Beispielaufgaben
für die schriftliche Überprüfung
an Gymnasien

Klasse 10

Mathematik

Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung

Impressum

Herausgeber:
Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung
Hamburger Straße 31, 22083 Hamburg

Referatsleitung Mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Unterricht: Werner Renz

Fachreferent Mathematik: Dr. Andreas Busse

Redaktion (1. Auflage)**:**
Inge Althoff-Beckmann, Stefanie Heinisch, Dr. Klaus Henning, Dr. Johannes Klemenz, Gabriele Müller-Sonder, Dr. Helge Schröder, Stephanie Spendel, Helmut Springstein.

Redaktion (6. erweiterte Auflage)**:**
Manfred Bergunde, Sven Dudkowiak, Uta Feurle, Stefan Grübel, Stefanie Heinisch, Christian Kleinert, Dr. Ulrich Kotzott, Annelies Paulitsch, Peter Stender.

Internet: www.mint-hamburg.de/MA/

7. unveränderte Auflage, Hamburg 2012

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Sehr geehrte Kolleginnen und Kollegen,

mit der *Verordnung zur Änderung der Ausbildungs- und Prüfungsordnung für die Klassen 1 bis 10 der allgemeinbildenden Schulen* wird das Überprüfungsverfahren am Ende der Klasse 10 der Gymnasien neu geregelt. In § 80 der Verordnung heißt es u.a.: „In der Klasse 10 dient die letzte Klassenarbeit in den Fächern Deutsch, Mathematik, erste und zweite Fremdsprache der Überprüfung, ob die Ziele der pädagogischen Arbeit entsprechend den überregionalen Standards und den Anforderungen der Bildungspläne erreicht wurden.“ Die Aufgaben für die schriftliche Überprüfung werden durch die zuständige Behörde zentral erstellt. Sie orientieren sich an überregionalen Standards und den Anforderungen der Bildungspläne für das Gymnasium.

Jeweils vor Beginn der Klasse 10 werden von der Behörde für Schule und Berufsbildung die Inhalte veröffentlicht, die für die schriftliche Überprüfung relevant sind.

In der vorliegenden Handreichung werden Beispielaufgaben vorgestellt, wie sie für die schriftlichen Überprüfungen in den 10. Klassen der Gymnasien im Jahr 2007 und den folgenden Jahren formuliert werden. Die hier vorgelegten Aufgabenbeispiele korrespondieren mit den in den Bildungsstandards Mathematik für den Mittleren Abschluss der KMK geforderten Kompetenzen, Anforderungen und Aufgabenformaten; zum Teil sind auch Aufgabenbeispiele aus diesen Bildungsstandards übernommen worden.

Die Aufgabenstellungen berücksichtigen die in den Rahmenplänen Mathematik für die Sekundarstufe I des Gymnasiums sowie die in den Bildungsstandards der KMK für den Mittleren Abschluss formulierten Leitideen und Anforderungen. Dem Geist der Rahmenpläne folgend orientieren sie sich an den zentralen Ideen (Leitideen), die die Inhalte verschiedener mathematischer Sachgebiete vereinigen und das mathematische Curriculum spiralförmig durchziehen.

Zu jeder Aufgabe werden die erwartete Schülerleistung beschrieben sowie Vorschläge für eine Punkteverteilung in den drei Anforderungsbereichen gegeben. Die Aufgaben enthalten verbindlich definierte Arbeitsaufträge. Durch den Bewertungsschlüssel werden u.a. die Voraussetzungen für eine „gute“ und für eine „ausreichende“ Gesamtleistung beschrieben. Diese Definitionen dienen dem Ziel, mehr Verbindlichkeit und Vergleichbarkeit zu schaffen.

In der Hoffnung, dass die vorliegende Handreichung hilfreich für Ihre Unterrichtsarbeit ist, wünsche ich Ihnen und Ihren Schülerinnen und Schülern eine erfolgreiche Vorbereitung auf die schriftliche Überprüfung Mathematik in den 10. Klassen.

Den Mitgliedern der Arbeitsgruppe, die diese Handreichung erstellt haben, möchte ich sehr herzlich für die geleistete intensive und zeitaufwendige Arbeit danken.

Werner Renz

1 Liste der Arbeitsaufträge

Mehr noch als bei dezentralen Aufgaben, die immer im Kontext gemeinsamer Erfahrungen der Lehrenden und Lernenden mit vorherigen Klassenarbeiten stehen, müssen zentrale Prüfungsaufgaben für die Schülerinnen und Schüler eindeutig hinsichtlich des Arbeitsauftrages und der erwarteten Leistung formuliert sein. Die in den zentralen schriftlichen Prüfungsaufgaben verwendeten Operatoren (Arbeitsaufträge) werden in der folgenden Tabelle definiert und inhaltlich gefüllt. Entsprechende Formulierungen in den vorausgehenden Klassenarbeiten sind ein wichtiger Teil der Vorbereitung auf den Realschulabschluss.

Neben Definitionen und Beispielen enthält die Tabelle auch Zuordnungen zu den Anforderungsbereichen **I**, **II** und **III**, wobei die konkrete Zuordnung auch vom Kontext der Aufgabenstellung abhängen kann und eine scharfe Trennung der Anforderungsbereiche nicht immer möglich ist.

Anforderungsbereich I: Reproduzieren

Dieses Niveau umfasst die Wiedergabe und direkte Anwendung von grundlegenden Begriffen, Sätzen und Verfahren in einem abgegrenzten Gebiet und einem wiederholenden Zusammenhang.

Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen

Dieses Niveau umfasst das Bearbeiten bekannter Sachverhalte, indem Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten verknüpft werden, die in der Auseinandersetzung mit Mathematik auf verschiedenen Gebieten erworben wurden.

Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und Reflektieren

Dieses Niveau umfasst das Bearbeiten komplexer Gegebenheiten u.a. mit dem Ziel, zu eigenen Problemformulierungen, Lösungen, Begründungen, Folgerungen, Interpretationen oder Wertungen zu gelangen.

Arbeitsaufträge und Anforderungsbereiche	**Definitionen**	**Beispiele**
Angeben, nennen **I-II**	Formulierung eines Sachverhaltes, Aufzählen von Fakten etc. ohne Begründung und ohne Lösungsweg.	Gib an, wofür die Variable m in der Geradengleichung $y = mx + b$ steht. Nenne ein Beispiel, in dem lineare Funktionen in der Realität auftreten.
Auseinandersetzen **II-III**	Kreativer Prozess, mindestens auf dem Anforderungsniveau II.	Setze dich mit den Äußerungen der Schülerinnen und Schüler auseinander. (z.B.: Aufgabe 11, Bildungsstandards)
Auswählen **I-II**	Ohne Begründung aus mehreren Angeboten eines auswählen	Wähle ohne Hilfe des Taschenrechners diejenige Zahl aus, die dem Wert von $\sqrt{199}$ am nächsten kommt.
Begründen **II-III**	Für einen angegebenen Sachverhalt einen Begründungszusammenhang herstellen.	Begründe, warum der abgebildete Graph die Situation nicht richtig beschreibt. Begründe, warum eine quadratische Gleichung höchstens zwei Lösungen hat.

Arbeitsaufträge und Anforderungsbereiche	**Definitionen**	**Beispiele**
Berechnen **I-II**	Ergebnis von einem Ansatz ausgehend durch nachvollziehbare Rechenoperationen gewinnen. Die Wahl der Mittel kann eingeschränkt sein.	Berechne ohne Benutzung des Taschenrechners den Wert des Ausdrucks $2^3 + 3^2$.
Beschreiben **II-III**	Darstellung eines Sachverhalts oder Verfahrens in Textform unter Verwendung der Fachsprache. Es sollten hierbei vollständige Sätze gebildet werden; hier sind auch Einschränkungen möglich (Beschreiben Sie in Stichworten).	Beschreibe, wie sich A ändert, wenn x größer wird. Beschreibe, wie man den Flächeninhalt dieser Figur bestimmen kann.
Bestätigen **I-II**	Eine Aussage oder einen Sachverhalt durch Anwendung einfacher Mittel (rechnerisch wie argumentativ) sichern.	Bestätige, dass in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit unter 10 % liegt.
Bestimmen, ermitteln **II-III**	Darstellung des Lösungsweges und Formulierung des Ergebnisses. Die Wahl der Mittel kann frei, unter Umständen auch eingeschränkt sein.	Bestimme die Lösung der Gleichung $\sqrt{x} + x = 12$. Bestimme die Lösung der Gleichung 3x – 5 = 5x + 3 durch Äquivalenzumformungen. Bestimme grafisch den Schnittpunkt.
Beurteilen **III**	Zu einem Sachverhalt ein selbstständiges Urteil unter Verwendung von Fachwissen und Fachmethoden formulieren.	Beurteile, welche der beiden vorgeschlagenen Funktionen das ursprüngliche Problem besser darstellt. Beurteile die Diskussion von Yildiz und Sven.
Entscheiden **II-III**	Bei Alternativen sich begründet und eindeutig auf eine Möglichkeit festlegen.	Entscheide, mit welchen der vorgeschlagenen Formeln man das Volumen des abgebildeten Körpers berechnen kann. Entscheide, welcher Graph zu welcher Funktionsgleichung gehört.
Ergänzen, vervollständigen **I**	Tabellen, Ausdrücke oder Aussagen nach bereits vorliegenden Kriterien, Formeln oder Mustern füllen.	Ergänze die fehlenden Werte. Vervollständige die Tabelle.
Erstellen **I-II**	Einen Sachverhalt in übersichtlicher, meist fachlich üblicher oder vorgegebener Form darstellen.	Erstelle eine Wertetabelle für die Funktion. Erstelle eine Planfigur.
Interpretieren **II-III**	Die Ergebnisse einer mathematischen Überlegung rückübersetzen auf das ursprüngliche Problem.	Interpretiere: Was bedeutet deine Lösung für die ursprüngliche Frage? Interpretiere die Bedeutung der Variablen d vor dem Hintergrund des Problems.
Konstruieren **II-III**	Anfertigung einer genauen Zeichnung, wobei die einzelnen Handlungsschritte einem mathematischen Konzept folgen, was in der Zeichnung erkennbar ist. Hilfsmittel werden benannt, müssen aber gegebenenfalls nicht alle verwendet werden.	Konstruiere mit Hilfe von Zirkel und Lineal die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$. Konstruiere mit Hilfe des Geodreiecks ein Dreieck ABC mit $\alpha = 25°$, $c = 4$ cm, $h_c =$ 1,5 cm.

Skizzieren **I-II**	Grafische Darstellung der wesentlichen Eigenschaften eines Objektes, auch Freihandskizze möglich.	Skizziere den Verlauf des Graphen. Skizziere die Figur, die im Text beschrieben wird.
Vergleichen **II-III**	Nach vorgegeben oder selbst gewählten Gesichtspunkten Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede ermitteln und darstellen.	Vergleiche Umfang und Flächeninhalt der drei Figuren.
Zeichnen **I-II**	Sorgfältige Anfertigung einer grafischen Darstellung.	Zeichne den Graphen der Funktion.
Zeigen, nachweisen **III**	Eine Aussage, einen Sachverhalt nach gültigen Schlussregeln, Berechnungen, Herleitungen oder logischen Begründungen bestätigen.	Zeige, dass das betrachtete Viereck ein Drachenviereck ist.
Zuordnen **I**	Ohne tiefer gehende Erläuterung eine Verbindung zwischen zwei Listen herstellen	Ordne die Füllgraphen den Gefäßen zu.

2 Aufgaben

Die folgenden Aufgabenbeispiele für zentrale schriftliche Überprüfungen in den 10. Klassen der Gymnasien im Fach Mathematik werden in zwei Aufgabenformaten vorgestellt: Aufgaben, die ohne den Einsatz des Taschenrechners bearbeitet werden sollen, und Aufgaben, zu deren Lösung der Einsatz des Taschenrechners vorgesehen ist.

Die reine Arbeitszeit beträgt 135 Minuten (3 Unterrichtsstunden), es sind insgesamt 100 Punkte zu erreichen.

Der Aufgabenteil I (Bearbeitung ohne Taschenrechner) ist in 45 Minuten, einem Drittel der zur Verfügung stehenden Arbeitszeit, zu bearbeiten. Dementsprechend wird ihm etwa ein Drittel der Gesamtpunktzahl zugeordnet (34 von 100 Punkten).

Für den zweiten Aufgabenteil II, der aus 3 Prüfungsaufgaben besteht und bei dem der Einsatz des Taschenrechners vorgesehen ist, stehen danach zwei von drei Unterrichtsstunden, also insgesamt 90 Minuten (30 Minuten pro Aufgabenteil) zur Verfügung. Dementsprechend werden ihm etwa zwei Drittel der Gesamtpunktzahl zugeordnet (3-mal jeweils 22 Punkte = 66 Punkte).

Die Aufgabenbeispiele enthalten neben der Aufgabenstellung den Erwartungshorizont (die erwartete Schülerleistung) und Vorschläge für eine mögliche Bewertung.

Für die Bewertung der Gesamtleistung der schriftlichen Prüfung gilt die folgende Zuordnungstabelle:

Erreichte Gesamtpunktzahl	Bewertung
≥ 95 Punkte	1+
≥ 90 Punkte	1
≥ 85 Punkte	1–
≥ 80 Punkte	2+
≥ 75 Punkte	2
≥ 70 Punkte	2–
≥ 65 Punkte	3+
≥ 60 Punkte	3
≥ 55 Punkte	3–
≥ 50 Punkte	4+
≥ 45 Punkte	4
≥ 40 Punkte	4–
≥ 33 Punkte	5+
≥ 26 Punkte	5
≥ 20 Punkte	5–
< 20 Punkte	6

Bewertungskriterien für die Noten „gut“ und „ausreichend“

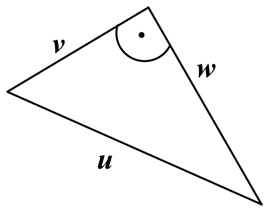
Die Note „gut“ („2“) kann nur erteilt werden, wenn mindestens 75 % der erreichbaren Gesamtleistung erbracht wurden.

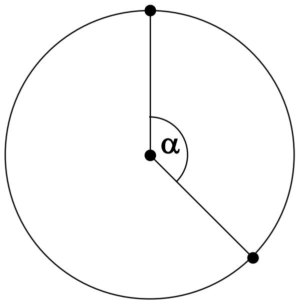
Die Note „ausreichend“ („4“) kann nur erteilt werden, wenn mindestens 45 % der erreichbaren Gesamtleistung erbracht wurden.

2.1 Aufgaben, die ohne Einsatz des Taschenrechners bearbeitet werden

2.1.1 Beispiel für eine Aufgabe im Teil 1

1. Notiere jeweils den Buchstaben der korrekten Lösung in der letzten Spalte: *Lösung S.89*

	Aufgabe	a	b	c	d	Lös.
a)	$0{,}0045 \cdot 2000 = \ldots$	0,9	0,09	9	90	
b)	225 min = ... h	3,5	2,25	3,75	3,45	
c)	$\frac{4}{5}$ m = ...cm	80	125	60	75	
d)	$\frac{5}{8} = \ldots$	75 %	40 %	62,5 %	67,5 %	
e)	$(2 - x) \cdot (3 + 4x) = \ldots$	$6 + 4x - 4x^2$	$-4x^2 + 5x + 6$	$6 - 11x - 4x^2$	$4x^2 - 5x + 6$	
f)	 Welche Gleichung gilt?	$u = \sqrt{v^2 + w^2}$	$v^2 = w^2 - u^2$	$w^2 = u^2 + v^2$	$u = \sqrt{v^2} + \sqrt{w^2}$	
g)	Von vier Gefäßen wird der Rauminhalt bestimmt. In welches passt am meisten hinein?	40 l	0,4 m^3	400 cm^3	4 dm^3	
h)	Addiert man zu einer Zahl $2\frac{2}{3}$, so erhält man $8\frac{1}{6}$. Wie heißt die Zahl?	$6\frac{1}{3}$	$5\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{6}$	$5\frac{1}{2}$	
i)	$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} = \ldots$	3	4	8	9	
j)	$2^n = 128, \quad n = \ldots$	5	6	7	8	
k)	Um welchen Faktor ändert sich das Volumen eines Würfels, wenn man alle Seitenlängen verdoppelt?	2	4	6	8	

	Aufgabe	a	b	c	d	Lös.
l)	Der Winkel α hat die Größe 135°. Welcher prozentuale Anteil der Kreisfläche wird durch den Kreissektor beschrieben? 	25%	$33,\overline{3}$	37,5%	45%	
m)	Zu welchem der angegebenen Terme passt der folgende Text? *Multipliziere die Summe aus dem 5-fachen einer Zahl und der Hälfte der Zahl mit 9 und subtrahiere die Zahl.*	$9\cdot\left(5x+\frac{x}{2}\right)-x$	$9\cdot\left(5x-\frac{x}{2}\right)-x$	$(9\cdot 5x)-\frac{x}{2}-x$	$9\cdot\left(5x+\frac{x}{2}-x\right)$	
n)	In einer Startbox stehen fünf Rennpferde nebeneinander. Wie viele Möglichkeiten der Anordnung gibt es?	20	32	60	120	
o)	Vier Schülerinnen arbeiten paarweise zusammen, wie viele unterschiedliche Paare sind möglich?	4	5	6	8	
p)	Der Preis eines Pullovers ist um 40% reduziert worden. Er kostet jetzt 42€. Wie teuer war er vor der Preisreduzierung?	25,20 €	58,80 €	70 €	105 €	

2. Gleichungen

Gib jeweils die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen an:

a) $x \cdot (x-2) \cdot (2x+3) = 0$

b) $x^2 - 6x = -5$

c) $\frac{8}{x} = x + 2$

d) $\sqrt{x - \frac{7}{16}} = \frac{3}{4}$

3. Potenzen: Sehr groß und sehr klein

a) Nachfolgend siehst du einige sehr große bzw. sehr kleine Entfernungen. Trage sie in Zehnerpotenzschreibweise mit einer Ziffer vor dem Komma (wissenschaftliche Schreibweise) in die Tabelle ein.

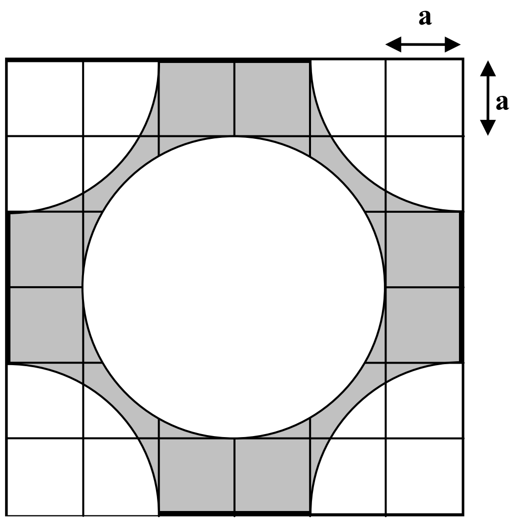
	Entfernung	**Wissenschaftliche Schreibweise**
Entfernung Erde-Mond	384 000 km	
Atomdurchmesser	$\frac{1}{10^{10}}$ m	
Mittlere Entfernung Sonne-Jupiter	778,3 Millionen km	
Entfernung, die das Licht in einem Jahr zurücklegt (1 Lichtjahr)	9 Billionen 461 Milliarden km	

b) Der Durchmesser eines Atomkerns beträgt 10^{-14} m. Wie viele Atomkerne muss man nebeneinander legen, um den Atomdurchmesser von $\frac{1}{10^{10}}$ m zu erhalten? Gib das Ergebnis in wissenschaftlicher Schreibweise an.

c) Ermittle anhand des Ergebnisses in a) durch eine grobe Überschlagsrechnung, welche Entfernung das Licht in einer Woche zurücklegt, und gib das Ergebnis in wissenschaftlicher Schreibweise an.

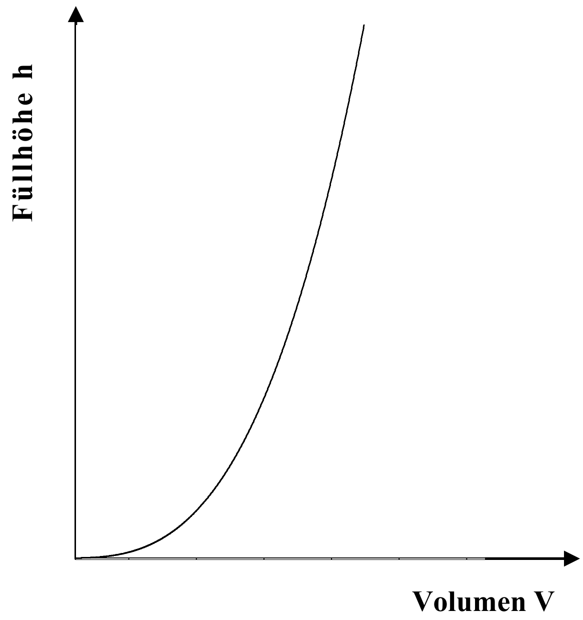
4. Flächenbestimmung

Bestimme einen Term für den Flächeninhalt der grau markierten Figur in Abhängigkeit von a und vereinfache ihn so weit wie möglich.



4. Füllgraphen

Die beiden vorgegebenen Graphen beschreiben den Zusammenhang zwischen dem Volumen und der Höhe des Flüssigkeitsstands in Gefäßen. Skizziere zu jedem Graphen eine Gefäßform, für die der vorgegebene Verlauf zutreffen könnte.



Mögliche Gefäßform

Mögliche Gefäßform

2.1.2 Weitere Beispiele für Teilaufgaben zum Prüfungsteil 1

1. Teilbarkeit Lösung S. 91

7, 8, 9 und 110, 111, 112 sind Beispiele für Folgen mit drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen. Entscheide, ob die Behauptungen a), b), c) für alle denkbaren solcher Folgen jeweils wahr oder falsch sind:

a) In jeder solchen Folge gibt es eine Zahl, die durch 3 teilbar ist.

b) Das Produkt aller Zahlen einer solchen Folge ist durch 6 teilbar.

c) Das Produkt aller Zahlen einer solchen Folge ist durch 4 teilbar.

2. Druckerei Lösung S. 91

Eine Druckerei druckt unter anderem auch Postkarten und berechnet die Kosten für das Drucken von Postkarten mit der folgenden Formel:

$$K = \frac{20\,000}{n} + 6\,.$$

Dabei ist n die Anzahl der zu druckenden Postkarten, K die Kosten pro Postkarte in Cent.

a) Die Firma erhält einen Druckauftrag für (genau) 5 000 Postkarten. Berechne den Preis einer Postkarte nach der angegebenen Formel.

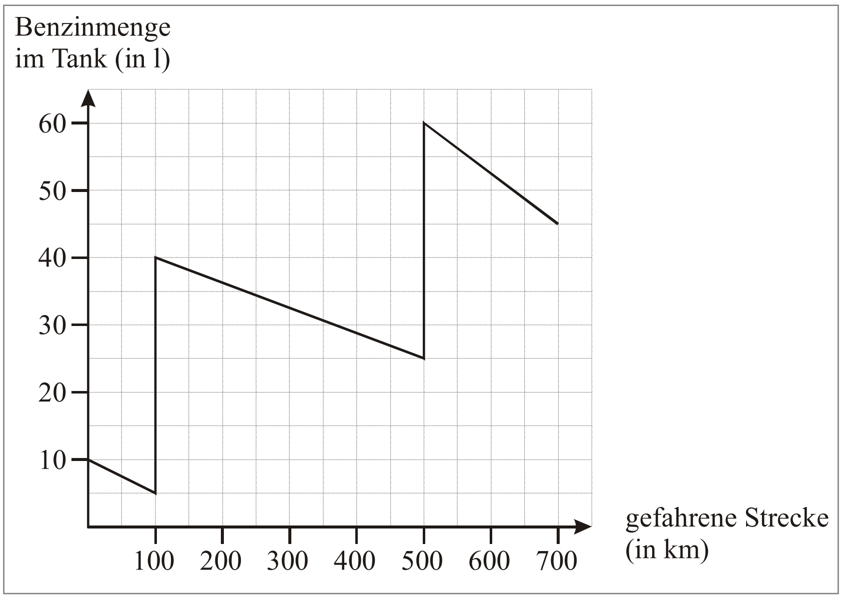
b) Beschreibe, wie sich die Druckkosten für eine Karte ändern, wenn die Druckauflage steigt, also mehr Karten gedruckt werden.

c) Entscheide, ob eine Postkarte 6 Cent kosten kann, wenn obige Formel als Berechnungsgrundlage verwendet wird. Begründe deine Antwort.

d) Interpretiere, welche Bedeutung in der angegebenen Formel die 6 (Cent) haben könnten.

3. Benzinverbrauch Lösung S.92

Der Graph zeigt die Tankfüllung eines (extrem wenig verbrauchenden) Pkws während einer Autobahnfahrt an.



a) Gib an, wie viele Liter Benzin beim ersten Tankstopp (nach 100 km) gekauft wurden.

b) Gib den Benzinverbrauch pro 100 km an, und zwar zwischen dem ersten und zweiten Tankstopp.

c) Auf welcher Teilstrecke ist der Benzinverbrauch pro 100 km am größten?
Begründe ohne Rechnung mit Hilfe des Graphen.

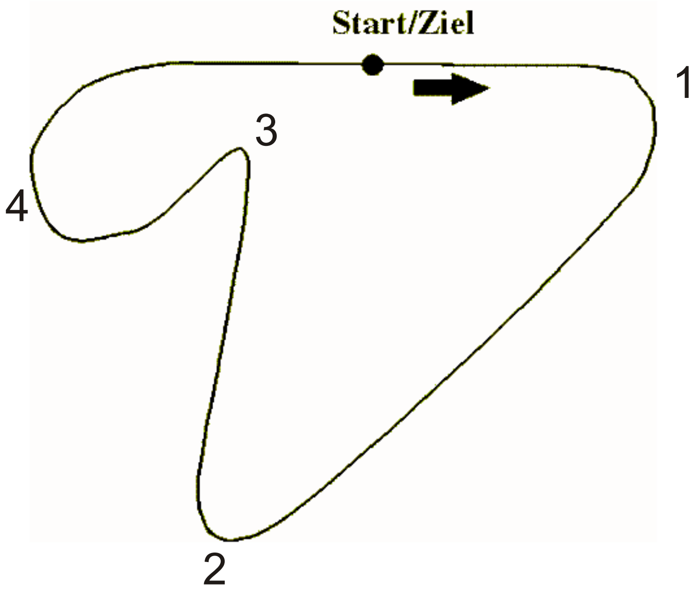
d) Berechne den Benzinverbrauch pro 100 km für die Gesamtstrecke.

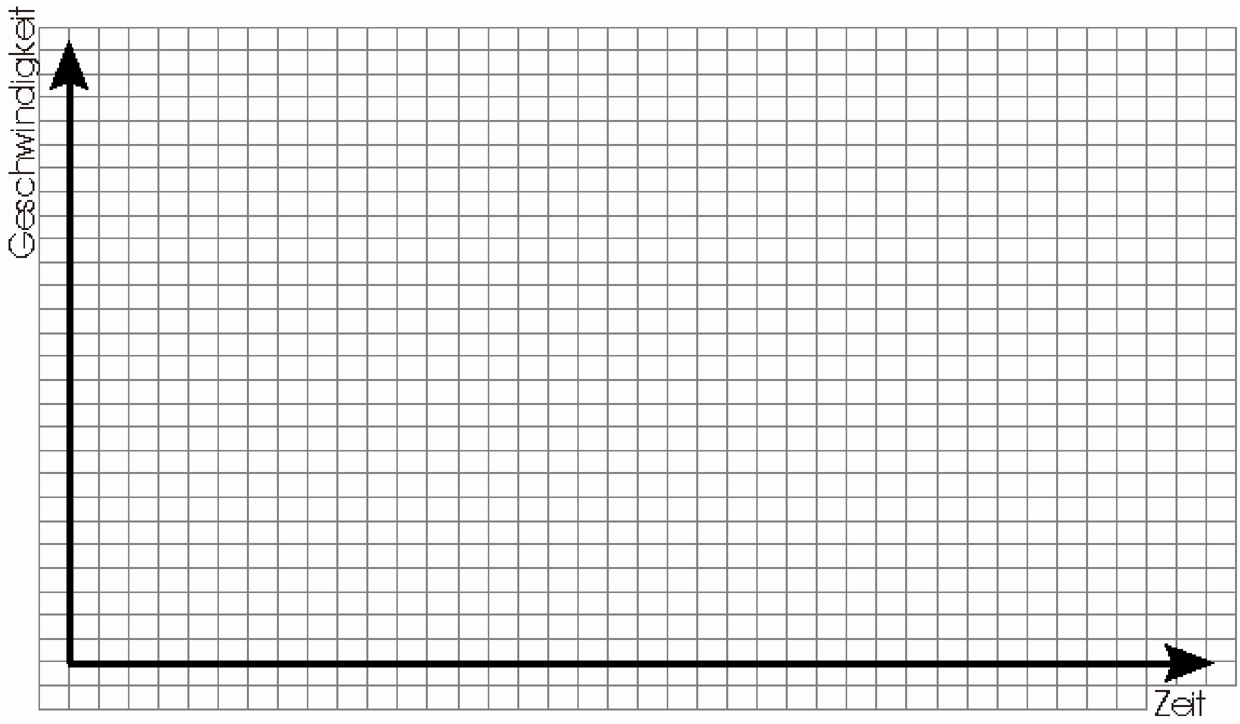
4. Formel 1

Lösung S. 92

Die Rennstrecke eines Formel-1-Rennens ist normalerweise nicht so einfach wie nebenstehende Skizze, doch die Skizze gibt das Prinzip wieder.

Zeichne einen Graphen, der die Geschwindigkeit eines Rennwagens in der ersten Runde in Abhängigkeit von der Zeit zeigt und begründe den Verlauf deines Graphen.



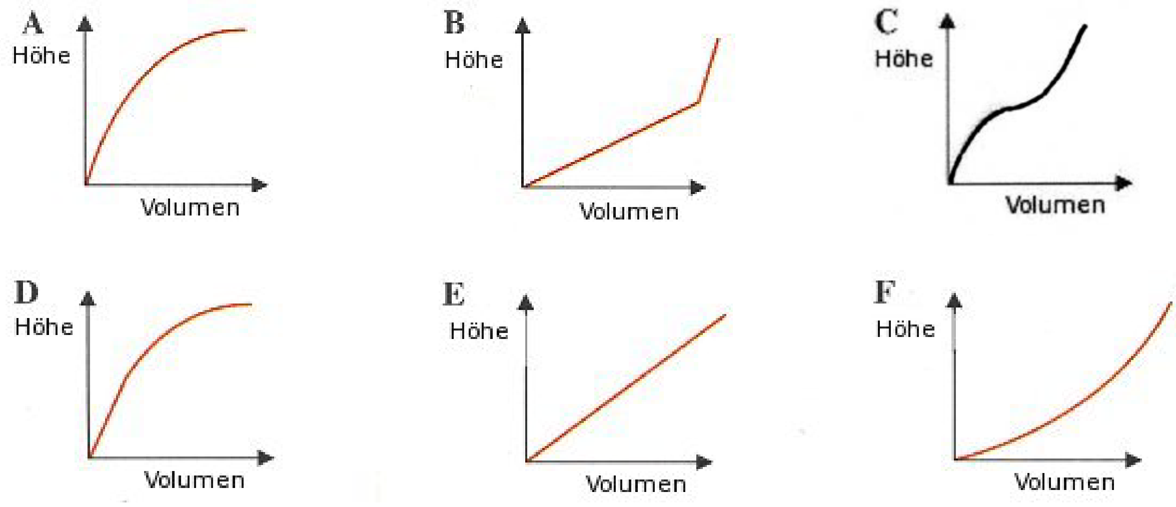


5. Füllgraphen 1 — Lösung S. 93

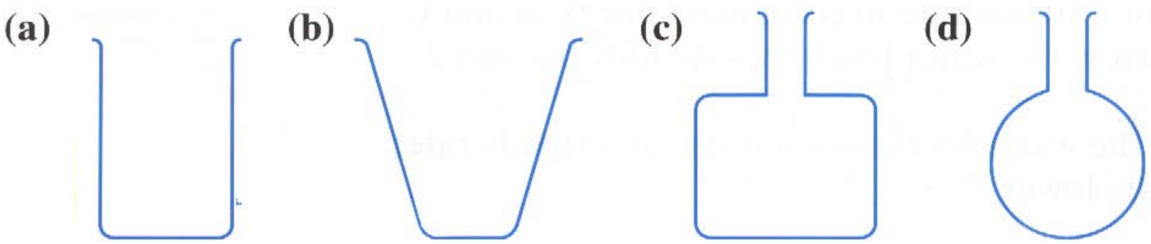
Nachstehend folgen einige Graphen, die einen Zusammenhang zwischen dem Volumen und der Höhe des Flüssigkeitsstands in Gefäßen beschreiben.

Nenne zu jedem Gefäß (a), (b), (c), (d) einen der Graphen (A), (B), (C), (D), (E), (F), der den Zusammenhang zwischen Volumen und Höhe des Flüssigkeitsspiegels am besten beschreibt.

Begründe deine Entscheidung jeweils kurz.



Und das sind die Gefäße, die bis zum Rand gefüllt werden sollen:



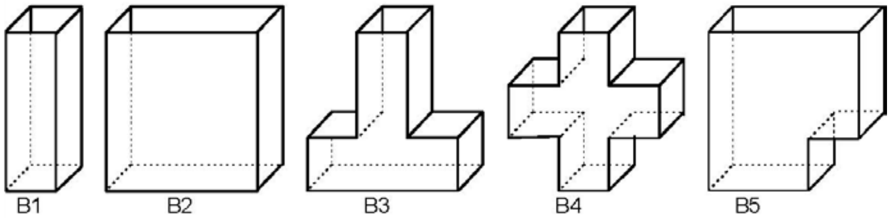
Ein Messbecher — Eine Vase — Eine Flasche — Ein Parfümflakon

Gefäß	Zugehöriger Graph	Begründung
a) Messbecher		
b) Vase		
c) Flasche		
d) Flakon		

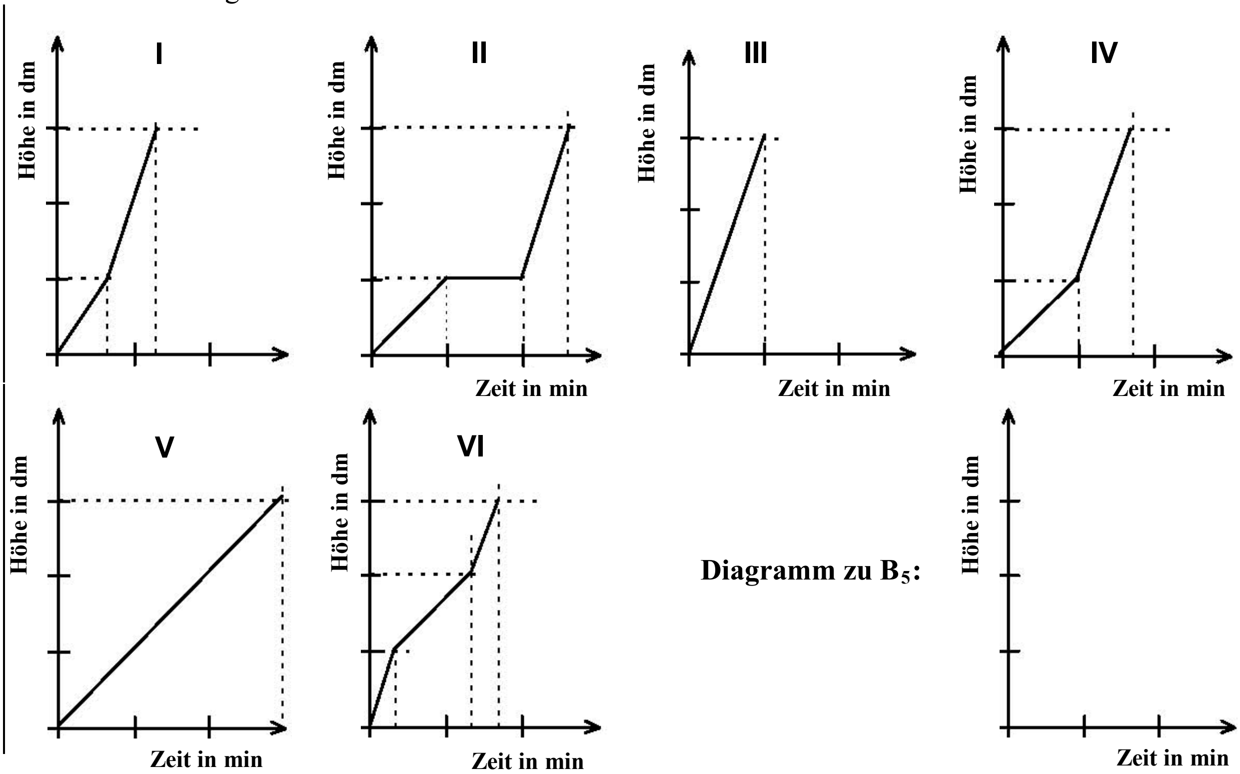
6. Füllgraphen 2

Lösung S. 93

Jeder der abgebildeten Behälter wird gleichmäßig mit der gleichen Wassermenge pro Zeiteinheit gefüllt.



Die folgenden Füllgraphen geben die Höhe *h* des Wasserstandes in Abhängigkeit von der Öffnungszeit *t* der Wasserleitungen an.



a) Bestimme, welches Diagramm zu welchem der Behälter B_1, B_2, B_3 bzw. B_4 gehört.
Schreibe die Behälternamen an die zugehörigen Diagramme.

