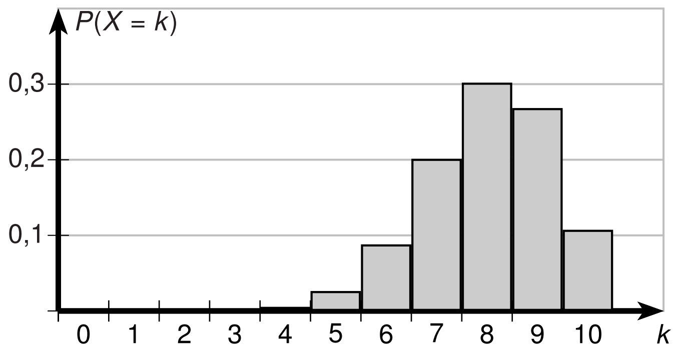


Abb. 36

a) **Ermitteln** Sie mithilfe der Abbildung 36 einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Basketballspieler mindestens 8-mal trifft. **(2 BE)**

b) **Zeigen** Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, keinen Treffer zu erzielen, kleiner als $\frac{1}{1000000}$ ist. **(3 BE)**

Aufgabe 93 **EH S. 116**

Bei einem Zufallsexperiment wird eine ideale Münze so lange geworfen, bis zum zweiten Mal Zahl (Z) oder zum zweiten Mal Wappen (W) oben liegt.
Als Ergebnismenge wird festgelegt: $\{ZZ; WW; ZWZ; ZWW; WZZ; WZW\}$.

a) **Begründen** Sie, dass dieses Zufallsexperiment kein Laplace-Experiment ist. **(2 BE)**

b) Die Zufallsgröße X ordnet jedem Ergebnis die Anzahl der entsprechenden Münzwürfe zu.
Berechnen Sie den Erwartungswert von X. **(3 BE)**

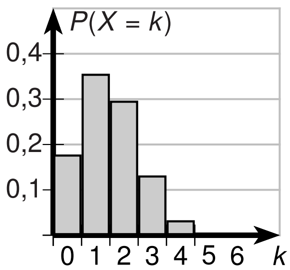
Aufgabe 94 **EH S. 116**

Jedes Überraschungsei eines Herstellers enthält entweder eine Figur oder keine Figur, wobei der Anteil der Überraschungseier mit einer Figur 25 % beträgt.

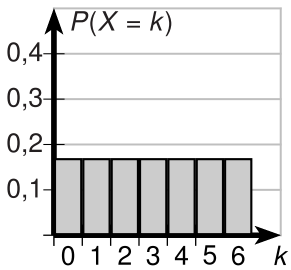
a) Zehn Überraschungseier werden nacheinander zufällig ausgewählt.
Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür **an**, dass nur in den letzten beiden Überraschungseiern jeweils eine Figur enthalten ist. **(2 BE)**

b) Sechs Überraschungseier werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt an, wie viele dieser Überraschungseier eine Figur enthalten. Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße X dar:

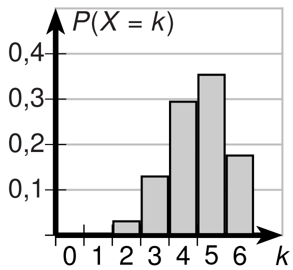
I



II



III

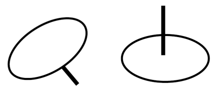


Geben Sie **an**, welche Abbildung dies ist.
Begründen Sie, dass die beiden anderen Abbildungen dies nicht sind. **(3 BE)**

5.2.2 Aufgabengruppe 2

Aufgabe 95 **EH S. 117**

Beim Werfen einer Reißzwecke kann diese entweder auf der Seite oder auf dem Kopf liegen bleiben (siehe Abbildung). Eine Reißzwecke wird zweimal geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie dabei mindestens einmal auf der Seite liegen bleibt, beträgt 0,84.



Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Reißzwecke bei den zwei Würfen genau einmal auf dem Kopf liegen bleibt. **(5 BE)**

Aufgabe 96 **EH S. 117**

Die binomialverteilten Zufallsgrößen X_1 und X_2 geben für Trefferwahrscheinlichkeiten von $p_1 = 0{,}8$ bzw. $p_2 = 0{,}2$ jeweils die Anzahl der Treffer bei fünf Versuchen an.

a) Betrachtet wird die Zufallsgröße X_1.
Geben Sie einen Term **an**, mit dem die Wahrscheinlichkeit für genau einen Treffer berechnet werden kann. **(1 BE)**

b) **Geben** Sie für eine der beiden Zufallsgrößen ein Ereignis **an**, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $1 - \left(\binom{5}{3} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 + \binom{5}{4} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^1 + \binom{5}{5} \cdot 0{,}8^5\right)$ angegeben wird.
(2 BE)

c) Abbildung 37 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_1.
Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_2 in Abbildung 38 **dar**.

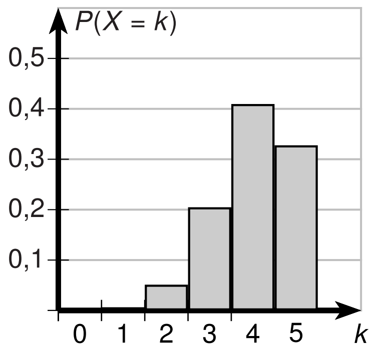


Abb. 37

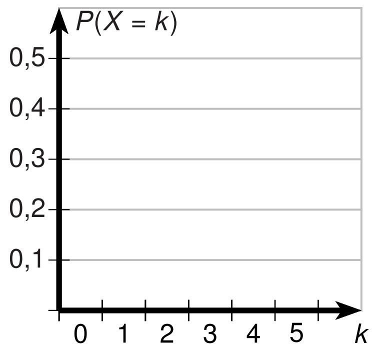


Abb. 38

(2 BE)

Aufgabe 97 **EH S. 118**

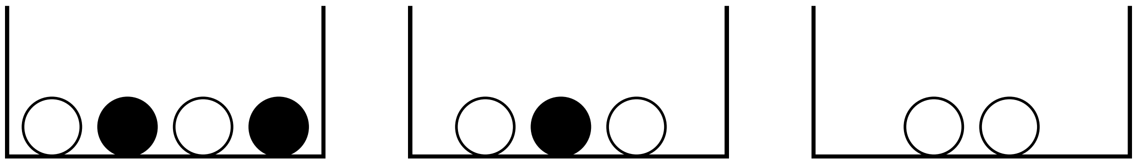
Eine Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p und dem Stichprobenumfang $n = 2$.

a) **Berechnen** Sie für $p = 0{,}4$ die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 1)$. **(2 BE)**

b) **Zeigen** Sie, dass für jeden Wert von p gilt: $P(X \neq 0) + P(X \neq 1) + P(X \neq 2) = 2$. **(3 BE)**

Aufgabe 98 **EH S. 118**

Schwarze und weiße Kugeln sind wie folgt auf drei Urnen verteilt:



Urne A Urne B Urne C

a) Aus Urne A wird zunächst eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt. Anschließend wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne C gelegt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich danach in Urne C zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel befinden. **(2 BE)**

b) Die drei Urnen mit den in der Abbildung dargestellten Inhalten bilden den Ausgangspunkt für folgendes Spiel:

> Es wird zunächst ein Einsatz von 1 Euro eingezahlt. Anschließend wird eine der drei Urnen zufällig ausgewählt und danach aus dieser Urne eine Kugel zufällig gezogen. Nur dann, wenn diese Kugel schwarz ist, wird ein bestimmter Geldbetrag ausgezahlt.

Ermitteln Sie, wie groß dieser Geldbetrag sein muss, damit bei diesem Spiel auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgeglichen sind. **(3 BE)**

II Erwartungshorizonte

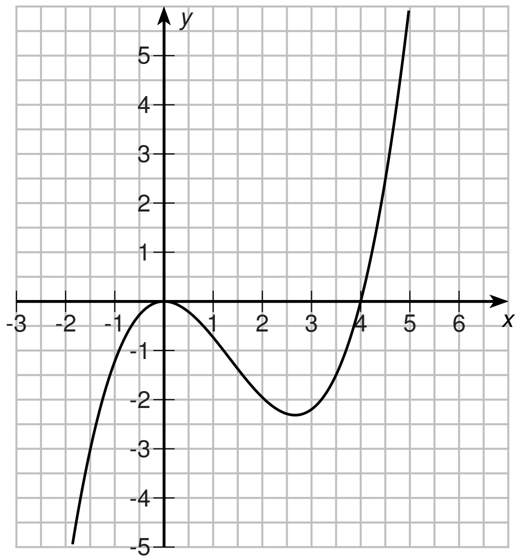
1 Übungsaufgaben für das erste Jahr der Studienstufe

1.1 Analysis

1.1.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

Aufgabengruppe 1

Aufgabe 1

	Lösungsskizze	**BE**
a)	 *Hinweis: In der Skizze muss deutlich werden, dass ein Hochpunkt im Ursprung liegt, die x-Achse bei 4 geschnitten wird und zwischen $x = 2$ und $x = 3$ ein Tiefpunkt liegt.*	2
b)	Für t ungefähr 3 sind die Flächen zwischen Graph und x-Achse ungefähr gleich.	2
c)	Der Graph würde um 2 nach unten verschoben werden.	1

Aufgabengruppe 2

Aufgabe 2

	Lösungsskizze	BE
a)	Die erste Ableitung hat den Grad 2, also maximal 2 Nullstellen. Sie kann also keine weitere Nullstelle haben.	2
b)	Wenn der Graph im gesamten Intervall rechtsgekrümmt wäre, so müsste die erste Ableitung im gesamten Intervall monoton fallen. Das steht im Widerspruch dazu, dass $f'(2) < f'(4)$ ist.	1
c)	Da der Grad von f' zwei ist und $f'(-2) = f'(2)$ liegt Achsensymmetrie zur y-Achse vor. Damit ist $f'(-4) = f'(4) = 9$.	2

1.1.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

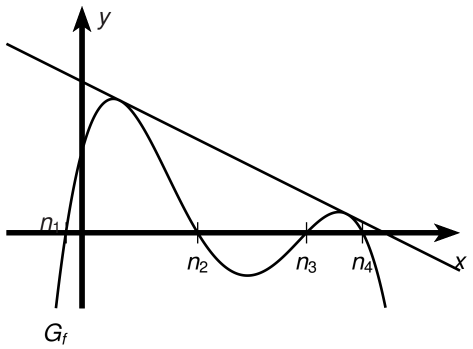
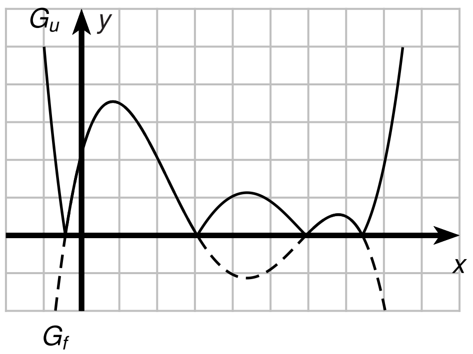
Aufgabengruppe 1

Aufgabe 3

	Lösungsskizze	BE
a)	Es ist $f_a''(x) = 6x - 12a = 0$ für $x = 2a$ und $f_a(2a) = (2a)^3 - 6a \cdot (2a)^2 + (2a + 12a^2) \cdot 2a - 8a^3$ $= 8a^3 - 24a^3 + 4a^2 + 24a^3 - 8a^3$ $= 4a^2$.	2
b)	Es ist $(2a)^2 = 4a^2$, d. h. $x_W^2 = y_W$.	1
c)	Es ist $f_a'(2a) = 3 \cdot (2a)^2 - 12a \cdot (2a) + (2a + 12a^2)$ $= 12a^2 - 24a^2 + 2a + 12a^2$ $= 2a$ und damit $t_a(x) = 2a \cdot (x - 2a) + 4a^2 = 2a \cdot x$ Alle Wendetangenten gehen durch den Ursprung.	2

Aufgabengruppe 2

Aufgabe 4

	Lösungsskizze	**BE**
a)		1
b)	Ein Gegenbeispiel ist $f(x) = x^4$. Also gilt die Behauptung nicht wie gefordert für jede ganzrationale Funktion vierten Grades.	2
c)	 *Hinweis: Für die volle Punktzahl müssen die Ecken hinreichend spitz sein.*	2

1.2 Analytische Geometrie

1.2.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

Aufgabengruppe 1

Aufgabe 5

	Lösungsskizze	**BE**
a)	1. Es ist $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ 2-8 \\ 7-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$. 2. Es ist $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{6^2+6^2+3^2} = 9$ und $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \sqrt{1^2+8^2+4^2} = 9$. Damit sind die Längen der beiden Vektoren gleich.	2
b)	Da $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 6 \cdot 1 - 6 \cdot 8 + 3 \cdot 4 < 0$ liegt bei A ein stumpfer Winkel.	2
c)	Das Viereck ist eine Raute. *Hinweis: Allgemeinere Bezeichnungen wie Drachenviereck, Trapez, Parallelogramm werden nicht als korrekt gewertet. Hat der Prüfling in Aufgabenteil b) fälschlicherweise einen rechten Winkel ermittelt und dann folgerichtig in Aufgabenteil c) mit Quadrat geantwortet, so ist Letzteres als folgerichtig zu bewerten; in diesem Fall ist Raute nicht als korrekt zu bewerten.*	1