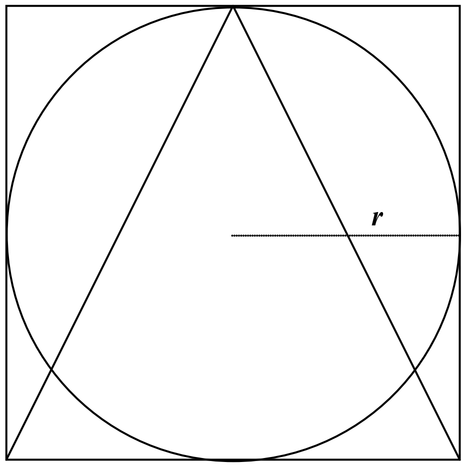
b) Zeichne das entsprechende Diagramm, das die Füllhöhe des Behälters B_5 in Abhängigkeit von der Füllzeit beschreibt.

7. Kegel, Kugel, Zylinder

Lösung S. 94

Bereits Archimedes erkannte, dass die Volumina von Kegel, Kugel und Zylinder bei gleichem Radius und gleicher Höhe in einem ganzzahligen Verhältnis stehen. Er fand das Ergebnis so schön, dass er die Figur auf seinem Grabstein haben wollte.

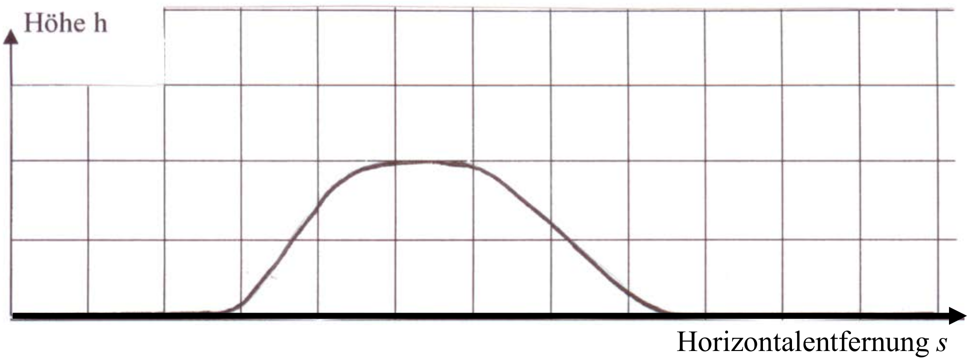
Berechne die Verhältnisse der Volumina.

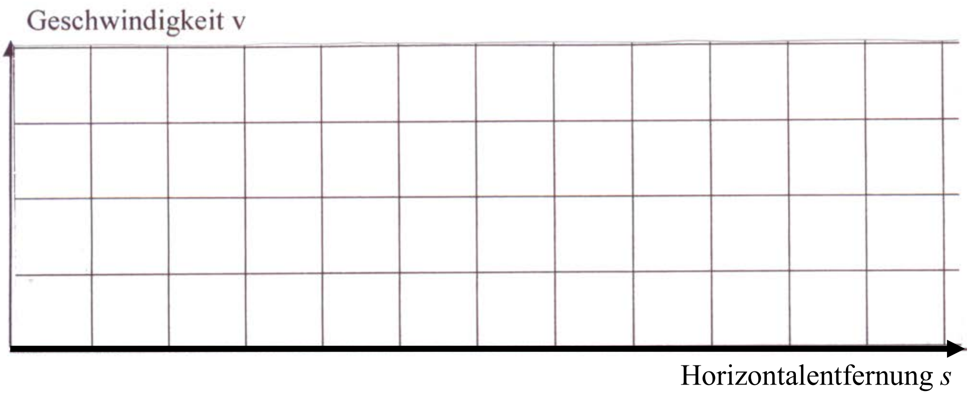


8. Radrennfahrer

Lösung S. 95

Ein Radrennfahrer ist schon einige Zeit unterwegs und fährt dann über einen Berg.
Skizziere den Geschwindigkeitsverlauf in Abhängigkeit von der Horizontalentfernung s und begründe.



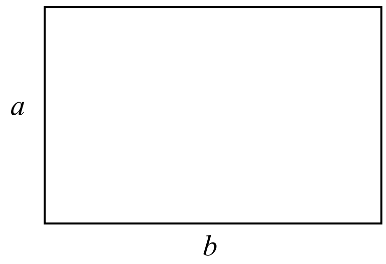


9. Der goldene Schnitt

Lösung S. 95

Zwei Strecken stehen im **goldenen Schnitt** zueinander, wenn sich die kürzere Strecke (*a*) zur längeren Strecke (*b*) so verhält, wie die längere Strecke (*b*) zur Summe der Strecken ($a + b$), d.h. für die Strecken *a* und *b* gilt die Gleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}.$$



Dieser goldene Schnitt findet vielfache Anwendungen, z. B. bei der Gestaltung von Gebäuden und Gegenständen, von Büchern usw., da diese dann als besonders ästhetisch empfunden werden.

a) Begründe, dass die Gleichung $a^2 + ab = b^2$ zur obigen Gleichung äquivalent ist.

b) Zeige, dass sich bei gegebenem *b* eine Lösung für *a* durch $a = \frac{b}{2}(-1+\sqrt{5})$ bestimmen lässt.

10. Gebläse

Lösung S. 96

In der Anordnung rechts kann eine Kugel nach dem Loslassen einen der möglichen Wege gehen. Die Chance, nach rechts oder links abgelenkt zu werden, beträgt jeweils 50 %.
Durch ein Gebläse kann dies geändert werden: Dann wird eine Kugel in acht von zehn Fällen nach rechts abgelenkt.

a) Gib an, wie viele verschiedene Wege die Kugel durchlaufen kann, um in das Fach *B* zu gelangen.

b) Ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei abgeschaltetem Gebläse eine Kugel in ein Fach mit dem Namen *E* fällt.

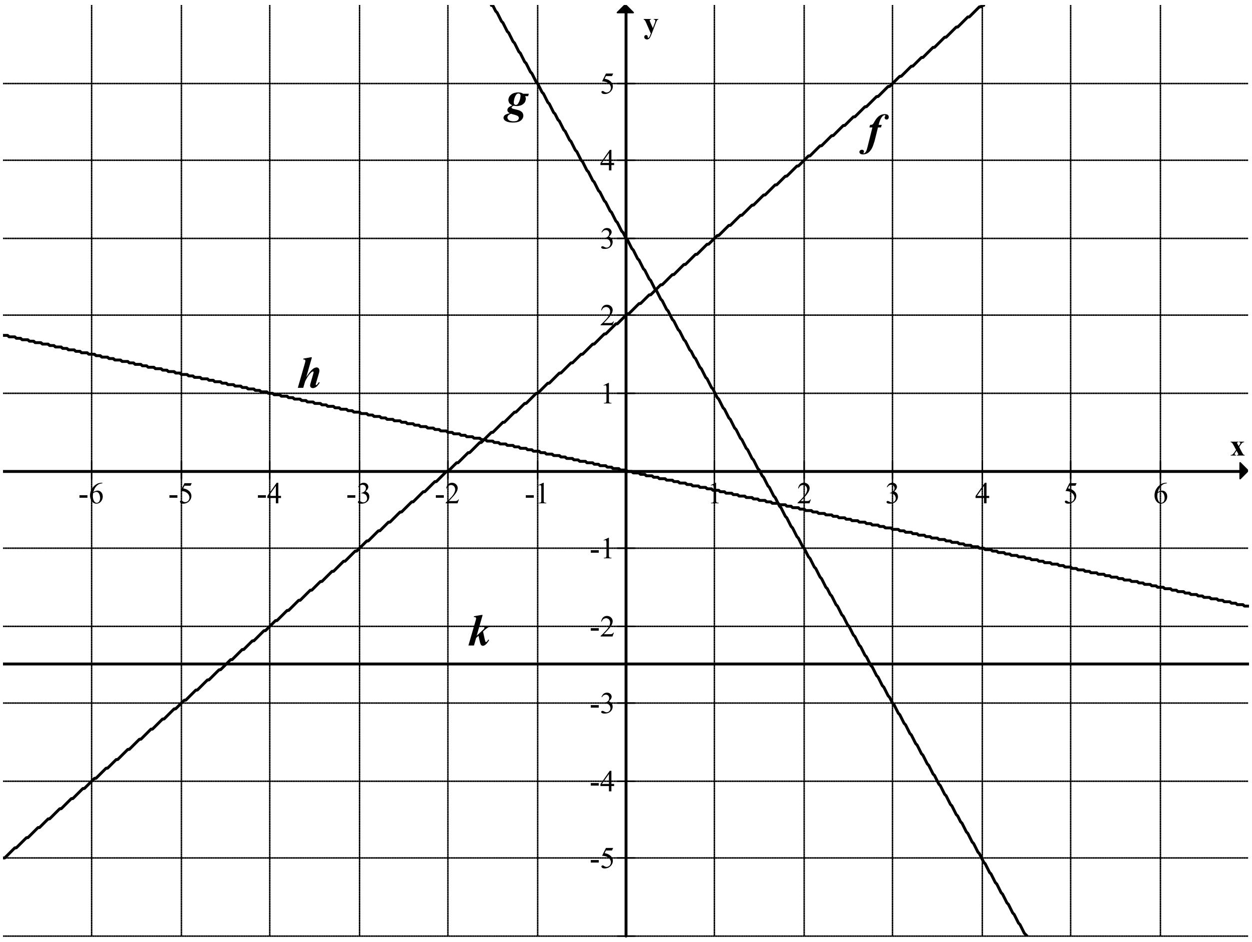
Jetzt wird das Gebläse eingeschaltet.

c) Es werden nacheinander 10 000 Kugeln fallen gelassen.
Ermittle die Anzahl der Kugeln, die man im Fach *N* erwarten kann.

d) Gib einen Zahlenterm für die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Kugel in das Fach *B* fällt.

11. Geraden

Lösung S. 96



In der Abbildung siehst du die Graphen verschiedener Funktionen.

a) Gib jeweils die zugehörige Funktionsgleichung an:

$f(x) =$ ________________________________

$g(x) =$ ________________________________

$h(x) =$ ________________________________

$k(x) =$ ________________________________

b) Zeichne eine Parallele zur y-Achse in das Koordinatensystem ein und gib die zugehörige Gleichung an.

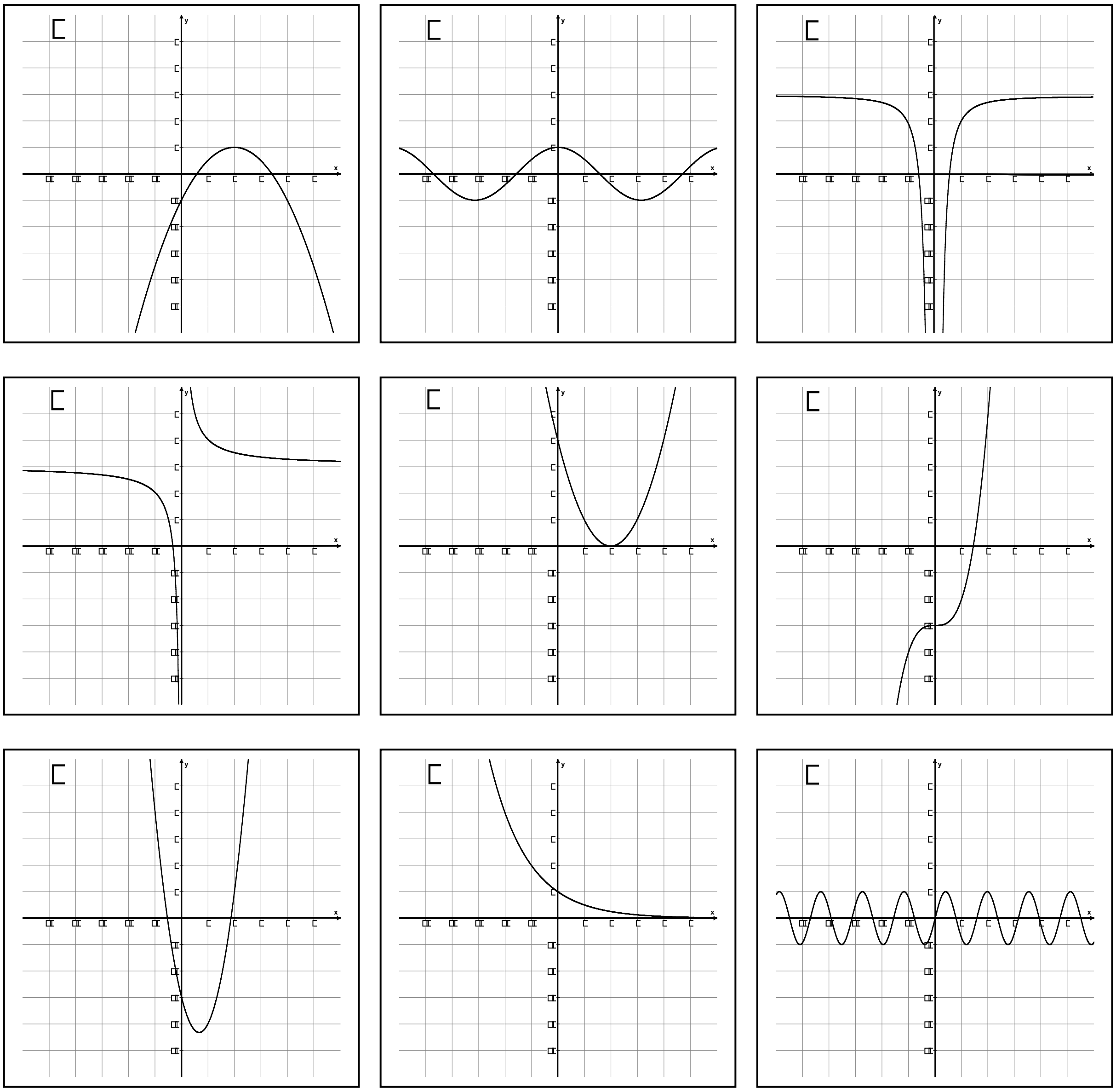
____

c) Entscheide, ob es sich bei der Geraden unter b) um den Graphen einer Funktion handelt.

12. Graphen zuordnen

Lösung S. 96

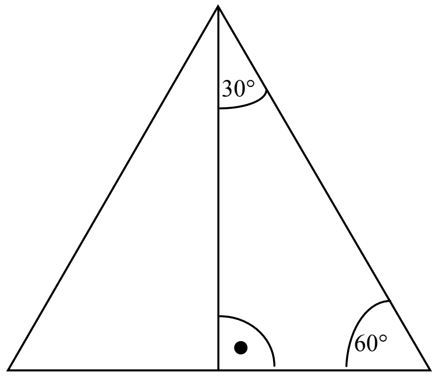
Gib an, welcher der aufgeführten Funktionsterme jeweils zu den Graphen A bis K gehört.



Funktionsterm	x^2-2	$3x^2-4x-3$	$-2x^2$	$-\frac{1}{2}x^2+2x-1$	$(x-2)^2$	x^3-3
Zugeh. Graph						
Funktionsterm	x^4-3	x^5-4	$\frac{1}{x}+3$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x+4}$	$-\frac{1}{x^2}+3$
Zugeh. Graph						
Funktionsterm	2^x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$	$\sin x$	$\sin 4x$	$\cos x$
Zugeh. Graph						

13. Besondere Werte der trigonometrischen Funktionen *Lösung S. 97*

Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck.



a) Begründe, dass die angegebenen Winkelgrößen korrekt sind.

b) Zeige mit Hilfe des Dreiecks:

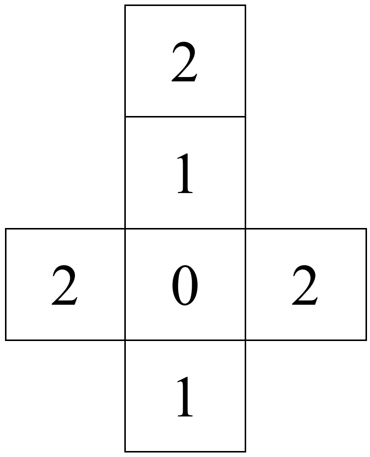
- $\sin 30° =$ ____
- $\sin 60° =$ ____

c) Begründe, für welchen Winkel α $(0° \leq \alpha \leq 90°)$ gilt:

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

14. Würfel und Münze Lösung S. 97

Es wird ein Würfel mit nebenstehendem Netz einmal gewürfelt.
Anschließend wird eine Münze (Wappen oder Zahl) so oft geworfen, wie der Würfel anzeigt.

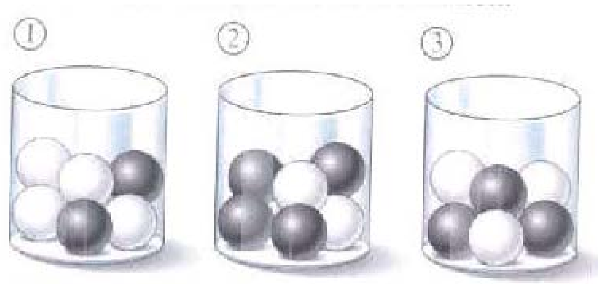


Zeichne ein Baumdiagramm und bestimme die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

- genau einmal Zahl
- mindestens einmal Zahl
- keinmal Wappen

15. Martins Glücksspiel Lösung S. 98

Martin hat für seine Freunde ein Glücksspiel vorbereitet und dazu einen Würfel und drei mit Bällen gefüllte Vasen mitgebracht (siehe Abbildung).



Er vereinbart folgende Regeln:

Erst muss man würfeln, anschließend zieht man eine Kugel aus einer der Vasen. Bei einer Eins zieht man aus Vase 1, bei einer geraden Augenzahl aus Vase 2, sonst aus Vase 3.

Gewonnen hat man, wenn man eine dunkle Kugel zieht.

Er verlangt 1 € Spieleinsatz und zahlt bei Gewinn den Einsatz und 1 € extra zurück.

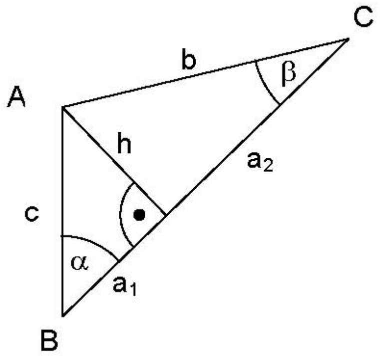
a) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, zunächst eine Eins zu würfeln, dann eine helle Kugel zu ziehen.

b) Entscheide, ob Martin auf lange Sicht bei seinem Glücksspiel Gewinn macht.

16. Berechnung im Dreieck *Lösung S. 98*

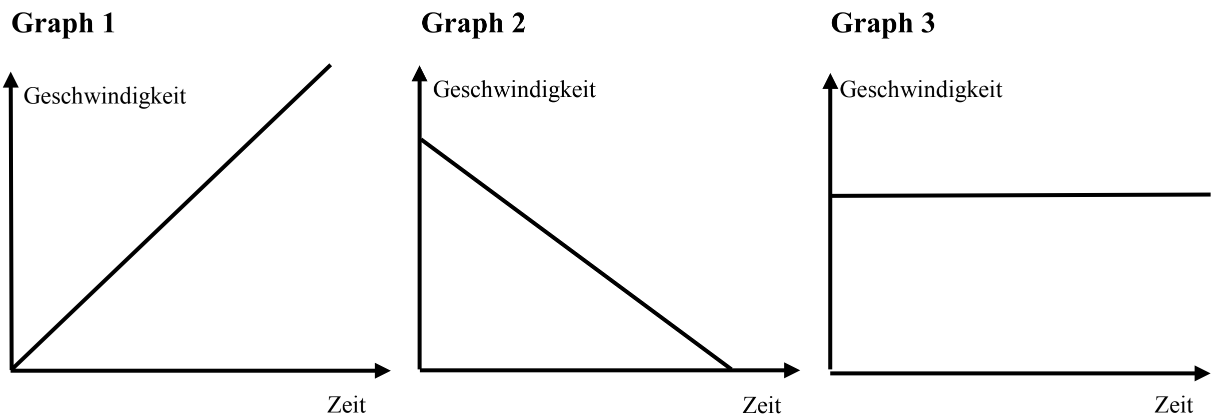
In einem beliebigen Dreieck *ABC* ist die Höhe *h* zu berechnen. Genau 2 der folgenden 5 Gleichungen sind zur direkten Berechnung von *h* geeignet. Kreuze die beiden Gleichungen an.

- ☐ $h = \sqrt{a_1 \cdot a_2}$
- ☐ $h = \sqrt{b^2 - a_2^2}$
- ☐ $h = \tan \beta \cdot a_1$
- ☐ $h = \sin \beta \cdot c$
- ☐ $h = \dfrac{b \cdot \sin \beta}{\sin 90°}$



17. Schiefe Ebene *Lösung S. 99*

In einem Experiment im Physikunterricht rollt eine Kugel eine schiefe Ebene herab und beschleunigt dabei gleichmäßig. Welchem Graphen entspricht die Bewegung der Kugel? Begründe kurz.

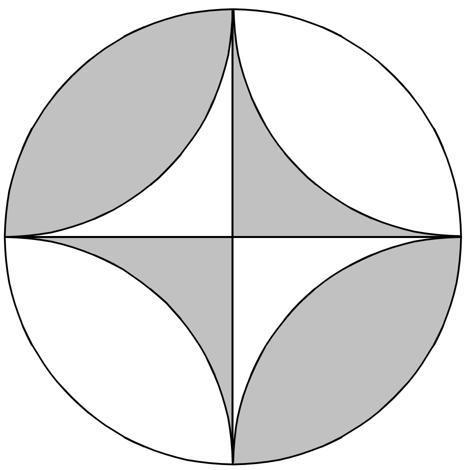


18. Flächen *Lösung S. 99*

Der Kreis hat einen Radius von 3 cm und ist in vier gleichgroße Sektoren unterteilt. In jedem der Sektoren ist noch ein Viertel eines Kreisbogens (Kreisradius ebenfalls 3 cm) eingezeichnet.

Gib einen Term für den Gesamtflächeninhalt der grau unterlegten Flächen an.

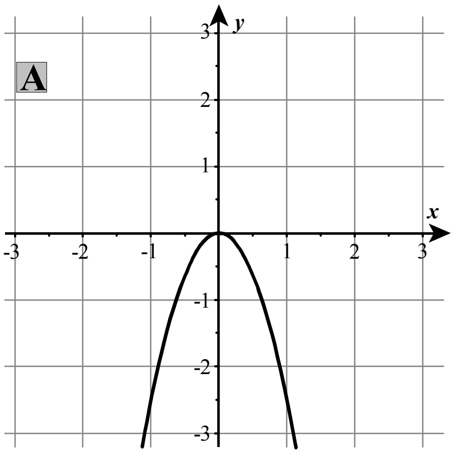
Hinweis: Das Ergebnis kann mit minimalem Rechenaufwand bestimmt werden.

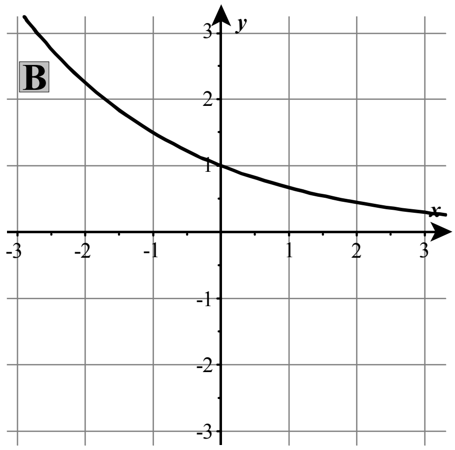


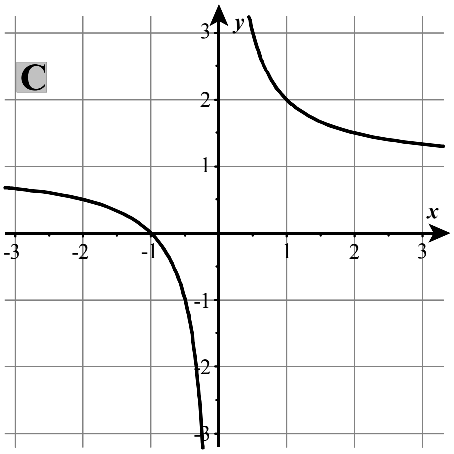
19. Graphen

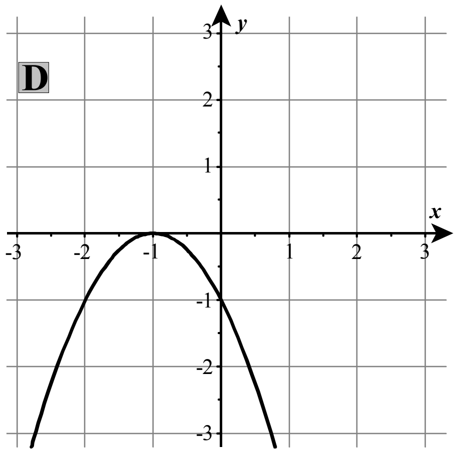
Lösung S. 99

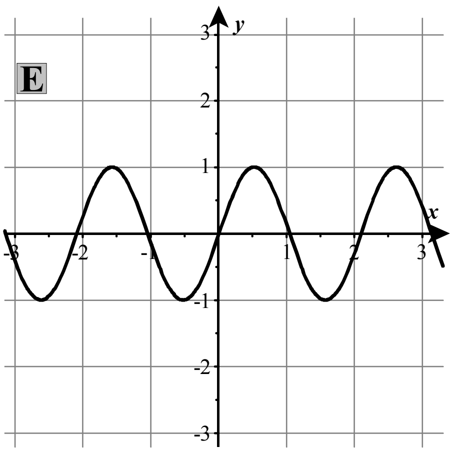
Wähle zu jedem auf der nachfolgenden Seite skizzierten Funktionsgraphen den zugehörigen Funktionsterm aus. Trage dazu den Buchstaben des Graphen unter den zugehörigen Term in die Liste ein (es müssen also noch Felder frei bleiben).

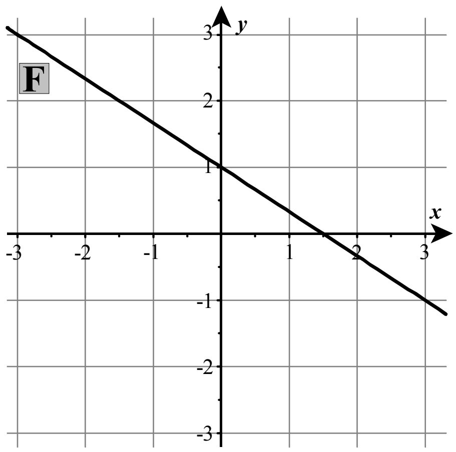












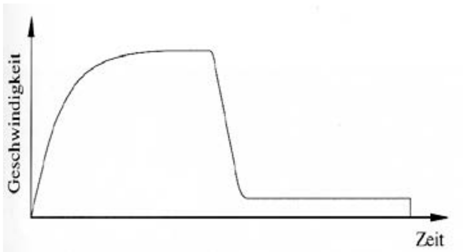
Funktionsterm	$\sin x$	$\sin 3x$	$-\frac{2}{5}x^2$	$-\frac{5}{2}x^2$	$-(x+1)^2$	$-x^2+2$
Zugeh. Graph						

Funktionsterm	$-\frac{3}{2}\cdot x+1$	$-\frac{2}{3}\cdot x+1$	$\frac{1}{x}+1$	$-\frac{1}{x+2}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^x$	$\left(\frac{3}{2}\right)^x$
Zugeh. Graph						

20. Interpretation von Graphen *Lösung S. 99*

Gib an, ob eine der folgenden Sportarten einen Graphen wie diesen liefern könnte, und begründe deine Wahl ausführlich und möglichst exakt:

- Angeln,
- Fallschirmspringen,
- 1000-m-Lauf,
- Stabhochsprung,
- Wasserski.



21. Graphen *Lösung S. 100*

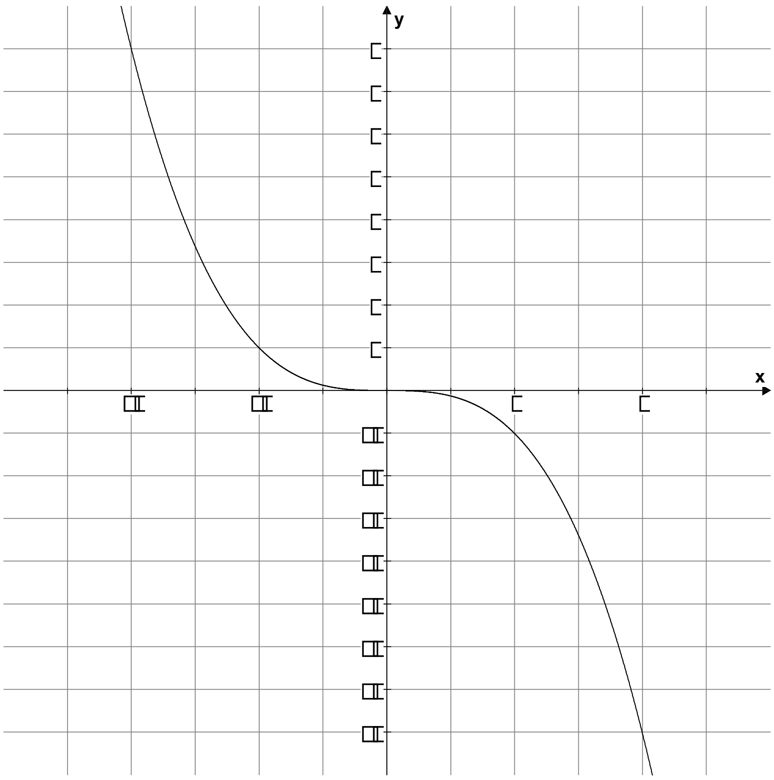
Gegeben seien die Funktionen f, g und h mit $f(x) = x^3$, $g(x) = -x^3$ und $h(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$.

In der nebenstehenden Darstellung ist der Graph einer dieser Funktionen zu sehen.

a) Gib an, welche Funktion grafisch dargestellt ist.

b) Skizziere die Graphen der beiden anderen Funktionen in das gegebene Koordinatensystem.

c) Beschreibe *kurz*, welche Beziehung zwischen den Funktionen f und h besteht.



d) 3 Schüler einer Klasse können Aufgabe 3a lediglich durch pures Raten bearbeiten. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle drei diese Aufgabe richtig beantworten.

2.2 Aufgaben, die mit Hilfe des Taschenrechners bearbeitet werden

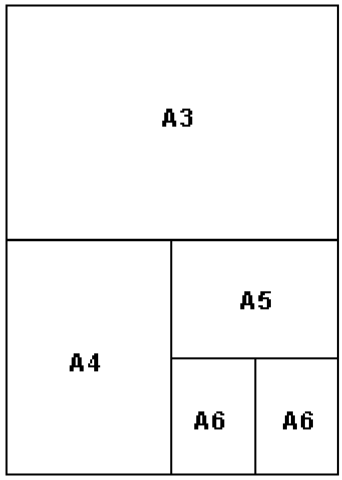
Idee der Zahl und des Messens

1. DIN-Formate

Lösung S. 101

In dieser Aufgabe geht es um die vom Deutschen Institut für Normung (DIN) festgelegten Papierformate der Reihe A.

Wie die Formate miteinander zusammenhängen, zeigt die nebenstehende Abbildung. Das größte Rechteck stellt das Format A2 dar.



a) Eine DIN-A3-Seite soll mit einem Fotokopierer auf DIN-A6-Format verkleinert werden.
Gib an, welchem Flächenverhältnis das entspricht und begründe deine Angabe.

b) Eine Vorlage im Format DIN-A8 soll mit einem Fotokopierer auf den vierfachen Flächeninhalt vergrößert werden.
Gib an, welchem DIN-Format die Vergrößerung entspricht.

c) Das größte Blatt der Reihe A hat das Format DIN-A0. Es soll auf DIN-A6-Größe gefaltet werden.
Berechne, wie viele Lagen Papier am Ende übereinander liegen.

d) Die Kantenlängen <u>jedes</u> DIN-A-Blattes verhalten sich zueinander wie $\sqrt{2} : 1$. Ein DIN-A0-Blatt hat eine Fläche von 1 m^2.
Berechne die Seitenlängen eines DIN-A0- und eines DIN-A4-Blattes in mm.

e) Ein DIN-A3-Blatt soll mit einem Fotokopierer auf DIN-A4-Format verkleinert werden. Berechne, auf wie viel Prozent die Anzeige des Fotokopierers eingestellt werden muss.

Idee der Zahl und des Messens

2. Autokauf

Lösung S. 102

Beim Kauf eines Autos stellt sich oft die Frage, ob man ein Fahrzeug mit einem Benzin- oder mit einem Dieselmotor kaufen soll.

Schaut man sich die Kosten an, die in einem Jahr entstehen, so kann das eine Hilfe bei der Auswahl zwischen einem Benzin- oder Dieselmotor sein.

Eine Autozeitschrift gibt für einen bestimmten Autotyp folgende Zahlen an:

	Auto mit Benzinmotor	Auto mit Dieselmotor
jährliche Festkosten*)	2 291,40 €	2 770,80 €
durchschnittlicher Kraftstoffverbrauch auf 100 km	6,8 Liter	5,3 Liter

*) Festkosten sind z. B. Steuer, Versicherung, Ölwechsel, Reparaturen

a) Im November 2004 kostete 1 Liter Benzin 1,19 € und ein Liter Diesel 1,05 €.
Fülle die folgende Tabelle aus.

jährlich gefahrene Strecke	Benzinmotor: jährliche Kraftstoffkosten	Benzinmotor: jährliche Gesamtkosten (Kraftstoffkosten + Festkosten)	Dieselmotor: jährliche Kraftstoffkosten	Dieselmotor: jährliche Gesamtkosten (Kraftstoffkosten + Festkosten)
10 000 km				
20 000 km				
30 000 km				

b) Berechne, wie viel Geld beim Vergleich der Gesamtkosten bei einer jährlichen Fahrleistung von 30 000 km mit einem Dieselauto pro Jahr gespart werden kann.

c) Berechne, ab welcher jährlichen Fahrleistung ein Dieselfahrzeug niedrigere Gesamtkosten hat als ein Benzinfahrzeug.

d) Ein Neuwagen mit Benzinmotor kostet 17 275 €, ein Neuwagen mit Dieselmotor ist teurer und kostet 18 350 €.
Herr Timm will sich einen neuen Dieselwagen kaufen. Pro Jahr fährt er durchschnittlich 30 000 km.
Berechne, nach wie vielen Jahren Herr Timm die Mehrkosten ungefähr ausgeglichen hat.

e) Bei solchen Wirtschaftlichkeitsberechnungen spielt weiterhin der Wiederverkauf eine entscheidende Rolle, denn üblicherweise gibt man beim Kauf eines neuen Autos ein gebrauchtes in Zahlung.
Bei den hier betrachteten Autos kann man davon ausgehen, dass beim Verkauf nach drei Jahren der Wagen mit Benzinmotor 9 700 € bringt, der Dieselwagen 10 400 €.
Beschreibe, wie dies die Überlegungen von d) ändert und zu welchen Ergebnissen Herr Timm kommt, wenn er den Wiederverkauf mit einbezieht.

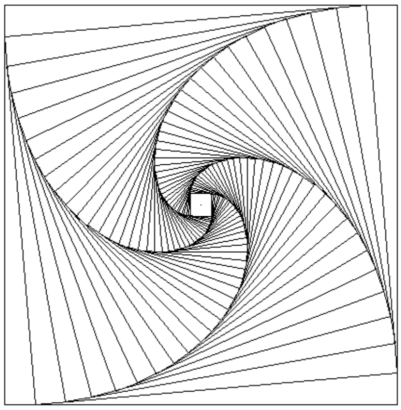
f) Herr Timm hat vor genau drei Jahren 12 000 € auf ein Konto mit einem Zinssatz von 2,7 % eingezahlt.
Bestimme, wie viel Geld Herr Timm noch dazulegen muss, um sich jetzt einen neuen Dieselwagen kaufen zu können. Er gibt übrigens kein gebrauchtes Auto in Zahlung.

Idee der Zahl und des Messens

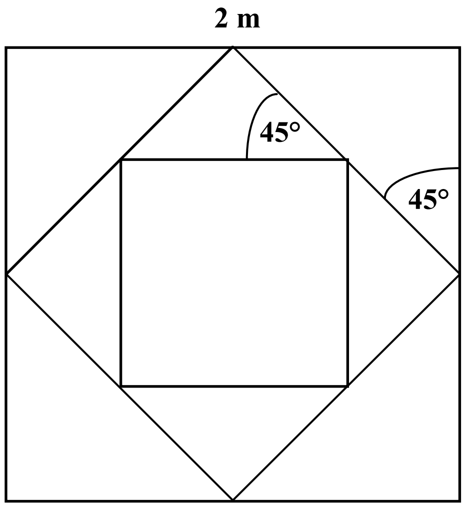
3. Computergrafik

Lösung S. 103

Man kann mit einfachen (mathematischen) Mitteln faszinierende grafische Effekte erzielen.
In der nebenstehenden Figur wurde ein Quadrat 36-mal jeweils um einen festen Winkel α – hier 5° – weitergedreht, und die Seite wurde immer um denselben Faktor so verkürzt, dass das gedrehte Quadrat gerade in das vorherige hineinpasst.



a) Wenn $\alpha = 45°$, sind die Verhältnisse noch sehr übersichtlich: Das Anfangsquadrat habe die Seitenlänge $s = 2$ m.

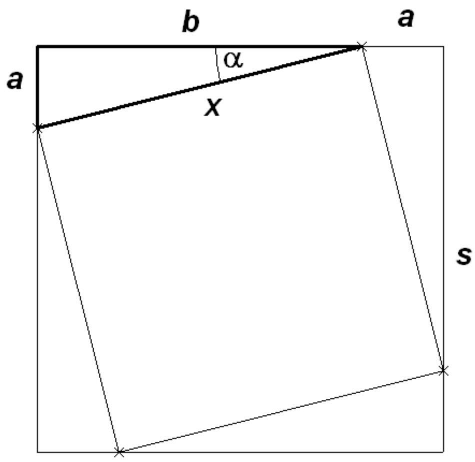


- Bestimme die Seitenlängen der Quadrate nach der ersten und nach der zweiten Drehung, also die Seitenlängen der beiden inneren Quadrate.

Es ist:
Neue Seitenlänge = Verkleinerungsfaktor f · vorherige Seitenlänge

- Begründe, dass der Verkleinerungsfaktor f bei beiden Drehungen den Wert $\frac{\sqrt{2}}{2}$ hat.

Nun sei die Winkelgröße von α nicht mehr 45°, sondern beliebig. s sei die Seitenlänge des Ausgangsquadrates.



b) Gesucht ist die neue Seitenlänge x.
Man erkennt: $s = a + b$.

- Begründe damit folgenden Zusammenhang: $s = x \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha)$.
- Bestimme die nach x umgeformte Gleichung und gib den Verkleinerungsfaktor f an.

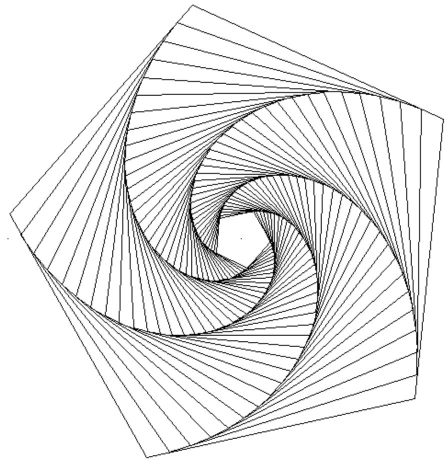
Sei α nun 5° wie in der ersten Grafik oben rechts.

- Bestimme den Verkleinerungsfaktor f für $\alpha = 5°$ und zeige, dass $f \approx 0{,}923$.

Die Ausgangsseite s habe wieder eine Länge von 2 m.

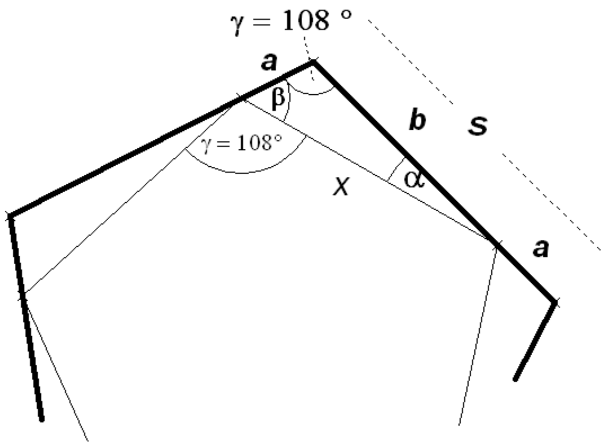
- Bestimme den Flächeninhalt des 36. gedrehten Quadrats (für $\alpha = 5°$).

Um noch interessantere Effekte zu erzielen, kann man statt eines Quadrates ein regelmäßiges Vieleck entsprechend drehen und verkleinern. Dies soll jetzt mit einem regelmäßigen Fünfeck geschehen.



c) Begründe zuerst, dass das Maß der Innenwinkel γ (Winkel zwischen zwei benachbarten Seiten) eines regelmäßigen Fünfecks jeweils 108° beträgt.

d) Man sieht hier Teile eines Ausgangsfünfecks (dick) und Teile des verkleinerten gedrehten Fünfecks (dünn).
α sei wieder der Drehwinkel.



- Es gilt wieder: $s = a + b$.
  Begründe damit und mit Hilfe des Sinussatzes, dass die folgende Beziehung gilt:
  $$x = \frac{\sin 108°}{\sin\alpha + \sin\beta} \cdot s$$

Es sei nun wieder $\alpha = 5°$.

- Begründe, dass der Verkleinerungsfaktor f für $\alpha = 5°$ etwa 0,9438 beträgt

- Bei einer Drehung verkleinert sich der Flächeninhalt um den Faktor $f^2 \approx 0{,}8908$.
  Bestimme die Anzahl der Drehungen, die nötig sind, damit der Flächeninhalt des letzten Fünfecks erstmals kleiner als 10 % des Flächeninhalts des Ausgangsfünfecks ist.

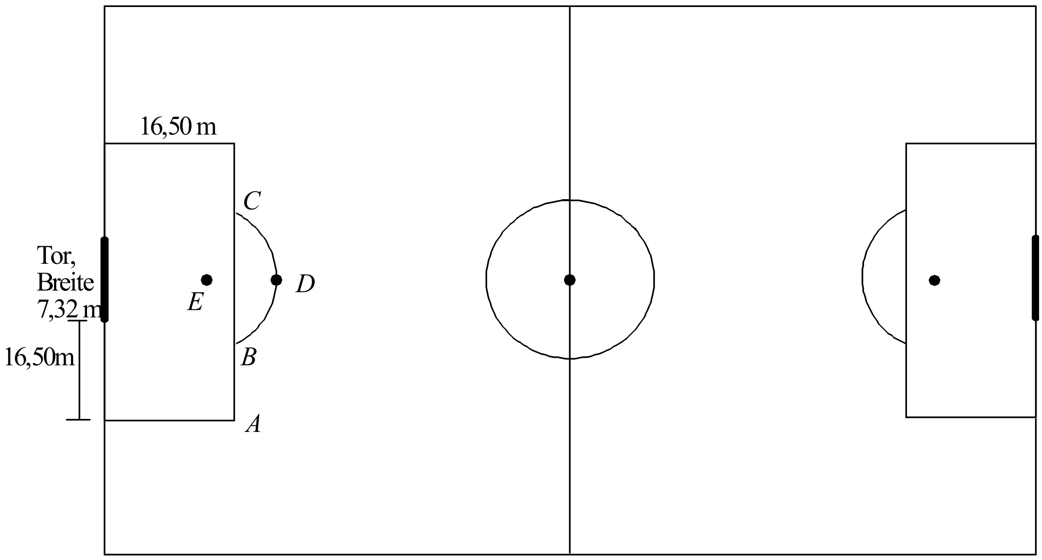
Idee der Zahl und des Messens

4. Fußballfeld

Lösung S. 106

a) Die Maße eines Fußballfeldes müssen nicht überall gleich sein. Die Regel besagt lediglich:
„Für internationale Spiele soll die Länge mindestens 100 m und höchstens 110 m betragen. Die Breite soll mindestens 64 m und höchstens 75 m betragen.“
Berechne, um wie viel Prozent die maximal mögliche Spielfeldfläche größer ist als die kleinstmögliche Fläche.

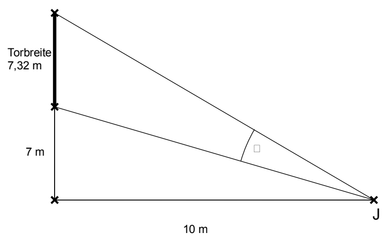
b) Die jeweiligen Abmessungen der Torbreite und des Strafraumes sind der Skizze zu entnehmen.
Eine weitere Regel besagt:
„In jedem Strafraum, 11 m vom Mittelpunkt der Torlinie zwischen den Pfosten und gleich weit von beiden Pfosten entfernt, ist der Elfmeterpunkt E. Von jedem Elfmeterpunkt aus ist ein Teilkreis mit 9,15 m Radius außerhalb des Strafraumes zu ziehen.“
Der Grund für diese Markierung besteht darin, dass beim Strafstoß (Elfmeter) alle Spieler (außer dem Schützen und dem Torwart) außerhalb des Strafraums und mindestens 9,15 m vom Ball entfernt sein müssen. (Diese Verhältnisse sind – nicht maßstabstreu – in der folgenden Skizze dargestellt.)



Zur Markierung des Teilkreises ist es für den Platzwart nützlich, die Länge der Strecke $\overline{AB}$ (von der Strafraumkante bis zum Schnittpunkt mit dem Kreis) zu kennen.
Bestimme dazu zuerst die Länge der Strecke $\overline{BC}$ (*zur Kontrolle* $|BC| = 14,62$ m).
Berechne anschließend die Länge der Strecke $\overline{AB}$.

c) Für abprallende Bälle nach einem Strafstoß (Elfmeter) ist es für die übrigen Spieler wichtig, möglichst dicht am Tor zu stehen.
Entscheide, ob es vom Punkt *B* oder am Punkt *D*, dem Mittelpunkt des Kreisbogens (siehe Skizze), dichter zum Mittelpunkt der Torlinie ist.

d) Der Stürmer Jürgen befindet sich im Punkt *J* (siehe Skizze) und schießt auf das leere Tor. Trotzdem schießt er daneben. Zur Beurteilung der Situation soll im Nachhinein der Schusswinkel α – bezogen auf die Torbreite – berechnet werden. Bestimme den Schusswinkel α.

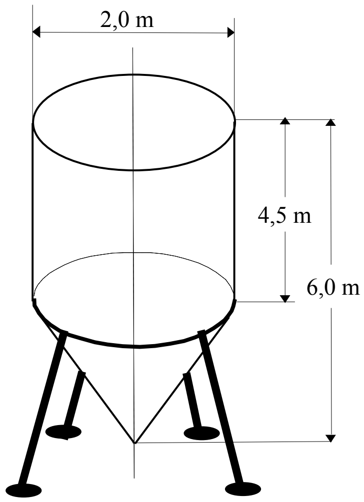


Idee der Zahl und des Messens

5. Wassertank

Lösung S. 107

In der nebenstehenden Abbildung ist ein Wassertank dargestellt.
(Abbildung nicht maßstabsgerecht)



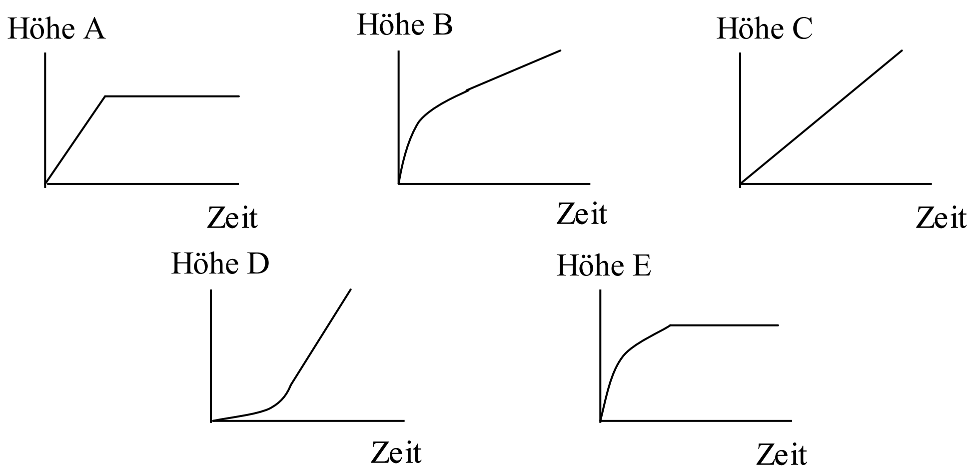
a) Der zylinderförmige Teil des Tanks soll von außen einen neuen Anstrich erhalten.
Berechne, wie viel Liter Farbe man braucht, wenn 1 Liter für 8 m^2 ausreicht.

b) Berechne durch Überschlag das Gesamtvolumen des Tanks und kreuze an.
Beschreibe, wie du vorgegangen bist.

❑ 5 m^3 ❑ 15 m^3
❑ 35 m^3 ❑ 45 m^3

c) Der spitze Teil des Tanks wird bis zu seiner halben Höhe mit Wasser gefüllt.
Berechne, wie viele Kubikmeter Wasser der Tank enthält.

d) Der leere Tank wird gleichmäßig mit Wasser gefüllt.
Gib an, welcher der folgenden Graphen zeigt, wie sich die Höhe des Wasserspiegels mit der Zeit ändert. Begründe deine Entscheidung.
Begründe für die anderen Graphen, warum sie <u>nicht</u> die Änderung beschreiben.

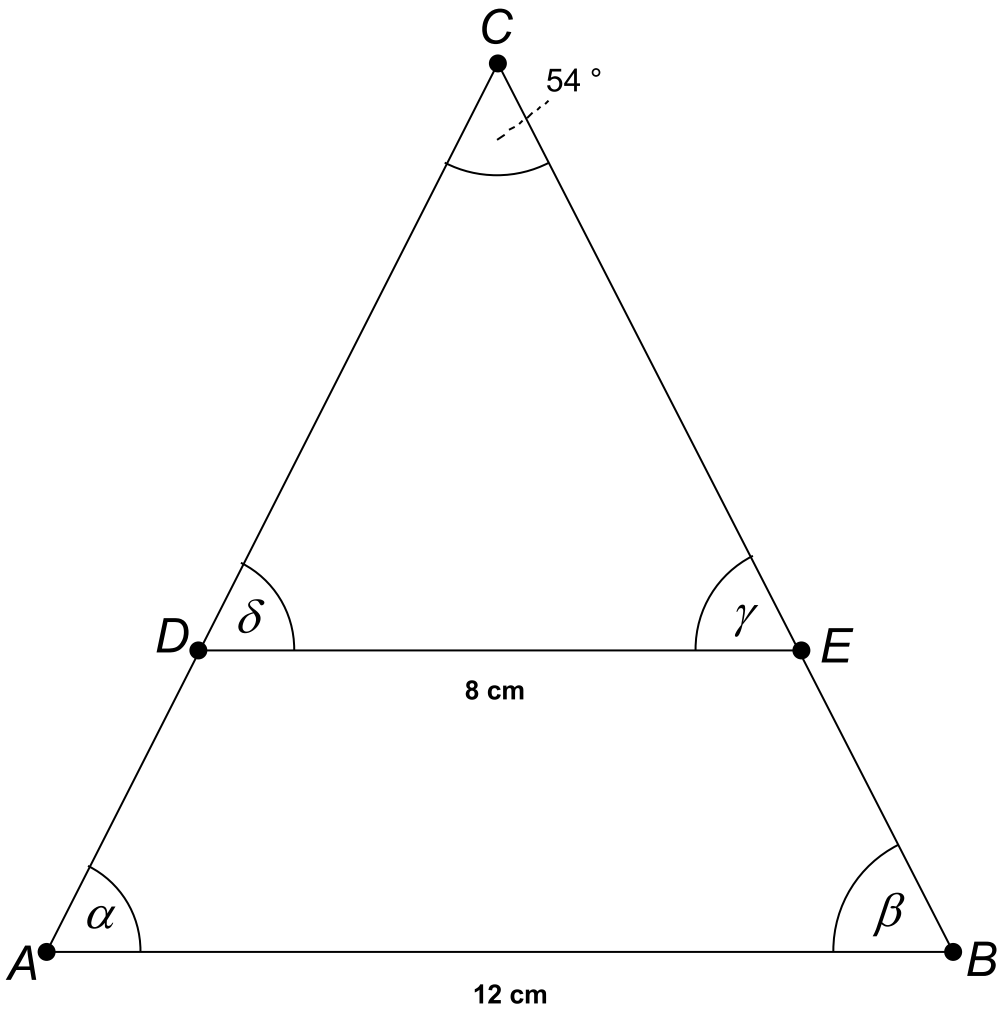


Idee der Zahl und des Messens

6. Dreieck

Lösung S. 108

Die Abbildung zeigt ein gleichschenkliges Dreieck *ABC*. Die Strecke $\overline{DE}$ ist parallel zur Strecke $\overline{AB}$.



a) Berechne die Winkelgrößen von α und γ.

b) Zeige, dass das Flächenverhältnis der Dreiecke *DEC* und *ABC* den Wert 1 : 2,25 hat.

c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks *DEC*.

d) Begründe, dass das Viereck *ABED* ein spiegelsymmetrisches Trapez ist, und berechne seinen Flächeninhalt.

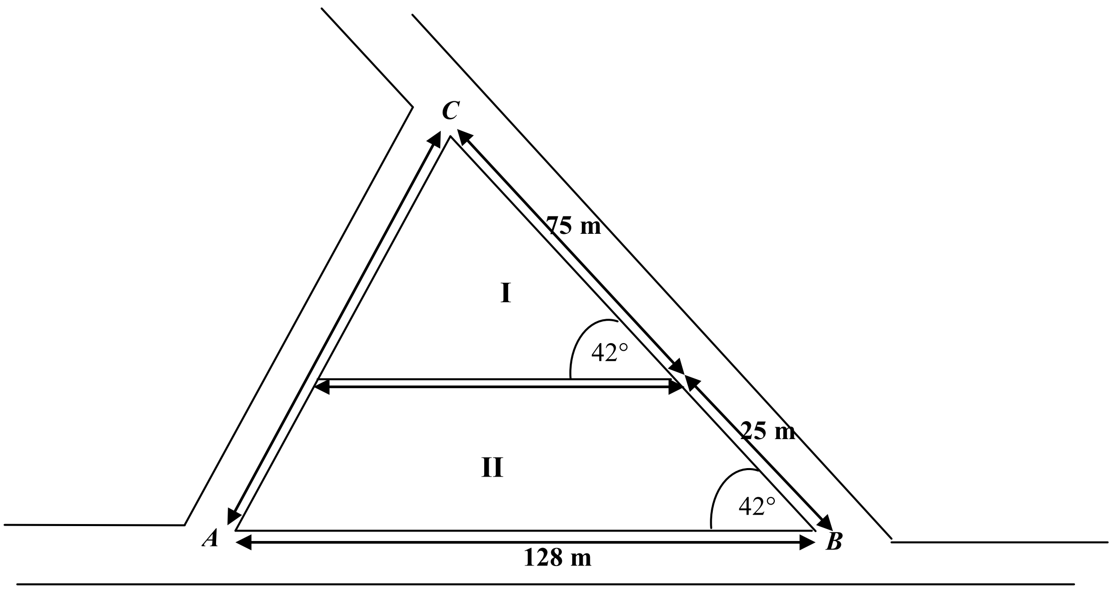
e) Der Kreis ***K*** hat *D* als Mittelpunkt und läuft durch *B*.
Entscheide, ob der Punkt *C* innerhalb von ***K*** liegt, auf ***K*** oder außerhalb von ***K***.

Idee der Zahl und des Messens

7. Flurkarte

Lösung S. 110

Du siehst eine nicht maßstabsgerechte Skizze mit den Grundstücken I und II.



a) Weise nach, dass die Länge der Grundstücksgrenze zwischen den Grundstücken I und II 96 m lang ist. Berechne die Länge der Grundstücksgrenzen an der Straße zwischen *A* und *C*. (Zur Kontrolle: $|AC| \approx 85{,}8\text{ m}$)

b) Um die beiden Grundstücke soll ein Zaun mit jeweils einem 3 m breiten Tor errichtet werden. Zusätzlich sollen die beiden Grundstücke durch einen weiteren Zaun voneinander getrennt werden. Die Zaunkosten für die Außengrenzen betragen 14,25 € pro Meter, für die Grenze zwischen den beiden Grundstücken 9,85 € pro Meter. Ein Tor kostet 626,53 €. Berechne die Gesamtkosten.

c) Bestimme den Gesamtflächeninhalt der beiden Grundstücke und runde auf einen ganzzahligen Wert. Bestimme den Flächeninhalt des Grundstückes II und runde auf einen ganzzahligen Wert.

d) Am Punkt *M* – genau in der Mitte zwischen *A* und *B* – liegt ein Stromverteiler. Eine Straßenlampe am Punkt *C* soll durch eine gerade (unterirdische) Leitung mit dem Stromverteiler in *M* verbunden werden. Berechne die Länge der Leitung.

e) Ohne Rechnung: Begründe, dass die Leitung auch die Grenze zwischen den Grundstücken in der Mitte kreuzt. Beweise, dass die Leitung die Flächen beider Grundstücke halbiert.

Idee der Zahl und des Messens

8. Windpark

Lösung S. 111

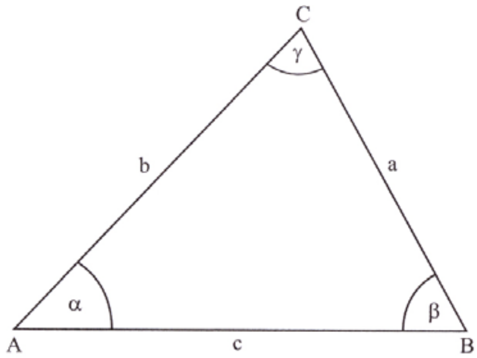
Für einen neuen Windpark sollen Windräder aufgestellt werden. Ein Windrad besteht aus drei Rotorblättern. Ein Rotorblatt ist 16 m lang.

a) Die sich drehenden Rotorblätter beschreiben eine Kreisfläche. Bestimme den Durchmesser und die Größe der Kreisfläche.
Vergleiche diese Fläche prozentual mit der Fläche einer Turnhalle mit den Abmessungen 18 m x 36 m. (4 P.)

b) Bei einer Windgeschwindigkeit von mehr als 25 Metern in der Sekunde wird die Anlage aus Sicherheitsgründen gestoppt. Bei dieser Windgeschwindigkeit drehen sich die Rotorblätter in 3 Sekunden 2-mal um ihre Achse.
Zeige, dass sich die Spitzen der Rotorblätter dann mit einer Geschwindigkeit von mehr als 240 km/h bewegen. (3 P.)

Die Windräder stehen an den Standorten *A*, *B* und *C* (siehe nebenstehende Skizze). Folgende Daten sind bekannt:

$c = 285$ m $\alpha = 51°$ $\beta = 62°$



(Skizze nicht maßstäblich)

c) Aus Sicherheitsgründen müssen die Standorte der Windräder mindestens 240 m voneinander entfernt sein. Die Standorte *A* und *C* erfüllen mit einem Abstand von 273 m diese Bedingung.
Entscheide, ob der Sicherheitsabstand auch bei den Standorten *B* und *C* eingehalten wurde. (5 P.)

d) Der Standort *D* eines vierten Windrades liegt spiegelbildlich zum Standort *C* bezüglich einer Achse durch *A* und *B*.
Bestimme die Entfernung zwischen den Standorten *C* und *D*.
Hinweis: Zeichne eine Skizze. (5 P.)

e) Ein Spaziergänger sieht die eingezäunten Windräder und möchte wissen, wie hoch diese Windräder ungefähr sind. Er peilt mit einem Geodreieck den Höhenwinkel (Winkel zwischen Turmspitze und Bodenebene) des Stahlturmes mit ca. 18°, dann entfernt er sich vom Turm um zusätzliche 100 m und misst nun nur noch ca. 11°. Zeichne eine Skizze und bestimme die ungefähre Höhe des Stahlturmes. (5 P.)

Idee der Zahl und des Messens

9. Paranussbaum

Lösung S. 113

Paranussbäume sind Urwaldriesen. Als so genannte „Überständer“ ragen sie weit über das etwa vierzig Meter hohe Kronendach des tropischen Regenwalds hinaus.

Besonders große Exemplare dieser Bäume können bis zu 60 m hoch werden, davon entfallen etwa 43 m auf den Stamm. Der Stamm eines solchen Baums hat einen Umfang von ungefähr 16 m und ist annähernd zylindrisch.

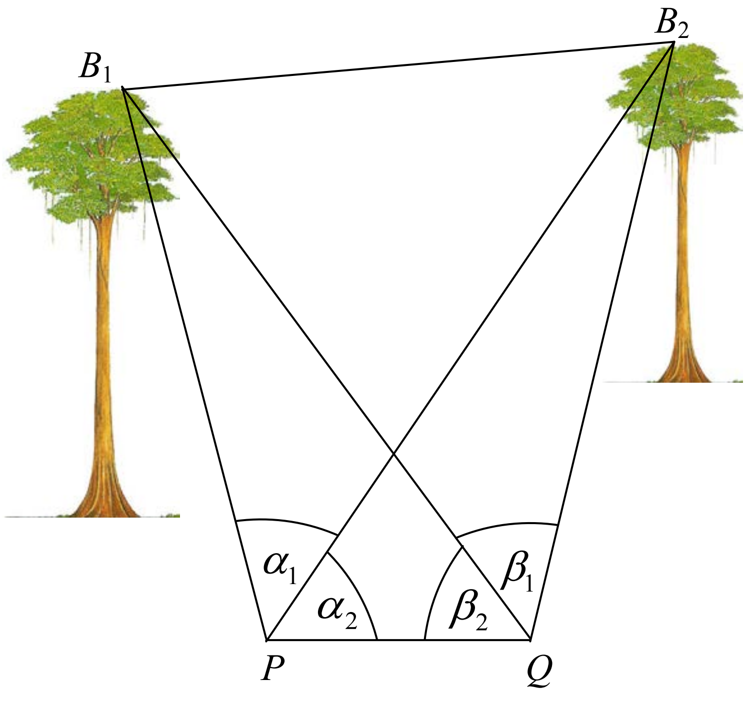
a) Bestimme den Durchmesser eines solchen Baumstammes.

b) Berechne die Masse eines solchen Baumstammes (vom Boden bis zur Krone) in Tonnen, wenn man von einer Dichte von $0{,}8\,\mathrm{g/cm^3}$ für das Holz ausgeht.

Um die Entfernung der Baumkronenpunkte B_1 und B_2 nahe beieinander stehender Paranussbäume zu bestimmen, werden nach der Methode des „Vorwärtseinschneidens“ von einer zugänglichen Standlinie $\overline{PQ}$ aus die folgenden Werte gemessen:

$\alpha_1 = 69°,\ \alpha_2 = 36°,$
$\beta_1 = 80°,\ \beta_2 = 49°,$
Standlinie $|PQ| = 100$ m.

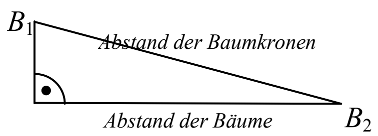
Dabei wird vorausgesetzt, dass die vier Punkte P, Q, B_1, B_2 in einer Ebene liegen.



c) Bestimme mit diesen Daten zuerst die Entfernungen $|PB_1|$ und $|PB_2|$ und dann die gesuchte Entfernung der Baumkronenpunkte B_1 und B_2.

Die beiden Bäume sind unterschiedlich hoch (61 m bzw. 49 m). Deshalb wird durch die oben angewandte Methode nicht der Abstand der Baumstämme voneinander, sondern der Abstand der Baumkronenpunkte B_1 und B_2 bestimmt. Diese beiden Abstände stimmen hier nicht überein (siehe unten stehende Skizze).

d) Vergleiche die beiden Abstände miteinander und entscheide, ob das oben beschriebene Verfahren dennoch auch zur Bestimmung des Abstandes dieser beiden unterschiedlich großen Bäume geeignet sein könnte, falls wenigstens die Fußpunkte der Baumstämme sich auf gleicher Höhe befinden.

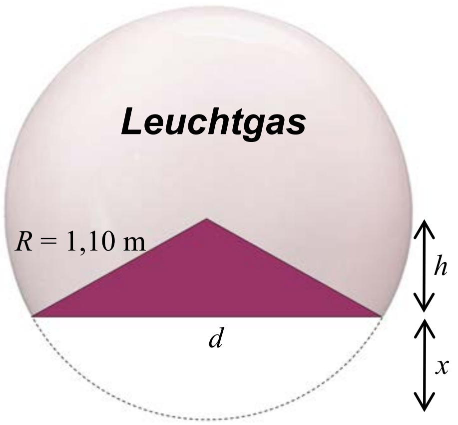


Idee Raum und Form, des Messens und des funktionalen Zusammenhangs

10. Designerlampe

Lösung S. 115

Der italienische Stardesigner *Francesco Canelloni* hat für die Empfangshalle eines Luxushotels eine Stehlampe entworfen. Sie besteht aus einer hohlen, durchsichtigen Glaskugel von 1,10 m Radius, in die von unten als Ständer ein Kegel aus rotem Glas wie ein Keil so hineingetrieben ist, dass die Spitze des Kegels im Mittelpunkt der Kugel liegt. Die Grundfläche des Kegels bildet die Standfläche der Lampe. Sie schließt bündig mit der Kugel ab, so dass unten praktisch ein Stück der Kugel abgeschnitten ist.



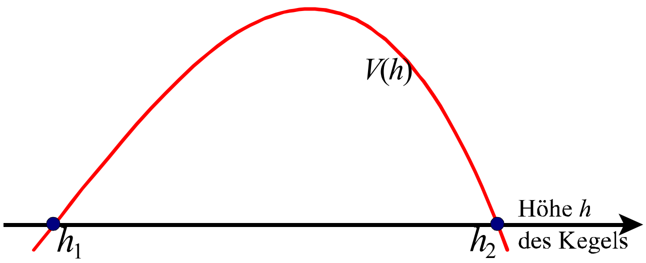
a) Bestimme das Volumen des Kegels, wenn seine Höhe h gleich dem halben Kugelradius R ist.

In den Raum zwischen Kegel und Kugel soll ein Leuchtgas gefüllt werden, das einen besonderen Lichteffekt erzeugt.

b) Berechne das Volumen V der Gasmenge und gib es in Litern an.

HINWEIS: Das Volumen des von der Kugel abgeschnittenen Teils berechnet sich hier mit $V_{\text{Kugelabschnitt}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot x^2 \cdot (3R - x)$, wobei x die Höhe des Kugelabschnitts ist (siehe Skizze).

Nun soll die Höhe h des Kegels variiert werden. Dabei liegt die Spitze des Kegels immer noch in der Mitte der Kugel. Der Graph rechts zeigt die Abhängigkeit des Kegelvolumens V_h von der Höhe h. Die y-Achse wurde nicht gezeichnet.



c) Gib die beiden Nullstellen h_1 und h_2 der Funktion $V(h)$ an, d. h. die Werte für h, für die das Volumen $V(h)$ des Kegels den Wert Null annimmt (siehe Skizze). Begründe deine Entscheidung und beschreibe die Form der zugehörigen Lampen.

d) Das Kegelvolumen V ist abhängig vom Radius und der Höhe des Kegels. Im hier untersuchten Spezialfall hängt der Radius $r(h)$ von der Kegelhöhe h ab, d.h. V hängt eigentlich nur von h ab. Bestimme den Funktionsterm $V(h)$.

Idee des Messens, Idee Raum und Form

11. 2-Euro-Münze

Lösung S. 117

Die 2-Euro-Münze hat folgende Maße:

Durchmesser	25,75 mm
Durchmesser des goldfarbenen Mittelteils	18,20 mm
Dicke	2,20 mm
Masse	8,50 g

a) Berechne das ungefähre Gesamtvolumen der Münze.
(Ergebnis zur Kontrolle: $V \approx 1145,69\ \text{mm}^3$)
Berechne den prozentualen Anteil des Volumens des goldfarbenen Mittelteils am Gesamtvolumen.

b) Der Rand der Münze ist bekanntlich geriffelt, er hat genau 250 Einkerbungen.
Bestimme den Abstand zwischen je zwei Kerben.

c) Berechne die *durchschnittliche Dichte* der Münze. $\left(\text{Hinweis: Dichte } = \dfrac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}\right)$
Die Dichte der Legierung, die den goldfarbenen Mittelteil bildet, ist kleiner als die Dichte der silberfarbenen Legierung des Ringes.
Entscheide, ob der goldfarbene Mittelteil schwerer ist oder der silberfarbene Ring.

d) Jetzt sei ein würfelförmiger Behälter mit der Kantenlänge 30 mm gegeben, der genau halb hoch mit Wasser gefüllt ist.
Bestimme rechnerisch, wie viele 2-Euro-Münzen (vorsichtig!) in den Behälter aufeinander gelegt werden können, ohne dass das Wasser überläuft.

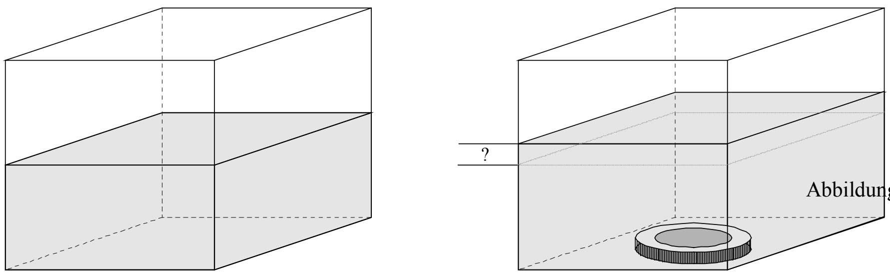


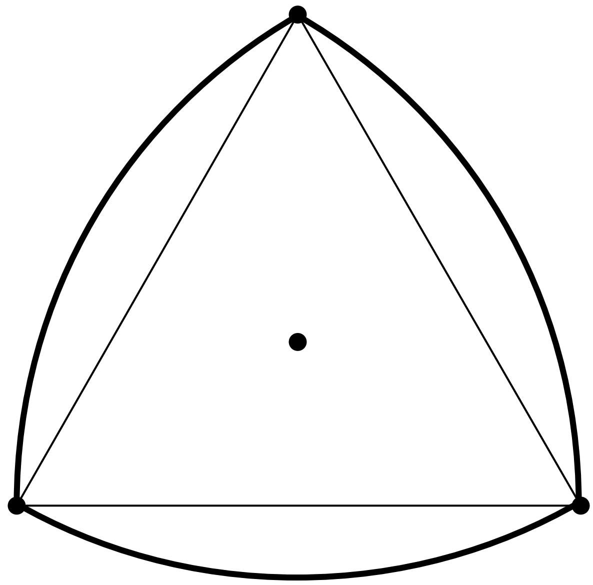
Abbildung nicht maßstabsgetreu.

e) Zeige, dass das Wasser nie überlaufen würde, wenn man bei dem gleichen Gefäß mit einer Wasserhöhe von 10 mm beginnt und wieder die Münzen Stück für Stück aufeinander legt.

Idee des Messens, Idee Raum und Form

12. Bogen-Dreiecke **Lösung S. 118**

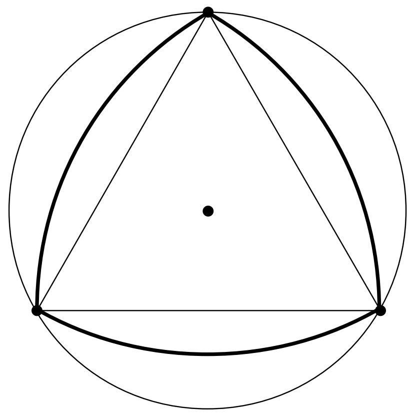
Bei einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a = 10 cm wird von jedem Eckpunkt aus ein Kreisbogen durch die beiden jeweils gegenüberliegenden Punkte geschlagen (siehe nebenstehende Abbildung).



a) Berechne den Umfang des so entstandenen Bogen-Dreiecks.

b) Bestimme den Flächeninhalt des Bogen-Dreiecks.
(Zur Kontrolle: $A \approx 70{,}477\,cm^2$)

c) Bestimme den Flächeninhalt des Umkreises des Dreiecks.
(*Hinweis: Der Radius des Umkreises eines gleichseitigen Dreiecks beträgt* $\frac{2}{3}$ *seiner Höhe*.)
Berechne, um wie viel Prozent der Flächeninhalt des Kreises größer ist als der Flächeninhalt des Bogen-Dreiecks.



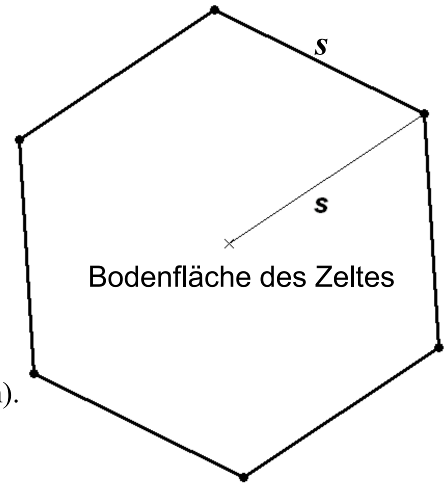
d) Wie bei dem gleichseitigen Dreieck soll jetzt ein „Bogen-Viereck“ auf der Basis eines Quadrats konstruiert werden.
Dabei sollen vier gleiche Bögen jeweils zwei benachbarte Eckpunkte enthalten.
Beschreibe eine mögliche Konstruktionsvorschrift und erstelle die Figur, die aus deiner Vorschrift entsteht.

Idee Raum und Form

13. Pfadfinderzelt

Lösung S. 119

Eine einfache Art, ein Zelt zu konstruieren, besteht darin, gleichlange Stangen in den Eckpunkten eines Vielecks auf dem Boden aufzustellen und sie in einer Dachspitze zusammenzubinden. Anschließend wird das „Gerüst“ mit Zeltbahnen bespannt.
Der Fußboden bleibt „Natur“.



Wir betrachten als Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck.
Die 6 Stangen haben eine Länge von jeweils 8 m, werden aber einen Meter vor ihrem Ende zusammengebunden.
Der Durchmesser der Stangen wird hier vernachlässigt.

Der Abstand s der Fußpunkte der Stangen zum Bodenmittelpunkt betrage zunächst 5 m.

a) Berechne die Höhe des Zeltes (Abstand vom Boden bis zum Kreuzungspunkt der Stangen).
[zur Kontrolle: $h \approx 4{,}9\text{ m}$]

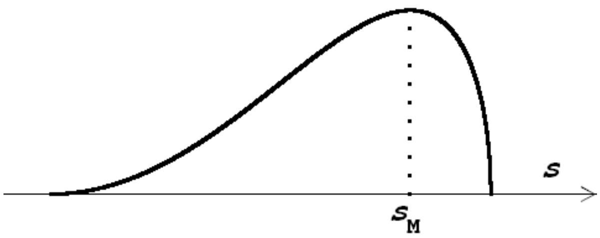
b) Bestimme den Flächeninhalt des Zeltbodens.
[zur Kontrolle: $A \approx 65\text{ m}^2$]

c) Bestimme, wie viel Quadratmeter Zelttuch benötigt werden.

d) Bestimme den „umbauten Raum“ W, d.h. das Volumen des Zeltes.

e) Nun soll s variiert werden, und der „umbaute Raum“ W soll als Funktion von s betrachtet werden: $W = W(s)$.

f) Rechts siehst du den Graphen von W.
Die y-Achse fehlt, und die s-Achse ist nicht skaliert.



9. Bestimme die beiden Nullstellen, d.h. jene Werte von s, für die das Volumen $W(s)$ den Wert Null annimmt, und beschreibe die anschauliche Bedeutung.