1.2.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

Aufgabengruppe 1

Aufgabe 6

	Lösungsskizze	BE
a)	Es sind $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{4^2+2^2+4^2}$ und $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \sqrt{2^2+4^2+4^2}$. Damit sind die beiden Vektoren gleich lang.	1
b)	Es ist $\cos(\measuredangle BAC) = \frac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$ und $\cos(\measuredangle DAB) = \frac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AD}\right\|}$. Die Nenner der beiden Brüche sind nach a) gleich. Also muss noch gezeigt werden, dass die Skalarprodukte gleich sind. Die Zähler sind: $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC} = 0\cdot 4 + 0\cdot(-2) + 9\cdot 4 = 36$ und $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AD} = 0\cdot(-2) + 0\cdot 4 + 9\cdot 4 = 36$. Damit sind die Winkel bei A in beiden Dreiecke gleich groß. *Hinweis: Eine Begründung, dass die Winkel als Innenwinkel von Dreiecken zwischen* $0°$ *und* $180°$ *liegen müssen und daher der Winkel zu einem Kosinuswert zwischen* -1 *und* 1 *eindeutig bestimmt ist, wird nicht erwartet.*	2
c)	Beide Dreiecke haben zwei Seitenlängen gemeinsam: die Länge der gemeinsamen Seite $\overline{AB}$ und die Längen der Seiten $\overline{AC}$ bzw. $\overline{AD}$. Die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel sind ebenfalls gleich. Also sind beide Dreiecke kongruent und haben somit gleichen Flächeninhalt. *Hinweis: Alternativ kann mithilfe der Flächenformel* $A = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin(\alpha)$ *begründet werden.* *Es gibt auch die aufwändigere Möglichkeit, die Flächeninhalte zu berechnen, und zwar entweder über die Feststellung, dass bei C bzw. D rechte Winkel liegen, sodass der Flächeninhalt mithilfe der Kathetenlängen zu berechnen ist, oder über die Abstandsbestimmung von C bzw. D zu der* x_3*-Achse, auf der A und B liegen. Die Abstandsbestimmung wäre in einer Ebene mit* $x_3 = 4$ *vorzunehmen. Als Flächeninhalt würde jedenfalls* $9\cdot\sqrt{5}$ *oder ein gleichwertiges Ergebnis herauskommen.*	2

1.3 Stochastik

1.3.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

Aufgabengruppe 1

Aufgabe 7

	Lösungsskizze	BE
a)	Möglicher Lösungsweg: 1. $\frac{0{,}1}{0{,}25} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ 2. $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6$	2
b)	Es ist $120 \cdot 0{,}10 + 100 \cdot 0{,}30 + 50 \cdot (0{,}30 + 0{,}30) = 72$. Der Erwartungswert ist 72 €.	3

1.3.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

Aufgabengruppe 1

Aufgabe 8

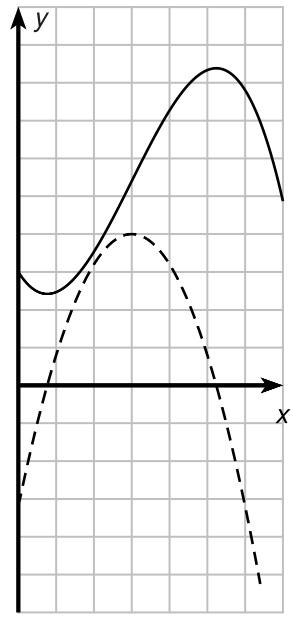
	Lösungsskizze	BE
a)	Es ist $\frac{0{,}036}{0{,}180} = 0{,}2 = \frac{1}{5}$.	1
b)	Dieser Anteil sei mit x bezeichnet. Aussortiert werden dann $0{,}9x$ fehlerhafte und $0{,}15 \cdot (1-x)$ fehlerfreie. $\frac{0{,}9x}{0{,}9x+0{,}15\cdot(1-x)} = 0{,}4$ $0{,}9x = 0{,}36x + 0{,}06 \cdot (1-x)$ $0{,}6x = 0{,}06$ $x = 0{,}10$ Der Anteil fehlerhafter Packungen in der Herstellung müsste 10 % betragen. *(Die Aufgabe kann auch über zwei Baumdiagramme gelöst werden. Dabei erhält man die Gleichung* $x \cdot 0{,}9 = ((x \cdot 0{,}9) + (1-x) \cdot 0{,}15) \cdot 0{,}4$*, die zum gleichen Ergebnis führt.)*	4

2 Analysis

2.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

2.1.1 Aufgabengruppe 1

Aufgabe 9

	Lösungsskizze	**BE**
a)	Hinweise: Für die volle Punktzahl soll der Graph der ersten Ableitung • die Schnitte mit der x-Achse in guter Genauigkeit und • eine Maximalstelle in der Nähe der Wendestelle von f besitzen. Die Höhe des lokalen Maximums braucht nicht mit der Lösungsskizze übereinzustimmen. Punktabzug ist vorzunehmen für • deutliche Ecken oder Unstetigkeiten im skizzierten Graphen, • falsche Vorzeichen der ersten Ableitung oder • sonstige offensichtliche Unstimmigkeiten.  	3
b)	*Verschiedene Begründungen sind möglich, zum Beispiel:* Der Grad ist mindestens drei, weil ... • es einen Wendepunkt gibt. • es zwei Extrempunkte gibt. *Mindestens eine der obigen Begründungen (oder eine andere korrekte) muss angegeben werden.*	2

Aufgabe 10

	Lösungsskizze	BE
a)	Es ist $e^{-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Die einzige Nullstelle ist $x = 0$.	2
b)	Die Funktion f hat an der Stelle $x = -1$ den Funktionswert $f(-1) = e^1 - 1 = e - 1$. Der y-Wert der Geraden ist $t(-1) = -e \cdot (-1) - 1 = e - 1$. Also ist $f(-1) = t(-1)$. Die Steigung der Funktion f ist gegeben durch $f'(x) = -e^{-x}$; $f'(-1) = -e^1 = -e$. Der Steigungsfaktor der Geraden ist ebenfalls gleich $-e$. Also ist die Gerade eine Tangente an den Graphen der Funktion.	3

Aufgabe 11

	Lösungsskizze	BE
a)	Die Funktion g wird dargestellt. *Mögliche Begründungen:* • Die Funktion f beschreibt eine Parabel, deren Scheitelpunkt auf der y-Achse liegt. • Die Funktion h ist eine kubische Funktion, deren Graph auch in der Umgebung eines Extremums keine so achsensymmetrische Form besitzt. *Hinweis:* *Falls die Symmetrieaspekte dem Prüfling nicht geläufig sind, kann er auch über den Probewert bei $x = -1$ die Funktion h ausschließen: $h(-1) = -1$.*	3
b)	Es ist $h'(x) = 3x^2 - 4x$, also ist die Steigung der Tangente $h'(0) = 0$. Aus $h(0) = 2$ folgt die Tangentengleichung $y = 2$.	2

Aufgabe 12

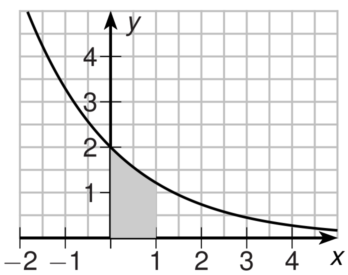
	Lösungsskizze	BE
a)	Aus $f(x) = -2x^2 + 4x = -2x(x - 2)$ folgt, dass $x = 0$ und $x = 2$ die Nullstellen sind.	2

	Lösungsskizze	BE
b)	Es ist $\int\limits_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^a (-2x^2+4x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^a = -\frac{2}{3}a^3+2a^2$. Wegen $a>0$ ist nur zu betrachten: $-\frac{2}{3}a+2=0$. Umformen ergibt: $-\frac{2}{3}a=-2$, für a ergibt sich $a=3$.	3

Aufgabe 13

	Lösungsskizze	BE
a)	$x^3+2x^2 = 0$ $x^2(x+2) = 0$ $x = 0 \quad \vee \quad x=-2$	2
b)	Es ist $\int\limits_{-2}^{0}(x^3+2x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_{-2}^{0}$ $= 0-(4-\frac{16}{3}) = \frac{4}{3}$. Der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse beträgt $\frac{4}{3}$.	3

Aufgabe 14

	Lösungsskizze	BE
a)	Es ist $f(0)=2$ und $f'(0)=-1$. Daraus ergibt sich für die Tangente im Punkt $(0\|2)$ die Gleichung $y=-x+2$.	2
b)	 Der Term lautet $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.	3

Aufgabe 15

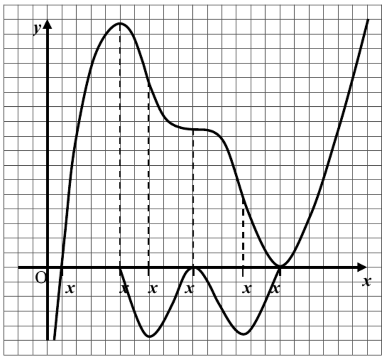
	Lösungsskizze	BE
a)	$Q(t) = 5 \cdot t^2 - 5 \cdot t + C$	1
b)	Graphik I stellt Q richtig dar. Da die Änderungsrate eine lineare Funktion ist, kann Q nicht linear sein.	2
c)	Mit $80 : 5 = 16$ und $4 + 16 = 20$ erhält man, dass zum Zeitpunkt $t = 20$ der Akku leer ist.	2

2.1.2 Aufgabengruppe 2

Aufgabe 16

	Lösungsskizze	BE
a)	Es gilt $A = \int_0^1 (-6x^2 + 12x + 18)\,\mathrm{d}x = \left[-2x^3 + 6x^2 + 18x\right]_0^1 = -2 + 6 + 18 - 0 = 22.$	2
b)	Sei $1 + a$ die Schnittstelle der Geraden mit der x-Achse. Dann gilt: $-57{,}6 = -\frac{24}{a}$ $a = \frac{24}{57{,}6}$ Für den Flächeninhalt $A_{Dreieck}$ des rechtwinkligen Dreiecks, welches aus der Geraden g, der Geraden $x = 1$ und der x-Achse gebildet wird, gilt dann: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{57{,}6} \cdot 24 = \frac{576}{2 \cdot 5{,}6} = 5$ Damit ergibt sich für den Flächeninhalt A_{links} der linken Teilfläche: $A_{links} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + 5 = 22 + 5 = 27 = \frac{1}{2} \cdot 54$	3

Aufgabe 17

	Lösungsskizze	BE
a)	Es gibt genau eine Stelle, an der das Vorzeichen der Funktion f von Minus nach Plus wechselt. Dort hat der Graph der Stammfunktion seinen Tiefpunkt. *Hinweis: Da die Begründungstiefe nicht durch den Aufgabentext vorgegeben wurde, braucht die Begründung nicht ausführlicher formuliert zu werden. (Weitere Begründungsargumente, z.B. dass die Funktion f die Steigung ihrer Stammfunktion F angibt, führen zu keinen zusätzlichen BE, können aber bei nicht vollständiger Lösung als Teillösung bewertet werden.)*	2
b)	*Mögliche Lösung*: *Hinweise:* Zur Erreichung der vollen Anzahl der BE muss der skizzierte Graph folgende Eigenschaften aufweisen: 1. Für $x_2 < x < x_6 \wedge x \neq x_4$ muss der skizzierte Graph unterhalb der x-Achse liegen. 2. Bei $x = x_2$ und $x = x_6$ muss der skizzierte Graph einen Punkt auf der x-Achse und eine Steigung ungleich 0 haben. 3. Bei $x = x_3$, $x = x_4$ und $x = x_5$ muss die Richtung des skizzierten Graphen parallel zur x-Achse sein.  Da die Achsen nicht skaliert sind, wird nicht erwartet, dass der Prüfling die von Null verschiedenen Steigungswerte des Graphen von f in Funktionswerte von f' übersetzt. Insbesondere soll für die Punktvergabe die Größenbeziehung zwischen den beiden Werten $f'(x_3)$ und $f'(x_5)$ keine Rolle spielen. *Falls der Prüfling über den Bereich* $[x_2; x_6]$ *hinaus skizziert, sind keine zusätzlichen BE zu vergeben, wohl aber können Fehler außerhalb des Bereichs* $[x_2; x_6]$ *zu einem Verlust von maximal einer der in b) erzielten BE führen.*	3

Aufgabe 18

	Lösungsskizze	BE
a)	Es ist $f'(x) = 3x^2 + 1$ und $f''(x) = 6x$. Die einzige Nullstelle der zweiten Ableitung ist $x = 0$, sie ist also die im Aufgabentext vorgegebene einzige Wendestelle. Mit $f(0) = 1$ ergibt sich der angegebene Wendepunkt.	3

	Lösungsskizze	BE
b)	Beim zweimaligen Ableiten bleibt im Term der zweiten Ableitung nur noch $6ax$ übrig, was zu der Nullstelle $x = 0$ führt, unabhängig von a und b. Außerdem ist nach wie vor $f_{a,b}(0) = 1$.	2