10. Bestimme den Funktionsterm *W(s).*
[zur Kontrolle: $W(s) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot (49 - s^2)} \cdot s^2$]

11. Begründe sinnvoll, dass die Maximalstelle s_m zwischen 5 und 6 liegt.

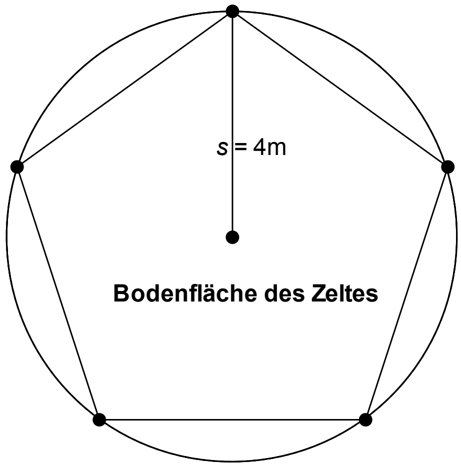
Idee Raum und Form

14. Zeltbau

Lösung S. 121

Eine einfache Art, ein Zelt zu konstruieren, besteht darin, gleichlange Stangen in den Eckpunkten eines Vielecks auf dem Boden aufzustellen und sie genau über der Mitte in einer Dachspitze zusammenzubinden. Anschließend wird das „Gerüst“ mit Zeltbahnen bespannt. Der Fußboden bleibt „Natur“.

Wir betrachten als Grundfläche ein regelmäßiges Fünfeck. Die 5 Stangen haben eine Länge von 6,20 m, werden aber 20 cm vor ihrem Ende zusammengebunden. Der Durchmesser der Stangen wird hier vernachlässigt.
Der Abstand s der Fußpunkte der Stangen zum Bodenmittelpunkt betrage 4 m.



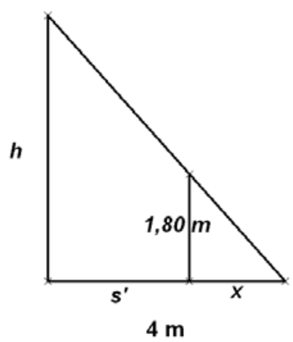
a) Berechne die Höhe des Zeltes.
(Abstand vom Boden bis zum Kreuzungspunkt der Stangen. Zur Kontrolle: $h \approx 4{,}47$ m).

b) Begründe, dass der Flächeninhalt des Zeltbodens in guter Näherung 38 m^2 beträgt. Begründe allgemein, dass man bei variabler Länge s den Flächeninhalt des Zeltbodens $A(s)$ mit folgender Formel berechnen kann: $A(s) = 5 \cdot \sin 36° \cdot \cos 36° \cdot s^2$.
Hinweis: Der fünfeckige Zeltboden setzt sich aus fünf kongruenten Dreiecken zusammen.

c) Bestimme den „umbauten Raum“, d.h. das Volumen des Zeltes.

d) Ein Punkt auf dem Zeltboden habe „Stehhöhe“, wenn der senkrechte Abstand zum Zeltdach mindestens 1,80 m beträgt. Bestimme den Flächeninhalt der Bodenfläche mit Stehhöhe.

Hinweis:
Vgl. die nebenstehende Skizze. Berechne x und s’.



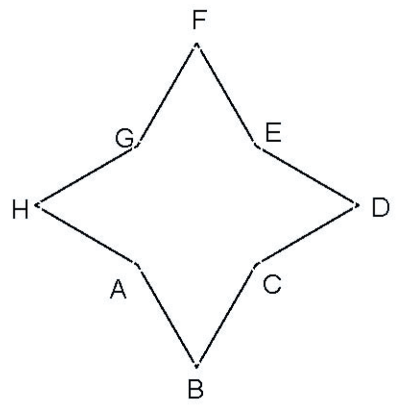
Idee Raum und Form

15. Vom Stern zur Pyramide

Lösung S. 123

Der nebenstehende symmetrische Stern hat folgende Eigenschaften:

Alle Seiten sowie die Strecke $\overline{AC}$ haben die gleiche Länge a. $\overline{AC}$ steht senkrecht zu $\overline{CE}$.



a) Wie viele Symmetrieachsen hat der Stern?

b) Beschreibe kurz eine Konstruktion des Sterns.

c) Die Dreiecksflächen sollen so geklappt werden, dass eine Pyramide entsteht.

   Bestimme das Volumen der Pyramide für $a = 5$ cm.

d) Der Stern wird so verändert, dass die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$ nicht mehr gleich lang sind. Die Symmetrie des Sterns bleibt jedoch erhalten.
   Untersuche, unter welchen Bedingungen durch Klappen der Dreiecksflächen eine Pyramide entstehen kann.

e) Betrachtet wird jetzt die so geänderte Pyramide, bei der die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ doppelt so lang geworden sind (die Strecke $\overline{AC}$ hingegen hat ja ihre Länge beibehalten!).
   Begründe, dass das Volumen dieser Pyramide nicht doppelt so groß ist wie das der Pyramide aus c), und entscheide, ob es mehr als das Doppelte ist oder weniger.

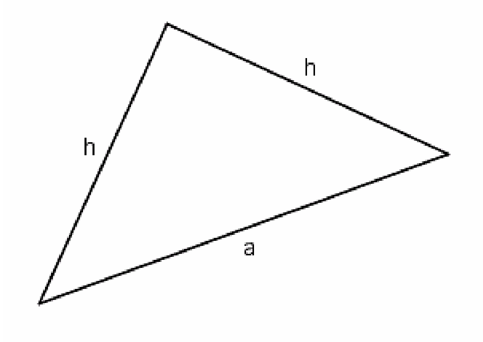
Idee Raum und Form

16. Achteck

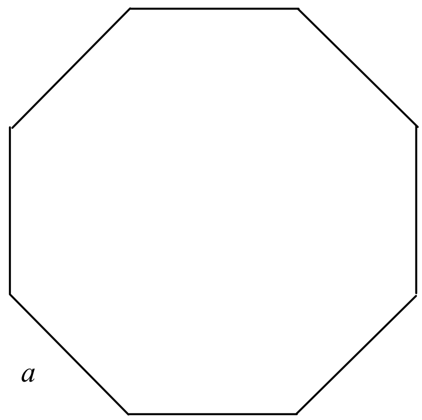
Lösung S. 124

a) Begründe, dass beim gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck die folgende Formel den Zusammenhang zwischen a und h beschreibt:

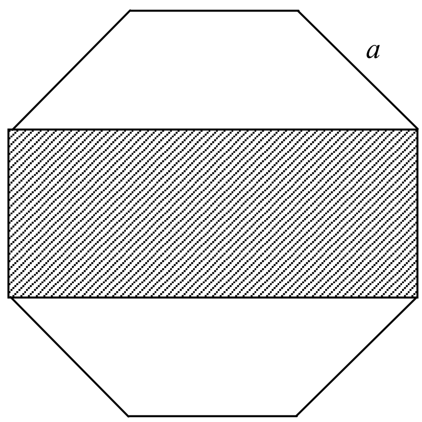
$$a = \sqrt{2} \cdot h$$



b) Hier wird ein regelmäßiges Achteck mit der Kantenlänge a gezeigt.
Berechne die Radien von Inkreis und Umkreis.
Zeige, dass der Umkreis den 1,1716-fachen Flächeninhalt des Inkreises hat.



c) Nunmehr ist ein Teil der Fläche des regelmäßigen Achtecks mit der Kantenlänge a schraffiert.
Zeige, dass der schraffierte Anteil den halben Flächeninhalt des gesamten Achtecks hat.



Idee Raum und Form

17. Kaffeefilter

Lösung S. 126

Ein Kaffeefilter hat die in Abbildung 1 gezeigte Form: Er besteht aus einem dreiseitigen Prisma mit zwei angesetzten halben senkrechten Kreiskegeln.

Die Höhe des Filters ist $h = 9$ cm.

Im Rechteck $ABCD$ hat $\overline{AB}$ die Länge $l_1 = 6$ cm und $\overline{BC}$ die Länge $l_2 = 12$ cm.

($\overline{AB}$ ist senkrecht zu den gleichschenkligen Dreiecken DFA und CGB.)

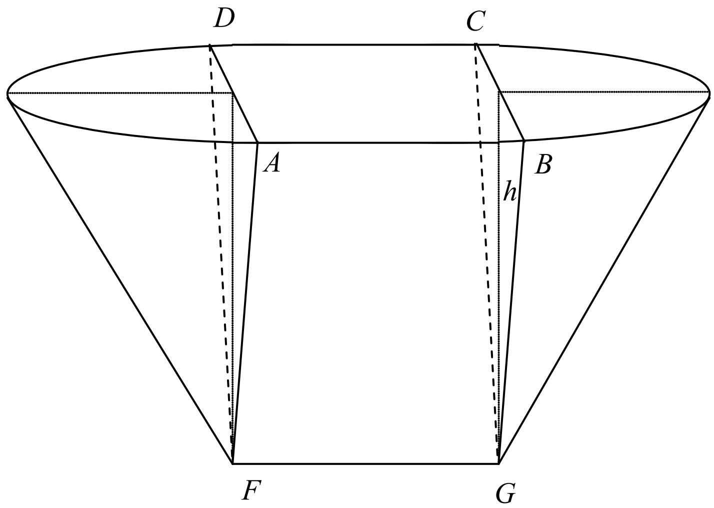


Abbildung 1

a) Berechne das Fassungsvermögen des Filters bis zu seinem oberen Rand.

b) Zur Herstellung des Filters wird Filterpapier verwendet, das pro Quadratmeter 50 g wiegt.
Berechne die Masse des Filters.

c) Verpackt werden die Filter in flach zusammengedrückter Form (siehe Abbildung 2)
Berechne den eingezeichneten Winkel α. (Zur Kontrolle: $\alpha \approx 50°$.)

d) Die Filter werden in rechteckigen Schachteln verkauft.
Bestimme die Mindestlänge und die Mindestbreite dieser Schachteln.

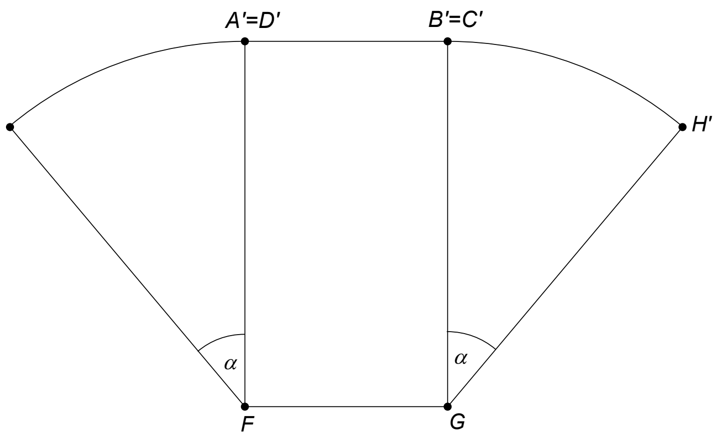
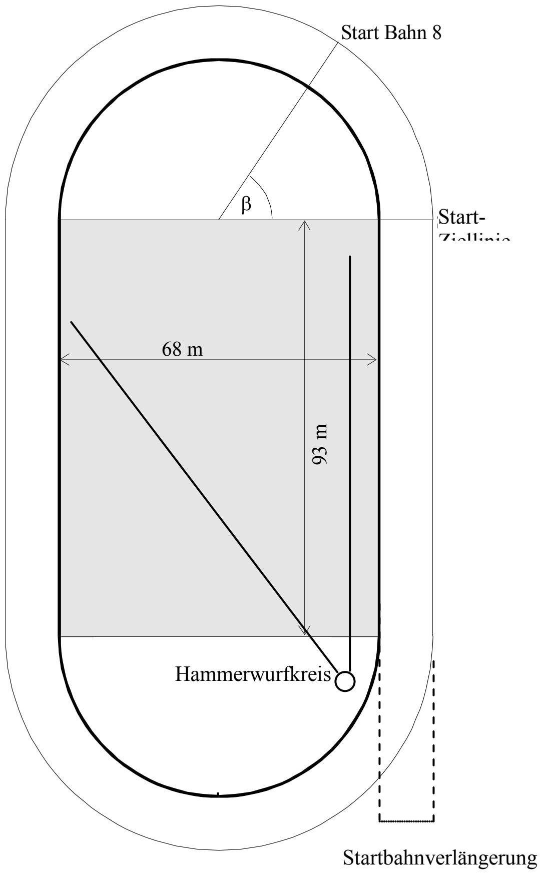


Abbildung 2

Idee Raum und Form

18. Stadion — Lösung S. 124

Ein Stadion, in dem Leichtathletik und Fußball stattfinden kann, hat von oben gesehen die rechts abgebildete Form. (Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht, nachmessen an der Zeichnung macht also keinen Sinn.)
Die Laufbahn hat dabei am inneren Rand eine Länge von 400 m. Die Rasenfläche (grau unterlegt) – auf der sich auch das Fußballfeld befindet – ist 93 m lang und 68 m breit.



a) Berechne die Länge einer der beiden Halbkreisbahnen dieses Stadions am inneren Rand.

b) Die Maße von Fußballfeldern sind nach den Regeln nicht genau festgelegt. Für die Breite z.B. lassen die Regeln Werte zwischen 45 m und 90 m zu. Begründe, warum bei einer Fußballfeldlänge von 90 m und einer Laufbahnlänge von insgesamt 400 m eine Fußballfeldbreite von 75 m nicht möglich ist.

c) Hammerwerfer werfen aus ihrem Abwurfkreis den Hammer bis zu 85 m weit.
Der Kreis ist von einem Käfig umgeben, der (vom Zentrum des Kreises aus gemessen) eine Öffnung von 45° hat: Nur Hämmer, die durch diese Öffnung geworfen werden, fliegen auf den Rasen (siehe Abbildung).

Das Zentrum des Abwurfkreises liegt jeweils 4 m von der kürzeren Rasenkante bzw. der Verlängerung der längeren Rasenkante entfernt.
Entscheide: Trifft ein Hammer nach einem 85-m-Flug in diesem Stadion mit Sicherheit noch auf den Rasen?

d) Die Lauffläche besteht aus 8 Bahnen von je 1,20 m Breite. Die Länge der Bahn wird immer innen gemessen. Der Läufer auf der Innenbahn startet an der Start-Ziel-Linie. Bestimme, wie viel Kurvenvorsprung gegenüber der Start-Ziel-Linie ein 400 m Läufer auf der Außenbahn (Bahn 8) bekommen muss, damit auch er genau 400 m bis zur Ziellinie läuft.
Um die Startlinie auf der Außenbahn zu markieren, wird der Winkel β_8 eingemessen (Winkel β in der Skizze).
Bestimme die Größe von β_8.
Entscheide: Ist β_4 (der entsprechende Winkel für die 4. Bahn) halb so groß wie β_8?

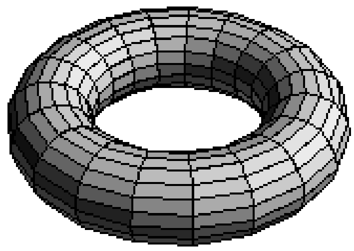
e) Für den 110-m-Hürden-Lauf muss die Gerade, auf der die Ziellinie liegt, um 17 m verlängert werden (siehe Zeichnung).
Untersuche, ob der Läufer auf der Bahn 1 (das ist die linke Bahn, die Innenbahn) noch innerhalb der Kurvenlaufbahn startet.

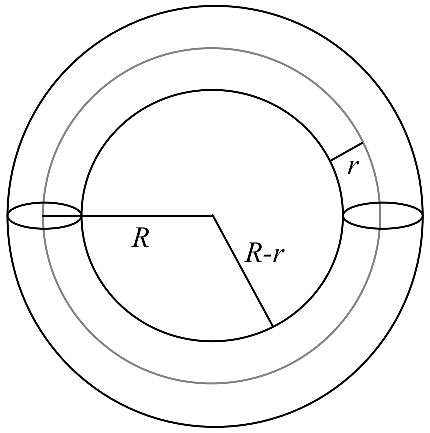
Idee Raum und Form

19. Rettungsring

Lösung S. 129

Unter einem Torus versteht man in der Mathematik einen kreisförmigen Ring, dessen Querschnitt überall kreisförmig mit konstantem Radius ist. Beispiele für torusförmige Körper sind Schwimmreifen, Fahrrad- oder Autoschläuche (ohne Ventil).





In einer Formelsammlung findet man für den Torus folgende Angaben:
Oberflächenformel: $O = 4 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot r$
Volumenformel: $V = 2 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot r^2$
Die Größen R und r seien so wie in der nebenstehenden Skizze definiert.

Ein Rettungsring hat (angenähert) die Form eines Torus. Durch Nachmessen stellt man fest, dass der Außendurchmesser 1,20 m und der Innendurchmesser 80 cm beträgt.

a) Begründe, dass dann mit den obigen Bezeichnungen gilt:
$R = 0{,}5$ m und $r = 0{,}1$ m

b) Berechne Volumen und Oberfläche des Rettungsringes.

c) Der Rettungsring besteht aus einem ausgeschäumten Stoff (Dichte: 0,2 g/cm^3). Auf dem Ring liegt eine Person flach wie ein Brett. Welche Masse (in kg) darf die Person höchstens haben, damit der Ring nicht vollständig in das Wasser (Dichte 1 g/cm^3) eintaucht? Begründe die Antwort.
Hinweis: Der Auftrieb, den ein Körper im Wasser erfährt, ist genauso groß wie die Gewichtskraft des von dem Körper verdrängten Wassers (archimedisches Prinzip).

d) Man kann bei einem Torus Außendurchmesser D und Innendurchmesser d wesentlich leichter messen als die Größen R und r.
Begründe, dass sich Oberfläche und Volumen eines Torus aus den beiden Größen D und d mithilfe der Formeln
$$V = \frac{\pi^2 \cdot (D+d) \cdot (D-d)^2}{32} \quad \text{und} \quad O = \frac{\pi^2}{4} \cdot (D^2 - d^2)$$
berechnen lässt.
Hinweis: Es empfiehlt sich, den Nachweis durch Einsetzen zu führen.

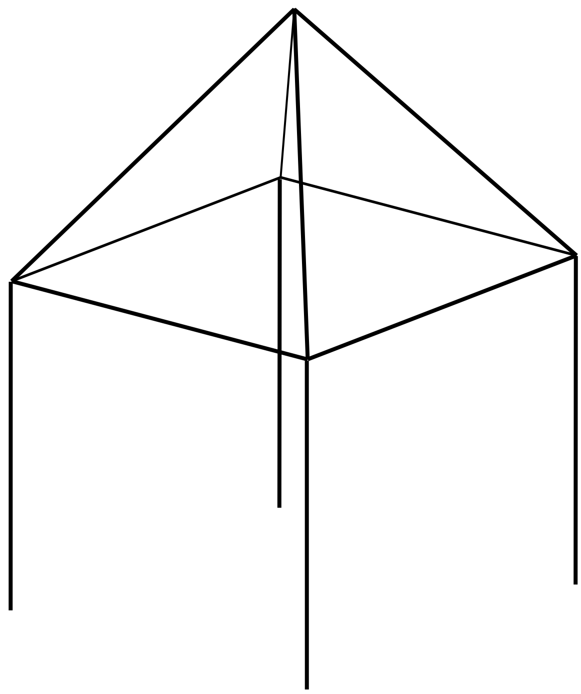
e) Es werden alle Tori mit dem gleichen Außendurchmesser $D = 1$ m betrachtet.
Beschreibe den Torus mit dem maximalen Volumen und bestimme dieses Volumen.
Hinweis: Verwende dazu die Volumenformel aus d).

Idee Raum und Form

20. Partyzelt

Lösung S. 130

Ein Partyzelt wird – wie in der Zeichnung zu sehen – aus 12 gleichlangen Stangen von je 5 m Länge errichtet.



a) Zeige, dass das Zelt eine Gesamthöhe von gut 8,5 m hat.

b) Berechne das Volumen des Zeltes.

c) Die Außenflächen werden mit Planen verkleidet.
   Entscheide, ob dazu 150 m² Planenstoff ausreichen.

Von der Mitte *M* der vertikalen Stangen soll jeweils eine Lichtgirlande straff mit der Zeltspitze verbunden werden.

d) Bestimme die Länge einer solchen Girlande.

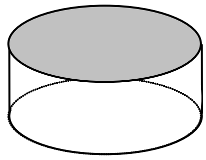
e) Bestimme den Winkel, mit dem eine Lichtgirlande gegenüber der Horizontalen ansteigt.

Idee Raum und Form

21. Eishockeypucks

Lösung S.132

Eishockeypucks sind runde Scheiben mit einem Durchmesser von 7,62 cm und einer Höhe von 2,54 cm.



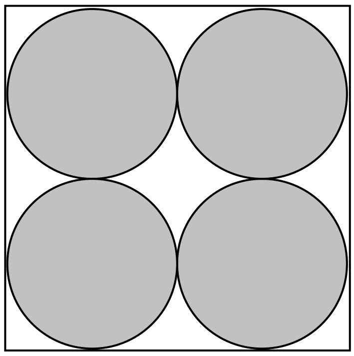
a) Zeige, dass das Volumen eines Pucks ungefähr 116 cm³ beträgt.

b) Zwölf Pucks sollen in einer Schachtel mit quadratischer Grundfläche verkauft werden. In der Schachtel liegen je vier Pucks in drei Schichten übereinander.

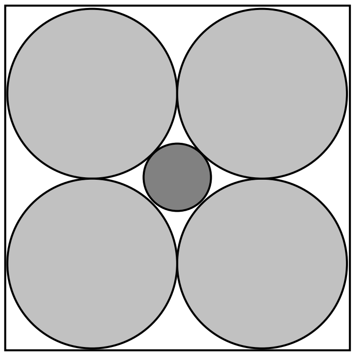
Wenn die Pucks in der Schachtel liegen, bleibt ein Volumenanteil an Luft in der Schachtel.

Bestimme das Volumen der Luft in der Schachtel.

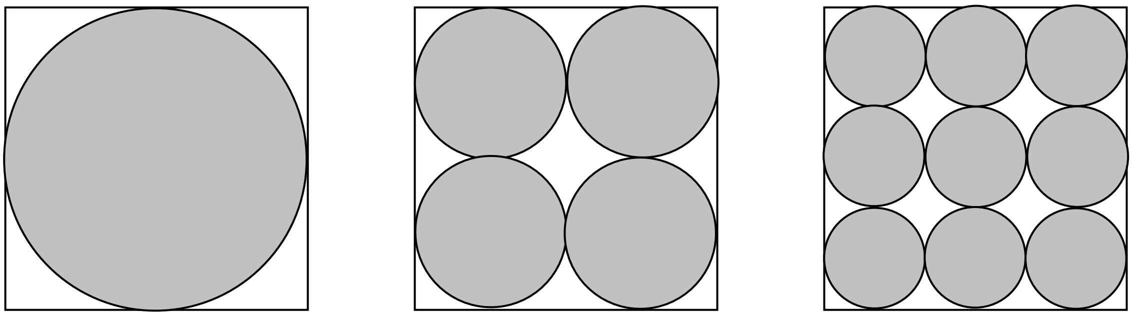
Gib diesen Anteil am gesamten Schachtelvolumen in Prozent an.



c) Das Sportgeschäft möchte die Puckschachteln übereinander stapeln, und zwar auf einem mittleren kreisförmigen Dorn (siehe nebenstehende Zeichnung).
Bestimme den maximalen Durchmesser, den ein Dorn haben kann, wenn er noch durch diese Schachteln passen soll.



d) Der Sachverhalt aus Aufgabenteil b) soll nun (in der Ebene) verallgemeinert werden. Du siehst jeweils ein Quadrat, in das 1 Kreis, 4 und 9 Kreise einbeschrieben sind. Stelle dir vor, dass in dem Quadrat n^2 Kreise entsprechend einbeschrieben sind.
Zeige, dass der von den Kreisen <u>nicht</u> bedeckte Anteil der Quadrate immer der gleiche ist.



Idee Raum und Form

22. Ballschachtel

Lösung S. 134

Eine Sportartikelfirma verpackt jeweils drei Bälle in eine Ballschachtel. Die Ballschachtel hat die Form eines geraden Prismas mit jeweils einem regelmäßigen Sechseck als Grundfläche und Deckfläche (siehe Abbildung 1).

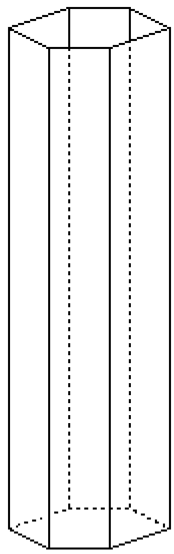


Abb. 1

In die Ballschachtel kommt unten eine Styropor-Schicht von 3 cm Dicke, dann kommen die drei Bälle, die alle Seitenflächen berühren. Über den Bällen ist wieder eine Styropor-Schicht von 3 cm Dicke.

Die Seitenlänge des Sechsecks beträgt 9 cm.

a) Die Abbildung 2 zeigt die Ballschachtel von oben, also das regelmäßige Sechseck und den Querschnitt eines Balles.
Zeige, dass die Bälle einen Radius von etwa 7,8 cm aufweisen.

b) Bestimme den Flächeninhalt der gesamten Oberfläche der Ballschachtel.

c) Bestimme den prozentualen Anteil des Gesamtvolumens der Bälle am Volumen der Ballschachtel.

d) Zwei dieser Ballschachteln werden jetzt in einen quaderförmigen Karton so nebeneinander gestellt, dass sie mit einer Fläche aneinander stoßen. Die rechteckige Grundfläche dieses Kartons muss also Platz bieten für zwei nebeneinander liegende Sechsecke. Zeige, dass sich die Kantenlängen dieses Rechtecks wie $1 : \sqrt{3}$ verhalten.

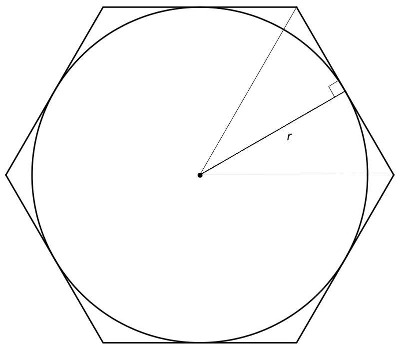


Abb. 2

e) Nehmen wir an, wir könnten entsprechende Ballschachteln auch mit vier, fünf, sechs, … Bällen herstellen.
Entscheide:
Steigt die Oberfläche der Schachteln proportional zur Zahl der Bälle?

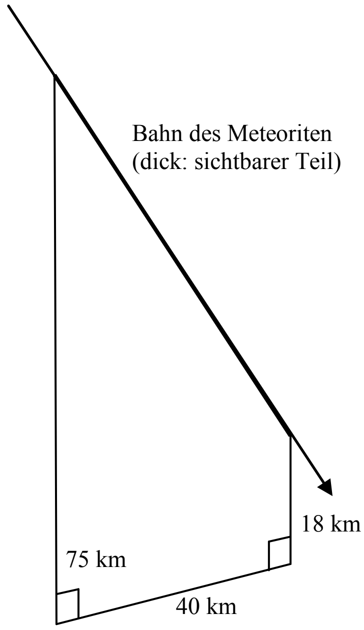
Idee Raum und Form

23. Meteorit

Lösung S. 136

Über der Antarktis ist am 3. September 2004 ein Meteorit niedergegangen.

Der sichtbare Teil seiner (geradlinigen) Bahn begann in einer Höhe von 75 km und endete 40 km weiter in einer Höhe von 18 km. Sichtbar bedeutet: Der Meteorit erzeugt eine blendend helle Leuchtspur.
Diesen Teil der Bahn durchflog der Meteorit in 5,5 Sekunden.
Man kann davon ausgehen, dass der Meteorit am Anfang des sichtbaren Teils der Bahn ein kugelförmiger Körper mit einem Radius von etwa 4 m war.
Die Dichte ρ von Meteoren kann man mit 3200 kg/m³ annehmen.[1]
(Hinweis: $\rho = \frac{Masse}{Volumen}$)



a) Berechne das Volumen und die Masse des Meteors am Anfang der Beobachtung.

b) Bestimme die Länge der beobachteten Bahn.

Während des Flugs durch die Atmosphäre wird ständig die äußerste Schicht des Meteoriten abgetragen: Pro Sekunde wird der Radius um 0,5 m kleiner.

c) Zeichne ein Diagramm, in dem die zeitliche Entwicklung des Radius des Meteoriten dargestellt wird, und gib die Funktionsgleichung für *r(t)* an.

d) Berechne, wie viel Materie der Meteorit in der ersten Hundertstelsekunde nach dem Aufleuchten (in 75 km Höhe) verliert.
(*Hilfe: Das Volumen einer dünnen Kugelschale mit der Dicke* Δr *kann man berechnen durch* $V_{Kugelschale} = Oberfläche \cdot Dicke = 4\pi \cdot r^2 \cdot \Delta r$ *berechnen*.)
Berechne den Radius nach zwei Sekunden Leuchten.
Bestimme den Massenverlust pro Hundertstelsekunde nach diesen zwei Sekunden.

e) Begründe, dass der Meteorit auf seiner Bahn immer weniger Masse pro Zeit verliert.
Weise nach, dass die zeitliche Volumenentwicklung des Meteoriten der Funktionsgleichung
$V(t) = \frac{4}{3}\pi \cdot (4 - 0{,}5t)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (64 - 24t + 3t^2 - \frac{1}{8}t^3)$ folgt.

[1] Daten aus: Klekociuk, A.R., et al. (2005), ***Nature*** 436, 1132

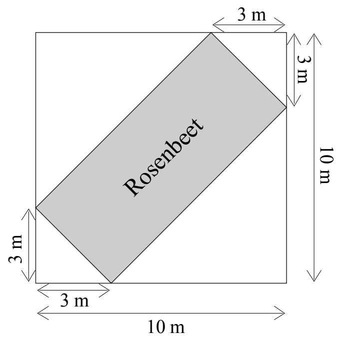
Idee Raum und Form, Idee des funktionalen Zusammenhangs

24. Das neue Rosenbeet

Lösung S. 137

a) In einem botanischen Garten wird eine quadratische Rasenfläche von 10 m Seitenlänge neu gestaltet. In das innere Rechteck sollen Rosen gepflanzt werden (siehe Abbildung rechts).

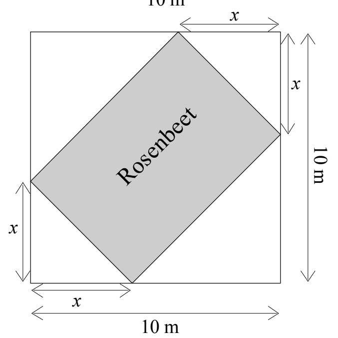
Berechne den Flächeninhalt der aus vier Dreiecken bestehenden restlichen Rasenfläche und den Flächeninhalt des rechteckigen Rosenbeets.

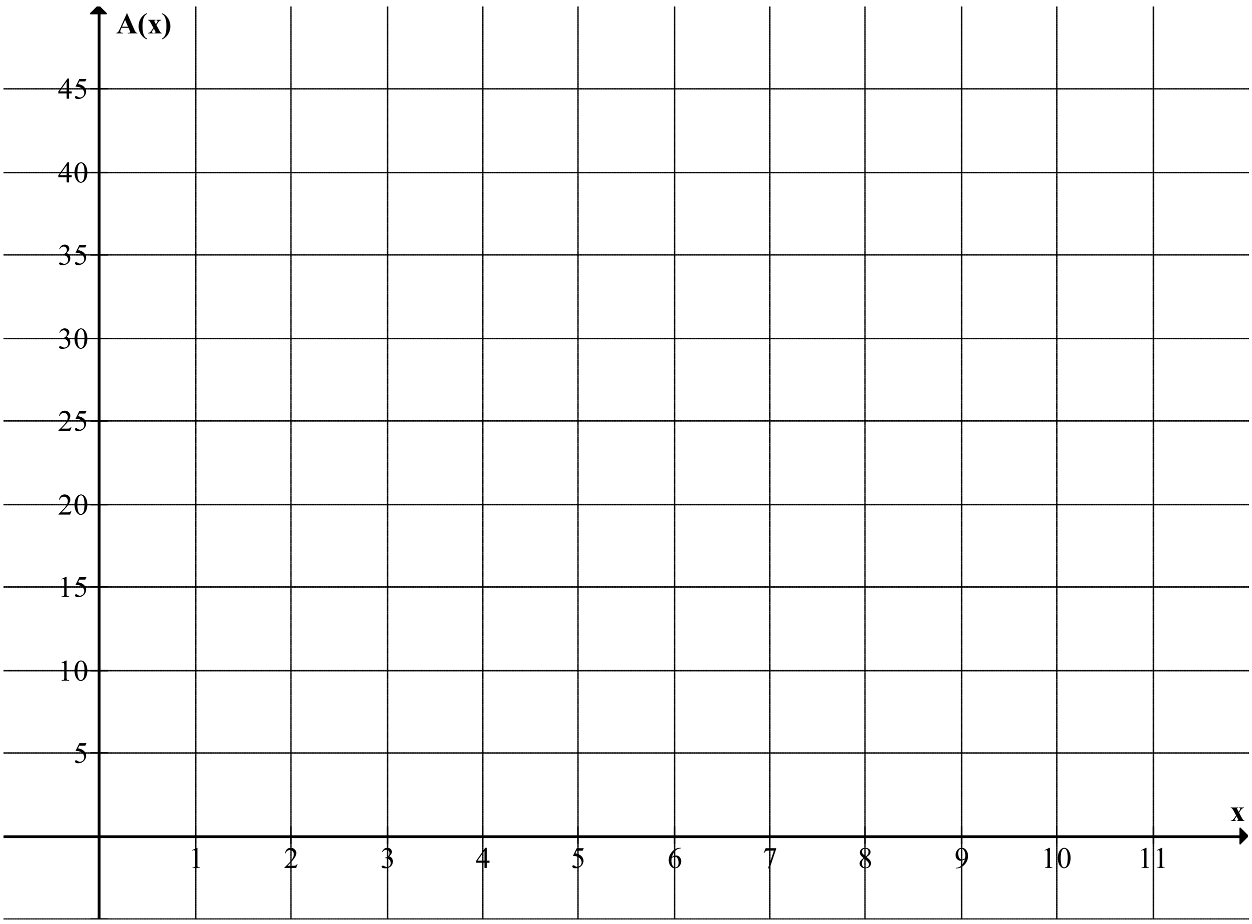


b) Jetzt soll die Strecke, die in Aufgabenteil a) 3 m lang war, *veränderlich* werden. Sie wird nun x genannt (siehe Abbildung rechts).
Gib an, welche Werte x annehmen kann.
Zeige, dass sich der Flächeninhalt $A(x)$ des Rosenbeets durch die Funktionsgleichung $A(x) = -2x^2 + 20x$ berechnen lässt.

Beschreibe, wie der Graph der Funktion aussieht.

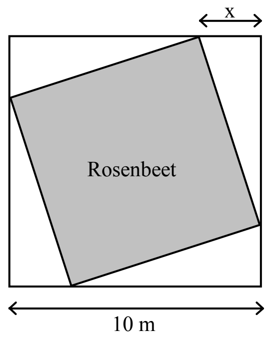
Zeichne ihn in das unten stehende Koordinatensystem ein.





c) Bestimme rechnerisch den Wert für x, bei dem die Fläche des Rosenbeets den größten Wert aufweist. Gib die maximale Flächengröße des Rosenbeetes an.
Weise nach, dass es sich um ein quadratisches Beet handelt.

d) Der Gartengestalter ändert seine Vorstellung: Das Rosenbeet im Rasen soll immer quadratisch sein (und die Ecken des Rosenbeets sollen weiterhin auf den Kanten des Rasens liegen) – siehe Abbildung.
Zeige, dass die Funktionsgleichung zur Berechnung der Quadratfläche A_Q jetzt $A_Q(x) = 2x^2 - 20x + 100$ lautet.
Berechne, dass sich für $x = 5$ bei beiden Funktionen dieselbe Flächengröße ergibt.



e) Die Rosen reichen für ein quadratisches Beet von 70 m² Fläche.
Berechne das zugehörige x.
Bei diesem x ist die Fläche des quadratischen Rosenbeets größer als die des rechteckigen Rosenbeets bei dem gleichen x.
Weise nach, dass für *alle x* die Fläche des quadratischen Rosenbeets größer oder gleich der Fläche des rechteckigen Rosenbeets bei dem gleichen x ist.

Idee Raum und Form, Idee des funktionalen Zusammenhangs

25. Pachoms Weg

Lösung S. 139

Der russische Dichter Tolstoi erzählt die Geschichte des Bauern Pachom, der für 1000 Rubel jenes Land erhalten sollte, das er an einem Tag umwandern konnte. Bei Sonnenaufgang brach er von einem Hügel aus auf, nach 18 km bog er im rechten Winkel nach links ab, nach 8 km wiederum im rechten Winkel nach links. Nachdem er 12 km in die neue Richtung gewandert war, packte ihn die Angst, nicht rechtzeitig zurückzukommen. Er lief nun geradewegs auf den Hügel zu, erreichte ihn mit letzter Kraft bei Sonnenuntergang und brach tot zusammen.

Im Folgenden sollst du nun überlegen, ob sich Pachom dieses Schicksal hätte ersparen können, wenn er sich vorher einige Gedanken über seinen Weg gemacht hätte.

a) Zeichne dazu eine Skizze von Pachoms Wanderweg.

b) Bestimme die Länge von Pachoms Weg.

c) Hätte die Geschichte kein trauriges Ende gehabt, wie viel Land hätte Pachom für seine 1000 Rubel erhalten?

d) War Pachoms Wanderweg optimal oder hätte er bei gleicher Weglänge mehr Land umwandern können?
Betrachte dazu Rechtecke, deren Umfang gleich der Länge von Pachoms Wanderweg ist.
Erstelle für die Flächeninhaltsfunktion „Seitenlänge $a \to$ Flächeninhalt A“ für Rechtecke, deren Umfang gleich der Länge von Pachoms Wanderweg ist, eine Wertetabelle und zeichne den Graphen der Funktion. Gibt es ein Rechteck mit größtem Flächeninhalt?

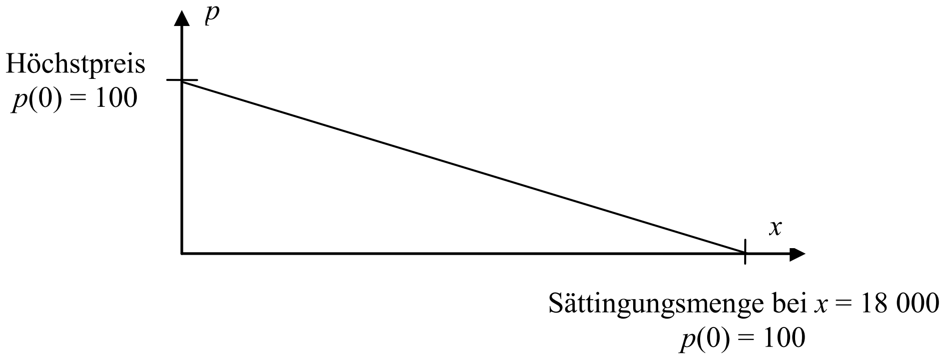
e) Hätte Pachom ein gleich großes Land auf einem kürzeren Weg umwandern können?
Betrachte dazu geeignete Rechtecke, deren Flächeninhalt gleich dem von Pachoms Land ist.
Erstelle für die Umfangslängenfunktion „Seitenlänge $a \to$ Umfang u“ für Rechtecke, deren Flächeninhalt gleich dem von Pachoms Land ist, eine Wertetabelle und zeichne den Graphen der Funktion. Gibt es ein Rechteck mit kleinstem Umfang?

Idee des funktionalen Zusammenhangs

26. Jeans

Lösung S. 141

Eine Firma produziert u.a. Jeanshosen. Der Preis p beim Verkauf ist abhängig von der Angebotsmenge x pro Monat. Die Marketingabteilung hat ermittelt, dass sich Jeanshosen einer bestimmten Qualität bei einem Preis von 100 € pro Stück nicht verkaufen lassen. Bei fallendem Preis p ist mit einer linearen Zunahme der Verkaufszahlen x zu rechnen. Allerdings ist bei einem Angebot von 18 000 Stück pro Monat mit einer Sättigung des Markts zu rechnen, so dass sich kein Preis $p > 0$ mehr erzielen lässt (siehe Skizze).



a) Bestimme die Gleichung der Preisabsatzfunktion $x \to p(x)$.

b) Der Erlös (oder Umsatz) des Unternehmens beim Verkauf von Jeanshosen wird über das Produkt Preis mal Menge ermittelt. Gib die Gleichung der Erlösfunktion E an.

c) Berechne den Erlös für verschiedene Ausbringungsmengen x und zeichne den Graphen von E in ein Koordinatensystem.

d) Berechne, wie viele Hosen die Firma produzieren und verkaufen muss, um einen maximalen monatlichen Erlös zu erzielen. Gib diesen maximalen Erlös an.
Erkläre, warum der Erlös ab der maximalen Verkaufsmenge abfällt.

Bei der Produktion der Jeanshosen entstehen Stückkosten (Material, Arbeit) in Höhe von 32 Euro pro Hose. Hinzu kommen die produktionsunabhängigen Fixkosten (Produktionsstätten, kaufmännische Angestellte usw.) in Höhe von 90 000 Euro.

e) Bestimme die Gleichung einer (linearen) Funktion K auf, die für die Ausbringung x die Kosten $K(x)$ benennt.
Zeichne den Graphen von K.

f) Bis zu welcher Produktionsmenge x sind die Kosten höher als der Erlös?

g) Bestimme die Gleichung der Funktion G, die für die Ausbringung x den Gewinn $G(x)$ benennt.
Für welche monatliche Ausbringung wird der Gewinn am größten?

Idee des funktionalen Zusammenhangs

27. Abbau eines Wirkstoffes

Lösung S. 144

Eine Tablette (1 g) eines Medikamentes besteht zu 5 % aus dem Wirkstoff „Wirkin“. Die übrigen 95 % bestehen aus unwirksamen und unschädlichen Füllstoffen. Wird die Tablette eingenommen, gelangen 35 % des Wirkstoffes „Wirkin“ ins Blut und somit in den Körper. Der Rest wird ausgeschieden. Innerhalb eines Tages werden 25 % der (noch) vorhandenen Menge des Wirkstoffes vom Körper abgebaut.

a) Berechne die Menge des Wirkstoffes in mg, die bei der Einnahme einer Tablette (1g) ins Blut gelangt. (2 P)

Eine Person schluckt morgens eine Tablette dieses Medikamentes.

b)
- Gib eine Funktionsgleichung einer Funktion f an, mit der man die Menge des Wirkstoffes berechnen kann, die nach t Tagen noch im Körper vorhanden ist.
  Begründe die Funktionsgleichung.
- Berechne die Menge des Wirkstoffes, die nach 3 Tagen noch vorhanden ist, wenn die Person in diesen Tagen keine weitere Tablette einnimmt.
  Bestimme auch, wie viel Prozent der Ausgangsmenge das sind. (8 P)

Eine Person nimmt jeden Tag eine Tablette des Medikamentes ein.

c) Bestimme die Ansammlung des Wirkstoffes nach 3 Tagen, **bevor** die Person erneut das Medikament zu sich nimmt. Gehe davon aus, dass vor der ersten Einnahme keine Restmenge des Wirkstoffes im Körper vorhanden ist. (8 P)

d) Eine Person nimmt über einen langen Zeitraum jeden Morgen eine Tablette ein. Die Wirkstoffmenge im Blut vor der Einnahme der neuen Tablette ist an jedem Morgen genau gleich dem Wert vom Vortag.
Ermittle die Menge des Wirkstoffs, die jeden Morgen vor der Einnahme der Tablette im Blut ist. (4 P)

Idee des funktionalen Zusammenhangs

28. Medikamente

Lösung S. 145

Antibiotika sind Medikamente gegen Infektionserkrankungen.
Wird ein bestimmtes Antibiotikum in Form einer Tablette eingenommen, kann man (idealisiert) annehmen, dass die Konzentration dieses Antibiotikums im Blut sofort nach der Einnahme einen Wert von 4 mg pro Liter Blut aufweist. Pro Stunde sinkt die Konzentration um 5 %.

a) Sei x die Zeit gemessen in Stunden nach Einnahme des Medikamentes, $f(x)$ die Konzentration des Antibiotikums im Blut gemessen in mg pro Liter.
Begründe, dass die zugehörige Funktionsgleichung $f(x) = 4 \cdot 0{,}95^x$ lautet.

Berechne, wie hoch die Antibiotikumskonzentration eine, vier und zwölf Stunden nach Einnahme einer Tablette ist.

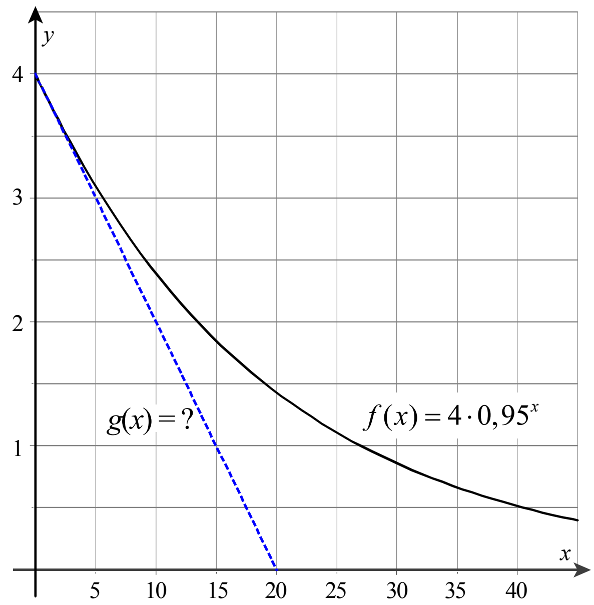
b) Um die Therapie genau zu überwachen, wird einem Patienten bereits zwanzig Minuten nach Einnahme der ersten Tablette Blut abgenommen und die Antibiotikumskonzentration bestimmt.
Berechne die zu erwartende Konzentration.

c) Ein Patient muss die Therapie wegen Unverträglichkeit bereits nach der Einnahme der ersten Tablette abbrechen. Bestimme, wann die Unverträglichkeitsgrenze von 0,2 mg pro Liter unterschritten wird, der Patient also keine negativen Reaktionen durch die Einnahme des Medikaments mehr spüren sollte.

d) Es gibt Substanzen, deren Konzentration im Blut linear abnimmt.

Eine bestimmte derartige Substanz führt sofort nach Einnahme zu einer Konzentration im Blut von 4 mg pro Liter, die innerhalb einer Stunde jeweils um 0,2 mg pro Liter sinkt (siehe Abbildung).

- Bestimme den zugehörigen Funktionsterm $g(x)$.
- Beschreibe je zwei Eigenschaften von exponentiellem negativem Wachstum und linearem negativem Wachstum bezogen auf den Kontext der Aufgabe.



e) Bei manchen Substanzen kann man den Abbau im Blut so beschreiben, dass relativ große Konzentrationen zunächst linear abgebaut werden, dann exponentiell.

So soll der Abbau einer Substanz bis zum Punkt $P(12{,}5|1{,}5)$ durch die Funktion g beschrieben werden. Danach verlaufe der weitere Abbau exponentiell mit der Funktionsgleichung
$h(x) = a \cdot b^{x-12{,}5}$ $a, b \in \mathbb{R}$. Neben $h(12{,}5) = 1{,}5$ sei auch $h(32) = 0{,}11$ bekannt.

Bestimme die Parameter a und b und interpretiere diese im Kontext der Aufgabe.

Idee des funktionalen Zusammenhangs

29. Lastkahn

Lösung S. 147

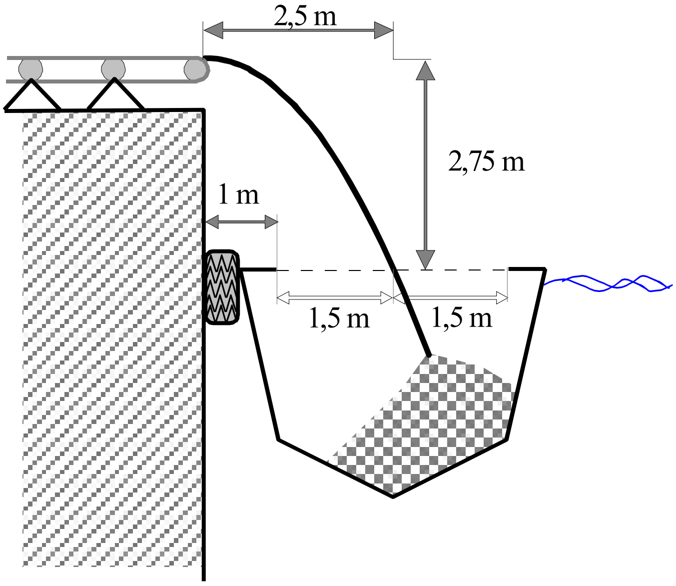
Über ein Förderband wird ein kleiner Lastkahn mit Kies beladen. Das Förderband ist so eingestellt, dass der Sandstrahl genau durch die Mitte der 3 m breiten Öffnung in den Laderaum fällt.

a) Der Kiesstrahl hat Parabelform.

Die Parabel soll in das Koordinatensystem der Anlage übertragen werden. Dabei liegt das Ende des Förderbandes (und damit der Scheitelpunkt der Parabel) im Ursprung, die Kaimauer endet an der y-Achse.
Zeichne zuerst zwei durch die Abbildung rechts gegebene Punkte der Parabel in das Koordinatensystem ein und gib die entsprechenden Punkte an.

Bestimme nun mithilfe der eben gezeichneten Punkte die Funktionsgleichung der Parabel.
Solltest du keine Funktionsgleichung finden, arbeite mit der folgenden (nicht mit der korrekten Funktionsgleichung übereinstimmenden) Gleichung weiter:
$f(x) = -0,47 \cdot x^2$.

Fülle die Wertetabelle auf dem anliegenden Arbeitsblatt aus und skizziere mit ihrer Hilfe die Parabel im Koordinatensystem.



b) Berechne den Abstand vom Ende des Förderbandes zum Mittelpunkt der Öffnung im Laderaum.

Bei der oben geschilderten Situation war Hochwasser. Einige Zeit später soll ein anderer Lastkahn mit gleichen Abmessungen beladen werden. Wegen extremen Niedrigwassers ist der Wasserspiegel um 4 m niedriger.

c) Begründe, dass der Kiesstrahl die Laderaumöffnung auch in dieser Tiefe trifft.

d) Bestimme, um wie viel Meter das Förderband verschoben werden müsste, damit der Kies wieder genau durch die Mitte der Laderaumöffnung fällt, und bestimme die Funktionsgleichung der entsprechend abgeänderten Parabel, die nun den Kiesstrahl beschreibt.

Interpretiere die Lösung innerhalb der durch obiges Bild dargestellten Gegebenheiten. Beachte dabei zusätzlich, dass das obere Transportband, auf dem der Kies transportiert wird, in 75 cm Abstand zum Boden verläuft. Das Förderband ist horizontal beweglich.

Idee des funktionalen Zusammenhangs

30. Laichplätze

Lösung S.148

Um zu ihren Laichplätzen zu gelangen, müssen Lachse verschiedene gefährliche Stufen überwinden. Nach 11 Stufen haben die Lachse ihr Ziel erreicht. Es wird angenommen, dass an jeder Stufe 3 % der angekommenen Lachse ausscheiden.

1000 Lachse machen sich auf den Weg.

a) Berechne die Anzahl der Lachse, die die Laichplätze erreichen.

b) Berechne die Anzahl der Gefahrenstellen, nach denen erstmalig weniger als 85 % der Lachse vorhanden sind.

c) Nach jeder 5. Gefahrenstufe gibt es Bären, die jeweils konstant 250 Lachse wegfangen. Berechne, wie viel Prozent der Lachse jetzt noch ihr Ziel erreichen.

d) Vergleiche die Ergebnisse der Teilaufgaben a) und c), wenn
   (1) doppelt so viele Lachse losschwimmen,
   (2) doppelt so viele Lachse pro Gefahrenstelle ausscheiden (also 6 %).

e) In den Aufgabenteilen a) bis d) haben wir mit einem idealisierten mathematischen Modell gearbeitet. Tatsächlich sind die Gefahrenstellen unterschiedlich. Vergleiche die Anzahl der Lachse aus Teilaufgabe c), die am Laichplatz ankommen, wenn entweder die erste Gefahrenstelle eine Verlustrate von 20 % oder die letzte Gefahrenstelle eine Verlustrate von 20 % bewirkt.

Idee des funktionalen Zusammenhangs

31. Algen[2]

Lösung S. 149

Auf einem Teich wachsen zwei Algensorten. Sorte A bedeckt zu Beginn des Beobachtungszeitraums 3 m^2, Sorte B 7 m^2. Bei Sorte A verdoppelt sich die bedeckte Fläche in 3 Tagen, bei Sorte B in 5 Tagen.

a) Gib die Funktionsgleichungen für das Wachstum beider Algensorten an.
Zeichne die Graphen für beide Funktionen für einen Beobachtungszeitraum von mindestens 2 Wochen in ein gemeinsames Koordinatensystem. Verwende eine sinnvolle Skalierung.

b) Bestimme für beide Sorten den Wachstumsfaktor pro Tag und die tägliche prozentuale Zunahme.

c) Bestimme anhand der Zeichnung, nach wie vielen Tagen die von beiden Sorten bedeckte Fläche gleich groß ist, und überprüfe dein Ergebnis mittels einer Rechnung.

d) Bei ungehindertem Wachstum wäre der Teich nach 23 Tagen vollständig mit den beiden Algen bedeckt. Bestimme die Größe des Teichs.

[2] Bearbeitet nach: Elemente der Mathematik, Unterrichtsmaterialien, Band 3, S. 252, Schroedel, Hannover 2002.

Idee des funktionalen Zusammenhangs

32. ^{14}C

Lösung S. 151

In der Atmosphäre der Erde findet man in geringen Mengen das radioaktive Kohlenstoffisotop ^{14}C. Obwohl es mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren zerfällt, ist sein Gehalt in der Atmosphäre konstant, da es durch kosmische Strahlung immer wieder neu gebildet wird. Jeder lebende Organismus enthält, während er lebt, den gleichen Anteil an ^{14}C-Atomen unter allen Atomen. Das liegt daran, dass die Pflanzen bei der Atmung CO_2 aufnehmen und damit auch ^{14}C. Durch die Nahrungskette gelangt es in Menschen und Tiere.

Stirbt der Organismus, so atmet und ernährt er sich nicht mehr. Damit wird kein ^{14}C mehr nachgeliefert. Das vorhandene ^{14}C zerfällt im abgestorbenen Gewebe, und die „Radiokarbonuhr" beginnt zu ticken. Wenn man den ^{14}C-Anteil von lebender und toter Substanz vergleicht, lässt sich daraus der Zeitpunkt bestimmen, von dem an keine Nahrung mehr aufgenommen wurde. So kann z.B. auf das Alter antiker Holzstücke oder Knochen geschlossen werden.

a) Gib an, wie viel Prozent des ursprünglichen ^{14}C nach 5 730 Jahren / nach ca. 11 500 Jahren noch gemessen wird.

b) Zeichne einen Graphen, welcher dem Alter (bis 24 000 Jahre) die noch vorhandene Menge ^{14}C in Prozent zuordnet.

c) 1992 wurde in den Ötztaler Alpen die Leiche „Ötzi" gefunden. Als diese nach ihrer Bergung genau untersucht wurde, entpuppte sie sich als die älteste Gletscherleiche der Welt. In ihren Knochen wurden 53% des ursprünglichen ^{14}C-Gehalts festgestellt. Berechne, vor wie vielen Jahren dieser Mensch etwa gelebt hat.

d) Berechne, wie viel Prozent des ^{14}C-Anteils die Mumie des ägyptischen Pharaos Tutanchamun (Regierungszeit 1332 bis 1323 v. Chr.) bei der Graböffnung 1922 enthielt.

e) Die Lascaux-Höhle in Frankreich ist berühmt für ihre Höhlenmalereien. Holzkohle aus der Zeit, als diese Höhle bewohnt war, hatte im Jahr 1950 eine ^{14}C-Zerfallsrate von 0,97 Zerfällen pro Minute und Gramm. ^{14}C in lebendem Holz hat eine Zerfallsrate von 15,3 Zerfällen pro Minute und Gramm. Bestimme, wann diese Höhlenmalereien vermutlich entstanden sind.

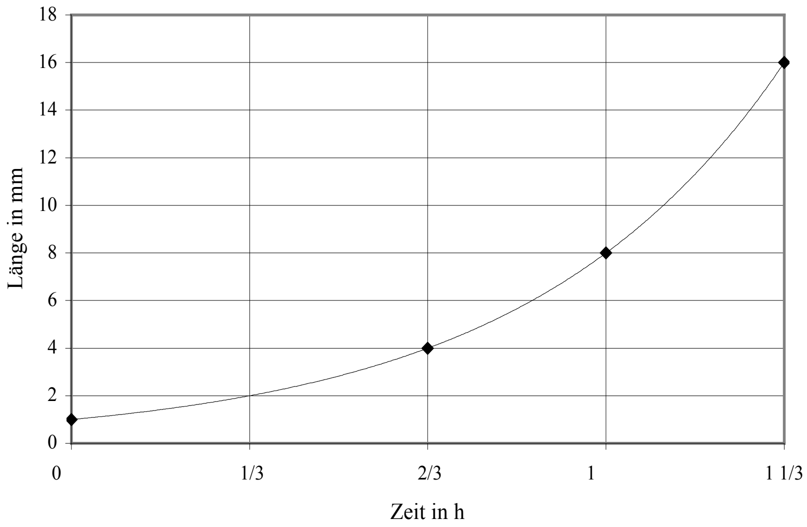
Idee des funktionalen Zusammenhangs

33. Gefahr aus dem Weltall[3]

Lösung S. 152

Ein Science-Fiction-Film erzählt die folgende Story:

In einer Raumstation werden biologische Experimente vorgenommen. Durch den Fehler eines unaufmerksamen Gentechnikers wird ein 1 mm langer und normalerweise harmloser Wurm so umprogrammiert, dass seine Länge exponentiell zunimmt. Die Abbildung zeigt das Wachstum des Wurmes in den ersten 80 Minuten.



a) Bestimme die Zeit, nach der sich die Länge des Wurmes verdoppelt hat.

- Erstelle eine Funktionsgleichung, die das Wachstum des Wurmes beschreibt; gib dabei die Zeit in Stunden an.
- Berechne die Länge des Wurmes nach 5 Stunden. Gib dein Ergebnis in einer sinnvollen Einheit an.

b) Zunächst bemerkt der unaufmerksame Genforscher nicht, welch verhängnisvollen Fehler er begangen hat. Erst nach 5 Stunden wird ihm klar, dass er es weder schafft, den Wurm zu vernichten, noch dessen verhängnisvolles Wachstum aufzuhalten. Daher sendet er genau 5 Stunden nach Beginn der Katastrophe ein warnendes Funksignal zur 1 Lichttag entfernten Erde.

   Das Funksignal breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus, also mit 300 000 km/s.
   Gib die Strecke an, die das Funksignal nach 1 Stunde bzw. 1 Tag zurückgelegt hat.

c) Beschreibe, worin sich das Ausbreitungsverhalten des Funksignals vom Wachstum des Wurmes unterscheidet.

d) Der Wurm wächst genau in Richtung Erde. Berechne, wann der aggressive Wurm mit seinem Vorderteil die Erde erreicht.

e) Entscheide, ob das warnende Funksignal die Erde noch vor dem Eintreffen des Wurmes erreicht, damit mögliche Abwehrsysteme aktiviert werden können.

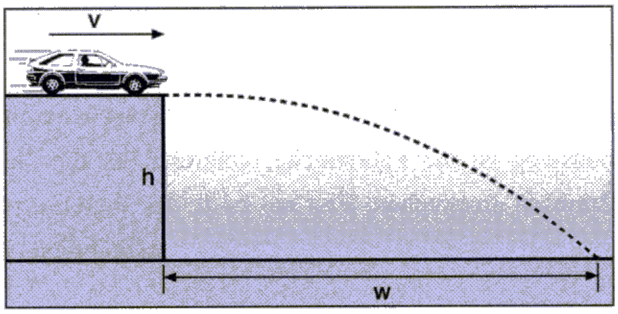
[3] Diese Story vernachlässigt die Tatsache, dass es keine höhere Geschwindigkeit jenseits der Lichtgeschwindigkeit geben kann.

Idee des funktionalen Zusammenhangs

34. Stuntman[4]

Lösung S. 152

Ein Stuntman will mit seinem Auto von einer waagerechten Plattform abspringen und einen neuen Weitenrekord aufstellen. Die Flugweite hängt ab von der Geschwindigkeit des Autos und der Höhe der Plattform.



Dabei gilt folgende Gleichung für die Flugweite w (in m): $w = v \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Darin ist v die Geschwindigkeit des Autos $\left(\text{in } \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$, h die Absprunghöhe (in m) und g die Erdbeschleunigung, die in unseren Breiten 9,81 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ beträgt.

a) Berechne die Flugweite für eine Absprunggeschwindigkeit von 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und eine Höhe von 2 m.

b) Entscheide, ob es möglich ist, mit einem normalen PKW eine Flugweite von 100 m bei einer Absprunghöhe von 2 m zu erreichen.

c) Der bisherige Weitenrekord für einen Sprung mit einem Auto lag bei 50 m. Bestimme die Absprunghöhe, die gewählt werden müsste, um mit 140 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ weiter als 50 m zu springen.

d) Für das Aufstellen eines Rekords wird überlegt, wie sich eine Vergrößerung der Geschwindigkeit und der Absprunghöhe auf die Flugweite auswirken. Bestimme allgemein, wie sich die Flugweite bei

(1) einer Verdopplung der Geschwindigkeit bei gleich bleibender Höhe

(2) einer Verdopplung der Höhe bei gleich bleibender Geschwindigkeit

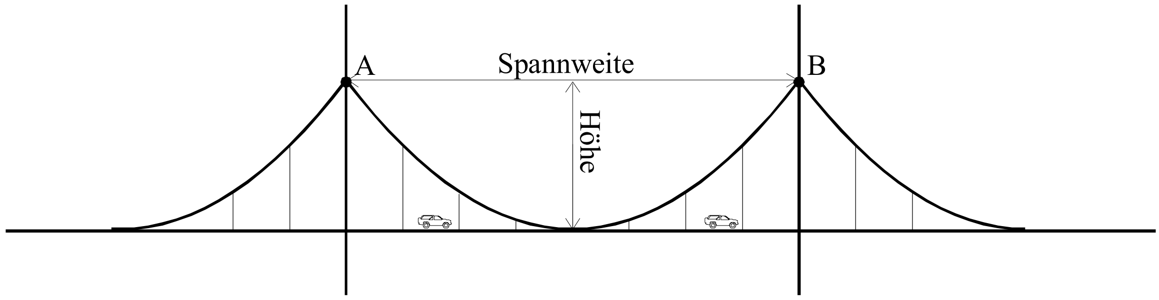
ändert.

[4] Bearbeitet nach: Elemente der Mathematik, Unterrichtsmaterialien, Band 3, S. 68, Schroedel, Hannover 2002.

Idee des funktionalen Zusammenhangs

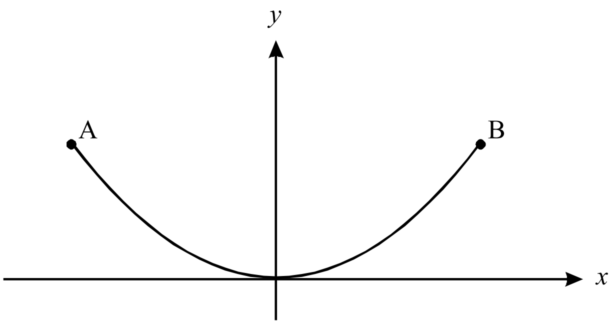
35. Brücken

Lösung S. 153



In der obigen Abbildung siehst du eine Hängebrücke. Ihre Spannweite beträgt 40 m, die Höhe der oberen Befestigungspunkte über der Fahrbahn beträgt 12,5 m. Die Fahrbahn ist an zwei Haupttrageseilen aufgehängt.

a) Die Hauptseile im mittleren Abschnitt haben annähernd die Form einer Parabel. Diese ist in dem unten stehenden Koordinatensystem noch einmal dargestellt.



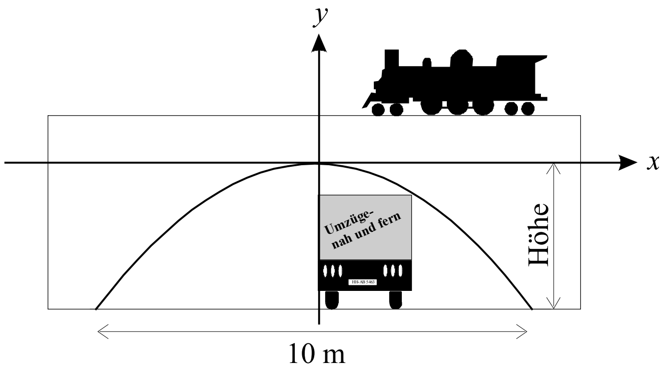
Zeichne die Längenangaben in das obige Koordinatensystem ein und gib dann die Koordinaten der Punkte A und B an.

b) Im Folgenden werden 4 Vorschläge für eine Funktionsgleichung gemacht, die zu der abgebildeten Parabel gehört. Wähle den korrekten Vorschlag aus.

(1) $f(x) = x^2$ (2) $f(x) = 40x + 12{,}5$ (3) $f(x) = 0{,}03125x^2$ (4) $f(x) = 12{,}5x + 40$

c) In der Abbildung ganz oben auf dieser Seite kann man erkennen, dass die Fahrbahn in regelmäßigen Abständen mit senkrechten Stahltrageseilen an den Hauptseilen befestigt ist. Im mittleren Bereich der Brücke befinden sich auf jeder Fahrbahnseite 6 Trageseile. Bestimme rechnerisch die *Gesamtlänge* der Stahltrageseile, die für den mittleren Brückenabschnitt für beide Fahrbahnseiten benötigt werden.

d) In der unten stehenden Abbildung ist eine Eisenbahnbrücke dargestellt, die über eine Straße führt. Der Bogen der Brücke bildet eine Parabel mit der Gleichung $f(x) = -0{,}16x^2$.



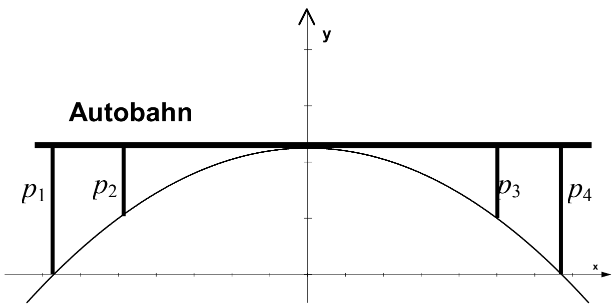
Begründe mithilfe einer Rechnung, dass die maximale Höhe der Durchfahrt 4 m beträgt.

Bestimme rechnerisch, wie breit ein 3,19 m hoher LKW sein darf, damit er gerade noch unter der Brücke hindurch fahren kann. Dabei darf er entsprechend den Verkehrsregeln nur auf der rechten Fahrbahnseite fahren.

e) Eine andere Brücke hat die Form einer Parabel mit den folgenden Eigenschaften (Längen in m):

Der Scheitelpunkt der Parabel ist $S\,(0\,|\,45)$.

Der Stützpfeiler p_3 trifft den Parabelbogen im Punkt $P\,(50\,|\,20)$.



Für den Brückenbogen gilt die allgemeine Gleichung $y = ax^2 + c$.

Bestimme a und c und zeige, dass die Gleichung für den Brückenbogen $y = -\frac{1}{100}x^2 + 45$ lautet.

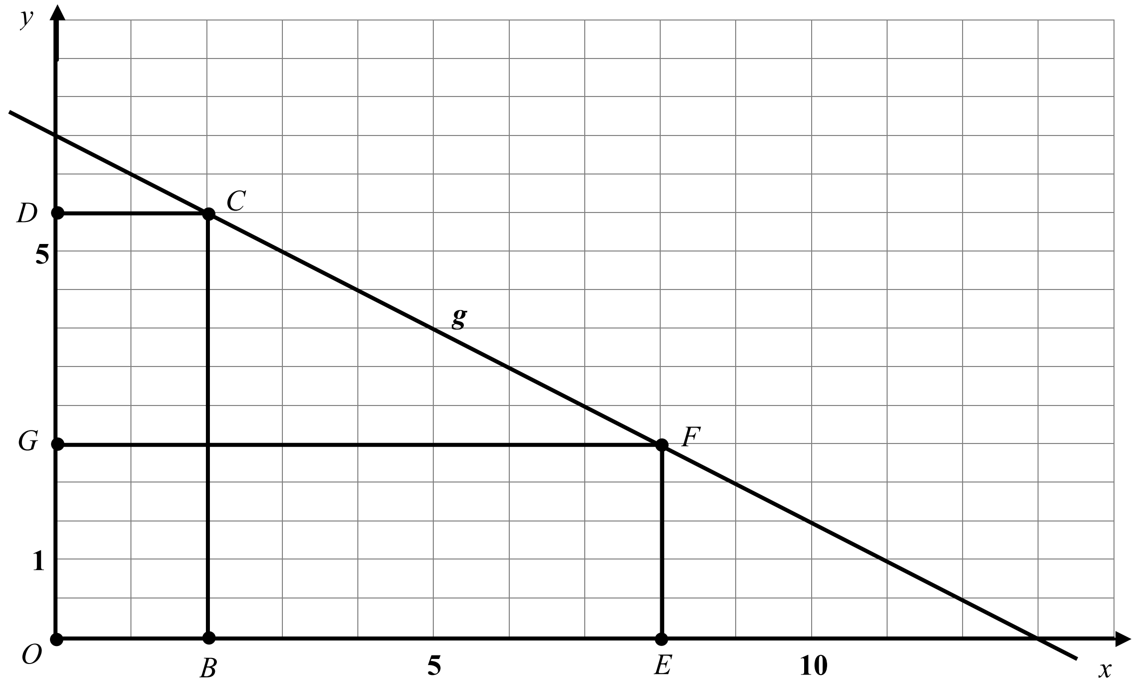
f) Wie weit sind die Fußpunkte der Pfeiler p_1 und p_4 voneinander entfernt? Berechne und runde das Ergebnis auf einen ganzzahligen Wert.

Idee des funktionalen Zusammenhangs

36. Flächeninhalt eines Rechtecks

Lösung S. 155

Wir betrachten Rechtecke mit folgenden Eigenschaften:
Zwei Seiten liegen auf den Koordinatenachsen, ein Eckpunkt liegt im Ursprung *O* und einer auf der Geraden *g*.
In der Skizze siehst du zwei Beispiele: die Rechtecke *OBCD* und *OEFG* (Seitenlängen bzw. Einheiten der Achsen in cm).



a) Berechne den Flächeninhalt der Rechtecke *OBCD* und *OEFG*. Die Zahlen sind in Zentimetern angegeben.

b) Gib die Geradengleichung für *g* an.

   (Sollte dir dies nicht gelingen, arbeite mit der folgenden – nicht mit der Lösung übereinstimmenden – Geradengleichung weiter: $h(x) = -0{,}5\,x + 5{,}5$.)

c) Entscheide, ob der Punkt $(-2 \mid 7{,}5)$ auf der Geraden *g* liegt.

d) Die Flächeninhalte der beiden betrachteten Rechtecke *OBCD* und *OEFG* sind unterschiedlich groß.
   Bestimme die Funktionsvorschrift für die Funktion *A*, mit welcher die Flächeninhalte der Rechtecke berechnet werden können.
   (Sollte dir dies nicht gelingen, arbeite mit der folgenden (nicht mit der Lösung übereinstimmenden) Funktionsgleichung weiter: $A(x) = -0{,}5\,x^2 + 5{,}5\,x$.)

e) Bestimme das Rechteck mit dem maximalen Flächeninhalt.

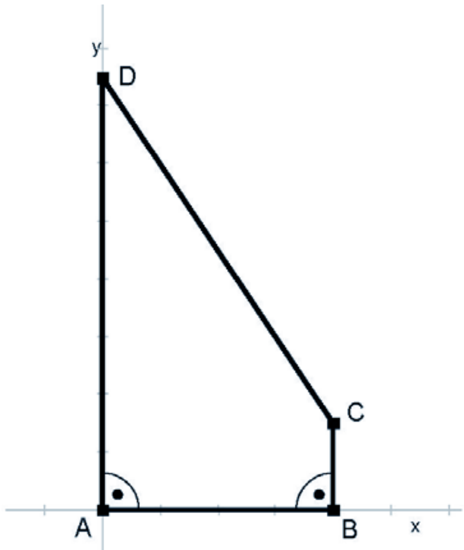
f) Man kann den in e) betrachteten Sachverhalt verallgemeinern:
   Durch $f(x) = ax + b$ mit $a < 0$ und $b > 0$ ist eine beliebige Gerade *f* gegeben, deren entsprechende Rechtecke auch im I. Quadranten liegen.
   Zeige; dass das Rechteck mit dem maximalen Flächeninhalt für jede solche Gerade bei $x_{\max} = \frac{1}{2} \cdot x_{Nullstelle}$ liegt.

Idee des funktionalen Zusammenhangs, Idee des Messens, Raum und Form

37. Rechteck im Trapez

Lösung S. 157

Das nebenstehende Trapez $ABCD$ ist in ein Koordinatensystem eingetragen mit $A(0|0)$, $B(8|0)$, $C(8|3)$ und $D(0|15)$.



Jeder Punkt der Trapezseite $\overline{CD}$ ist Eckpunkt eines Rechtecks, das dem Trapez einbeschrieben ist. Die Seiten der einbeschriebenen Rechtecke sind parallel zu den Koordinatenachsen. Der Punkt A ist Eckpunkt eines jeden einbeschriebenen Rechtecks.

a) Berechne den Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$.

b) Der Punkt $P(2|y)$ liegt auf der Seite $\overline{CD}$ und ist somit Eckpunkt eines einbeschriebenen Rechtecks.

Trage das zugehörige Rechteck in die Figur ein und bestimme seinen Flächeninhalt.

c) Bewegt sich der Punkt $P(x|y)$ auf der Strecke $\overline{CD}$, so ändert sich der Flächeninhalt A des zugehörigen Rechtecks. Begründe, dass sich der Flächeninhalt A durch die Funktionsgleichung

$$A(x) = x \cdot (-1{,}5x + 15) = -1{,}5x^2 + 15x$$

berechnen lässt, wobei x die erste Koordinate des Punktes P ist.

d) Bestimme das einbeschriebene Rechteck, das den größten Flächeninhalt hat.
Begründe deine Vorgehensweise.

e) Der Punkt $P_S\left(\frac{90}{13}\middle|\frac{60}{13}\right)$ liegt auch auf der Seite $\overline{CD}$.