Aufgabe 19

	Lösungsskizze	BE
a)	Graph II ist die Ableitungsfunktion. Dort, wo I seine Extrema hat, hat II seine Nullstellen.	2
b)	$\int\limits_0^{\pi} (k \cdot \sin x)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}$ $[-k \cdot \cos x]_0^{\pi} = \frac{1}{2}$ $k + k = \frac{1}{2}$ $2k = \frac{1}{2}$ $k = \frac{1}{4}$	3

Aufgabe 20

	Lösungsskizze	BE
a)	Notwendige Bedingung für ein Minimum von Q ist $Q'(t) = 0$, also: $10t - 5 = 0$ $t = \frac{1}{2}$ Da Q laut Aufgabentext ein Minimum besitzt, muss es zum berechneten Zeitpunkt $t = \frac{1}{2}$ angenommen werden.	2
b)	Eine Gleichung zur Bestimmung von t^* ist $\int\limits_0^{t^*} Q'(t)\,\mathrm{dt} = 30$. Von Beobachtungsbeginn bis zum Zeitpunkt t^* muss die Ladungsmenge um 30 zunehmen. Die Zunahme ist gegeben durch $\int\limits_0^{t^*} Q'(t)\,\mathrm{dt}$, da dieses Integral gleich $Q(t^*) - Q(0)$ ist.	3

2.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

2.2.1 Aufgabengruppe 1

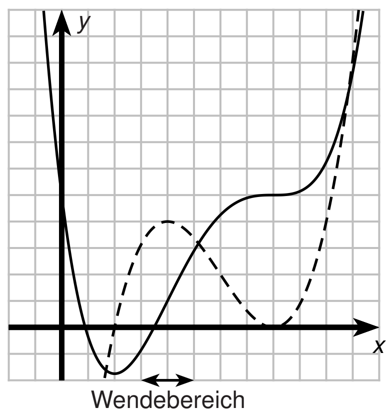
Aufgabe 21

	Lösungsskizze	BE
a)	Es gilt $H(x) = F(x) + 1$ und damit ist $H'(x) = F'(x) = f(x)$.	1
b)	Der Wert des Integrals stimmt nicht mit dem Inhalt der Fläche überein, da f im Intervall $[0; 3]$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel besitzt.	2
c)	Es ist $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(1) = 0 - (-\frac{8}{6}) = \frac{4}{3}$.	2

Aufgabe 22

<table>
<tr><th></th><th>Lösungsskizze</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
Die Abbildung sieht man rechts.
Für die volle Punktzahl soll der Graph der ersten Ableitung

- den ersten dargestellten Schnitt mit der x-Achse in guter Genauigkeit,
- die Berührung mit der x-Achse ungefähr und
- ein lokales Maximum in dem markierten „Wendebereich“



besitzen.
Die Höhe des lokalen Maximums braucht nicht mit der Lösungsskizze übereinzustimmen. Punktabzug ist vorzunehmen für

- deutliche Ecken oder Unstetigkeiten im skizzierten Graphen,
- falsche Vorzeichen der ersten Ableitung oder
- sonstige offensichtliche Unstimmigkeiten.
</td><td>3</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	BE
b)	Die Funktion f hat zwei Stellen, an denen die zweite Ableitung gleich null ist. Die Funktionsgleichung der zweiten Ableitung muss also mindestens zweiten Grades sein. Daher muss f eine Funktion mindestens vierten Grades sein. *Andere schlüssige Argumentationen sind ebenfalls als korrekt zu bewerten.*	2

Aufgabe 23

	Lösungsskizze	BE
a)	Da $e^x \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, werden die Nullstellen der Funktion durch folgenden Ansatz berechnet: $2 \cdot x + x^2 = 0$ $x \cdot (2 + x) = 0$ $x_1 = 0; \quad x_2 = -2$	2
b)	Damit F eine Stammfunktion von f ist, muss gelten: $F'(x) = f(x)$ Mithilfe der Produktregel ergibt sich: $F'(x) = 2 \cdot x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x \cdot \left(2 \cdot x + x^2\right) = f(x)$ Somit ist F eine Stammfunktion von f. Es ist $G(x) = x^2 \cdot e^x + c$, wobei $c \in \mathbb{R}$. Damit ist $x^2 \cdot e^x + c = 2e$ für $x = 1$ zu lösen. Für $c = e$ ergibt sich die gewünschte Bedingung.	3

Aufgabe 24

	Lösungsskizze	BE
a)	Beim Graphen der Funktion f_1 handelt es sich um eine nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S(0\|1)$. Diese Funktion hat ihre Nullstellen bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$. Damit liegt der Graph der Funktion in dem Intervall $[-1; 1]$ oberhalb der x-Achse und das Integral $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{dx}$ ist positiv.	2
b)	Es ist $\int\limits_{-1}^{1} f_a(x)\,\mathrm{dx} = \int\limits_{-1}^{1} (-x^2 + a)\,\mathrm{dx} = \left[-\frac{1}{3}x^3 + ax\right]_{-1}^{1} = 2 \cdot \left[-\frac{1}{3}x^3 + ax\right]_{0}^{1} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3} + a\right).$ Dann muss $a = \frac{1}{3}$ sein, damit die Bedingung erfüllt ist.	3

Aufgabe 25

	Lösungsskizze	BE
a)	Die Funktion g wird dargestellt. *Mögliche Begründungen:* Die Funktion f ist eine quadratische Funktion, deren Graph nur einen einzigen Extrempunkt haben kann. Die Funktion h ist eine biquadratische Funktion und hat damit einen achsensymmetrischen Graphen. Deshalb kommt h nicht in Frage.	3
b)	Es ist $\int\limits_0^1 h'(x)\,\mathrm{d}x = [h(x)]_0^1 = h(1) - h(0) = 3 - 1 = 2$.	2

Aufgabe 26

	Lösungsskizze	BE
a)	Aus $f_a(x) = 0$ erhält man $ax^6 - x^4 = 0$ und damit $(ax^2 - 1)x^4 = 0$. Die Gleichung hat für $a > 0$ die Lösungen $x = 0$, $x = -\sqrt{\frac{1}{a}}$ und $x = \sqrt{\frac{1}{a}}$. Für $a < 0$ hat sie nur die Lösung $x = 0$. Also hat f_a genau dann mehr als eine Nullstelle, wenn $a > 0$ gilt.	3
b)	Es ist $f_a'(x) = 6ax^5 - 4x^3$. Aus der Minimumsbedingung $f_a'(1) = 0$ erhält man $6a - 4 = 0$ und damit ist $a = \frac{2}{3}$.	2

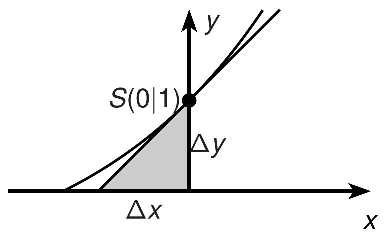
Aufgabe 27

	Lösungsskizze	BE
a)	Die Nullstellen liegen bei $x = 0$ und $x = a$.	1
b)	Es ist zunächst $f_a(x) = -a \cdot x^2 + a^2 \cdot x$ und damit $\int\limits_0^a f_a(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^a (-ax^2 + a^2x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}a^2x^2\right]_0^a = -\frac{1}{3}a^4 + \frac{1}{2}a^4 = \frac{1}{6}a^4$. Dann ist: $\frac{1}{6}a^4 = \frac{8}{3}$ $a^4 = 16$ $a = 2$ da $a > 0$	4

Aufgabe 28

	Lösungsskizze	BE
a)	Mithilfe von Kästchenzählen erhält man $\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 2{,}3$.	2
b)	$F'(2) \approx 0{,}5$	1
c)	Es gilt $\int_3^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(3) = F(b) - 0 = F(b)$. Also gilt $F(b) = \int_3^b f(x)\,\mathrm{d}x$.	2

Aufgabe 29

	Lösungsskizze	BE
a)	$f(x) = 0$ $2e^{\frac{1}{2}x} - 1 = 0$ $e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}x = \ln(\frac{1}{2})$ $x = 2 \cdot \ln(\frac{1}{2})$ Die Nullstelle ist $x = 2 \cdot \ln(\frac{1}{2})$	2
b)	 Es ist $f'(x) = e^{\frac{1}{2}x}$, $f'(0) = 1$ und $f(0) = 1$. Damit hat die Tangente die Gleichung $y = x + 1$, sie schneidet die x-Achse im Punkt $(-1\|0)$. Die Katheten im Dreieck sind $\Delta y = 1$ und $\Delta x = 1$. Damit ist das Dreieck gleichschenklig. *(Andere Lösungen, auch ohne Skizze, sind möglich.)*	3

Aufgabe 30

	Lösungsskizze	BE
a)	Es ist $\frac{n(2)-n(0)}{2-0} = \frac{392-500}{2} = -54$.	3
b)	Mit $n'(t) = 6t - 60$ erhält man $n'(t) = -30$ für $t = 5$. 5 Stunden nach Beginn der Messung beträgt die momentane zeitliche Änderung der Anzahl der Pollen pro Kubikmeter und Stunde -30.	2

Aufgabe 31

	Lösungsskizze	BE
a)	Die Konstante C ist die Ladungsmenge im Akku zum Zeitpunkt 0.	1
b)	Aus $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 18{,}75$ $5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{1}{2} + C = 18{,}75$ $-\frac{5}{4} + C = 18{,}75$ folgt $C = 20$. Somit ist $Q(4) = 5 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 + 20 = 80$. $80 : 5 = 16$. Die elektrische Ladung reicht noch für 16 Zeiteinheiten.	4

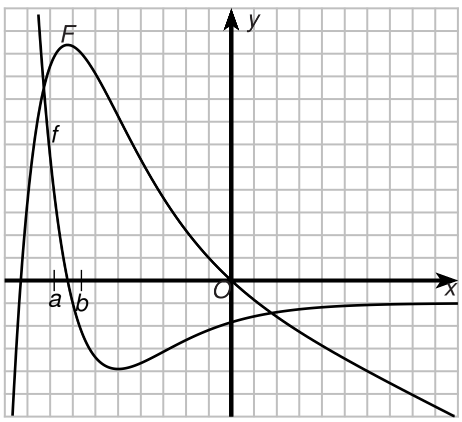
2.2.2 Aufgabengruppe 2

Aufgabe 32

	Lösungsskizze	BE
a)	Es gilt $A = \int_0^1 (-6x^2 + 12x + 18)\,\mathrm{dx} = \left[-2x^3 + 6x^2 + 18x\right]_0^1 = -2 + 6 + 18 - 0 = 22$.	2

	Lösungsskizze	BE
b)	Die gesuchte Gerade g, die Gerade $x = 1$ und die x-Achse bilden ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $A_{Dreieck}$. Es soll gelten: $A_{Dreieck} + \int_0^1 f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_0^3 f(x)\,\mathrm{dx}$, also muss $\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot a + 22 = 27$ sein, wobei a die Breite des Dreiecks ist. Es ergibt sich damit $a = \frac{5}{12}$. Für die Schnittstelle x_s der Geraden g mit der x-Achse gilt dann: $x_s = 1 + a = 1\frac{5}{12}$	3

Aufgabe 33

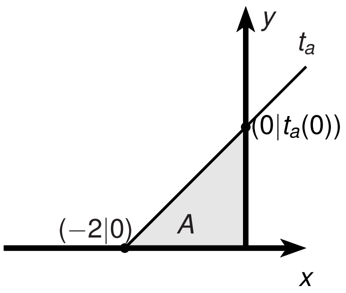
	Lösungsskizze	BE
a)	*Mögliche Beschreibung*: • Links von der Nullstelle von f verläuft der Graph der Stammfunktion monoton steigend. • Rechts von der Nullstelle von f verläuft der Graph der Stammfunktion monoton fallend.	2
b)	*(Für das Erreichen der vollen Anzahl an BE muss der skizzierte Graph)* • einen Hochpunkt im Intervall $[a; b]$ enthalten • einen Wendepunkt von Rechts- nach Linkskrümmung ungefähr an der Stelle, an der der Graph von f seinen Tiefpunkt hat, besitzen • frei von weiteren Extrem- oder Wendepunkten sein. Der Graph ist rechts zu sehen. 	3

Aufgabe 34

	Lösungsskizze	BE
a)	Es ist $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 11$ und $f''(x) = 6 \cdot x - 12$. Aus $0 = 6 \cdot x - 12$ folgt $x = 2$. Es ist $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 6 = 0$ und damit liegt der Wendepunkt $W(2\|0)$ auf der Geraden $y = x - 2$, da $0 = 2 - 2$ ist.	3
b)	Eine mögliche Funktionsgleichung für h ist $h(x) = (x-1)^3 - 6 \cdot (x-1)^2 + 11 \cdot (x-1) - 4$.	2