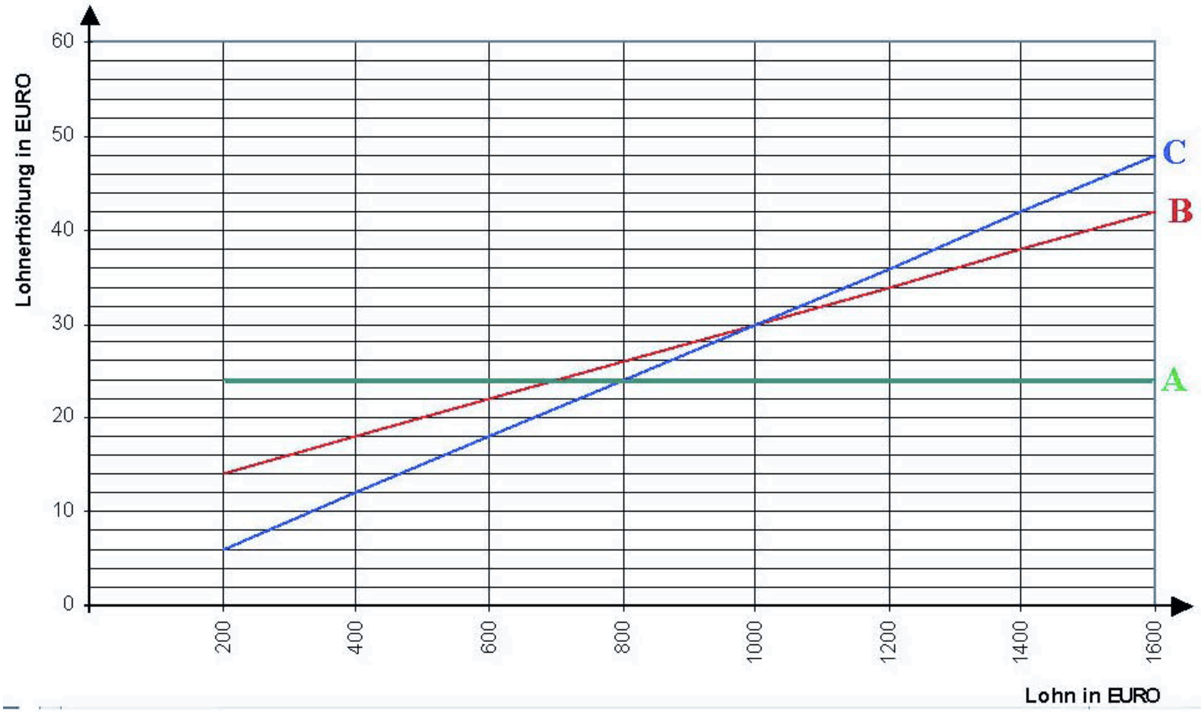
Gib die Gleichung der Geraden durch A und P_S an und zeige, dass diese Gerade senkrecht auf der Seite $\overline{CD}$ steht.

Hinweis:
Du kannst Geradensteigungen betrachten oder zeigen, dass das Dreieck AP_SD rechtwinklig ist.

Idee des funktionalen Zusammenhangs

38. Lohnerhöhung

Lösung S. 158



Die Grafik zeigt drei verschiedene Modelle (Modell A, Modell B, Modell C) für Lohnerhöhungen.

a) Bestimme mittels einer Tabelle (200 €, 400 €, 600 €, ..., 1600 €) die Lohnerhöhungen der verschiedenen Modelle in Abhängigkeit vom Lohn.

b) Erstelle eine weitere Grafik für die verschiedenen Modelle, die den Zusammenhang zwischen dem Lohn (in €) und der Lohnerhöhung (in %) darstellt.

c) Beide Grafiken stellen den gleichen Sachverhalt dar. Eine soll in einer Veröffentlichung erscheinen (z. B. als Zeitungsartikel). Welche würdest du auswählen, wenn du Modell A bevorzugst?
Begründe deine Wahl.

Quelle: Bearbeitete Version der Aufgabe aus den KMK-Bildungsstandards Mathematik Mittlerer Abschluss, 2003.

Idee des funktionalen Zusammenhangs

39. Herr Sorgenfrei

Lösung S: 159

Herr Sorgenfrei möchte 50 000 Euro als Altersvorsorge anlegen. Sein Bankberater bietet ihm zwei Modelle an: Beim ersten Modell wird das Geld für 16 Jahre festgelegt. Dann erhält Herr Sorgenfrei 93 649,06 Euro ausgezahlt. Beim zweiten Modell gibt es nur 3,25 % Zinsen pro Jahr. Dafür ist der nach 16 Jahren ausgezahlte Betrag steuerfrei (Kapital bildende Lebensversicherung).

a) Berechne, mit welchem Zinssatz das Geld von Herrn Sorgenfrei nach dem ersten Modell jährlich verzinst wird.

b) Wenn das Geld nach dem ersten Modell ausgezahlt wird, muss Herr Sorgenfrei seinen *Gewinn* mit 25 % versteuern.
Berechne andererseits, mit wie viel Geld Herr Sorgenfrei beim zweiten Modell nach 16 Jahren rechnen kann.
Vergleiche die Erträge der beiden Geldanlagen miteinander.

c) Die Schwester von Herrn Sorgenfrei möchte zum gleichen Auszahlungszeitpunkt ebenfalls über 93 649,06 Euro verfügen. Ihre Entscheidung dafür trifft sie aber zwei Jahre später als ihr Bruder. Gib an, wie viel Startkapital sie einsetzen muss, um nach dem zweiten Modell auf die gewünschte Summe zu kommen.

d) Herr Sorgenfrei ist sehr vorsichtig. Er rechnet für die Zukunft mit einer jährlichen Geldentwertung von 2 % (Inflationsrate).
Berechne, wie hoch die Kaufkraft von 50 000 Euro nach 16 Jahren dann noch ist.
Berechne dann, wie hoch beim ersten Modell die Kaufkraft des Vermögens von Herrn Sorgenfrei (einschließlich Zinsen und nach Abzug der Steuern) nach 16 Jahren ist.

e) Berechne, wie lange Herr Sorgenfrei sein Geld nach dem zweiten Modell anlegen muss, um den Betrag zu verdoppeln. Berechne, wie lange er 100 000 Euro anlegen muss, um auch diesen Betrag zu verdoppeln. Erkläre den Zusammenhang zwischen den beiden Ergebnissen.

Idee der Wahrscheinlichkeit

40. Lotterie auf dem Schulfest

Lösung S. 160

Eine 10. Klasse möchte zur Gestaltung eines Schulfestes durch eine Lotterie beitragen.

In einer Lostrommel sollen sich verschiedenfarbige Kugeln befinden, die am Ende des Schulfestes nacheinander ohne Zurücklegen gezogen werden. Wer diese Reihenfolge richtig getippt hat, erhält einen Gewinn. Die Teilnehmer der Lotterie geben ihren Tipp vor der Ziehung auf einem Losschein ab. Die Schülerinnen und Schüler gehen davon aus, dass sie etwa 500 Tippscheine verkaufen werden.

Zur Vorbereitung der Lotterie nutzen die Schüler ihre Stochastik-Kenntnisse und überlegen zuerst, wie viele Kugeln sie in die Lostrommel legen wollen.

a) Ein erster Vorschlag ist, eine rote, eine blaue und eine gelbe Kugel in die Lostrommel zu tun.
Gib alle möglichen Ergebnisse an.
Bestimme die Wahrscheinlichkeit für die Reihenfolge: rot – blau – gelb.

Der Klasse erscheinen nach diesen Betrachtungen 3 Kugeln als zu wenig. Es wird entschieden, zwei weitere Kugeln (weiß, schwarz) in die Lostrommel zu geben.

b) Bestimme die Anzahl der möglichen Ergebnisse mit fünf Kugeln.

c) Bestimme einen sinnvollen Schätzwert für die Anzahl der Gewinne, wenn alle Tippscheine verkauft werden.

Die Schülerinnen und Schüler kalkulieren zunächst mit einem Preis von 1,50 € pro Tippschein. Sie haben 25 € Kosten für die Vorbereitung der Lotterie und wollen 5 Gewinne im Wert von je 100 € kaufen. Außerdem wollen die Schüler 30 % der Verkaufseinnahmen für ihre eigene Abschlussfeier behalten.

d) Beurteile, ob die Schüler mit dieser Planung die vorgegebenen Ziele erreichen können, wenn alle Tippscheine verkauft werden.
Auch wenn alle Tippscheine verkauft werden, birgt die Planung mögliche Risiken. Beschreibe und beurteile ein Risiko.

e) Die folgende Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeiten dafür an, dass eine bestimmte Anzahl von Gewinnen auftritt.

Anzahl der Gewinne	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wahrscheinlichkeit in Prozent	1,5	6,4	13,4	18,7	19,5	16,3	11,3	6,7	3,5	1,6	0,7

Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 10 Gewinne auftreten, beträgt etwa 0,4 %.
Erstelle mithilfe dieser Tabelle eine risikoärmere Planung (für 5 Kugeln in der Lostrommel) und begründe sie.

Idee der Wahrscheinlichkeit

41. Lotterie

Lösung S. 161

Eine Klasse möchte auf dem Schulfest eine Lotterie durchführen. Dafür verwenden sie fünf Holzplättchen, auf denen je eine der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 steht (siehe Abbildung).
Diese fünf Plättchen werden nacheinander ohne Zurücklegen aus einer Lostrommel gezogen und in der gezogenen Reihenfolge hintereinander gelegt. Sie bilden dann eine fünfstellige Zahl.

a) Bestimme die Anzahl der möglichen Zahlen, die gezogen werden können.
(Zur Kontrolle: 120).

Die Schülerinnen und Schüler stellen dazu nun 1200 Lose her, auf denen je eine der 120 möglichen Zahlen als Losnummer gedruckt wird. Sie machen das so, dass insgesamt jede Losnummer genau 10-mal vorkommt.

Im Laufe des Schulfestes sollen die Lose verkauft werden. Zu einem geeigneten Zeitpunkt findet danach die „Ziehung“ statt, wobei mit den 5 Plättchen – wie beschrieben – die Gewinnzahl gezogen wird.
Die Klasse überlegt sich einen „Gewinnplan“, der als Plakat überall ausgehängt werden soll (siehe Anlage).

b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit für den Käufer eines einzigen Loses, dass er einen Gutschein für ein Buch gewinnt.

c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit für den Käufer eines einzigen Loses, dass er einen Gutschein für eine „Riesenwurst mit Beilage“ gewinnt (zur Kontrolle: $p = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}$).

Die Schüler planen, ein einzelnes Los für 0,50 € zu verkaufen.
Material und Druckkosten betragen insgesamt 12 €.
Die Kugelschreiber sind als Werbegeschenk von einem Elternvertreter gestiftet worden.
Eine „Riesenwurst mit Beilage“ kalkulieren die Schüler mit 2 € und ein Buch mit 30 €.

d) Berechne, wie viel Geld die Schüler bei ihrer Kalkulation übrig behalten werden, wenn sie alle 1200 Lose verkaufen.
Bei der staatlichen Lotterie müssen mindestens 50 % der Einnahmen für Gewinne ausgegeben werden. Entscheide, ob das bei der hier betrachteten Lotterie der Fall ist.

e) Bestimme, wie viel Geld die Schüler bei ihrer Kalkulation mindestens übrig behalten werden und wie viel höchstens, wenn sie nur 1 000 Lose verkaufen werden.
Hinweis: Gutscheine für nicht vergebene Preise brauchen auch nicht bezahlt zu werden.

f) Bestimme die Wahrscheinlichkeit für den Käufer eines einzigen Loses, dass er überhaupt etwas gewinnt.

Gewinnplan

für das große Zahlengewinnspiel

Heute 17 Uhr Ziehung der Glückszahl

Vergleicht die Glückszahl mit Eurer Losnummer!

- Die letzte Ziffer ist richtig:

  Gewinn: ***Ein Super-Kugelschreiber***

- Die letzten beiden Ziffern sind richtig,
  aber nicht die ganze Zahl:

  Gewinn: ***Gutschein für eine Riesenwurst mit Beilage***

- Die Glückszahl stimmt mit der Losnummer überein:

  Gewinn: ***Gutschein für ein wertvolles Buch***

Idee der Wahrscheinlichkeit

42. Spielenachmittag

Lösung S. 163

Björn und Eva verbringen den Nachmittag damit, miteinander zu „würfeln“. Sie verwenden einen normalen Spielwürfel (Laplace-Würfel) mit den Zahlen 1 bis 6.
Jeder darf einmal würfeln. Wer die höhere Augenzahl hat, gewinnt. Bei zwei gleichen Zahlen endet das Spiel unentschieden.
Zunächst wirft Björn als erster.

a)
- Björn hat eine „2“ gewürfelt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass er noch gewinnt.
- Björn hat eine „3“ gewürfelt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass nun Eva gewinnt.

b)
- Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel unentschieden ausgeht.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Eva eine „2“ würfelt und damit gewinnt.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Björn eine ungerade Zahl würfelt und damit gewinnt.

c) Eva möchte nun unbedingt als erste würfeln. Entscheide, ob ihr dies einen Vorteil bringen würde.

d) Die beiden beschließen eine Abwandlung des Spieles: Björn wirft wieder zuerst und dann Eva. Wenn zwei gleiche Zahlen gewürfelt werden, würfelt Eva solange weiter, bis sie eine andere Zahl als Björn hat.
Begründe sinnvoll (ohne Rechnung), dass das Spiel fair ist.

e) Beide setzen pro Spiel je 10 Cent, und der Gewinner bekommt jeweils den ganzen Einsatz. Nachdem die beiden 50 Runden gespielt haben, ist Eva im Plus: Sie hat einen Überschuss von 40 Cent. Björn beschwert sich: „Das kann doch gar nicht sein!“ Setze dich mit der Behauptung Björns auseinander!

Idee der Wahrscheinlichkeit

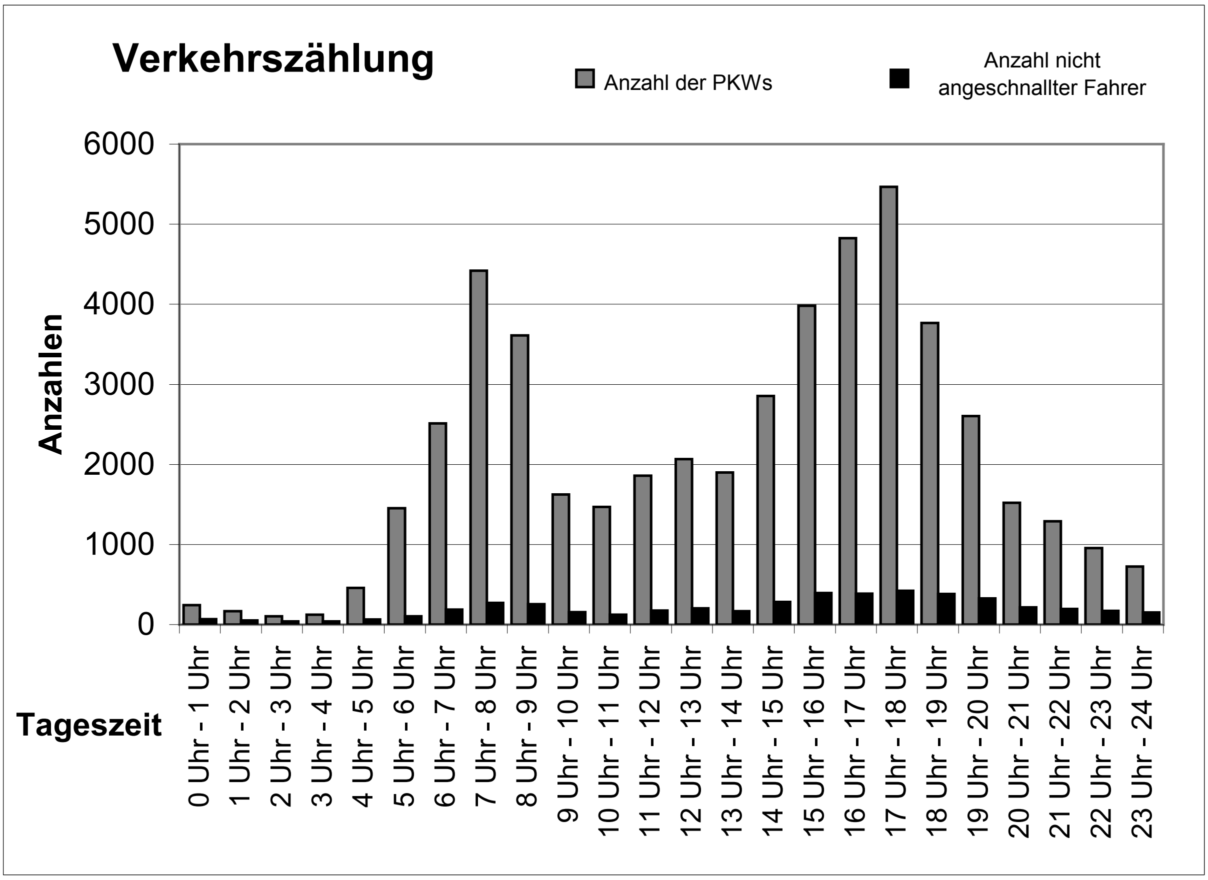
43. Verkehrszählung

Lösung S. 164

An einer Hauptstraße wird während mehrerer ganzer Werktage eine Verkehrszählung durchgeführt, bei der ermittelt wird, wie viele Personenkraftwagen in der jeweiligen Stunde vorbeikommen. Dabei werden gleichzeitig die Pkws gezählt, in denen der Fahrer nicht angeschnallt ist. Die Ergebnisse dieser Zählung sind in der folgenden Tabelle und im Diagramm zusammengefasst:

Zeitraum	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12
Anzahl der Pkws	243	168	105	122	457	1452	2512	4420	3613	1625	1471	1859
Anzahl nicht angeschnall-ter Fahrer	67	52	38	41	62	105	187	269	256	157	122	175

Zeitraum	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
Anzahl der Pkws	2067	1898	2856	3980	4824	5468	3765	2603	1520	1288	956	723
Anzahl nicht angeschnall-ter Fahrer	203	169	284	395	388	424	382	326	214	197	172	150



Betrachte die Aussagen a) bis g) über die Verkehrszählung und entscheide, ob sie aufgrund der Daten richtig sind. Begründe jeweils deine Entscheidung.

a) Der Verkehr war am späten Nachmittag am stärksten.

b) Während der Nachtstunden von 22 Uhr bis 7 Uhr wurden nicht mehr Autos gezählt als in einer beliebigen Stunde am Nachmittag.

c) Je stärker der Verkehr, desto größer ist der Anteil der nicht angeschnallten Fahrer.

d) Im Durchschnitt fuhren etwa 1500 Pkws in jeder Stunde an den Verkehrszählern vorbei.

e) Zu Spitzenzeiten kommt mehr als ein Auto pro Sekunde vorbei.

f) Zwischen 5 Uhr und 18 Uhr übersteigt der Anteil der nicht angeschnallten Autofahrer nie 10 %.

g) Von 0 bis 4 Uhr ist mehr als ein Viertel der Autofahrer nicht angeschnallt.

h) Die örtliche Tageszeitung berichtet mit der Schlagzeile: „Nachts fahren die meisten Autofahrer nicht angeschnallt“ über die Ergebnisse der Verkehrszählung.
Diese Schlagzeile enthält verschiedene Interpretationsmöglichkeiten. Setze dich mit zwei dieser Interpretationsmöglichkeiten auseinander.

Idee der Wahrscheinlichkeit

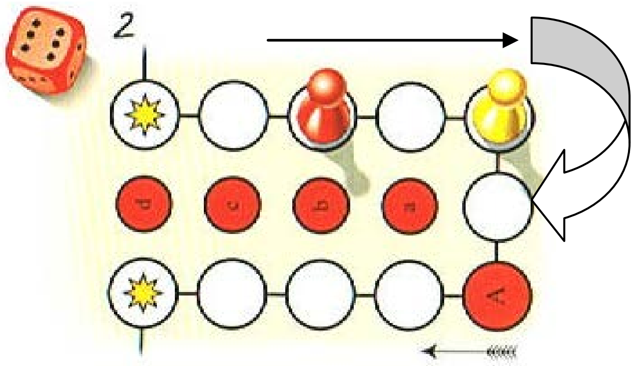
44. Mensch ärgere dich nicht

Lösung S. 166

Die dunkle Spielfigur ist am Zug. Gehe davon aus, dass sie auch beim Werfen einer 6 bewegt wird.
Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die dunkle Spielfigur beim nächsten Wurf

a) in das Haus, d. h. auf die Felder a, b, c oder d, gelangt,

b) weder die andere Spielfigur schlägt noch in das Haus gelangt.



Beim Spielbeginn braucht man eine Sechs, um eine Figur auf das Startfeld stellen zu können. Hat man keine Figur im Feld, so hat man drei Versuche, um eine Sechs zu würfeln; glückt hier keine Sechs, muss man bis zur nächsten Runde warten.

c) Felix hat im ersten Wurf eine Zwei gewürfelt, im zweiten Wurf eine Fünf.
Gib an, mit welcher Wahrscheinlichkeit er im dritten Wurf eine Sechs würfelt.

d) Wenn man „Glück hat“, kann man in der ersten Runde (also mit höchstens 3 Würfen) seine Figur auf das Startfeld stellen.
Beschreibe die Situation durch ein Baumdiagramm. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, „Glück zu haben“. Interpretiere „Glück haben“ mithilfe deines Ergebnisses.

e) Felix hat es schon drei Runden lang nicht geschafft, eine Figur einzuwürfeln. Den Tränen nahe sagt er: „Das ist so unfair! Das passiert nur in jedem tausendsten Fall, und ausgerechnet bei mir muss das passieren!“
Entscheide, ob Felix Recht hat.

f) „Ach was, hab‘ dich doch nicht so!“ antwortet seine Schwester Miriam. „Schau, wir sind vier Spieler, und da muss man schon davon ausgehen, dass einer von ihnen im ersten Durchgang nicht rauskommt.“
Beurteile Miriams Argumentation und vergleiche sie mit der von Felix.

Idee der Wahrscheinlichkeit

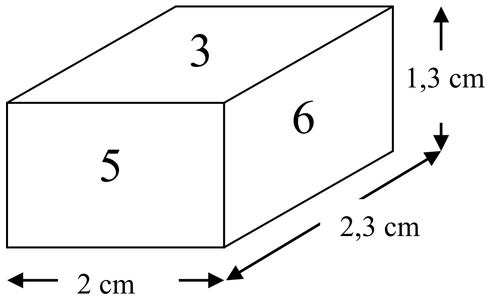
45. Quader

Lösung S. 167

Gerd, Frauke und Martha wollen auf ihrem Schulfest eine Würfelbude aufmachen.

Allerdings soll nicht mit einem normalen Würfel, sondern mit einem Quader (siehe Abbildung) geworfen werden.

Mit dem Erlös aus dem Würfelspiel möchten die drei einen Zuschuss für die nächste Klassenreise erwirtschaften.



a) Bevor sie sich ein schönes Spiel überlegen können, müssen die drei erst einmal wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit die einzelnen Zahlen geworfen werden. Deshalb haben sie das Quaderwerfen ausprobiert. Jeder hat 400-mal geworfen. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.
Berechne jeweils die absoluten Gesamthäufigkeiten für die einzelnen geworfenen Zahlen.
Berechne auch die relativen Häufigkeiten als Dezimalzahlen auf zwei Stellen nach dem Komma.
Gib die relative Häufigkeit als Prozentzahl ohne Nachkommastelle gerundet an.

	1	2	3	4	5	6
Gerd	43	34	122	119	40	42
Frauke	43	36	115	125	33	48
Martha	46	35	117	123	32	47
Absolute Häufigkeit						
Relative Häufigkeit						
Relative Häufigkeit in Prozent						

b) Gerd ist noch nicht zufrieden. Er meint: „Diese relativen Häufigkeiten können doch noch nicht unsere endgültige Vorhersage darstellen. Ich schlage deshalb vor, die folgenden Wahrscheinlichkeiten als Vorhersagemöglichkeit zu nehmen:

	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit in Prozent	11	9	30	30	9	11

Beurteile Gerds Vorschlag, indem du die Gründe für seine Überlegungen darstellst.

c) Für ihr Spiel haben sie sich einen Gewinnplan überlegt:
Jeder Spieler zahlt einen Einsatz von 1 €. Dann wird einmal mit dem Quader geworfen.
Wird eine 2 oder eine 5 geworfen, so erhält der Spieler 5 € ausbezahlt. Ansonsten wird der Einsatz einbehalten.
Können die drei damit rechnen, einen Gewinn zu machen? Begründe durch eine Rechnung.

d) Sie möchten pro Spiel einen durchschnittlichen Gewinn von 0,70 € erzielen. Dabei sollen Einsatz und Spielbedingungen gleich bleiben, sie möchten nur die Auszahlungssumme von 5 € verändern.
Bestimme, welche Auszahlungssumme x zu diesem neuen Durchschnittsgewinn führt.
Beurteile dein Ergebnis in Bezug auf die Attraktivität des Spiels.

e) Die drei entscheiden sich für die Spielvariante aus Teil c).
Frauke behauptet: „Wir müssen ein Startkapital von 10 € mitbringen." Martha antwortet: „Das brauchen wir nicht. Wir machen doch pro Spiel einen Gewinn." Gerd wirft ein: „Ich stimme Frauke im Prinzip zu. Nur meine ich, dass wir mit dem Startkapital von 10 € nicht auskommen."
Entscheide, wer Recht hat, indem du die Wahrscheinlichkeiten für n Auszahlungen hintereinander ($1 \leq n \leq 10$) bestimmst und in deine Argumentation mit einbeziehst.

Idee der Wahrscheinlichkeit

46. Triebwerke

Lösung S. 169

Ein neues Airbusmodell soll 4 Triebwerke haben. Dazu werden neue Triebwerke konstruiert. Der Hersteller der Triebwerke gibt bei regelmäßiger Wartung die Ausfallwahrscheinlichkeit für jedes Triebwerk während eines Langstreckenflugs mit $q = 10^{-5}$ an.
Bei der Bearbeitung dieser Aufgabe kannst du davon ausgehen, dass die Triebwerke unabhängig voneinander ausfallen.

a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem dieser regelmäßig gewarteten neuen Airbusmodelle während eines Langstreckenfluges

- kein Triebwerk ausfällt,
- alle Triebwerke ausfallen,
- drei Triebwerke ausfallen,
- mindestens ein Triebwerk ausfällt.

Verwende – wenn nötig – für die Lösungen die Exponentialschreibweise.

b) Ein Schüler möchte die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass bei einem Langstreckenflug des neuen Airbusmodells genau ein Triebwerk ausfällt. Er rechnet.
$P(\text{"genau ein Triebwerk fällt aus"}) = 0{,}0001 \cdot 0{,}9999^3 = 0{,}00009997 \approx 0{,}001\ \%$.
Seine Lehrerin stellt fest, dass er bei dieser Berechnung drei Fehler gemacht hat.

Gib die Fehler an und korrigiere sie.

c) Eine Fluggesellschaft plant 100 der neuen Airbusmodelle zu erwerben. Jedes Flugzeug soll im Durchschnitt jährlich 300 Langstreckenflüge absolvieren.
Die Fluggesellschaft verlangt vom Triebwerkhersteller, dass es zu nicht mehr als 2 Triebwerksausfällen im Jahr kommt. Berechne, ob diese Forderung mit den Triebwerken zu erfüllen ist.

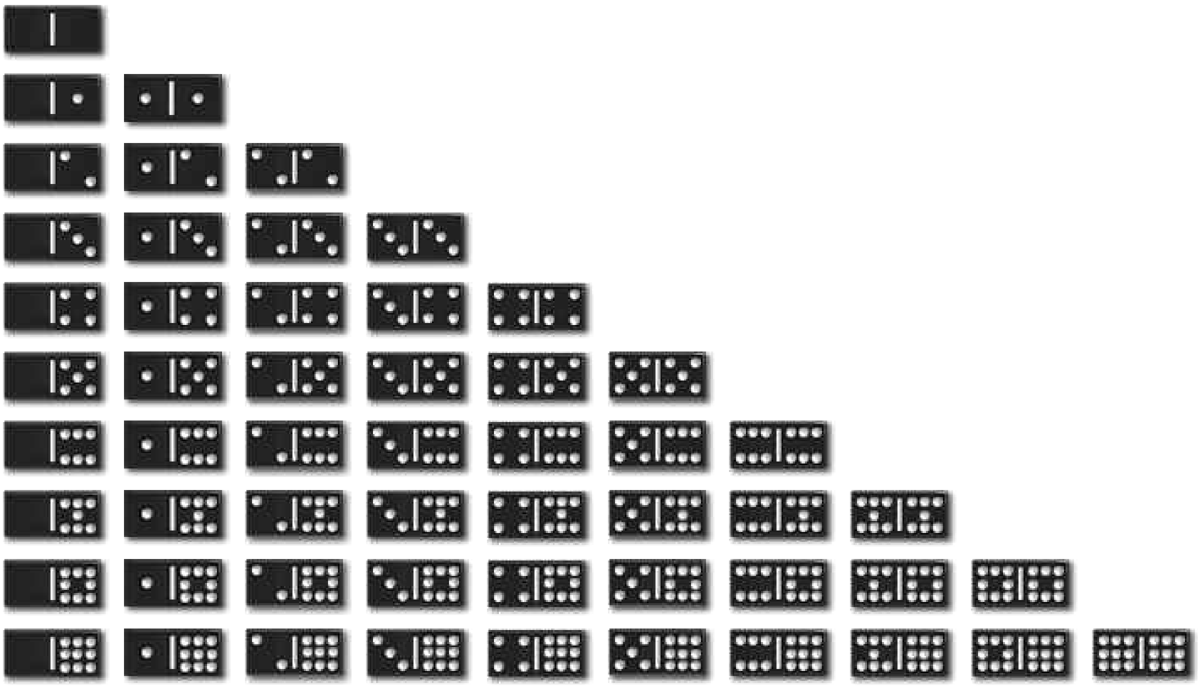
Idee der Wahrscheinlichkeit

47. Dominosteine

Lösung S. 170

Anna und Leo haben im Urlaub lange und viel Domino gespielt. Nun möchten sie etwas Abwechslung haben und überlegen, wie sie mithilfe der Dominosteine ein neues Spiel erfinden können.
Anna schlägt vor: „Wir denken uns eine Regel aus, sodass entweder du gewinnst oder ich. Der Gewinner erhält 1 Spiel-Euro. Bei jedem Spielzug liegen alle Steine umgedreht auf dem Tisch. Ein Stein wird aufgedeckt und der Gewinner festgestellt. Anschließend wird der Stein wieder umgedreht, wir mischen die Steine und das Spiel geht weiter.“

Ein Dominospiel besteht aus 55 unterschiedlichen Steinen (siehe Abbildung).



a) Leo meint: „Lass uns die Regel in Abhängigkeit von der Gesamtaugenzahl auf einem Stein aufstellen.“ Dazu benötigen sie die folgende Tabelle. Bestimme die jeweiligen Anzahlen und trage sie in die Tabelle ein.

Gesamtaugenzahl	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Anzahl der Steine																			

b) Leo schlägt nun die folgende Spielregel vor: „Hat der aufgedeckte Stein eine einstellige Augenzahl, gewinne ich. Sonst gewinnst du.“ Anna ist damit nicht einverstanden: „Das Spiel ist nicht fair. Du würdest häufiger gewinnen als ich.“
Entscheide, ob Anna Recht hat.

c) Beurteile, ob mit einer anderen Aufteilung der Steine zwischen Anna und Leo ein faires Spiel möglich ist.

d) „Wir müssen den Gewinn verändern“ meint Anna. „Ich schlage vor, dass du 40 Eurocent bekommst, wenn der aufgedeckte Stein eine einstellige Augenzahl hat, anderenfalls bekomme ich 60 Eurocent.“
Beurteile diesen Vorschlag unter dem Gesichtspunkt eines fairen Spiels.
Bestimme, welcher Gewinn oder Verlust für Leo bei 50 Ziehungen zu erwarten ist.

e) Anna und Leo haben sich einen neuen Gewinnplan ausgedacht. Diesmal wollen sie die Frage, ob das Spiel fair ist, nicht durch eine Rechnung beantworten, sondern durch die Durchführung von 50 Spielen.
Nachdem die beiden 50-mal entsprechend dem neuen Gewinnplan gespielt haben, hat Anna viel mehr Spielgeld als Leo.
“Damit haben wir gezeigt, dass unser neuer Gewinnplan nicht fair ist“, meint Leo. „Das finde ich nicht“, sagt Anna, „wir haben doch nur 50-mal gespielt. Wir hätten viel häufiger spielen müssen, damit sich die Gewinne und Verluste ausgleichen.“
Entscheide, wer Recht hat.

f) Bestimme einen möglichen Gewinnplan für ein faires Spiel.
Damit man viele Gewinnpläne entwickeln kann, wird eine Strategie benötigt. Beschreibe eine solche Strategie.

Idee der Wahrscheinlichkeit

48. Wortlegespiel

Lösung S. 171

In einem Wortlegespiel wie z. B. Scrabble werden nur die 26 Großbuchstaben des Alphabets (d.h. kein Ä, Ö, Ü) verwendet. Die Buchstabenplättchen sind wie folgt vorhanden:

Buchstabe	A	E	I	O	U	übrige Buchstaben (Konsonanten)
Anzahl	25	30	15	10	10	jeweils 18

a) Zeige, dass es insgesamt 468 Buchstabenplättchen sind.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit für das einmalige Ziehen eines Buchstabenplättchens mit
– einem A,
– keinem B,
– einem Konsonanten,
– einem der letzten 13 Buchstaben des Alphabets.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei dreimaligem Ziehen eines Buchstabenplättchens ohne Zurücklegen
– drei Vokale gezogen werden,
– erst ein Vokal, dann ein Konsonant und dann wieder ein Vokal gezogen werden.

d) Sarah triumphiert: sie hat viermal gezogen und zwar (in dieser Reihenfolge) die Buchstaben H A U S. Berechne die Wahrscheinlichkeit für diesen Erfolg.

e) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, die vier Buchstaben aus d) *ohne* Berücksichtigung der Reihenfolge zu ziehen. Vergleiche deine Ergebnisse aus d) und e) miteinander.

Idee der Wahrscheinlichkeit

49. Pralinenherstellung

Lösung S. 173

Die Firma *Sprengli* ist ein traditionsreicher Hersteller edler Schokoladen und Pralinen. Familie Heinemann kauft immer die „Pralinés Top Four“, eine Auswahl 20 handgemachter Pralinés der vier beliebtesten Sorten in je gleicher Stückzahl.

a) Eine der Sorten enthält eine Alkoholfüllung, welche die kleine Tochter Nicole nicht essen soll. Eines Tages bleibt die Packung unbeaufsichtigt liegen. Nicole öffnet diese heimlich und nimmt sich 2 Pralinen heraus. (Nicole kann dabei die einzelnen Sorten äußerlich nicht unterscheiden.)
Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter den 2 Pralinen keine Praline mit einer Alkoholfüllung befindet.

Als der Vater eine leicht verformte Praline findet, ruft er beim Kundenservice von *Sprengli* an. Dieser teilt mit, dass trotz zahlreicher Kontrollen etwa 3 % aller Pralinen nicht den allerhöchsten Ansprüchen entsprächen. Diese fehlerhaften Pralinen treten rein zufällig und unabhängig voneinander auf.

b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in einer Schachtel genau eine fehlerhafte Praline befindet.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in einer Schachtel zwei oder mehr fehlerhafte Pralinen befinden.
(Zur Kontrolle: $p\,(zwei\ oder\ mehr\ fehlerhafte\ Pralinen) \approx 0{,}119$)

Um die Marktposition als Edel-Anbieter zu sichern, schlägt ein Mitarbeiter der PR-Abteilung folgende Garantie vor: Findet ein Kunde in einer Schachtel „Pralinés Top Four“ zwei oder mehr fehlerhafte Pralinen vor, so kann er die Schachtel an den Hersteller einsenden und erhält 2 Jahre lang monatlich eine Schachtel kostenlos zugesandt.

d) Begründe, dass eine solche Garantie den Pralinenhersteller in den Ruin treiben würde.Überlege dies anhand des Ergebnisses von c) und einer Beispielrechnung mit 100 Schachteln, die verkauft werden.

e) Um die Zahl der einwandfrei produzierten Pralinen zu erhöhen, will *Sprengli* die Qualitätskontrollen verbessern.
Als Ziel wird vorgegeben, dass sich langfristig in mindestens 90 % aller Packungen ausschließlich einwandfreie Pralinen befinden.
Bestimme die Wahrscheinlichkeit, mit der dann jede einzelne Praline einwandfrei sein müsste, damit die Vorgabe erfüllt wird.

Idee der Wahrscheinlichkeit

50. Volksabstimmung

Lösung S. 174

Am 29. Mai 2005 stimmten die Franzosen über die Verfassung der Europäischen Union ab, am 1. Juni 2005 die Niederländer.

Die Ergebnisse sind in folgender Tabelle zu finden:

	Frankreich	Niederlande
Zahl der Abstimmungsberechtigten	42,0 Millionen	11,6 Millionen
Abstimmungsbeteiligung	70 %	64 %
Anteil der Ja-Stimmen	45,1 %	38,4 %
Anteil der Nein-Stimmen	54,9 %	61,6 %

a) Bestimme die Zahl der Franzosen, die sich am Referendum beteiligt haben.

b) Zeige, dass in den Niederlanden etwa 2 850 000 Bürger mit „Ja“ gestimmt haben.
Entscheide: Kann man sagen, dass sich in den Niederlanden die Mehrheit der Bürger gegen die Verfassung entschieden hat?

c) Der französische Präsident und der niederländische Premierminister seufzen nach der Abstimmung: „Wenn doch nur (jeweils) eine halbe Million mehr zur Abstimmung gegangen wären und mit „Ja“ gestimmt hätten, dann sähe alles anders aus.“
Entscheide: Stimmt diese Aussage?

Im Vorfeld der Abstimmungen gab es in beiden Ländern repräsentative Befragungen der Bürger mit folgenden Ergebnissen:

	Frankreich	Niederlande
Zahl der Befragten	600	1200
„Ich werde zur Abstimmung gehen“	410	760
„Ich werde für die Verfassung stimmen“	206	304
„Ich werde gegen die Verfassung stimmen“	204	456

d) Berechne, wie gut die Abstimmungsbeteiligung in den Niederlanden vorhergesagt wurde.

e) Auf den ersten Blick widerspricht das Ergebnis der Befragung in Frankreich dem Ergebnis der Abstimmung.
Bestimme, wie viele der 410 befragten Wahlwilligen andere Aussage hätten machen müssen, um bei der Befragung denselben „Nein“-Anteil zu erzielen wie bei der großen Abstimmung.

Die Wahlforscher geben zu bedenken: “Wir können bei solchen Befragungen, bei denen wir n Personen interviewen, nur einen Sicherheitsbereich angeben. Die Breite dieses Bereichs berechnen wir etwa so: $b \approx \frac{1}{\sqrt{n}}$. Und deswegen können wir sagen: Unsere Vorhersagen sind nur auf $b \approx 100 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ Prozent genau.“

f) Bestimme den Wert für b im Falle der Franzosen und entscheide, ob das Ergebnis der Abstimmung noch in diesem Bereich lag.

Idee der Wahrscheinlichkeit

51. Führerscheinprüfung

Lösung S. 175

In einer Fahrschule wird seit Jahren mit den Fahrschülern probehalber eine Vorprüfung durchgeführt, kurz bevor sie sie zur theoretischen Führerscheinprüfung ins Verkehrsamt gehen. Unabhängig davon, ob sie diese Vorprüfung bestanden haben oder nicht, können sie dann die theoretische Führerscheinprüfung im Verkehrsamt ablegen.

Ein Fahrlehrer hat die Ergebnisse der letzten Jahre von über 2000 Fahrschülern als Prozentsätze gerundet in einer sogenannten Vierfeldertafel zusammengefasst:

	Theorieprüfung bestanden	Theorieprüfung nicht bestanden	Summe
Vorprüfung bestanden	76 %	14 %	90 %
Vorprüfung nicht bestanden	4 %	6 %	10 %
Summe	80 %	20 %	100 %

Der Fahrlehrer will diese Tabelle nutzen, um seinen neuen Fahrschülern Anhaltspunkte zu geben für den Fall, dass sie sich weder besser noch schlechter vorbereiten als ihre Vorgänger.

a) Man kann diese Daten im Lichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung interpretieren.
Gib beispielhaft eine Interpretation des Eintrags 14 % in der ersten Zeile an. (3 P)

b) Man kann aus den Daten der Tabelle auch ein Baumdiagramm anfertigen (siehe Anlage).
Gib in dem Baumdiagramm an den einzelnen Zweigen die Wahrscheinlichkeiten an. (6 P)

c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit,

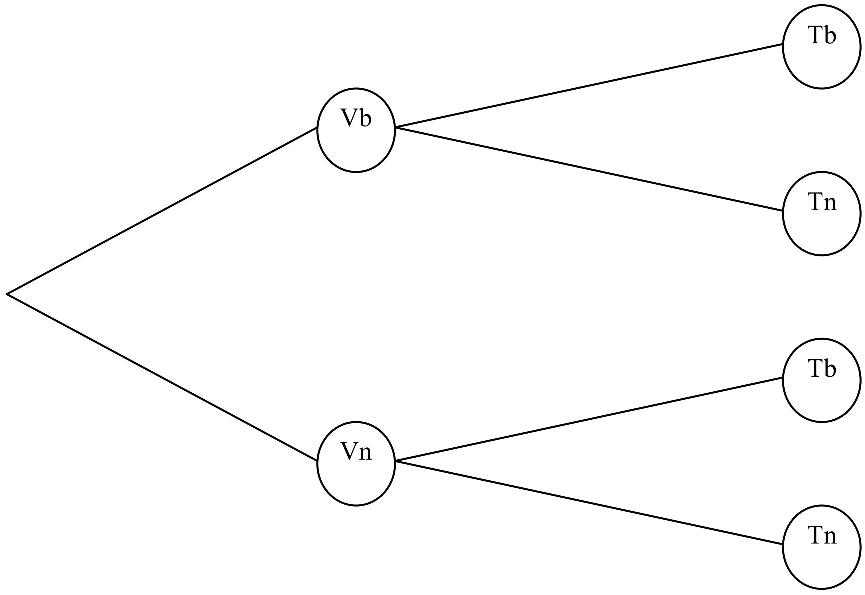
- dass ein Fahrschüler, der die Vorprüfung besteht, die theoretische Führerscheinprüfung nicht besteht,
- dass ein Fahrschüler, der die Vorprüfung nicht besteht, die theoretische Führerscheinprüfung trotzdem besteht,
- dass ein Fahrschüler, der die theoretische Führerscheinprüfung nicht bestanden hat, schon vorher die Vorprüfung nicht bestanden hat. (6 P)

d) Ein Fahrschüler, der die theoretische Führerscheinprüfung nicht bestanden hat und sie neu versuchen will, rechnet seinem Fahrlehrer vor:
„Die Wahrscheinlichkeit, nicht zu bestehen, ist 0,2; dann muss die Wahrscheinlichkeit, zweimal nicht zu bestehen, $0{,}2 \cdot 0{,}2$ sein, und das sind 0,04, also gerade mal 4 %. Meine Chance, dieses Mal die Prüfung zu bestehen, ist also 96 %!“
Begründe, dass der Fahrschüler nicht korrekt argumentiert. (3 P)

e) Zum nächsten Kurs haben sich 25 Fahrschüler neu angemeldet.
Die angenommenen Wahrscheinlichkeiten sollen alle unverändert gelten. Bestimme damit die Wahrscheinlichkeit, dass diesmal mindestens ein Fahrschüler die Vorprüfung nicht besteht.
Gib auch eine Begründung für deine Rechnung an. (4 P)

Anlage zur Aufgabe „Führerscheinprüfung“

Name: ____ Klasse: _________



(Abkürzungen: „Vb“ für „Vorprüfung bestanden“,
„Vn“ für „Vorprüfung nicht bestanden“,
„Tb“ für „Theoretische Fahrprüfung bestanden“,
„Tn“ für „Theoretische Fahrprüfung nicht bestanden“.

Idee der Wahrscheinlichkeit

52. Auf dem Jahrmarkt Lösung S. 177

Das Riesenglücksrad „Die rote Eins“ ist die besondere Attraktion des diesjährigen Jahrmarktes. Es besteht aus 36 gleich großen Feldern, die entweder blau oder rot sind und außerdem entweder mit der Zahl 1 oder der Zahl 0 gekennzeichnet sind.
Ein Drittel der Felder sind rot, acht der 36 Felder sind mit einer 1 gekennzeichnet.

a) Ergänze die folgende Tabelle mit Hilfe der obigen Angaben.

	0	1	gesamt
rot			
blau		6	
gesamt			

b)
- Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einmaligem Drehen ein rotes Feld mit der Zahl 0 erscheint.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei zweimaligem Drehen beide Felder blau sind.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei zweimaligem Drehen einmal die 0 und einmal die 1 erscheint.

c) Für das Glücksspiel „Dreh **Die Rote Eins**“ gelten folgende Bedingungen:
Einsatz für einmaliges Drehen 2 €.
Auszahlung für rotes Feld mit 1: 10 €
Auszahlung für blaues Feld mit 1: 6 €
Auszahlung für rotes Feld mit 0: 1 €
Auszahlung für blaues Feld mit 0: 1 €

Am Ende der ersten Jahrmarktwoche wundert sich der Glücksradbesitzer, dass er Verlust gemacht hat.
Beurteile, ob dies zu erwarten war.

Idee der Wahrscheinlichkeit

53. Mit und ohne Brille Lösung S. 178

Die Kleinstädte Fielbrück, Fielhausen und Fielwerder haben Folgendes gemeinsam:

I: Ein Drittel der Einwohner ist über 50 Jahre alt.
II: Die Hälfte der Einwohner trägt eine Brille.

Ein Reporter führt im Auftrag eines bekannten Optikers in den drei Städten eine Befragung durch. In den drei Einwohnermeldeämtern stellt er jeweils folgende Fragen:

1. *Wie viel Prozent der über 50-jährigen in Ihrer Stadt tragen eine Brille?*
2. *Wie viel Prozent der Brillenträger in Ihrer Stadt sind über 50 Jahre alt?*
3. *Wie viel Prozent der Einwohner Ihrer Stadt sind über 50 Jahre alt und tragen eine Brille?*

Erstaunlicherweise erklären die drei befragten Beamten zunächst alle dasselbe: „Ich beantworte Ihnen nur eine der drei Fragen; die anderen Antworten ergeben sich daraus von selbst.“

Der Beamte in Fielbrück beantwortet Frage 1 mit: „100 %.“
Der Beamte in Fielhausen beantwortet Frage 2 mit: „40 %.“
Der Beamte in Fielwerder beantwortet Frage 3 mit: „25 %.“

a) – Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von drei zufällig ausgesuchten Personen aus Fielbrück genau zwei älter als 50 Jahre sind.
   – Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass vier zufällig ausgesuchte Personen aus Fielhausen alle eine Brille tragen.
   – Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von zehn zufällig ausgesuchten Personen aus Fielwerder mindestens einer eine Brille trägt.

b) Ergänze die folgende Tabelle für die 12 000Einwohner von Fielbrück:

	Brille	keine Brille	gesamt
älter als 50 Jahre			
50 Jahre und jünger			
gesamt			12 000

c) Bestimme die in den Fragen 2) und 3) von den Einwohnermeldeämtern erbetenen Prozentangaben für Fielbrück.

d) Ergänze die folgende Tabelle für die 9 000 Einwohner von Fielhausen:

	Brille	keine Brille	gesamt
älter als 50 Jahre			
50 Jahre und jünger			
gesamt			

e) Bestimme die in den Fragen 1) und 3) erbetenen Prozentangaben für Fielhausen.

Idee der Wahrscheinlichkeit

54. Teilzeitarbeit Lösung S. 179

Teilzeitarbeit ist ein neues heutzutage stark diskutiertes Problem unserer Gesellschaft. Derzeit sind nur noch 79% aller Berufstätigen vollzeitbeschäftigt.

Obwohl mehr Männer als Frauen berufstätig sind (55% der Berufstätigen sind Männer), ist von den Teilzeitbeschäftigten lediglich jeder 7. ein Mann.

In einem Zeitungsartikel heißt es: „Sechs von sieben berufstätigen Frauen sind teilzeitbeschäftigt. Von den berufstätigen Männern dagegen arbeiten weniger als 10% in Teilzeit.“

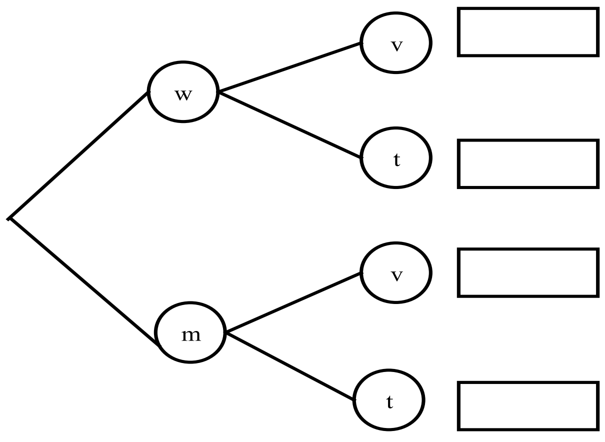
b) Ergänze die folgende Tabelle mit Hilfe der obigen Angaben.

	Geschlecht		
	w	m	gesamt
vollzeitbeschäftigt			
teilzeitbeschäftigt		3 %	
gesamt			

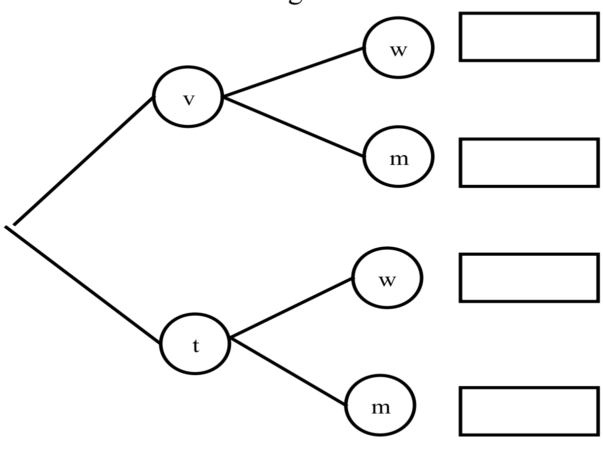
c) Gib die Wahrscheinlichkeit dafür an,
- dass ein zufällig ausgewählter berufstätiger Mann vollzeitbeschäftigt ist,
- dass zwei zufällig ausgewählte Teilzeitbeschäftigte beide Frauen sind,
- dass zwei zufällig ausgewählte berufstätige Frauen beide teilzeitbeschäftigt sind.

d) Beschrifte die Zweige der beiden zur Vierfeldertafel aus a) gehörenden Baumdiagramme mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten::

Baumdiagramm 1:



Baumdiagramm 2:



e) Beurteile die beiden im Vortext angegebenen Aussagen des Zeitungsartikels.

Idee der Wahrscheinlichkeit

55. Medikament Lösung S. 180

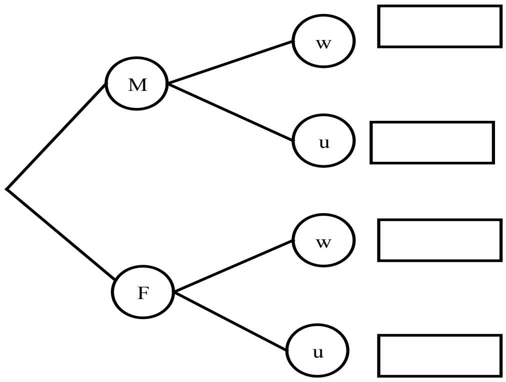
In einer Kleinstadt wurde – unter Berücksichtigung des Geschlechts der Testpersonen – die Wirksamkeit eines neuen Medikamentes gegen eine bestimmte Krankheit getestet.
Hier das Testergebnis:

	Medikament		
	wirksam (w)	unwirksam (u)	gesamt
Männer (M)	0,51	0,19	0,70
Frauen (F)	0,18	0,12	0,30
gesamt	0,69	0,31	1,00

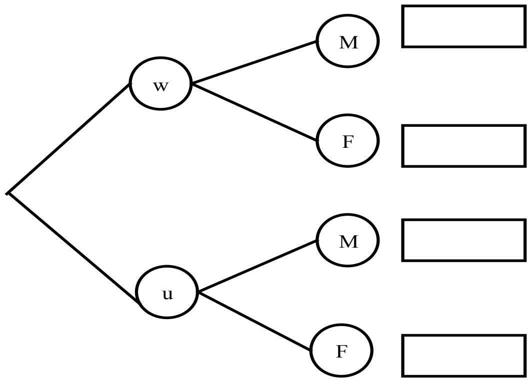
a) - Gib die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das Medikament bei einem Mann wirkt.
   - Gib die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das Medikament bei einer Frau wirkt.

b) Beschrifte die Zweige der beiden zur oben gegebenen Vierfeldertafel aus a) gehörenden Baumdiagramme mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten:

Baumdiagramm 1:



Baumdiagramm 2:



c) Kurz nach Veröffentlichung der Studie stellt sich heraus, dass lediglich 10 000 Testergebnisse ausgewertet worden waren. Die Daten von 1 000 Männern waren nicht berücksichtigt worden. Korrigiere die oben gegebene Vierfeldertafel unter der Voraussetzung, dass sich der prozentuale Anteil der Wirksamkeit des Medikamentes bei Männern durch die hinzugekommenen Daten nicht geändert hat.

d) Nun wird vermutet, dass bei Frauen schon einer schwächere Dosis des Medikamentes wirksam sein könnte, bei Männern jedoch nicht. Es wird in einer anderen Stadt ein entsprechender Test mit niedrigerer Dosis durchgeführt. Beschreibe, wie sich die Werte *a, b, c* und *d* voraussichtlich ändern würden, wenn die Vermutung richtig wäre und begründe diese Änderung.

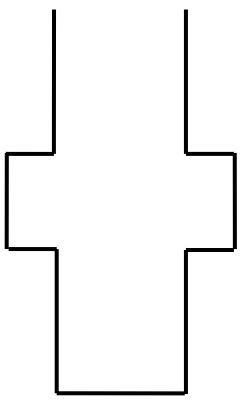
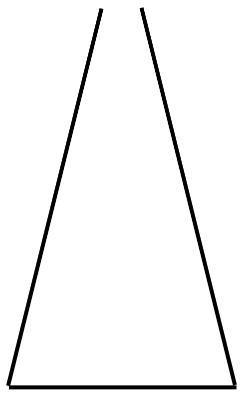
	Medikament		
	wirksam (w)	unwirksam (u)	gesamt
Männer (M)	a	b	$a+b$
Frauen (F)	c	d	$c+d$
gesamt	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

3. Erwartungshorizonte zu den Aufgaben und Bewertungshinweise

3.1 Aufgaben, die ohne Einsatz des Taschenrechners bearbeitet werden

3.1.1 Beispiel für eine Prüfungsaufgabe

	Lösungsskizze		Zuordnung, Bewertung		
			I	II	III
1.	a) $0{,}0045 \cdot 2000 = \mathbf{9}$	**c)**	1		
	b) 225 min = **3,75 h**	**c)**	1		
	c) $\frac{4}{5}$ m = **80 cm**	**a)**	1		
	d) $\frac{5}{8} = \mathbf{62{,}5\ \%}$	**c)**	1		
	e) $(2 - x) \cdot (3 + 4x) = \mathbf{-4x^2 + 5x + 6}$	**b)**	1		
	f) $u = \sqrt{v^2 + w^2}$	**a)**	1		
	g) $\mathbf{0{,}4\ m^3}$	**b)**		1	
	h) $5\frac{1}{2}$	**d)**		1	
	i) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} = \mathbf{3}$	**a)**		1	
	j) $2^n = 128$, $\boldsymbol{n} \mathbf{= 7}$	**c)**		1	
	k) **8**	**d)**		1	
	l) **37,5 %**	**c)**		1	
	m) $9 \cdot \left(5x + \frac{x}{2}\right) - x$	**a)**		1	
	n) **120**	**d)**		1	
	o) **6**	**c)**		1	
	p) **70 €**	**c)**		1	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
2.	a) $L = \left\{0; 2; -\frac{3}{2}\right\}$ b) $L = \{1; 5\}$ c) $L = \{-4; 2\}$ d) $L = \{1\}$ Der Punkt pro Teilaufgabe wird nur bei vollständiger Lösung gegeben. Auch andere Notationen der Lösung(en) sind zulässig.	1 1	 1 1	
3.	a) $3{,}84 \cdot 10^5$ km, 10^{-10} m, $7{,}783 \cdot 10^8$ km, $9{,}461 \cdot 10^{12}$ km	2	2	
	b) $10\,000 = 10^4$		1	
	c) $10^{13} : 50 = 2 \cdot 10^{11}$ km			2
4.	$A = 36a^2 - 2 \cdot \pi \cdot (2a)^2 = 36a^2 - 8 \cdot \pi \cdot a^2 = 4a^2 \cdot (9 - 2\pi)$			3
5.	a)  b)  Wichtig ist, dass die Hauptmerkmale der Gefäße deutlich werden.		4	
	Insgesamt 34 BWE	10	19	5

3.1.2 Weitere Beispiele für Teilaufgaben zum Prüfungsteil I

1. Teilbarkeit

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Weil die Vielfachen von 3 in 3er-Schritten aufeinander folgen, muss eine von 3 aufeinander folgenden Zahlen durch 3 teilbar sein. $\Rightarrow$ Die Behauptung ist richtig.		2	
b)	Weil zu 3 aufeinander folgenden Zahlen stets mindestens eine gerade Zahl und eine durch 3 teilbare Zahl gehört, muss das Produkt durch 2 <u>und</u> durch 3 und damit auch durch 6 teilbar sein. $\Rightarrow$ Die Behauptung ist richtig.			3
c)	$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6;$ 4 ist nicht Teiler von 6 $\Rightarrow$ Die Behauptung ist falsch.		2	
	Insgesamt 7 BWE		4	3

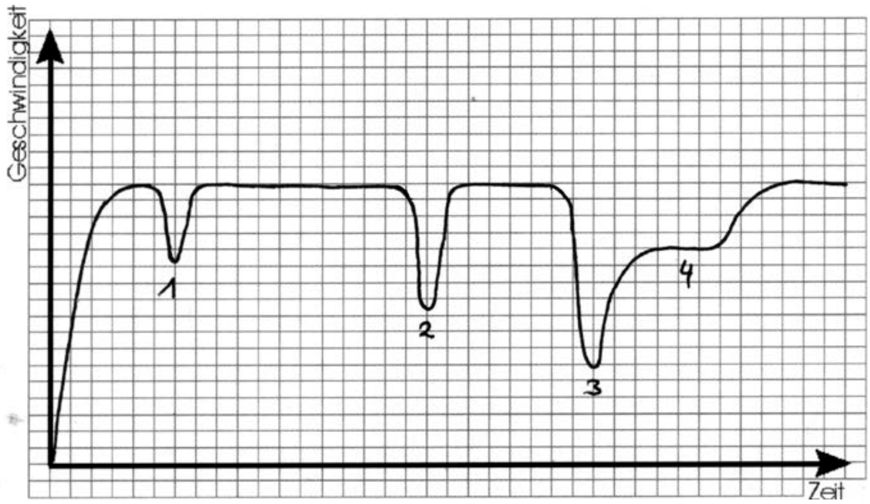
2. Druckerei

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Eine Postkarte kostet bei einer Auflage von 5 000 Stück 10 Cent, denn $\frac{20000}{5000} + 6 = 4 + 6 = 10$.	1		
b)	Mit steigender Auflagenzahl sinken die Kosten pro Stück, da die Variable im Nenner des Terms auftritt.		2	
c)	Die Kosten pro Postkarte müssen – auch bei einer sehr großen Auflagenzahl – stets noch etwas über 6 Cent liegen, da immer noch etwas Positives dazu addiert wird. Oder z.B. In der Formel müsste $\frac{20\,000}{n} = 0$ gelten. Dies ist nicht möglich.		2	
d)	Materialkosten pro Karte oder Mindesteinnahme der Firma pro Karte oder … Alle im Kontext der Aufgabe sinnvollen Antworten sind richtig.			2
	Insgesamt 7 BWE	1	4	2

3. Benzinverbrauch

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	35 Liter	1		
b)	zwischen dem 1. und 2. Tanken: 3,75 Liter pro 100 km.		2	
c)	Auf der 3. Teilstrecke zwischen 500 km und 700 km. Dort ist das Gefälle des Graphen am größten, d.h. der Inhalt des Tanks nimmt am stärksten ab.		1	1
d)	$(5+15+15):7=35:7=5$. Der Benzinverbrauch auf der Gesamtstrecke beträgt 5 Liter pro 100 km.		2	
	Insgesamt 7 BWE	1	5	1

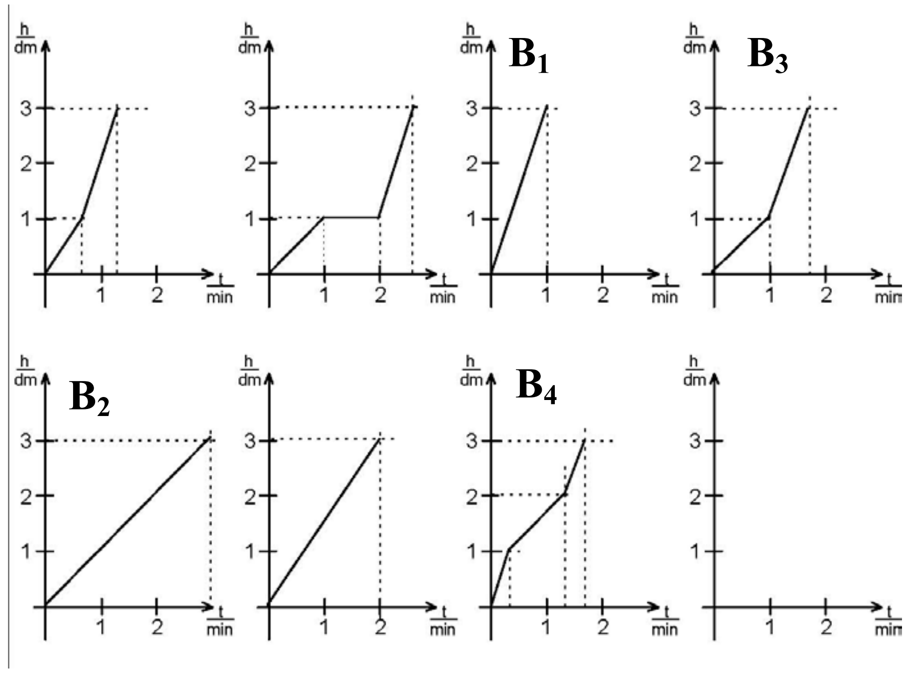
4. Formel 1

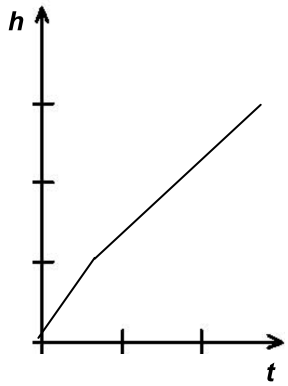
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	 Moderne Formel 1-Wagen können innerhalb von wenigen Sekunden auf ihre Höchstgeschwindigkeit beschleunigen. Nach dem Start beschleunigt der Rennwagen bis zur Höchstgeschwindigkeit. Kurz vor der Kurve (1) wird abgebremst, um gegen Ende der Kurve wieder auf die auf Höchstgeschwindigkeit zu beschleunigen. Dann fährt der Rennwagen eine längere Strecke geradeaus, um dann vor der nun engeren Kurve (2) stärker abzubremsen. Nach einer Beschleunigung wiederum auf die Höchstgeschwindigkeit wird der Wagen aufgrund der „engsten" Kurve (3) am stärksten abgebremst. In der weiten Kurve (4) kann der Wagen nicht mit seine Höchstgeschwindigkeit fahren. Die Höchstgeschwindigkeit erreicht er erst wieder auf der Zielgeraden. *Die Skizze kann natürlich anders aussehen, sie muss jedoch den Sachverhalt sinnvoll wiedergeben; Analoges gilt für die Kommentare, die auch in Stichworten sein dürfen.*		5	2
	Insgesamt 7 Punkte	0	5	2

5. Füllgraphen 1

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	a/E: gleichmäßige Füllung, deshalb linearer Verlauf des Füllgraphen, b/A: je höher der Füllstand, desto größer der Querschnitt, Füllhöhe wächst langsamer, c/B: bis zum Flaschenhals gleichmäßige Füllung, dann schnellere gleichmäßige Füllung, d/C: erst größer werdender Querschnitt und langsamer steigender Graph, dann kleiner werdender Querschnitt und schneller steigender Graph, am Hals konstant steigender Graph.		4	4
	Insgesamt 8 BWE		4	4

6. Füllgraphen 2

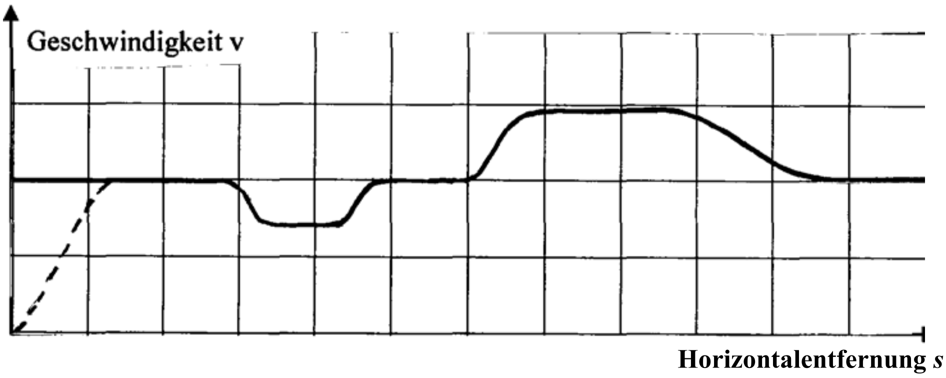
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	 Pro richtiger Zuordnung 1 Punkt.		4	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
b)	 *Hinweis zur Korrektur:* *Das Prinzip muss erkannt sein; die Befüllung verläuft in den beiden Abschnitten jeweils linear in Abhängigkeit von der Zeit, zunächst schneller (Graph steiler), dann langsamer (Graph flacher). Genauere Angaben sind wegen der fehlenden Bemaßung nicht möglich.*			2
	Insgesamt 6 BWE	0	4	2

7. Kegel, Kugel, Zylinder

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 2r = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ $V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$	1		
	$V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2\pi \cdot r^3$	1		
	$V_{\text{Kegel}} : V_{\text{Kugel}} : V_{\text{Zylinder}} = \frac{2}{3} : \frac{4}{3} : 2 = 1 : 2 : 3$		1	1
	Insgesamt 4 Punkte	2	2	

8. Radrennfahrer

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	 Die Geschwindigkeit ist zunächst konstant, verringert sich dann durch die Bergan-fahrt auf eine niedrigere konstante Geschwindigkeit und erhöht sich auf der Hochebene wieder auf die erste konstante Geschwindigkeit. Bei der Talfahrt steigt v an bis zur möglichen Höchstgeschwindigkeit, um nach einer gewissen Fahrtstrecke auf der Ebene auf das anfängliche Niveau zu sinken. *Die Skizze kann natürlich anders aussehen. Die Begründung muss aber die wesentlichen Aspekte richtig erfassen.* *Am Anfang der Skizze sollten beide Möglichkeiten (Anfangsgeschwindigkeit $v = 0$ oder Fahrer hat schon bei $s = 0$ eine Geschwindigkeit) akzeptiert werden.*		4	
	Insgesamt BWE		4	

9. Der goldene Schnitt

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b} \Leftrightarrow a \cdot (a+b) = b^2 \Leftrightarrow a^2 + ab = b^2$		2	
b)	$a^2 + ab = b^2 \Leftrightarrow a^2 + ab - b^2 = 0 \Rightarrow a = -0{,}5b + \sqrt{0{,}25b^2 + b^2} \Leftrightarrow$ $a = \frac{b}{2}(-1+\sqrt{5})$ Zulässig ist auch der Nachweis durch Einsetzen des gegebenen Terms.		2	1
	Insgesamt 5 BWE		4	1

10. Gebläse

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	6 Wege	1		
b)	Es gibt zwei Fächer E, auf die man jeweils auf 4 Wegen mit gleicher Wahrscheinlichkeit gelangen kann: $P(E) = 2 \cdot 4 \cdot 0{,}5^4 = 0{,}5$.		2	
c)	$P(N) = 1 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}0016$; bei 10 000 Kugeln würde man 16 im Fach N erwarten.		2	
d)	$P(B) = 6 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^2$.		2	
	Insgesamt 7 BWE	1	6	

11. Geraden

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	$f(x) = x + 2$; $g(x) = -2x + 3$; $h(x) = -\frac{1}{4}x$; $k(x) = -2{,}5$	2	2	
b)	z.B. $x = 3$ *Einen Punkt für das Einzeichnen, einen für die Gleichung*		2	
c)	Es handelt sich nicht um den Graphen einer Funktion, da dem x-Wert (hier z.B. 3) mehr als genau ein (sogar unendlich viele) y-Wert zugeordnet wird.		1	
	Insgesamt 7 BWE	2	5	

12. Graphen zuordnen

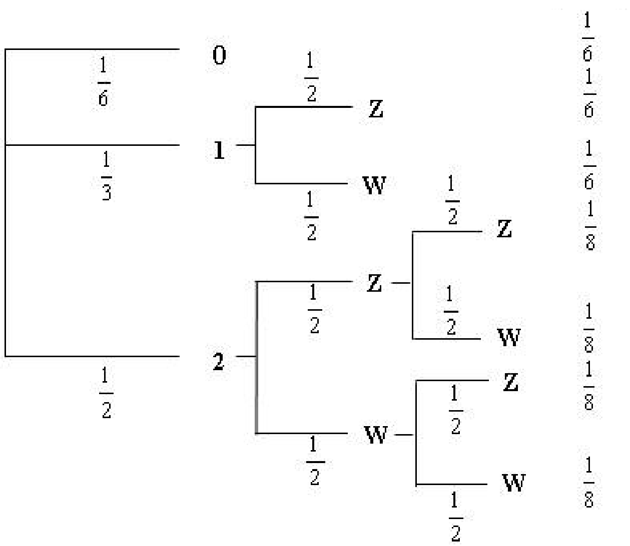
<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung, Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>
<table>
<tr><td>Funktionsterm</td><td>$x^2 - 2$</td><td>$3x^2 - 4x - 3$</td><td>$-2x^2$</td><td>$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$</td><td>$(x-2)^2$</td><td>$x^3 - 3$</td></tr>
<tr><td>*Zugeh. Graph*</td><td>----</td><td>**G**</td><td>----</td><td>**A**</td><td>**E**</td><td>**F**</td></tr>
<tr><td>Funktionsterm</td><td>$x^4 - 3$</td><td>$x^5 - 4$</td><td>$\frac{1}{x} + 3$</td><td>$\frac{1}{x^2}$</td><td>$\frac{1}{x+4}$</td><td>$-\frac{1}{x^2} + 3$</td></tr>
<tr><td>Zugeh. Graph</td><td>---</td><td>----</td><td>**D**</td><td>----</td><td>----</td><td>**C**</td></tr>
<tr><td>Funktionsterm</td><td>2^x</td><td>$\left(\frac{1}{2}\right)^x$</td><td>$\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$</td><td>$\sin x$</td><td>$\sin 4x$</td><td>$\cos x$</td></tr>
<tr><td>Zugeh. Graph</td><td>----</td><td>**H**</td><td>----</td><td>----</td><td>**K**</td><td>**B**</td></tr>
</table>
</td><td></td><td>9</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Für jede richtige Zuordnung wird 1 Punkt gegeben. Wird ein Buchstabe mehrmals genannt, gibt es keinen Punkt bezüglich dieses Buchstabens (selbst wenn die richtige Lösung dabei ist).			
	Insgesamt 9 BWE		9	

13. Besondere Werte der trigonometrischen Funktionen

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Im gleichseitigen Dreieck haben alle Winkel die Größe 60°. Im rechtwinkligen Dreieck ergeben sich 30° aus der Winkelsumme im Dreieck.	1		
b)	Die Schüler können selbstständig eine Seitenbezeichnung wählen. $\sin 30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$; $\sin 60° = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, denn $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$ 2 Punkte für sin 30°, 4 Punkte für sin 60°.	1 1	1 3	
c)	cos 60° = 0,5; da cos α = sin (90° − α) *oder direkt aus der Zeichnung.*		1	
	Insgesamt 8 BWE	3	5	

14. Würfel und Münze

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
		1	4	
	A: Genau einmal Zahl; $P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{8} = \frac{5}{12}$.		1	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	B: Mindestens einmal Zahl; $P(B) = P(A) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{24}$. C: Keinmal Wappen; $P(C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$ Oder: $P(C) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{13}{24} = \frac{11}{24}$.		2	
	Insgesamt 8 BWE	1	7	

15. Martins Glücksspiel

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	A: Es wird eine „1“ gewürfelt, dann eine helle Kugel gezogen. $P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$.		2	
b)	Nur wenn eine helle Kugel gezogen wird, macht Martin Gewinn. Da Martin beim Ziehen einer dunklen Kugel genauso viel Geld (1€) zusätzlich auszahlt, wie der Einsatz beträgt, macht er beim Ziehen einer dunklen Kugel 1€ Verlust. B: Es wird eine helle Kugel gezogen. $P(B) = \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{9}$, d.h. $P(B)$ ist kleiner als 50%. Deshalb macht Martin auf lange Sicht Verlust. oder: C: Es wird eine dunkle Kugel gezogen. $P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{9}$, d.h. $P(C)$ ist größer als 50 %.		4	1
	Insgesamt 7 BWE		6	1

16. Berechnung im Dreieck

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Richtig sind die Ansätze $h = \sqrt{b^2 - a_2^2}$ und $h = \frac{b \cdot \sin\beta}{\sin 90°}$.			2

17. Schiefe Ebene

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Graph 1 ist richtig. Die Geschwindigkeit der Kugel nimmt zu.			1

18. Flächen

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Die grauen Teilflächen ergänzen sich entweder • zu zwei Viertelkreisen bzw. • zu einem Halbkreis. Die graue Fläche hat damit einen Flächeninhalt von 4,5 π cm^2 (*etwa 14 cm^2*). *In der Angabe des Flächeninhalts kann π stehen bleiben.*		3	

19. Graphen

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	(siehe Tabellen)		4	2

Term	$\sin x$	$\sin 3x$	$-\frac{2}{5}x^2$	$-\frac{5}{2}x^2$	$-(x+1)^2$	$-x^2+2$
Graph		**E**		**A**	**D**	

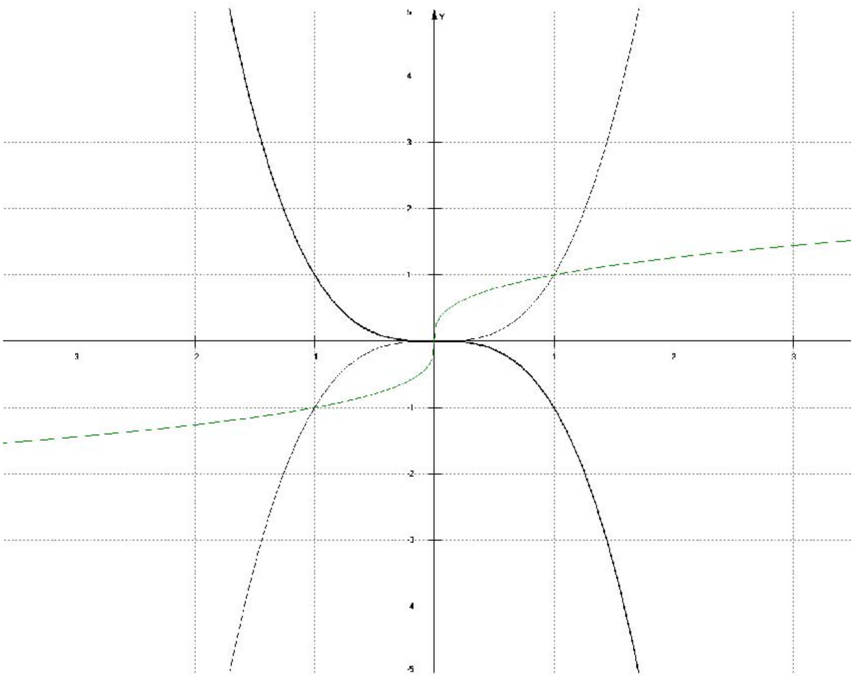
Term	$-\frac{3}{2}\cdot x+1$	$-\frac{2}{3}\cdot x+1$	$\frac{1}{x}+1$	$-\frac{1}{x+2}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^x$	$\left(\frac{3}{2}\right)^x$
Graph		**F**	**C**		**B**	