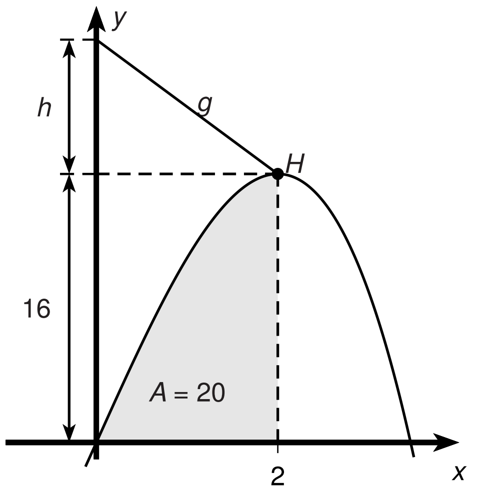
Aufgabe 35

	Lösungsskizze	BE
a)	Es ist $f_a'(x) = a \cdot e^{a+x}$ und damit $t_a(x) = f_a'(-1) \cdot (x+1) + f_a(-1)$ $= a \cdot e^{a-1} \cdot (x+1) + a \cdot e^{a-1}$ $= a \cdot e^{a-1} \cdot x + a \cdot e^{a-1} + a \cdot e^{a-1}$ $= a \cdot e^{a-1} \cdot x + 2 \cdot a \cdot e^{a-1}$.	3

	Lösungsskizze	BE
b)	Den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse erhält man mit: $a \cdot e^{a-1} \cdot x + 2 \cdot a \cdot e^{a-1} = 0$ $a \cdot e^{a-1} \cdot (x+2) = 0$ $x = -2$ Da $a \neq 0$ und da $e^{a-1} \neq 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ ist, ist $(-2\|0)$ die einzige Nullstelle von t_a. Eine mögliche, nicht erwartete Skizze:  Es ist $A(a) = \frac{2 \cdot t_a(0)}{2}$ $= t_a(0)$ $= 2 \cdot a \cdot e^{a-1}$.	2

Aufgabe 36

	Lösungsskizze	BE
a)	Es ist $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 6x^2\right]_0^2$ $= (-4+24) - 0$ $= 20.$	2

	Lösungsskizze	BE
b)	Eine mögliche Skizze:  Aus der Skizze ergibt sich: $2 \cdot 16 - 20 + \frac{h \cdot 2}{2} = 20$ $2 \cdot 16 + h = 40$ $h = 8$ Der Schnittpunkt der Geraden g mit der y-Achse ist $(0\|24)$.	3

Aufgabe 37

	Lösungsskizze	BE
a)	$C = 20$	1
b)	Interpretation: Die im Akku enthaltene elektrische Ladungsmenge ist zum Zeitpunkt T genauso groß wie zu Beobachtungsbeginn. $\int\limits_0^T Q'(t)\,\mathrm{d}t = Q(T) - Q(0) = 5T^2 - 5T$ Die Gleichung $5T^2 - 5T = 0$ hat die Lösungen $T_1 = 0$ und $T_2 = 1$. Beide Werte liegen im Intervall $[0; 4]$.	4

Aufgabe 38

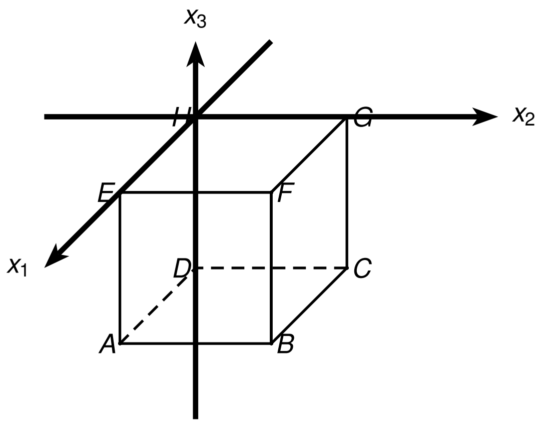
	Lösungsskizze	BE
a)	Da laut Voraussetzung $(1\|1)$ der einzige Schnittpunkt der beiden Graphen ist, gilt $f(x) - g(x) > 0$ für alle $x > 1$. Damit gilt für alle $a_1, a_2 > 1$: $a_1 < a_2 \quad \Leftrightarrow \quad \int\limits_1^{a_1} (f(x) - g(x))\,\mathrm{dx} < \int\limits_1^{a_2} (f(x) - g(x))\,\mathrm{dx}$ Laut Aufgabentext gibt es mindestens einen Wert a mit der Eigenschaft $\int\limits_1^{a} (f(x) - g(x))\,\mathrm{dx} = \frac{1}{e}$. Eine Verringerung bzw. Vergrößerung von a würde wegen der obigen Äquivalenz zu einer Verringerung bzw. Vergrößerung des Integrals führen. Also gibt es genau einen Wert a, der die geforderte Bedingung erfüllt. *Hinweis: Auch stärker anschauliche Argumentationen können zulässig sein, wenn dabei explizit Bezug darauf genommen wird, dass es für $x > 1$ keinen Schnittpunkt gibt.*	2
b)	$\frac{1}{e} = \int\limits_1^{a} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{dx}$ $\frac{1}{e} = \left[\ln(x) + \frac{1}{x}\right]_1^a$ $\frac{1}{e} = \ln(a) + \frac{1}{a} - \ln(1) - \frac{1}{1}$ $\frac{1}{e} = \ln(a) + \frac{1}{a} - 1$ Wegen $\ln(e) = 1$ ist $a = e$ der gesuchte Wert.	3

3 Analytische Geometrie

3.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

3.1.1 Aufgabengruppe 1

Aufgabe 39

	Lösungsskizze	BE
a)	Das eingezeichnete Koordinatensystem:  Es ist $A(2\|0\|-2)$. *(Auf die Skalierung der Achsen kann verzichtet werden)*	2
b)	Seien $\vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ die Ortsvektoren der Punkte F und D. Für die Gerade g_{FD}, auf der sich die Diagonale befindet, gilt: $g_{FD}: \vec{x} = \vec{f} + r \cdot \left(\vec{d} - \vec{f}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Setzt man $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$, ergibt sich für die erste Zeile: $2 - 2r = 1{,}5$ Für r ergibt sich: $r = 0{,}25$ Mit $r = 0{,}25$ werden auch die Gleichungen der zweiten und dritten Zeile gelöst.	3

Aufgabe 40

	Lösungsskizze	BE
a)	Es ist $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \left\|\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\right\|^2 = 3^2 + 4^2 = 25$.	2
b)	Das Volumen V der Pyramide ist $\frac{1}{3} \cdot 25 \cdot h = 50$, wobei h die Höhe der Pyramide ist. Somit ergibt sich $h = 6$. Mögliche z-Koordinate von S ist $z = 10$. *(Auch $z = -2$ ist richtig.)*	3

Aufgabe 41

	Lösungsskizze	BE
a)	Es sind $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}$. Da $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ nicht kollinear sind, liegt ein Dreieck vor. $E : \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.	3
b)	Es ist $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}d-1\\-1\\5\end{pmatrix}$. Aus der Orthogonalitätsbedingung $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BD} = 0$ erhält man die Gleichung $3(d-1) - 1 + 5 = 0$ und somit $d = -\frac{1}{3}$.	2

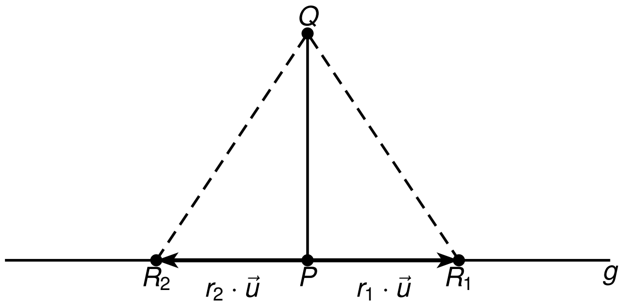
3.1.2 Aufgabengruppe 2

Aufgabe 42

	Lösungsskizze	BE
a)	Für die erste Zeile bei $2 \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix}-6\\2\\11\end{pmatrix}$ gilt: $2 \cdot (-2) + r \cdot (-4) = -6$ Damit ergibt sich $r = 0{,}5$. Dies löst auch die Gleichungen der zweiten und dritten Zeile.	2

	Lösungsskizze	BE
b)	Es ist $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ sind genau dann orthogonal zueinander, wenn für das Skalarprodukt $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = 0$ gilt: $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$. $= 2 \cdot 7 + 1 \cdot (-10) + (-2) \cdot 2 = 14 - 10 - 4 = 0$ Damit ist gezeigt, dass in B ein rechter Winkel ist.	3

Aufgabe 43

	Lösungsskizze	BE
a)	$\overline{PQ} \perp g$: $\begin{pmatrix} 3 \\ a-2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ $3 + 3(a-2) = 0$ $3 + 3a - 6 = 0$ $a = 1$	2
b)	*Nicht notwendige Skizze:*  Wertepaare: $(b; -b)$ mit $b \in \mathbb{R}$ Da die Strecke $\overline{PQ}$ senkrecht zu g steht, haben zwei Punkte R_1 und R_2 genau dann den gleichen Abstand von Q, wenn sie den gleichen Abstand von P haben. Da P der Aufpunkt von g ist haben R_1 und R_2 für $r_1 = b$ und $r_2 = -b$ für alle $b \in \mathbb{R}$ den gleichen Abstand von Q. *(Ein Ausschluss von $b = 0$ wird nicht erwartet.)*	3

Aufgabe 44

	Lösungsskizze	BE
a)	Da sich die Diagonalen des Parallelogramms gegenseitig in S halbieren, ist $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$. Mit $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2+4 \\ 9-5 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ergibt sich $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.	2
b)	Zu zeigen ist $\lvert\overrightarrow{AM}\rvert = \lvert\overrightarrow{CM}\rvert$. $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\left\lvert\overrightarrow{AM}\right\rvert = \sqrt{6^2+3^2+6^2} = 9$; $\left\lvert\overrightarrow{CM}\right\rvert = \sqrt{4^2+7^2+4^2} = 9$ Da C in ε liegt und von M den gleichen Abstand hat wie A, liegt C auf dem Thaleskreis. *Hinweis: Auch eine Lösung, die einen rechten Winkel bei C im Dreieck ABC nachweist und sich auf die Umkehrung des Thalessatzes beruft, ist möglich.*	3

3.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

3.2.1 Aufgabengruppe 1

Aufgabe 45

	Lösungsskizze	BE
a)	Es ist $\overrightarrow{AC_t} = \begin{pmatrix} -1+t \\ 2 \\ 1+t \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC_t} = \begin{pmatrix} 1+t \\ -2 \\ -1+t \end{pmatrix}$, beide Vektoren haben gleiche Komponenten, nur in verschiedener Reihenfolge bzw. mit umgedrehten Vorzeichen, also ist $\left\lvert\overrightarrow{AC_t}\right\rvert = \left\lvert\overrightarrow{BC_t}\right\rvert$	3
b)	Es ist $\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert = \sqrt{24}$. $$\begin{aligned} \left\lvert\overrightarrow{AC_t}\right\rvert &= \sqrt{24} \\ \sqrt{(-1+t)^2 + 2^2 + (1+t)^2} &= \sqrt{24} \\ 1 - 2t + t^2 + 4 + 1^2 + 2t + t^2 &= 24 \\ 2t^2 + 6 &= 24 \\ 2t^2 &= 18 \\ t &= \pm 3 \end{aligned}$$ Für $t = 3$ und für $t = -3$ ist das Dreieck ABC_t gleichseitig.	2

Aufgabe 46

	Lösungsskizze	BE
a)	Das Skalarprodukt der beiden Richtungsvektoren ist: $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \cdot a + 3 \\ 2 \\ 1 + a \end{pmatrix} = 10a + 15 + 4 - 1 - a = 9a + 18$ Die Richtungsvektoren sind senkrecht zueinander für $9a + 18 = 0$ bzw. $a = -2$. Somit stehen g und h_{-2} zueinander senkrecht.	2

	Lösungsskizze	BE
b)	Die Schnittgleichung für g und h_{-2} lautet: $\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\\-6\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ also ergeben sich die drei Gleichungen: I) $5\cdot t+s=3$ II) $2\cdot t-2\cdot s=6$ III) $-t+s=-3$ Aus III) erhält man $s=-3+t$. Einsetzen in II) ergibt $2t-2\cdot(-3+t)=6$, also eine wahre Aussage. Mit Einsetzen in I) erhält man $5t-3+t=3$, also $t=1$. Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt, dass g und h_{-2} sich schneiden.	3

Aufgabe 47

	Lösungsskizze	BE
a)	Es ergeben sich $\vec{a}\circ\vec{b}=-2+2+0=0$, $\vec{a}\cdot\vec{c_t}=8t+2t-10t=0$ und $\vec{b}\cdot\vec{c_t}=-4t+4t+0=0$. Somit wird ein Quader aufgespannt.	2
b)	Es ist t zu bestimmen mit $\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\lvert\vec{c_t}\rvert=15$. Also $\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{1+4}\cdot\sqrt{16t^2+4t^2+25t^2}=15$ $3\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{45}\cdot\lvert t\rvert=15$ $3\cdot\sqrt{225}\cdot\lvert t\rvert=15$ $t=\pm\frac{1}{3}$	3

Aufgabe 48

	Lösungsskizze	BE
a)	Es gilt $B(8\vert 0\vert 0)$ und $F(0\vert 8\vert 4)$ und damit ist $\overrightarrow{BF}=\begin{pmatrix}-8\\8\\4\end{pmatrix}$. Also ergibt sich $\lvert\overrightarrow{BF}\rvert=\sqrt{64+64+16}=\sqrt{144}=12$.	2

	Lösungsskizze	BE
b)	Es sind $M(0\|0\|2)$ und $P(4\|4\|0)$. Damit ist $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{MK} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_K \\ 2 \end{pmatrix}$. Also ist $\overrightarrow{MP} \circ \overrightarrow{MK} = 0 + 4y_K - 4 = 0$. Daraus ergibt sich $y_K = 1$. Der Punkt $K(0\|1\|4)$ erfüllt damit die geforderten Bedingungen.	3

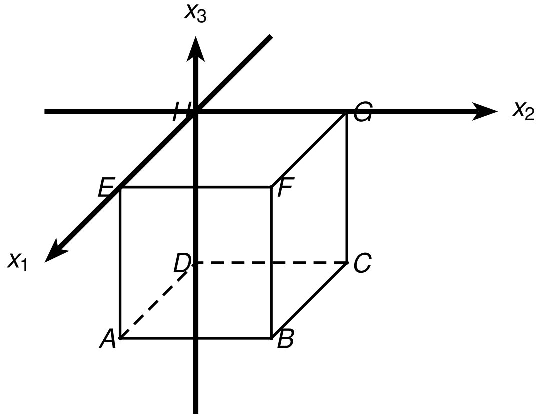
Aufgabe 49

	Lösungsskizze	BE
a)	*Abstand:* Es ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und damit $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$. *C und D bestimmen:* Mit $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$ ergibt sich $C(4\|9\|10)$. Mit $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - 2 \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$ ergibt sich $D(-4\| -7\| -6)$.	3
b)	Zwei der drei folgenden Punkte müssen genannt werden: $(3\|6\|9)$, $(1\|4\|3)$ und $(-1\| -2\|1)$	2

Aufgabe 50

	Lösungsskizze	BE
a)	Es ist $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 16 - 16 = 0$. Damit liegt bei A ein rechter Winkel vor. Da $ABCD$ ein Parallelogramm ist, ist insgesamt $ABCD$ ein Rechteck.	2
b)	Es ist $\left\|\overrightarrow{AS}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18}$ die Höhe der Pyramide. Damit ergibt sich für das Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 6 = 48$	3

Aufgabe 51

	Lösungsskizze	BE
a)	Das eingezeichnete Koordinatensystem:  Es ist $A(2\|0\|-2)$. *(Auf die Skalierung der Achsen kann verzichtet werden.)*	2
b)	Es ist $P(2\|2\|x_3)$, wobei $-2 \leq x_3 \leq 0$ ist. Dann ist $\|\overrightarrow{HP}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (x_3)^2} = 3$ und damit $(x_3)^2 = 1$. Aus $-2 \leq x_3 \leq 0$ ergibt sich $P(2\|2\|-1)$.	3

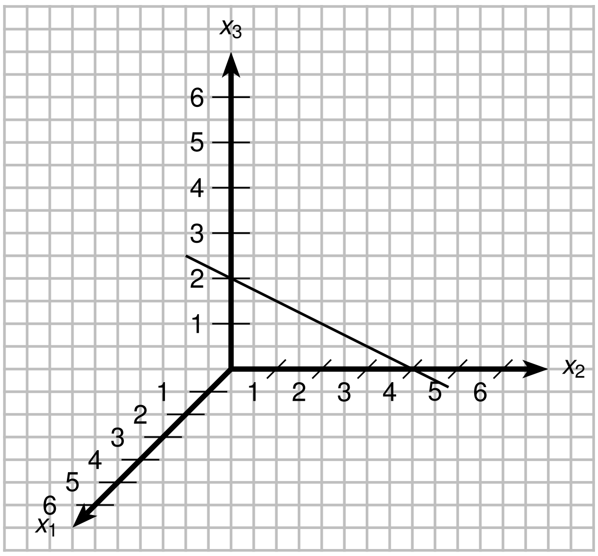
Aufgabe 52

	Lösungsskizze	BE
a)	Ein Richtungsvektor der Geraden g ist $\begin{pmatrix} 5-1 \\ 2-0 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dieser Vektor ist kollinear zum Normalenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Ebene E: $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Somit steht g senkrecht auf E.	2
b)	Der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PQ}$ ergibt sich mit $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ zu $M(3\|1\|4)$. Der Punkt $M(3\|1\|4)$ liegt in F und F ist parallel zu E. F ist also von der Form $F: 2x + y + 2z = d$ mit $d \in \mathbb{R}$. Einsetzen von M in F liefert $6 + 1 + 8 = d$ und somit $d = 15$. Also ist $F: 2x + y + 2z = 15$.	3

Aufgabe 53

	Lösungsskizze	BE
a)	Der Flächeninhalt ist: $\frac{1}{2} \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \frac{1}{2} \cdot \left\|\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\right\| \cdot \left\|\begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}\right\|$ $= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9+16} \cdot \sqrt{16+9}$ $= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5$ $= \frac{25}{2}$	2
b)	Das Volumen V der Pyramide ist $\frac{1}{3} \cdot \frac{25}{2} \cdot h = 25$, wobei h die Höhe der Pyramide ist. Daraus ergibt sich $h = 6$. Ein möglicher Punkt ist $D(3\|3\|9)$. *(Jede Punktangabe, mit einer x_3-Koordinate $x_3 = 9$ oder $x_3 = -3$ ist als richtig zu bewerten.)*	3

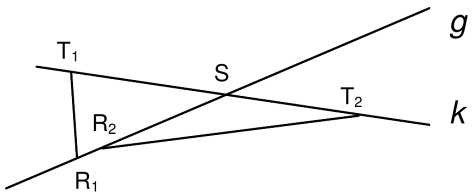
Aufgabe 54

	Lösungsskizze	BE
a)		2

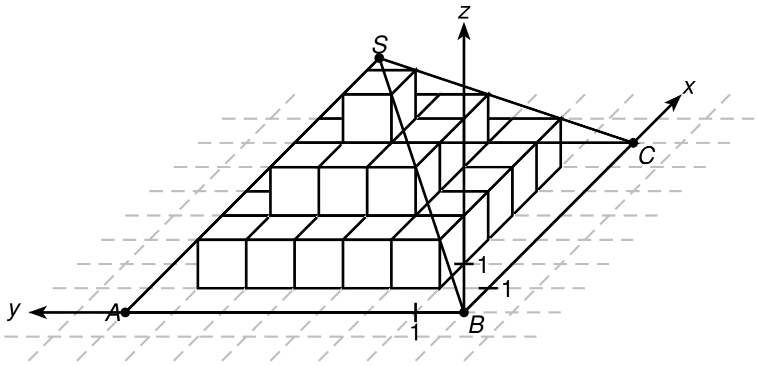
	Lösungsskizze	BE
b)	Einsetzen von g in E liefert: $$\begin{aligned} 2+2\lambda+1-\lambda-4-6\lambda &= 4 \\ -1-5\lambda &= 4 \\ -5\lambda &= 5 \\ \lambda &= -1 \end{aligned}$$ Einsetzen in g liefert den Punkt $S(0\|2\|1)$.	3

3.2.2 Aufgabengruppe 2

Aufgabe 55

	Lösungsskizze	BE
a)	Durch Gleichsetzen erhält man das folgende lineare Gleichungssystem: $$\begin{aligned} \text{I)}\quad -3-r &= 4+5s \\ \text{II)}\quad 6+r &= 3-3s \\ \text{III)}\quad -4+3r &= a+s \end{aligned}$$ Mit I) + II) erhält man $3 = 7 + 2s$ und damit $s = -2$. Einsetzen in II) liefert $r = 3$. Mit III) erhält man $5 = a - 2$ und damit $a = 7$.	3
b)	Eine mögliche Antwort: Wenn die Geraden nicht senkrecht zueinander sind, gibt es bei S zwei verschiedene Winkel, die beide als Scheitelwinkel des Dreiecks in Frage kommen und zu unterschiedlichen Seitenlängen führen.  	2

Aufgabe 56

	Lösungsskizze	BE
a)	Volumen der Stufenpyramide: 35 Höhe der Pyramide: 3,5	2
b)	Eine mögliche Wahl des Koordinatensystems:  Mit dieser Wahl ergibt sich $g: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ r \in \mathbb{R}$.	3

Aufgabe 57

	Lösungsskizze	BE
a)	Es ist $2 \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Mit $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -2 - c_1 \\ 1 - c_2 \\ 4 - c_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich C zu $C(2\|3\|0)$.	2
b)	Es ist zunächst $g(A, B): \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Die Bedingung I ist z. B. mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ erfüllt. Es ist $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rvert = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$. Also kann B als Aufpunkt der Geraden l gewählt werden: $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	3

Aufgabe 58

	Lösungsskizze	BE
a)	Schnittpunkt von E mit der x_1-Achse ist $X_1(-9\|0\|0)$. Schnittpunkt von E mit der x_2-Achse ist $X_2(0\|-18\|0)$. Das Dreieck X_1X_2O hat die Fläche $\frac{9\cdot 18}{2} = 81$.	2
b)	Jeder Normalenvektor von E hat die Form $\begin{pmatrix} 2r \\ r \\ -2r \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ Als Ortsvektor eines Punktes der Ebene E müssen die durch seine Komponenten gegebenen Punktkoordinaten die Ebenengleichung erfüllen. Einsetzen in die Gleichung ergibt: $\begin{aligned} 2\cdot 2r + r - 2\cdot(-2r) &= -18 \\ 9r &= -18 \\ r &= -2 \end{aligned}$ Der gesuchte Ortsvektor $\vec{v}$ ist: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$	3

Aufgabe 59

	Lösungsskizze	BE
a)	Zu der Grundseite $\overline{PQ}$ ist die Höhe h des Dreiecks der Abstand des Punktes R zu $\overline{PQ}$. Da R zu M den gleichen Abstand hat wie P, ist die maximale Höhe des Dreiecks $h_{\max} = \left\|\overrightarrow{MP}\right\|$. Also ist $A_{PQR} \leq \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{MP}\right\|$, und da $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \left\|\overrightarrow{MP}\right\|$ ist, gilt $A_{PQR} \leq \left\|\overrightarrow{MP}\right\|^2$.	2

	Lösungsskizze	BE
b)	Da R vom Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ den gleichen Abstand wie P hat, liegt R in der Ebene ε auf dem Thaleskreis zur Strecke $\overline{PQ}$. Daher liegt im Dreieck PQR ein rechter Winkel bei R. Somit ergibt das Skalarprodukt der Seitenvektoren $\overrightarrow{RP}$ und $\overrightarrow{RQ}$ den Wert 0. *Alternativ-Lösung (aufwändiger, aber ebenfalls zielführend):* $\overrightarrow{RP} \circ \overrightarrow{RQ} = \left(\overrightarrow{RM} + \overrightarrow{MP}\right) \circ \left(\overrightarrow{RM} + \overrightarrow{MQ}\right)$ $= \overrightarrow{RM} \circ \overrightarrow{RM} + \overrightarrow{RM} \circ \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MP} \circ \overrightarrow{RM} + \overrightarrow{MP} \circ \overrightarrow{MQ}$ $= \left\lvert\overrightarrow{RM}\right\rvert^2 + \overrightarrow{RM} \circ \left(\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MP}\right) + \overrightarrow{MP} \circ \overrightarrow{MQ}$ Da der Abstand von M zu P und R gleich ist, ist $\left\lvert\overrightarrow{RM}\right\rvert^2 = \left\lvert\overrightarrow{MP}\right\rvert^2$. Da M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ ist, gilt $\overrightarrow{MQ} = -\overrightarrow{MP}$, woraus $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{0}$ und $\overrightarrow{MP} \circ \overrightarrow{MQ} = -\left\lvert\overrightarrow{MP}\right\rvert^2$ folgt. Also ist $\overrightarrow{RP} \circ \overrightarrow{RQ} = \left\lvert\overrightarrow{MP}\right\rvert^2 + \overrightarrow{RM} \circ \overrightarrow{0} - \left\lvert\overrightarrow{MP}\right\rvert^2 = 0.$	3

4 Lineare Algebra

4.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

4.1.1 Aufgabengruppe 1

Aufgabe 60

	Lösungsskizze	**BE**
a)	100 ME von E_1: $2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$; es werden 300 ME von R_1 benötigt. $2 \cdot 1 = 2$; es werden 200 ME von R_2 benötigt. 100 ME von E_2: $1 \cdot 2 = 2$; es werden 200 ME von R_1 benötigt. $2 \cdot 2 = 4$; es werden 400 ME von R_2 benötigt. 50 ME von Z_2: Es werden 50 ME von R_1 und 100 ME von R_2 benötigt. *Hinweis: Die Lösungswege können auch anders dargestellt werden.*	3
b)	Die angegebenen Rohstoffmengen ergeben die Gleichungen $I: a \cdot 1 + b \cdot 1 = 2$ und $II: b \cdot 2 = 1$. Die Lösungen sind $a = 1{,}5$ und $b = 0{,}5$.	2

Aufgabe 61

	Lösungsskizze	**BE**
a)	Mit dem Gauß-Verfahren kommt man auf die folgende Stufenform: $\left(\begin{array}{ccc\|c} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot (-1) \\ \\ + \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ Damit ist $x_3 = 1$, $x_2 = -1$ und $x_1 = 2$. Es ist $L = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.	3

	Lösungsskizze	BE
b)	Für $a = 2$ ist die vierte Gleichung das (-2)-fache der ersten Gleichung, sodass sie die Lösungsmenge nicht verändert.	2

Aufgabe 62

	Lösungsskizze	BE
a)	$A + B$ ist nicht definiert, da beide Matrizen eine unterschiedliche Anzahl von Zeilen haben. $A \cdot B$ ist definiert, da die Anzahl der Spalten von A mit der Anzahl der Zeilen von B übereinstimmt.	2
b)	Aus $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ folgt $\begin{pmatrix} 3a & 3b \\ a + 2c & b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Aus der ersten Zeile der Matrix ergibt sich $a = \frac{1}{3}$ und $b = 0$. Damit liefert die zweite Zeile $\frac{1}{3} + 2c = 0$ bzw. $c = -\frac{1}{6}$ und $2d = 1$ bzw. $d = \frac{1}{2}$. Damit ist $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.	3

Aufgabe 63

	Lösungsskizze	BE
a)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} \\ \frac{6}{7} & \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ *Hinweis: Für die beiden Einträge in der letzten Spalte sind auch andere Werte möglich.*	2
b)	Es gilt $\vec{w} = N \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & t \\ 0{,}5 & 1 - t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5a + t \cdot b \\ 0{,}5a + (1 - t) \cdot b \end{pmatrix}$. Spaltensumme $\vec{v}$: $a + b$ Spaltensumme $\vec{w}$: $0{,}5a + t \cdot b + 0{,}5a + (1 - t) \cdot b = a + t \cdot b + b - t \cdot b = a + b$ $\vec{v}$ und $\vec{w}$ haben also dieselbe Spaltensumme.	3

4.1.2 Aufgabengruppe 2

Aufgabe 64

	Lösungsskizze	BE
a)	Es gilt: • $1 + 0 = 1$ • $a(2 - a) + (1 - a)^2 = 2a - a^2 + 1 - 2a + a^2 = 1$ Damit ist die erste Bedingung erfüllt.	2
b)	• Die Zahlen 0 und 1 sind nicht negativ. • $a(2 - a)$ ist nicht negativ, weil wegen $a \geq 0$ der erste Faktor und wegen $a \leq 1$ der zweite Faktor nicht negativ ist. • $(1 - a)^2$ ist nicht negativ, weil Quadrate nie negativ sind. Damit ist die zweite Bedingung erfüllt.	3

4.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

4.2.1 Aufgabengruppe 1

Aufgabe 65

	Lösungsskizze	**BE**
a)	Aus dem Übergangsgraphen ergibt sich $M = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 1 \\ 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}$. Es ist $N = M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 1 \\ 0{,}6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 & 1 \\ 0{,}6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4^2 + 1 \cdot 0{,}6 & 0{,}4 \cdot 1 \\ 0{,}6 \cdot 0{,}4 & 0{,}6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}76 & 0{,}4 \\ 0{,}24 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.	3
b)	Langfristig werden sich die Bestände zu $\frac{5}{8}$ auf A und $\frac{3}{8}$ auf B verteilen. *Alternativformulierung: Die Bestände werden sich auf A und B im Verhältnis* 5 : 3 *verteilen.* *Gemäß dem Operator „Beschreiben“ ist die Darstellung eines Lösungsweges nicht gefordert, sie kann aber bei fehlendem Ergebnis zur Vergabe einer Bewertungseinheit führen.*	2

Aufgabe 66

	Lösungsskizze	**BE**
a)	Mit dem Gauß-Verfahren kommt man auf die folgende Stufenform: $\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 3 & 5 & 13 \\ -2 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$ + $\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 3 & 5 & 13 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot (-1) \\ \mid \cdot 5 \end{array}$ + $\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 3 & 5 & 13 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \frac{1}{5} \\ \\ \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 3 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ Das Gleichungssystem enthält somit einen Widerspruch, $L = \{\}$.	3
b)	In der dritten Zeile werde die 2 durch eine 1 ersetzt, dann ergeben die Umformungen die Matrix $\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & 3 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, die ein unterbestimmtes Gleichungssystem beschreibt.	2

Aufgabe 67

	Lösungsskizze	BE
a)	Mit den Matrizen A bzw. B lässt sich die Verflechtung der Rohstoffe mit den Zwischenprodukten bzw. die Verflechtung der Zwischenprodukte mit den Endprodukten beschreiben. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; $A \cdot B = P = \begin{pmatrix} ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ 40 & 28 & 52 \end{pmatrix}$ Die Produktmatrix P beschreibt die Verflechtung von Rohstoffen und Endprodukten. Die Summe der Elemente in der dritten Zeile beschreibt den Bedarf an Rohstoffen R_3 für eine Produktion von je einer ME der Endprodukte: $40+28+52 = 120$. *Hinweise: Im Rahmen der Aufgabenstellung ist lediglich die letzte Zeile der Rohstoff/Endproduktmatrix von Interesse. Fehler in den ersten beiden Zeilen führen insgesamt zu maximal 1 BE Abzug von den ansonsten in Teil a) erzielten Bewertungseinheiten.* *Alternative Ansätze, z.B. eine direkte Berechnung, sind denkbar.*	3
b)	Bei der Produktion von Z_1 und Z_2 in gleichen ME werden $6 \cdot x + 2 \cdot x$ ME von R_3 benötigt. Aus $6 \cdot x + 2 \cdot x = 40$ folgt $x = 5$, d. h. es lassen sich noch je 5 ME der jeweiligen Zwischenprodukte produzieren.	2

Aufgabe 68

	Lösungsskizze	BE
a)	Berechnung des Produktes: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ Es müssen zwei Vektoren der Form $\begin{pmatrix} k \\ -k \\ 2 \end{pmatrix}$ $(k \in \mathbb{R},\ k \neq 2)$ genannt werden.	3
b)	Es ist $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ 4-k \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+4-k \\ k+4-k \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.	2

Aufgabe 69

	Lösungsskizze	BE
a)	Die letzten beiden Gleichungen kann man zur Gleichung $x_3 = 5$ zusammenfassen. Damit ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem, welches z.B. mit dem Gauß-Verfahren lösbar ist: $\left(\begin{array}{ccc\|c}1&2&3&23\\1&1&1&10\\0&0&1&5\end{array}\right)\begin{array}{l}\mid\cdot(-1)\\ \longleftarrow_{+}\\ \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc\|c}1&2&3&23\\0&-1&-2&-13\\0&0&1&5\end{array}\right)\ \mid\cdot(-1)$ $\left(\begin{array}{ccc\|c}1&2&3&23\\0&1&2&13\\0&0&1&5\end{array}\right)$ Somit ist $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 5$. Die Lösungsmenge ist $L = \left\{\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}\right\}$.	3
b)	Die dritte Gleichung kann weggelassen werden, da sie sich als Differenz zwischen der ersten und zweiten Gleichung darstellen lässt.	2

Aufgabe 70

	Lösungsskizze	BE
a)	$RZ \cdot ZE = RE$	1
b)	Eine ME von E_2 enthält 16 ME von R_1. $2 \cdot 5 + 3 \cdot b = 16$ ergibt $b = 2$ Eine ME von E_3 enthält 25 ME von R_2. $4a + 3 \cdot 3 = 25$ ergibt $a = 4$.	4

Aufgabe 71

	Lösungsskizze	BE
a)	Mit $N \cdot \vec{w} = \vec{w}$ ergibt sich das folgende zu lösende lineare Gleichungssystem: I) $0{,}7 \cdot 100 + 0{,}3 \cdot 70 + 0{,}3 \cdot 30 = 100$ II) $a \cdot 100 + 0{,}5 \cdot 70 + 0{,}5 \cdot 30 = 70$ III) $b \cdot 100 + 0{,}2 \cdot 70 + 0{,}2 \cdot 30 = 30$ I) ist erfüllt. Aus II) ergibt sich $a = 0{,}2$ und aus III) $b = 0{,}1$. Mit diesen Werten ist $\vec{w}$ ein Fixvektor der Matrix N. Mit den errechneten Werten für a und b sind alle Matrixelemente nichtnegativ und alle Spaltensummen haben den Wert 1. Damit ist M eine stochastische Matrix.	3
b)	Es ist $L \cdot \vec{z} = L \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = L \cdot \vec{x} + L \cdot \vec{y} = \vec{x} + \vec{y} = \vec{z}$. Somit ist $\vec{z}$ ebenfalls ein Fixvektor von L.	2

Aufgabe 72

	Lösungsskizze	BE
a)	Die Matrix, die zwei Übergänge zusammenfasst, ist $M \cdot M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}76 & 0{,}72 \\ 0{,}24 & 0{,}28 \end{pmatrix}$.	2
b)	N liefert im ersten Schritt $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$. Mit $N \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$ erhält man, dass $\begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$ ein Fixvektor von N ist. Damit liefert N die dargestellten Anteile im Zustand A.	3

Aufgabe 73

	Lösungsskizze	BE
a)	Aus der dritten Gleichung folgt $x_3 = 3 - x_2$. Einsetzen in die zweite Gleichung liefert $x_2 = 1$. Einsetzen in die erste und dritte Gleichung ergibt $x_1 = 5$ und $x_3 = 2$. Es ist $L = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.	2

	Lösungsskizze	BE
b)	• $p = 1$ • Für $p \neq 1$ liefern die erste und dritte Gleichung $x_3 = 0$. Damit führen die erste und zweite Gleichung zu einem Widerspruch. Also gibt es für kein p eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems.	3

Aufgabe 74

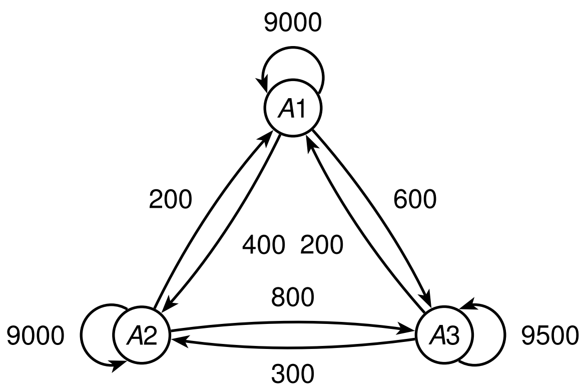
	Lösungsskizze	BE
a)	$\begin{pmatrix} 0 & 0{,}7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$	2
b)	Es handelt sich um Abbildung II. Aus dem Übergangsdiagramm ergibt sich: • Zum Zeitpunkt 0 ist R_1 laut Aufgabentext mit 50 Ratten gefüllt. • Zum Zeitpunkt 1 sind alle diese Ratten in R_2, R_1 ist also leer. • Zum Zeitpunkt 2 hat R_2 alle 50 Ratten in die beiden benachbarten Räume verteilt und ist leer. • Zum Zeitpunkt 3 gibt R_1 alle seine Ratten ab, bekommt aber vom leeren Raum R_2 nichts dazu, R_1 ist also leer. Nur in Abbildung II ist R_1 zum Zeitpunkt 3 leer.	3

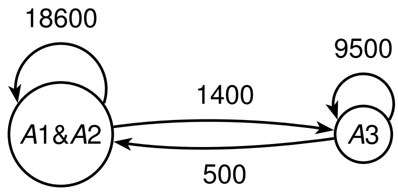
4.2.2 Aufgabengruppe 2

Aufgabe 75

	Lösungsskizze	BE
a)	Es ist $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Also ist $M^3 \cdot \vec{x} = \vec{x}$. *Hinweis: Wenn mit einem speziellen Beispiels-Zustandsvektor ohne die Potenzen von M gerechnet wird, bis derselbe wieder herauskommt, ist ein Punkt Abzug vorzunehmen.*	3
b)	Aus $L^n = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = k \cdot E$ folgt, dass sich jeder Zustandsvektor im Laufe von n Schritten um den Faktor k vervielfacht hat.	2

Aufgabe 76

	Lösungsskizze	BE
a)	 Insgesamt wechseln 2500 Kunden innerhalb des ersten Jahres ihren Anbieter.	2

<table>
<tr><th></th><th>Lösungsskizze</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>b)</td><td>Der ausgefüllte Graph:

Die ausgefüllte Tabelle:
<table>
<tr><th>von / nach</th><th>$A1\&A2$</th><th>$A3$</th></tr>
<tr><td>$A1\&A2$</td><td>0,93</td><td>0,05</td></tr>
<tr><td>$A3$</td><td>0,07</td><td>0,95</td></tr>
</table>
</td><td>3</td></tr>
</table>

Aufgabe 77

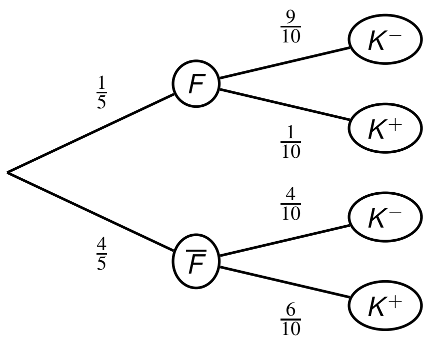
<table>
<tr><th></th><th>Lösungsskizze</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Es ist $U_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $U_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Die erste Zeile wird zur zweiten Zeile addiert.
$U_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dadurch wird die erste Zeile wieder von der zweiten Zeile subtrahiert, sodass der Ausgangszustand hergestellt wird.
Hinweis: Es wird nicht erwartet, dass beschrieben wird, dass die erste und dritte Zeile gleich bleiben.</td><td>3</td></tr>
</table>

5 Stochastik

5.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

5.1.1 Aufgabengruppe 1

Aufgabe 78

	Lösungsskizze	**BE**
a)	Dies kann zum Beispiel mithilfe eines Baumdiagrammes gelöst werden. Dabei gilt: F: Bauteil ist fehlerhaft. $\overline{F}$: Bauteil ist nicht fehlerhaft. K^-: Bauteil wird bei Kontrolle als fehlerhaft eingestuft. K^+: Bauteil wird bei Kontrolle als nicht fehlerhaft eingestuft.  Es ergibt sich somit $P\left(\overline{F} \cap K^+\right) = \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{10} = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$. *Bei der Lösung mithilfe des Baumdiagramms kann auf einen Eintrag der bedingten Wahrscheinlichkeiten nach F verzichtet werden. Die anderen Zweigwahrscheinlichkeiten sind für einen vollständig dargestellten Lösungsweg erforderlich.* *Das Baumdiagramm ist nicht erforderlich. Es kann stattdessen auch damit argumentiert werden, dass $P\left(\overline{F}\right) = 0{,}8$ und $P\left(K^+ \middle\vert \overline{F}\right) = 0{,}6$ gilt.* *Alternativ ist auch eine Lösung mithilfe einer Vierfeldertafel möglich.*	2
b)	Mithilfe des Baumdiagramms aus Aufgabenteil a) ergibt sich das Folgende: $P(\text{Kontrolleure haben das Bauteil nicht korrekt eingestuft}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} = \frac{17}{50}$	3

Aufgabe 79

	Lösungsskizze	**BE**
a)	Alle Werte p, für die gilt $0 < p < \frac{1}{3}$, sind möglich. Eine zulässige Lösung ist z. B. die folgende: $p = 0{,}1$ oder $p = \frac{1}{4}$	2

	Lösungsskizze	BE
b)	Die Wahrscheinlichkeit für „Gelb“ ergibt sich aus den Wahrscheinlichkeiten für „Rot“ und „Blau“ wie folgt: $P(\text{Gelb}) = 1 - p - 2p = 1 - 3p$ Damit gilt: $P(E) = (1 - 3p)^2 = 1 - 6p + 9p^2 = 9p^2 - 6p + 1$	3

Aufgabe 80

	Lösungsskizze	BE
a)	$0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}32$ Es ist zu erwarten, dass die Samen zu 32 % rot blühende Blumen hervorbringen.	2
b)	*Mögliche Lösung:* Für den Anteil a der Samen von der weiß blühenden Variante muss gelten: $a \cdot 0{,}8 + (1 - a) \cdot 0{,}4 = 0{,}5$ Die Auflösung nach a ergibt $a = 0{,}25$. Er muss der Mischung zu einem Viertel Samen der weiß blühenden Variante beigeben.	3

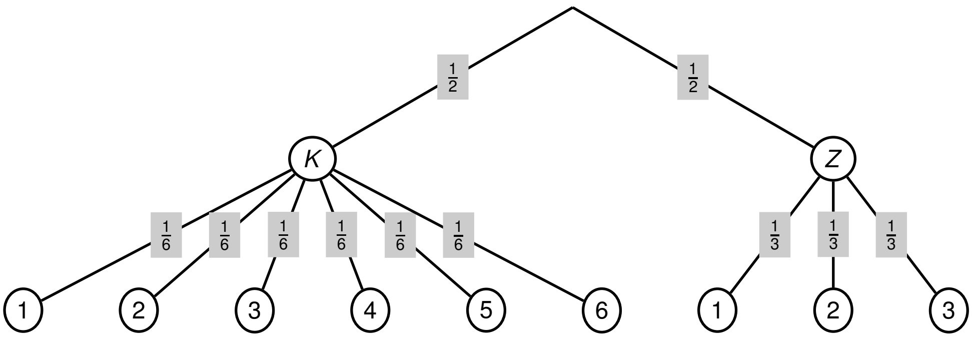
Aufgabe 81

	Lösungsskizze	BE
a)	Da die maximale Anzahl an Erfolgen $k = 2$ ist, ist $n = 2$. Für $k = 2$ muss die Wahrscheinlichkeit p^2 betragen, also ist $p^2 = 0{,}16$ und $p = 0{,}4$. Der Erwartungswert ist $E = n \cdot p = 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8$.	3
b)	Die Säulen 1 und 3 werden vertauscht. Säule 2 bleibt erhalten.	2

Aufgabe 82

	Lösungsskizze	BE
a)	Es ist $P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$ $\approx 0{,}30 + 0{,}27 + 0{,}11$ $= 0{,}68 = 68\ \%$. *Eine Abweichung um* 0,02 *ist zu tolerieren.*	2
b)	Der Wert für $P(X = 2)$ ist nur sehr klein. Für $k = 2$ handelt es sich aber nicht um ein unmögliches Ereignis, denn genau zwei Treffer sind bei 10 Freiwürfen möglich.	3

Aufgabe 83

	Lösungsskizze	BE
a)	K: Es wurde Kopf geworfen Z: Es wurde Zahl geworfen. 	3
b)	$P(\text{gerade}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ $= \frac{5}{12}$	2

Aufgabe 84

	Lösungsskizze	BE
a)	$P(5 \leq X \leq 7) \approx 0{,}19 + 0{,}21 + 0{,}18 = 0{,}58$ *Eine Abweichung von 0,05 ist zu tolerieren.*	2

	Lösungsskizze	BE
b)	Es gelten die beiden Gleichungen I) $n \cdot p = 6$ II) $n \cdot p \cdot (1 - p) = 3{,}6$ Einsetzen von I) in II) liefert $6 \cdot (1 - p) = 3{,}6$ und somit $p = 0{,}4$. Damit liefert $n \cdot 0{,}4 = 6$, dass $n = 15$ ist.	3

5.1.2 Aufgabengruppe 2

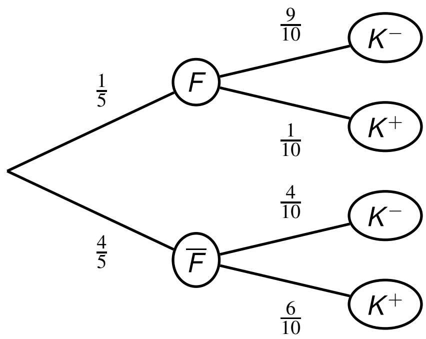
Aufgabe 85

	Lösungsskizze	BE
a)	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$	2
b)	$P(U_1) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{12}{30}$	3

5.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

5.2.1 Aufgabengruppe 1

Aufgabe 86

	Lösungsskizze	**BE**
a)	Dies kann zum Beispiel mithilfe eines Baumdiagrammes gelöst werden. Dabei gilt: F: Bauteil ist fehlerhaft. $\overline{F}$: Bauteil ist nicht fehlerhaft. K^-: Bauteil wird bei Kontrolle als fehlerhaft eingestuft. K^+: Bauteil wird bei Kontrolle als nicht fehlerhaft eingestuft.  Es ergibt sich somit $P\left(\overline{F} \cap K^+\right) = \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{10} = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$. *Bei der Lösung mithilfe des Baumdiagramms kann auf einen Eintrag der bedingten Wahrscheinlichkeiten nach F verzichtet werden. Die anderen Zweigwahrscheinlichkeiten sind für einen vollständig dargestellten Lösungsweg erforderlich.* *Das Baumdiagramm ist nicht erforderlich. Es kann stattdessen auch damit argumentiert werden, dass $P\left(\overline{F}\right) = 0{,}8$ und $P\left(K^+ \middle\vert \overline{F}\right) = 0{,}6$ gilt.* *Alternativ ist auch eine Lösung mithilfe einer Vierfeldertafel möglich.*	2
b)	Es ist $P(F\,\vert K^+) = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}1}{0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot 0{,}6} = 0{,}04$. *Auch eine Lösung mithilfe einer Vierfeldertafel ist möglich. Es ergibt sich dann:* $P(F\,\vert K^+) = \frac{2}{50} = 0{,}04$.	3

Aufgabe 87

	Lösungsskizze	**BE**
a)	Es ist $0 < p < \frac{1}{3}$.	2

	Lösungsskizze	BE
b)	Mit den Abkürzungen. R: In einer Drehung tritt „Rot“ auf. $\overline{R}$: In einer Drehung tritt nicht „Rot“ auf. gilt: Für eine Drehung ist $P\left(\overline{R}\right) = 1 - 2p$. Daraus folgt: $P(E) = 1 - P\left(\overline{R}\overline{R}\right) = 1 - (1-2p)^2 = 1 - \left(1 - 4p + 4p^2\right) = 4p - 4p^2$. *Alternativlösung:* $P(E) = P(RR) + P\left(R\overline{R}\right) + P\left(\overline{R}R\right) = 2p \cdot 2p + 2p \cdot (1-2p) + (1-2p) \cdot 2p$ $= 4p^2 + 2p - 4p^2 + 2p - 4p^2$ *Weitere Alternativen, z. B. solche, bei denen anstelle von $P\left(\overline{R}\right)$ die Wahrscheinlichkeiten $P(B) = p$ und $P(G) = 1 - 3p$ Verwendung finden, sind ebenfalls möglich. Dabei stehen B und G für das Auftreten der Farben blau und gelb.*	3

Aufgabe 88

	Lösungsskizze	BE
a)	*rrwww*; *rrrww*; *rwwww*	2
b)	Es ist $P(E) = P(ww) + P(rr) = \frac{3}{10} + \frac{4}{15} = \frac{17}{30}$. Aussage: E ist wahrscheinlicher als sein Gegenereignis, da $P(\overline{E}) = 1 - \frac{17}{30} = \frac{13}{30}$. *Hinweis: Natürlich kann als Begründung auch $\frac{17}{30} > \frac{1}{2}$ genannt werden.*	3

Aufgabe 89

	Lösungsskizze	BE
a)	Ansatz für Erwartungswert: x_i: 0, 1, 2 $P(X = x_i)$: $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{9}$ Damit ist $E(X) = 0 \cdot \frac{4}{9} + 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$.	2
b)	Es ist $P_C(2) = \frac{P(2) \cdot P_2(C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{5}$.	3

Inner table of Aufgabe 89 a):

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

Aufgabe 90

	Lösungsskizze	BE
a)	Für den Erwartungswert E ergibt sich: $E(X) = (-2) \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}5 = 0{,}75$	2
b)	Die Summe der Werte kann in drei Fällen negativ sein. Es sind die Wahrscheinlichkeiten $P(-2\|-2)$, $P(-2\|1)$ und $P(1\|-2)$ zu bestimmen. Es ist $P(-2\|-2) = \frac{1}{16} = P(-2\|1) = P(1\|-2)$ und somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $p = \frac{3}{16}$.	3

Aufgabe 91

	Lösungsskizze	BE
a)	• $\binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)$ • $p^2 \cdot (1-p)^3$	3
b)	*Als richtig sind alle Antworten zu werten, die sachkontextualen Gründe für eine fehlende Konstanz der Trefferwahrscheinlichkeit beinhalten.* Beispiel: Trifft der Biathlet bei keinem der ersten drei Schüsse, so hat er möglicherweise aufgrund zunehmender Nervosität beim vierten Schuss eine geringere Trefferwahrscheinlichkeit.	2

Aufgabe 92

	Lösungsskizze	BE
a)	Es ist $P(X \geq 8) = P(X=8) + P(X=9) + P(X=10)$ $\approx 0{,}3 + 0{,}27 + 0{,}11$ $= 0{,}68 = 68\ \%.$ *Eine Abweichung um* 0,02 *ist zu tolerieren.*	2

	Lösungsskizze	BE
b)	Es ist $P(X=0)=0{,}2^{10}$ Weiter ist $0{,}2^{10} = \frac{2^{10}}{10^{10}} = \frac{1024}{10^{10}} = 1{,}024 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}$.	3

Aufgabe 93

	Lösungsskizze	BE
a)	Die einzelnen Elemente der Ergebnismenge sind wegen der unterschiedlichen Anzahl an Würfen nicht gleichwahrscheinlich. Somit liegt kein Laplace-Experiment vor.	2
b)	Es ist $P(X=2)=P(ZZ)+P(WW)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ Damit gilt $P(X=3)=1-P(X=2)=\frac{1}{2}$ und insgesamt $E(X)=\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 3=2{,}5$.	3

Aufgabe 94

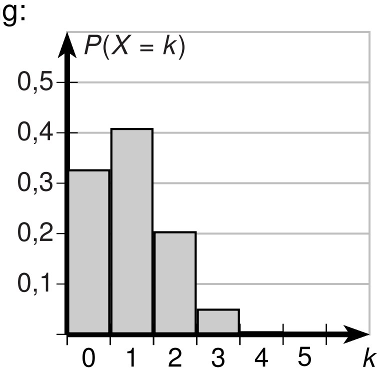
	Lösungsskizze	BE
a)	$0{,}75^8 \cdot 0{,}25^2$	2
b)	Abbildung I zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X. X ist binomialverteilt, der Erwartungswert von X ist $6 \cdot 0{,}25 = 1{,}5$. Abbildung II zeigt eine Gleichverteilung. Abbildung III eine Verteilung mit einem Erwartungswert, der größer als 1,5 ist.	3

5.2.2 Aufgabengruppe 2

Aufgabe 95

	Lösungsskizze	BE
a)	p: Wahrscheinlichkeit, dass die Reißzwecke in einem Wurf auf Kopf fällt (K) Bei zwei Würfen ist $P(K, K) = p^2$ und $P(\text{mindestens einmal } \overline{K}) = 1 - p^2 = 0{,}84$. Daraus folgt $p^2 = 0{,}16$ und $p = 0{,}4$. Somit ist bei zwei Würfen $P(\text{genau einmal } K) = P(K, \overline{K}) + P(\overline{K}, K) = 2 \cdot p \cdot (1 - p) = 0{,}48$. Die Wahrscheinlichkeit, bei zwei Würfen genau einmal Kopflage zu erhalten, beträgt 0,48.	5

Aufgabe 96

	Lösungsskizze	BE
a)	$P(X_1 = 1) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^4$	1
b)	Eine mögliche Antwort ist: Der Term gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass bei Zugrundelegung von X_1 zwei oder weniger Treffer erzielt werden.	2
c)	Darstellung der Verteilung:  	2

Aufgabe 97

	Lösungsskizze	BE
a)	Es ist $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$ $= \binom{2}{0} \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^2 + \binom{2}{1} \cdot 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^1$ $= 0{,}6^2 + 2 \cdot 0{,}24$ $= 0{,}36 + 0{,}48$ $= 0{,}84.$	2
b)	Es ist $P(X \neq 0) + P(X \neq 1) + P(X \neq 2)$ $= P(X=1) + P(X=2) + P(X=0) + P(X=2) + P(X=0) + P(X=1)$ $= 2 \cdot (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)) = 2 \cdot 1$ $= 2.$	3

Aufgabe 98

	Lösungsskizze	BE
a)	Es ist $P(\text{zwei weiße und eine schwarze Kugel in } C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$.	2
b)	Die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen ist: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$ Für die Ausgeglichenheit, bei einem Geldbetrag x, muss gelten: $\frac{5}{18} \cdot (x-1) + \frac{13}{18} \cdot (-1) = 0$ $\frac{5}{18}x - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$ $\frac{5}{18}x = \frac{18}{18}$ $x = \frac{18}{5} = 3{,}6$ Der Geldbetrag muss 3,60 Euro betragen.	3

A Anhang

A.1 Liste der Operatoren

Mehr noch als bei dezentralen Aufgaben, die immer im Kontext gemeinsamer Erfahrungen der Lehrkräfte und Schüler mit vorherigen Klausuren stehen, müssen zentrale Prüfungsaufgaben für die Abiturientinnen und Abiturienten eindeutig hinsichtlich des Arbeitsauftrages und der erwarteten Leistung formuliert sein. Die in den zentralen schriftlichen Abituraufgaben verwendeten Operatoren (Arbeitsaufträge) werden in der folgenden Tabelle definiert und inhaltlich gefüllt. Entsprechende Formulierungen in den Klausuren der Studienstufe sind ein wichtiger Teil der Vorbereitung der Schülerinnen und Schüler auf das Abitur.
Diese Operatoren können hinsichtlich ihrer Bedeutung durch Zusätze (z. B. „rechnerisch“ oder „grafisch“) konkretisiert werden. Zugelassene Hilfsmittel dürfen zur Bearbeitung verwendet werden, sofern kein entsprechender Zusatz dem entgegensteht.
Die Verwendung eines Operators, der im Folgenden nicht genannt wird, ist möglich, wenn aufgrund der alltagssprachlichen Bedeutung dieses Operators in Verbindung mit der Aufgabenstellung davon auszugehen ist, dass die jeweilige Aufgabe im Sinne der Aufgabenstellung bearbeitet werden kann.

Operator	Erläuterung
angeben, nennen	Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung notwendig.
entscheiden	Für die Entscheidung ist keine Begründung notwendig.
beurteilen	Das zu fällende Urteil ist zu begründen.
beschreiben	Bei einer Beschreibung kommt einer sprachlich angemessenen Formulierung und ggf. einer korrekten Verwendung der Fachsprache besondere Bedeutung zu. Eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig.
erläutern	Die Erläuterung liefert Informationen, mithilfe derer sich z. B. das Zustandekommen einer grafischen Darstellung oder ein mathematisches Vorgehen nachvollziehen lassen.
deuten, interpretieren	Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.

Operator	**Erläuterung**
begründen, nachweisen, zeigen	Aussagen oder Sachverhalte sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
berechnen	Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen.
bestimmen, ermitteln	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
untersuchen	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
grafisch darstellen, zeichnen	Die grafische Darstellung bzw. Zeichnung ist möglichst genau anzufertigen.
skizzieren	Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie das im betrachteten Zusammenhang Wesentliche grafisch beschreibt.

A.2 Mathematische Schreibweisen

Analysis

Funktionen können auf viele verschiede Weisen definiert werden. Es sind z. B. die folgenden Schreibweisen gängig:

- Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$.
- Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto x^2$ mit dem Graphen G_f.
- Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a : x \mapsto a \cdot x^2$ mit $a \in \mathbb{R}$. Die zugehörigen Graphen werden mit G_a bezeichnet.

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$	Summe über alle a_i von $i = 1$ bis n
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	Grenzwert der Funktion f für x gegen ∞, bzw. x_0
$f'(x_0)$	1. Ableitung von f an der Stelle x_0
$f''(x_0)$	2. Ableitung von f an der Stelle x_0
$f'''(x_0)$	3. Ableitung von f an der Stelle x_0
f', f'', f'''	erste, zweite, dritte Ableitungsfunktion von f
$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$	Integral von a bis b über $f(x)$ dx
$\int f(x)\,\mathrm{dx}$	Integral über $f(x)$ dx

Intervalle im Bereich der reellen Zahlen

$]a; b[$	offenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$[a; b]$	abgeschlossenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
$[a; b[$	halboffenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$]a; b]$	halboffenes Intervall $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Mengen und Mengenoperationen

$\{x \mid ...\}$	Menge aller x, für die gilt ... . So können z. B. Definitionsbereiche D angegeben sein.
$\{a; b; ...\}$	Menge der Elemente $a; b; ...$
$\in$, $\notin$	Element von, nicht Element von
$\subset$, $\subseteq$	echte Teilmenge von; Teilmenge von
$\emptyset$, $\{\}$	leere Menge
$A \cap B$	Schnittmenge (A geschnitten B)
$A \cup B$	Vereinigungsmenge (A vereinigt B)
$A \backslash B$	Differenzmenge (A ohne B)

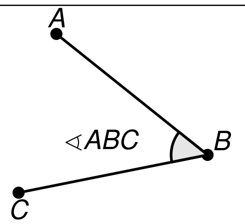
Zahlenbereiche

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}_{>0}$	Menge der positiven reellen Zahlen (ohne Null)
$\mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$	Menge der positiven reellen Zahlen (mit Null)
$\mathbb{R} \backslash \{0\}$	Menge der reellen Zahlen ohne Null
$[1; \infty[$, $\mathbb{R}_{\geq 1}$	Menge der reellen Zahlen größer gleich 1

Logik

$\neg$	nicht (Negation)
$\wedge$	und (Konjunktion, $A \wedge B$: die Aussage A und B)
$\vee$	oder auch (Disjunktion, $A \vee B$: die Aussage A oder B (oder beide))
$\Leftrightarrow$	logische Äquivalenz ($A \Leftrightarrow B$: Die Aussage folgt aus Aussage B und umgekehrt)
$\Rightarrow$	Implikation ($A \Rightarrow B$: Aus Aussage A folgt die Aussage B)

Geometrie

$\parallel$; $\perp$	parallel zu; senkrecht zu
AB	Gerade durch die Punkte A und B
$\overline{AB}$	Strecke mit den Endpunkten A und B, (Seite, Kante)
$\sphericalangle ABC$	Winkel zwischen den Schenkeln BA und BC, wobei im mathematisch positiven Drehsinn auf BC gedreht wird. 
$\lvert\overline{AB}\rvert$	Länge der Strecke $\overline{AB}$
$\triangle ABC$	Dreieck ABC, (weitere mögliche Bezeichnungen sind Viereck $ABCD$ und Pyramide $ABCS$)
$P \in \overline{AB}$	Der Punkt P liegt auf der Strecke $\overline{AB}$.

Vektoren und Matrizen

$\overrightarrow{AB}$	Vektor von A nach B
$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	Betrag (Länge) des Vektors $\vec{AB}$
$L_{(m,n)}$	Matrix $L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \dots & l_{mn} \end{pmatrix}$ mit m Zeilen und n Spalten
$\vec{a} \circ \vec{b}$	Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Stochastik

$P_p^n\,(X \leq k)$	Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$ für eine Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p.
$B_{n;p}$-verteilt	binomialverteilt mit den Parametern n und p
$P_A(B)$; $P(B \mid A)$	Die Wahrscheinlichkeit von B, falls A eingetreten ist.
$[\mu - 1{,}96\sigma; \mu + 1{,}96\sigma]$	Intervallschreibweise in der Stochastik

Griechisches Alphabet

Die Prüflinge müssen in der Lage sein, griechische Buchstaben in der Formelsprache für Winkel und Parameter als Symbole für die bezeichneten Objekte zu erkennen und in ihren Lösungsdarstellungen zu verwenden.

A.3 Aufgabenverzeichnis

Aufgabe	Herkunft
1	Klausur unter Abiturbedingungen 13.12.2016
2	Klausur unter Abiturbedingungen 13.12.2016
3	Klausur unter Abiturbedingungen 13.12.2016
4	Klausur unter Abiturbedingungen 13.12.2016
5	Klausur unter Abiturbedingungen 13.12.2016
6	Klausur unter Abiturbedingungen 13.12.2016
7	Klausur unter Abiturbedingungen 13.12.2016
8	Klausur unter Abiturbedingungen 13.12.2016
9	Ländergemeinsame Klausur 11.12.2013
10	Abitur 13.05.2014
11	Abitur 08.05.2015
12	Abitur 29.05.2016
13	Abitur 03.05.2017
14	Abitur 03.05.2017
15	Beispielsammlung 07/2017
16	Ländergemeinsame Klausur 11.12.2013
17	Abitur 13.05.2014
18	Abitur 08.05.2015
19	Abitur 03.05.2017
20	Beispielsammlung 07/2017
21	Ländergemeinsame Klausur 11.12.2013
22	Ländergemeinsame Klausur 11.12.2013
23	Abitur 13.05.2014
24	Abitur 13.05.2014
25	Abitur 08.05.2015
26	Abitur 08.05.2015
27	Abitur 29.05.2016
28	Abitur 29.05.2016
29	Abitur 03.05.2017
30	Abitur 03.05.2017
31	Beispielsammlung 07/2017
32	Ländergemeinsame Klausur 11.12.2013
33	Abitur 13.05.2014
34	Abitur 08.05.2015

Aufgabe	Herkunft
35	Abitur 29.05.2016
36	Abitur 03.05.2017
37	Beispielsammlung 07/2017
38	Beispielsammlung 07/2017
39	Abitur 29.05.2016
40	Abitur 03.05.2017
41	Abitur 03.05.2017
42	Abitur 29.05.2016
43	Abitur 03.05.2017
44	Beispielsammlung 07/2017
45	Ländergemeinsame Klausur 11.12.2013
46	Ländergemeinsame Klausur 11.12.2013
47	Abitur 13.05.2014
48	Abitur 13.05.2014
49	Abitur 08.05.2015
50	Abitur 08.05.2015
51	Abitur 29.05.2016
52	Abitur 29.05.2016
53	Abitur 03.05.2017
54	Abitur 03.05.2017
55	Abitur 13.05.2014
56	Abitur 08.05.2015
57	Abitur 29.05.2016
58	Abitur 03.05.2017
59	Beispielsammlung 07/2017
60	Abitur 13.05.2014
61	Abitur 08.05.2015
62	Abitur 03.05.2017
63	Beispielsammlung 07/2017
64	Beispielsammlung 07/2017
65	Ländergemeinsame Klausur 11.12.2013
66	Ländergemeinsame Klausur 11.12.2013
67	Abitur 13.05.2014
68	Abitur 13.05.2014
69	Abitur 08.05.2015
70	Abitur 08.05.2015

Aufgabe	Herkunft
71	Abitur 29.05.2016
72	Abitur 29.05.2016
73	Abitur 03.05.2017
74	Abitur 03.05.2017
75	Ländergemeinsame Klausur 11.12.2013
76	Abitur 08.05.2015
77	Beispielsammlung 07/2017
78	Ländergemeinsame Klausur 11.12.2013
79	Ländergemeinsame Klausur 11.12.2013
80	Abitur 13.05.2014
81	Abitur 08.05.2015
82	Abitur 29.05.2016
83	Abitur 03.05.2017
84	Abitur 03.05.2017
85	Abitur 03.05.2017
86	Ländergemeinsame Klausur 11.12.2013
87	Ländergemeinsame Klausur 11.12.2013
88	Abitur 13.05.2014
89	Abitur 13.05.2014
90	Abitur 08.05.2015
91	Abitur 08.05.2015
92	Abitur 29.05.2016
93	Abitur 29.05.2016
94	Abitur 03.05.2017
95	Ländergemeinsame Klausur 11.12.2013
96	Abitur 13.05.2014
97	Abitur 29.05.2016
98	Abitur 03.05.2017