20. Interpretation von Graphen

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Für die richtige Auswahl (Fallschirmspringen) gibt es 1 Punkt, für die ausführliche Begründung 4P. Mögliche Begründungen: i) Der Fallschirmspringer wird zunächst immer schneller, da der Fallschirm noch geschlossen ist. ii) Aufgrund des Luftwiderstands verlangsamt sich der Geschwindigkeitsanstieg. iii) Die größte Geschwindigkeit liegt im Moment des Öffnens des Fallschirms vor. iv) Durch das Öffnen des Fallschirms verringert sich die Geschwindigkeit in kürzester Zeit drastisch.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	v) Einige Zeit bewegt sich der Fallschirmspringer nun mit konstanter (vergleichsweise langsamer) Geschwindigkeit. vi) Schließlich landet der Fallschirmspringer und die Geschwindigkeit beträgt jetzt Null. *Die Aufgabe kann gleichwertig auch durch Ausschlussargumentation gelöst werden.* *Wenn 4 der genannten 6 Begründungsmöglichkeiten genannt werden, gibt es damit volle Punktzahl. Die anderen Sportarten sind falsch, bei der Begründung werden aber Punkte vergeben, wenn Teile des Graphen richtig interpretiert wurden. Beispiel: Der Stabhochspringer wird zunächst während der Anlaufzeit immer schneller (1P). Höchstens werden jedoch 3P von 5 P vergeben.*			5

21. Graphen

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	*f* ☐ *g* ☒ *h* ☐	1		
b)	 *4P insgesamt; 2P pro Graph, kleinere Fehler oder Ungenauigkeiten beim Zeichnen der Graphen, die aber wesentliche Merkmale der Graphen noch unverfälscht lassen, führen pro Graph zu einem Punkt Abzug.*		4	
c)	*h* ist die Umkehrfunktion zu *f*.		2	
d)	Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$. *Richtiger Ansatz mit einem Fehler in der Rechnung führt zu einem Punkt Abzug.*		2	

3.2 Aufgaben, die mit Einsatz des Taschenrechners bearbeitet werden

1. DIN-Formate

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Die Flächeninhalte stehen im Verhältnis $2^3 : 1 = 8 : 1$.
A6 passt 8-mal in A4 (oder ähnliches).</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>A6</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>A1: $2^1 = 2$ Lagen; A2: $2^2 = 4$ Lagen;…; A6: $2^6 = 64$ Lagen.
(oder ohne Zweierpotenzen Schritt für Schritt berechnet)</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>• Seitenlängen eines DIN-A-Blattes:
$\frac{a_0}{b_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $a_0 \cdot b_0 = 1000$:
Daraus folgt
$a_0 \cdot a_0 \cdot \sqrt{2} = 1\,000\,000$
$a_0 = \sqrt{\frac{1\,000\,000}{\sqrt{2}}} \approx 840{,}896...$
$b_0 \approx 1189{,}207...$
Die Seitenlängen eines DIN-A0-Blattes betragen 841 mm bzw. 1189 mm.
• Seitenlängen eines DIN-A4-Blattes:
Ein DIN-A4-Blatt passt $2^4 = 16$-mal in ein DIN-A0-Blatt.
Dann gilt:
$a_4 = \sqrt{\frac{1\,000\,000}{16 \cdot \sqrt{2}}} \approx 210{,}224...$
$b_0 \approx 297{,}301...$
Die Seitenlängen eines DIN-A0-Blattes betragen 210 mm bzw. 297 mm.</td><td></td><td>6</td><td>2</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Die Flächen der beiden Formate stehen im Verhältnis 2 : 1, die Seitenlängen im Verhältnis $\sqrt{2} : 1$.
Das Kopiergerät muss also auf $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707... \approx 71\,\%$ eingestellt werden.</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 22 BWE</td><td>6</td><td>10</td><td>6</td></tr>
</table>

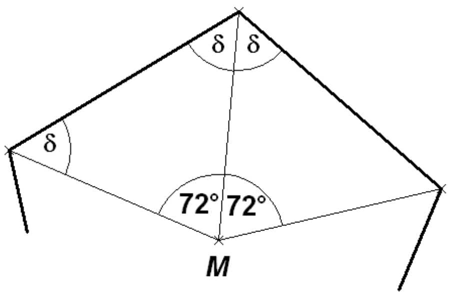
2. Autokauf

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
<table>
<tr><th>jährlich gefahrene Strecke</th><th><u>Benzinmotor</u> jährliche Kraftstoffkosten</th><th><u>Benzinmotor</u> jährliche Gesamtkosten (Kraftstoffkosten + Festkosten)</th><th><u>Dieselmotor</u> jährliche Kraftstoffkosten</th><th><u>Dieselmotor</u> jährliche Gesamtkosten (Kraftstoffkosten + Festkosten)</th></tr>
<tr><td>10 000 km</td><td>809,20 €</td><td>3 100,60 €</td><td>556,50 €</td><td>3 327,30 €</td></tr>
<tr><td>20 000 km</td><td>1 618,40 €</td><td>3 909,80 €</td><td>1 113,00 €</td><td>3 883,80 €</td></tr>
<tr><td>30 000 km</td><td>2 427,60 €</td><td>4 719,00 €</td><td>1 669,50 €</td><td>4 440,30 €</td></tr>
</table>
</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Bei einer jährlichen Fahrleistung von 30 000 km ist ein Diesel um 278,70 € billiger.</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td><u>Benzinauto:</u>
Der Kraftstoffverbrauch bei einem Kilometer ist $\frac{6,8}{100}$ Liter $= 0,068$ Liter .
0,068 Liter Benzin kosten $0,068 \cdot 1,19$ € $= 0,08092$ € , also gilt für die Gesamtkosten f des Neuwagens mit Benzinmotor:
$f(x) = 0,08092 \cdot x + 2291,40$
<u>Dieselauto:</u>
Der Kraftstoffverbrauch bei einem Kilometer ist $\frac{5,3}{100}$ Liter $= 0,053$ Liter .
0,053 Liter Benzin kosten $0,053 \cdot 1,05$ € $= 0,05565$ € , also gilt für die Gesamtkosten g eines Dieselautos:
$g(x) = 0,05565 \cdot x + 2770,80$
<u>Jährliche Kilometerleistung, bei der die Gesamtkosten gleich sind:</u>
$0,08092 \cdot x + 2291,40 = 0,05565 \cdot x + 2770,80$
$0,02527 \cdot x = 479,4$
$x = 18971,1...$
Ab einer jährlichen Kilometerleistung von etwa 19 000 km ist das Dieselfahrzeug günstiger.</td><td></td><td>2
2
2</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Mehrkosten beim Kauf eines Dieselfahrzeugs: 18350 € $- 17275$ € $= 1075$ €
$1075 : 278,7 \approx 3,86$
Herr Timm muss fast 4 Jahre fahren, um die Mehrkosten beim Kauf seines Dieselfahrzeugs auszugleichen.</td><td>1</td><td></td><td>2
1</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Die Mehrkosten beim Kauf des Diesels mindern sich um den Mehrerlös beim Wiederverkauf. Damit rentiert sich der Diesel für Herrn Timm schon wesentlich früher. Mit den gegebenen Zahlen gerechnet, erhält man $(1075 - 700) : 278{,}7 \approx 1{,}35$. Schon nach etwa einem Jahr und vier Monaten fährt also Herr Timm mit dem Diesel im Plus.		1	2
f)	$12\,000 \cdot 1{,}027^3 = 12998{,}480196$. Herr Timm kann nach drei Jahren 12 998,48 € von seinem Sparbuch abheben. Herr Timm muss noch $18.350\text{ €} - 12.998{,}48\text{ €} = 5.351{,}52\text{ €}$ dazulegen.		3	
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

3. Computergrafik

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die jeweils außen übrig bleibenden (4 kongruenten) rechtwinkligen Dreiecke liefern mit Hilfe des Satzes von Pythagoras die nötigen Informationen. $x_1^2 = 1 + 1 = 2$ $x_1 = \sqrt{2}$. Das erste gedrehte Quadrat hat eine Seitenlänge von $\sqrt{2}$ m $\approx 1{,}4142$ m. $x_2^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$ $x_2 = 1$. Das zweite gedrehte Quadrat hat eine Seitenlänge von 1 m. Danach gilt: $\frac{x_1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. oder gleich allgemein: Die neue Seite x ist jeweils die Hypotenuse in einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck mit der Kathetenlänge $\frac{s}{2}$. Also gilt: $x^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{s^2}{2}$ und damit $x = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot s = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot s$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Für den Verkleinerungsfaktor f gilt somit: $f = \frac{\sqrt{2}}{2}$.	5		
b)	Es gilt: $\sin\alpha = \frac{a}{x}$ und $\cos\alpha = \frac{b}{x}$ und damit $a = x \cdot \sin\alpha$ bzw. $b = x \cdot \cos\alpha$. Mit $s = a + b$ ergibt sich: $s = x \cdot \sin\alpha + x \cdot \cos\alpha = x \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha)$. Löst man diese Gleichung nach x auf, erhält man: $x = \frac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha} \cdot s$. Für den Verkleinerungsfaktor f gilt also: $f = \frac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.	2	2	
	Für $\alpha = 5°$ gilt: $f = \frac{1}{\sin 5° + \cos 5°} = 0{,}92306... \approx 92{,}3\,\%$. Wenn man 36-mal dreht, muss man auch 36-mal verkleinern, und zwar jedes Mal mit dem eben berechneten Faktor. Weil es ein Verkleinerungs<u>faktor</u> ist, bedeutet 36-faches Verkleinern Potenzieren des Faktors mit dem Exponenten 36, also: $0{,}92306^{36} \approx 0{,}05601$. Der Flächeninhalt des Ausgangsquadrates wird dann mit dem Faktor $0{,}05601^2 \approx 0{,}00314$ verkleinert. Ausgehend von einem Flächeninhalt von 4 m^2 hat das 36. Quadrat einen Flächeninhalt von ungefähr 0,01255 m^2, also ca. 125,5 cm^2.		4	
c)	Wir betrachten zwei „Tortenstücke“ des regelmäßigen Fünfecks:  Es handelt sich um gleichschenklige Dreiecke, wobei der Winkel am Mittelpunkt der Basis gegenüberliegt und ein Winkelmaß von $\frac{360°}{5} = 72°$ hat. Die beiden gleichgroßen Basiswinkel δ haben jeweils ein Winkelmaß von 54° (Winkelsumme im Dreieck ist 180°). Gleichzeitig erkennt man, dass der Winkel γ zwischen zwei benachbarten Seiten eines regelmäßigen Fünfecks sich jeweils aus zwei dieser Winkel additiv zusammensetzt. Das Winkelmaß von γ beträgt also 108°. *<u>Hinweis:</u> Wenn die Schülerinnen und Schüler den Term $(n-2)\cdot 180°$ für die Winkelsumme eines regelmäßigen n-Ecks kennen und korrekt anwenden, ist die Lösung auch mit voller Punktzahl zu bewerten.*		2	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
d)	Wir betrachten eines der in der Skizze erkennbaren (kongruenten) Dreiecke und wenden den Sinussatz an: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{x}{\sin 108°}$ und ebenso $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{x}{\sin 108°}$. Also: $a = x \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin 108°}$ und ebenso $b = x \cdot \frac{\sin\beta}{\sin 108°}$. Somit gilt: $s = a + b = x \cdot \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin 108°}$. Diese Gleichung lösen wir nach x auf und erhalten das gewünschte Ergebnis: $x = \frac{\sin 108°}{\sin\alpha + \sin\beta} \cdot s$.		1	2
	Für $\alpha = 5°$ gilt: $\beta = 180° - 108° - 5° = 67°$ (Winkelsummensatz im Dreieck)		1	
	Also $f = \frac{\sin 108°}{\sin 5° + \sin 67°} = 0{,}9438...$.		1	
	Ab jetzt haben wir den gleichen mathematischen Hintergrund wie im zweiten Teil von b). Wir müssen also die Ungleichung $\left(f^2\right)^n < 0{,}1$ nach n auflösen: $f^{2n} < 0{,}1$ $2n \cdot \lg f < -1$ $n > \frac{-1}{2 \cdot \lg f}$ $n > 19{,}91...$ Es sind also 20 Drehungen mit entsprechenden Verkleinerungen nötig, damit der Flächeninhalt des letzten Fünfecks erstmals kleiner als 10 % des Flächeninhalts des Ausgangsfünfecks ist. *<u>Bemerkung:</u> Wenn die Lösung „empirisch" durch Ausprobieren verschiedener Werte von n gefunden wird, ist dieser Weg mit voller Punktzahl zu bewerten.*			2
	Insgesamt 22 BWE	7	11	4

4. Fußballfeld

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Kleinstmögliche Fläche: $(100 \cdot 64)\ \text{m}^2 = 6\,400\ \text{m}^2$

Größtmögliche Fläche: $(110 \cdot 75)\ \text{m}^2 = 8\,250\ \text{m}^2$

Die größtmögliche Fläche ist um ca. 29 % größer als die kleinstmögliche Fläche.</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Länge der Strecke $\overline{BC}$:

Der Abstand des Elfmeterpunkts E zur zum Tor parallelen Strafraumgrenze beträgt: $16{,}50\ \text{m} - 11\text{m} = 5{,}50\ \text{m}$.

Der Elfmeterpunkt E, der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ und der Punkt B (oder auch C) bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$\left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2 + 5{,}50^2 = 9{,}15^2$

$\left|BC\right| = 2 \cdot \sqrt{9{,}15^2 - 5{,}50^2}$
$\left|BC\right| = 14{,}6249...$

Die Länge der Teilstrecke $\left|BC\right|$ beträgt ca. 14,62 m.

Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ ist die Hälfte der Differenz aus Strafraumbreite und der berechneten Länge von $\overline{BC}$.

Also gilt für die Länge der Strecke $\overline{AB}$:

$\left|AB\right| = \frac{2 \cdot 16{,}5 + 7{,}32}{2} = 12{,}85$

Die Länge von der Strafraumecke A zum Beginn des Kreissektors B beträgt ungefähr 12,9 m.</td><td>2</td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>M sei der Mittelpunkt der Torlinie.

Für die Strecke $\overline{MD}$ gilt: $\mid MD \mid = 11 + 9{,}15 = 20{,}15$.

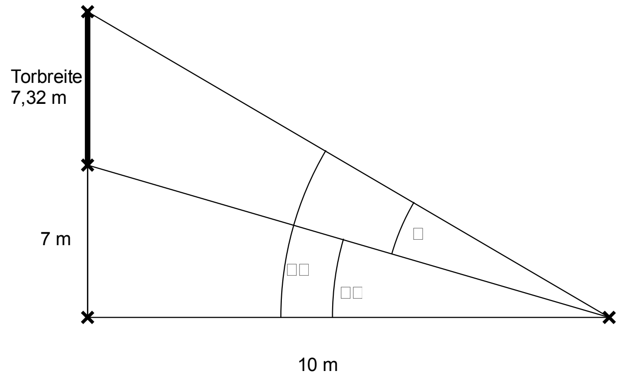
Die Strecke vom Mittelpunkt der Torlinie M zum Punkt D ist 20,15 m lang.

Nach dem Satz von Pythagoras gilt für die Länge der Strecke $\overline{MB}$:

$\mid MB \mid^2 = \left(\frac{14{,}62}{2}\right)^2 + 16{,}5^2$. Also folgt: $\mid MB \mid = \sqrt{\left(\frac{14{,}62}{2}\right)^2 + 16{,}5^2} \approx 18{,}05$.

Die Strecke $\overline{MB}$ ist kürzer als die Strecke $\overline{MD}$. Es ist deshalb günstiger, beim Strafstoß am Punkt B zu stehen.

Hinweis: Hier ist auch eine Argumentation über Kreisbögen möglich. Der Kreisbogen $\overset{\frown}{BC}$ (bezogen auf den Kreis mit dem Mittelpunkt M) ist flacher als der Kreisbogen $\overset{\frown}{BC}$ (bezogen auf den Kreis mit dem Mittelpunkt E).</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>


Der Winkel α ergibt sich als Differenz der Winkel α_1 und α_2. Mit Hilfe der Umkehrung des Tangens erhält man

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1 - \alpha_2 \\ &= \arctan\left(\frac{7,32+7}{10}\right) - \arctan\left(\frac{7}{10}\right) \\ &\approx 20,08°\end{aligned}$$

Der Schusswinkel beträgt etwa 20°.</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 22 BWE</td><td>6</td><td>12</td><td>4</td></tr>
</table>

5. Wassertank

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Oberfläche des zylinderförmigen Teils:
$O = \pi \cdot r^2 + 2\pi r h$
$O \approx 31,4$
Farbmenge: 31,4 : 8 = 3,925
Man braucht ca. 4 l Farbe.</td><td>4</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Überschlag, zum Beispiel:
Der zylindrische Teil des Tanks hat ein Volumen von $V_1 \approx 14$ m³,
der den Tank umschreibende Zylinder hat ein Volumen von $V_2 \approx 18$ m³.
Da sicher $V_1 < V_{\text{Tank}} < V_2$ gilt, muss das Tankvolumen also etwa 15 m³ betragen.</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Berechnung des Volumens
Aus „bis zur halben Höhe“ ergibt sich $r = 0,5$ m (Strahlensatz) und $h = 0,75$ m.
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 0,5^2 \cdot 0,75 \approx 0,196$
Das Wasservolumen beträgt ca. 0,2 m³.</td><td></td><td>5</td><td>2</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Graph B stellt den Sachverhalt richtig dar. Bei der Begründung muss jeweils der zeitliche Verlauf der Füllhöhe in Beziehung zur Form des Körpers gesetzt werden. Graph A: Zunächst linearer Anstieg, dann Verlauf parallel zur Zeitachse. Der zugehörige Körper ist prismenförmig (z.B. Quader, Zylinder usw.), der nach Zufluss einer gewissen Wassermenge überläuft. Graph C: Ausschließlich linearer Verlauf, der bei der Form des aus Kegel und Zylinder zusammengesetzten Körpers nicht zutreffen kann. Graph D: Zunächst langsame Erhöhung des Flüssigkeitsstandes, zugehöriger Körper verjüngt sich von unten nach oben, Widerspruch zur Form des Wassertanks. Graph E: Graph verläuft zunächst in Rechtskurve mit nachlassendem Anstieg (passt zum unteren Teil des Wassertanks) und anschließend waagerechtem Verlauf und damit Widerspruch zur Form des Wassertanks.		2	3
	Insgesamt 22 BWE	6	11	5

Quelle: Bearbeitete Version der Aufgabe aus den KMK-Bildungsstandards Mathematik Mittlerer Abschluss, 2003.

6. Dreieck

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Wegen der Gleichschenkligkeit der Dreiecke *ABC* und *DEC* haben die vier Winkel α, β, γ und δ alle die Größe $\frac{180° - 54°}{2} = 63°$.	2		
b)	Die Dreiecke *DEC* und *ABC* sind ähnlich (sie stimmen nämlich in allen Winkeln überein). Ähnliche Dreiecke haben gleiche Seitenverhältnisse. Da $\frac{\lvert DE \rvert}{\lvert AB \rvert} = \frac{8}{12} = \frac{1}{1{,}5}$, ist auch die Höhe des Dreiecks *ABC* eineinhalb Mal so lang wie die des Dreiecks *DEC*. Da $A_D = \frac{1}{2} \cdot s \cdot h_s$, ist der Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* das $1{,}5^2 = 2{,}25$ fache des Flächeninhalts des Dreiecks *DEC*. *Eine direkte Begründung „Bei ähnlichen Dreiecken ist das Flächenverhältnis gleich dem Quadrat des Verhältnisses entsprechender Seiten“ ist ebenso als vollständig anzuerkennen wie der Weg über die explizite Berechnung der beiden Flächeninhalte.*		4	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
c)	Für diese Flächenberechnung ist es sinnvoll, die Länge der Höhe h_1 auf der Seite $\overline{DE}$ zu bestimmen. Dies geht am einfachsten mit dem Tangens: $\tan\delta = \frac{h_1}{4}$, also $h_1 = 4 \cdot \tan 63°$. Danach beträgt die Länge der Höhe h_1 ca. 7,85 cm. Der gesuchte Flächeninhalt ergibt sich dann mit $A_D = \frac{1}{2} \cdot \lvert DE \rvert \cdot h_1$ zu etwa 32,4 cm².		4	
d)	Das Viereck *ABED* ist ein Trapez, da laut Aufgabenstellung die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{ED}$ parallel sind. Das Trapez ist spiegelsymmetrisch (zur Mittelsenkrechten durch $\overline{AB}$ und $\overline{ED}$), da die Winkel α und β gleich sind. Der Flächeninhalt lässt sich aus den Längen der Parallelenabschnitte und der Höhe gemäß $A_{Tr} = \frac{a+c}{2} \cdot h_{Tr}$ bestimmen. Die Höhe muss dazu noch bestimmt werden. Dazu kann der zu c) entsprechende Ansatz verwendet werden: $h_{Tr} = 2 \cdot \tan 63°$. Danach ist h_{Tr} etwa 3,93 cm lang. Damit ist der Flächeninhalt des Trapezes $A_{Tr} \approx 39{,}25\,cm^2$. Eleganter (und schneller) ist der Weg zum Flächeninhalt des Trapezes, wenn man aus b) ableitet, dass das Trapez den 1,25-fachen Flächeninhalt des Dreiecks *DEC* haben muss, und den in c) ermittelten Wert verwendet: $A_{Tr} = 1{,}25 \cdot A_D \approx 1{,}25 \cdot 31{,}4 = 39{,}25$ (cm²).	2 2	2	
e)	Hier muss entschieden werden, ob $\lvert DB \rvert$ länger oder kürzer ist als $\lvert DC \rvert$ (oder gleich lang). $\lvert DC \rvert$ erhält man z.B. mit dem Ansatz: $\cos\delta = \frac{4}{\lvert DC \rvert}$. Danach ist die Strecke $\overline{DC}$ ca. 8,81 cm lang. *Auch ein Ansatz mit dem Satz des Pythagoras mit der bekannten Höhe h_1 und 4 cm als zweiter Kathete führt zum Ziel.* Für die Bestimmung von $\lvert DB \rvert$ kann man z.B. ein Lot auf $\overline{AB}$ fällen, dessen Länge das bekannte h_{Tr} ist, und dann den Satz des Pythagoras verwenden: $\lvert DB \rvert = \sqrt{10^2 + h_{Tr}^2} \approx 10{,}74$. *Auch ein Ansatz mit dem Kosinussatz mit $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ (halbe Länge von $\overline{DC}$!) und α führt zum Ziel.* Ersichtlich gilt $\lvert DB \rvert > \lvert DC \rvert$, also liegt *C* innerhalb von ***K***.		3	3
	Insgesamt 22 BWE	6	13	3

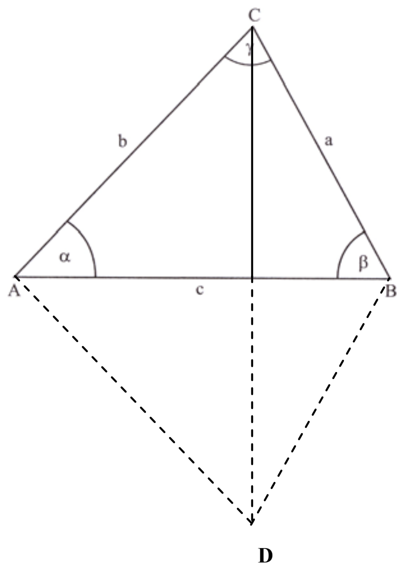
7. Flurkarte

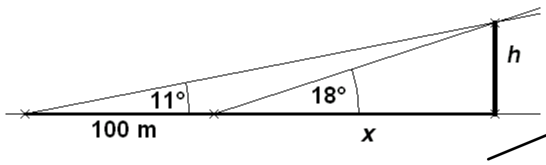
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Die Grenze zwischen den Grundstücken (Länge g) ist parallel zu $\overline{AB}$ (wegen der Gleichheit der angegebenen Winkel). Somit gilt nach dem 2. Strahlensatz $\frac{g}{128} = \frac{75}{75+25} \quad \Leftrightarrow \quad g = \frac{3}{4} \cdot 128 = 96$.		2	
	$\lvert AC\rvert$ lässt sich im Dreieck ABC mit dem Kosinussatz ermitteln: $\lvert AC\rvert^2 = \lvert AB\rvert^2 + \lvert BC\rvert^2 - 2 \cdot \lvert AB\rvert \cdot \lvert BC\rvert \cdot \cos 42°$. Danach ist die Strecke $\overline{AC}$ ca. 85,79 m lang.		2	
b)	Die Außenzäune haben eine Gesamtlänge von $l_a = 128\text{ m} + 100\text{ m} + 85{,}8\text{ m} - 6\text{ m} = 307{,}8\text{ m}$. Dies ergibt Kosten von $307{,}8 \cdot 14{,}25€ = 4386{,}15€$. Kosten für den Innenzaun: $96 \cdot 9{,}85\text{ €} = 945{,}60\text{ €}$. Kosten für die Tore: $626{,}53\text{ €} \cdot 2 = 1253{,}06\text{ €}$. <u>Gesamtkosten:</u> $4386{,}15\text{ €} + 1253{,}06\text{ €} + 945{,}60\text{ €} = 6584{,}81\text{ €}$.	4		
c)	Wenn man für die Berechnung der Dreiecksflächen die Formel $A_D = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$ verwenden will, so benötigt man eine Höhe. Sinnvollerweise werden die Höhen von C auf die beiden Parallelen gewählt: Für die Höhe h_1 des großen Dreiecks (Grundstücke I + II) ergibt sich mit $\sin 42^0 = \frac{h_1}{100}$ und $h_1 = 100 \cdot \sin 42°$ eine Länge von ca. 66,91 m. Die Grundstücke I + II haben damit zusammen eine Fläche von ca. 4 282 m². Für die Höhe des kleinen Dreiecks (Grundstück I) ergibt sich mit $\sin 42^0 = \frac{h_2}{75}$ und $h_2 = 75 \cdot \sin 42°$ eine Länge von ca. 50,18 m. Das Grundstück I hat damit eine Fläche von ca. 2 409 m². (*Ebenso können die Dreiecksflächen direkt mit der Formel* $A_D = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$ *bestimmt werden.)* Die Fläche des Grundstücks II ist die Differenz beider Flächen; Grundstück II hat damit eine Fläche von 1 873,565… m², also ca. 1 874 m². (*Die Fläche des Grundstücks II lässt sich ebenso mit der Trapezflächenformel* $A_{Tr} = \frac{a+c}{2} \cdot h_{Tr}$ *bestimmen; hierzu ist die Höhe des Trapezes erforderlich, die sich dann wieder als Höhendifferenz oder als Höhe eines End-Teildreiecks errechnen lässt.*)	2	4	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
d)	Die Länge der Leitung $\overline{MC}$ lässt sich mit dem Kosinussatz bestimmen: $\lvert MC \rvert = \sqrt{100^2 + 64^2 - 2 \cdot 100 \cdot 64 \cdot \cos 42°} \approx 67{,}7$. Die Leitung ist also knapp 68 m lang.		3	
e)	Der Strahl $\overline{MC}$ teilt $\overline{AB}$ in zwei gleiche Teile. Da die Grenze zwischen den Grundstücken parallel zu $\overline{AB}$ verläuft, teilt der Strahl $\overrightarrow{MC}$ auch diese Strecke in gleicher Weise (2. Strahlensatz).			2
	Sowohl beim Gesamtgrundstück (I + II) als auch beim Grundstück I wird durch die Leitung die verwendete Grundseite halbiert, ohne dass sich die jeweiligen Höhen ändern. Die Flächenformel $A_D = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$ enthält das Produkt von Grundseite und Höhe. Also haben die Teildreiecke jeweils die Hälfte der Fläche. Da das Trapez die Differenz der beiden Dreiecke bildet, muss die Leitung auch dessen Fläche halbieren. (*Die Halbierung der Fläche des Trapezes lässt sich auch mit der Trapezflächenformel begründen, da ja beide parallelen Strecken halbiert werden.*)			3
	Insgesamt 22 BWE	6	11	5

8. Windpark

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Der Durchmesser der Kreisfläche beträgt $2 \cdot 16 \text{ m} = 32 \text{ m}$. Berechnung des Kreisflächeninhalts: $\pi \cdot 16^2 = 804{,}247...$ Der Flächeninhalt des Kreises beträgt ca. 804 m².	1		
	Vergleichsfläche der Turnhalle: $18 \cdot 36 \text{ m}^2 = 648 \text{ m}^2$.	1		
	$\frac{804}{648} \approx 1{,}24$.	1		
	Die vom Windrad überstrichene Kreisfläche ist um ca. 24 % größer als die Fläche der Turnhalle.	1		
b)	Der Rotor dreht sich in 3 Sekunden 2-mal. Die Blattspitzen legen dabei folgenden Weg zurück: $2 \cdot \text{Umfang} = 2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 16 = 201{,}061... [\text{m}]$.	1		
	In 3 Sekunden legen die Blattspitzen ca. 201 m zurück, pro Sekunde also ca. 67 m, pro Stunde also ca.241 km.	1		
	Die Blattspitzen drehen sich also mit einer Spitzengeschwindigkeit von mehr als 240 km/h.		1	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>Berechnung des dritten Winkels:
$\gamma = 180° - 51° - 62° = 67°$.
Für die Länge der Strecke $\overline{BC}$ gilt dann:
$\frac{|BC|}{\sin 51°} = \frac{285}{\sin 67°}$
$|BC| = \frac{285 \cdot \sin 51°}{\sin 67°}$
$|BC| = 240{,}614...$
Die Standorte B und C erfüllen die Bedingung.</td><td>1</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Skizze:


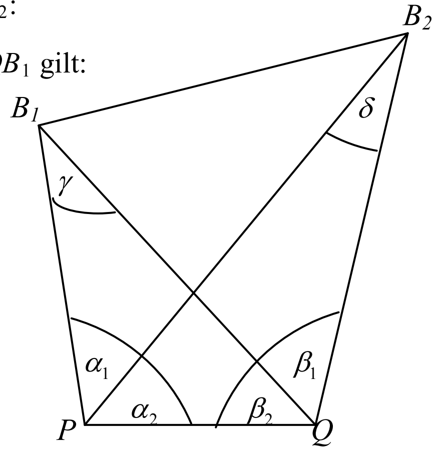
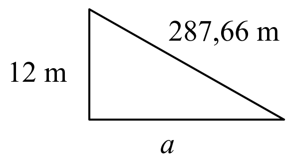
Berechnung der Höhe h_c des Dreiecks ABC:
$\sin 51° = \frac{h_c}{|AC|}$
$h_c = \sin 51° \cdot 273$
$h_c = 212{,}160...$
Die Entfernung zwischen den Standorten C und D entspricht der doppelten Länge der Höhe h_c:
$2 \cdot 212{,}16 = 424{,}32$.
Die Entfernung zwischen den Standorten C und D beträgt ca. 424 m.</td><td>1</td><td>2
1
1</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>1) $\tan 18° = \frac{h}{x}$
$h = x \cdot \tan 18°$
2) $\tan 11° = \frac{h}{x+100}$
$h = (x+100) \cdot \tan 11°$


1 P. für Skizze
Nach Gleichsetzen erhält man
$(x+100) \cdot \tan 11° = x \cdot \tan 18°$
$100 \cdot \tan 11° = x \cdot (\tan 18° - \tan 11°)$
$x = \frac{100 \cdot \tan 11°}{\tan 18° - \tan 11°}$
$x = 148{,}905...$</td><td></td><td>1</td><td>2</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Für die Höhe h folgt $$h = x \cdot \tan 18° = 48{,}38...$$ Der angepeilte Stahlturm ist ungefähr 48 m hoch.			2
	Insgesamt 22 BWE	8	10	4

9. Paranussbaum

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	$d \cdot \pi = 16$ $d = 5{,}092...$ Der Durchmesser beträgt etwa 5,1 m.	2		
b)	Einsetzen in die Volumenformel für den Zylinder ergibt: $V = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot 43$ $V = 875{,}988...$ Wird mit $r = 2{,}55$ m gerechnet, so erhält man $V \approx 878{,}413$. $0{,}8\ \text{g}/\text{cm}^3 = 0{,}8\ \text{t}/\text{m}^3$ Daraus folgt für die Masse: $m_{\text{Stamm}} = V_{\text{Stamm}} \cdot 0{,}8$ $m_{\text{Stamm}} = 700{,}791...$ Wird mit V = 878,413 gerechnet, erhält man $m = 702{,}7304$. Der Stamm wiegt gut 700 t.	4		

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	Ein möglicher Weg geht über die zweimalige Anwendungen des Sinussatzes mit anschließender Anwendung des Kosinussatzes: 1) Berechnung von $\lvert PB_1 \rvert$ im Dreieck PQB_1: 2) Berechnung von $\lvert PB_2 \rvert$ im Dreieck PQB_2: 3) Berechnung von $\lvert B_1B_2 \rvert$ im Dreieck PB_1B_2:  Nach dem Winkelsummensatz im Dreieck PQB_1 gilt: $\gamma = 180° - 69° - 36° - 49° = 26°$. Nun lässt sich die Länge der Strecke $\overline{PB_1}$ über den Sinussatz ermitteln: $\frac{\lvert PB_1 \rvert}{\sin 49°} = \frac{100}{\sin 26°}$ $\lvert PB_1 \rvert = \frac{100 \cdot \sin 49°}{\sin 26°}$ $\lvert PB_1 \rvert = 172{,}162...$		4	
	Nach dem Winkelsummensatz im Dreieck PQB_2 gilt: $\delta = 180° - 36° - 80° - 49° = 15°$ Berechnung der Strecke $\overline{PB_2}$ über den Sinussatz: $\frac{\lvert PB_2 \rvert}{\sin(80° + 49°)} = \frac{100}{\sin 15°}$ $\lvert PB_2 \rvert = \frac{100 \cdot \sin 129°}{\sin 15°}$. $\lvert PB_1 \rvert = 300{,}266...$		4	
	Berechnung der Länge von $\overline{B_1B_2}$ über den Kosinussatz: $\lvert B_1B_2 \rvert^2 = \lvert PB_1 \rvert^2 + \lvert PB_2 \rvert^2 - 2 \cdot \lvert PB_1 \rvert \cdot \lvert PB_2 \rvert \cdot \cos \alpha_1$ $\lvert B_1B_2 \rvert = 287{,}660...$ Die Punkte B_1 und B_2 sind ca. 288 m voneinander entfernt.		3	
d)	Zunächst muss der Abstand a der Baumstämme bestimmt werden. Die Differenz der Höhen beträgt: 61 m – 49 m = 12 m Damit ergibt sich mit Pythagoras:  $a^2 = 287{,}66^2 - 12^2$ $a = 287{,}409...$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Die Differenz zwischen beiden Abständen beträgt 287,66 m – 287,41 m = 0,25 m. Da die Differenz zwischen dem durch das „Vorwärtseinschneiden“ ermittelten Wert und dem tatsächlichen Wert nur ca. 25 cm (also eine Abweichung von weniger als 0,1 %) beträgt, ist die Methode in diesem Fall gut geeignet, um den Abstand der beiden Bäume zu bestimmen.			5
	Insgesamt 22 BWE	6	11	5

10. Designerlampe

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Für das Volumen des Kegels gilt: $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_{\text{Kegel}}^2 \cdot h$. Da die Höhe h des Kegels gleich dem halben Kugelradius R ist, gilt: $h = \frac{R}{2} = 0{,}55$.	2		
	Der Kegelradius r lässt sich über den Satz des Pythagoras berechnen: $R^2 = r^2 + h^2$ $r^2 = 1{,}1^2 - 0{,}55^2$ $r^2 = 0{,}9075$ $r = 0{,}952...$ Für das Kegelvolumen folgt: $V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_{\text{Kegel}}^2 \cdot h$ $= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 0{,}9075 \cdot 0{,}55$ $= 0{,}5226...$ Der Kegel hat ein Volumen von ca. 0,523 m³.	3		

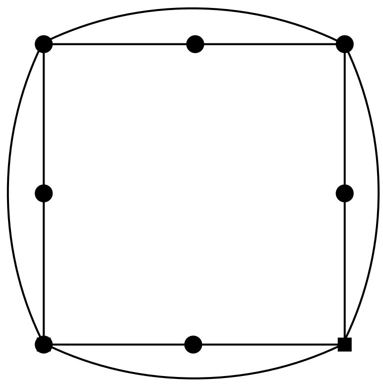
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
b)	Das gesuchte Volumen V_{Gas} ergibt sich aus $V_{\text{Gas}} = V_{\text{Kugel}} - V_{\text{Kegel}} - V_{\text{Kugelabschnitt}}$. Das Volumen der Kugel ist $V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \approx 5{,}575\ \text{m}^3$. Zur Berechnung des Volumens des Kugelabschnitts benötigt man die Höhe x des Abschnitts: $x = R - h = 0{,}55$ m. Für das Volumen folgt mit der angegebenen Formel $V_{\text{Kugelabschnitt}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot x^2 \cdot (3{,}3 - x) = 0{,}8711...$. Damit ergibt sich $V_{\text{Gas}} = 5{,}575\ \text{m}^3 - 0{,}523\ \text{m}^3 - 0{,}871\ \text{m}^3 = 4{,}181\ \text{m}^3$. Das sind ca. 4 200 Liter.	3 1 1	2 2	
c)	Für die Kegelhöhe h gilt: $h \in [0\,;R]$. Die Nullstellen des Graphen von V_h liegen bei $h_1 = 0$ und $h_2 = R$. Im Falle $h_1 = 0$ (Kegel entartet zu einem Kreis) hat die Lampe die Form einer Halbkugel, im Falle $h_2 = R$ (Kegel entartet zu einer Strecke der Länge R) hat sie die Form einer Kugel.		2	2
d)	Das Volumen des Kegels hängt neben seiner Höhe h auch vom Radius r seiner Grundfläche ab. Dieser lässt sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras bestimmen zu $h^2 + r^2 = R^2 \Leftrightarrow r^2 = R^2 - h^2$ oder $h^2 + r^2 = 1{,}1^2 \Leftrightarrow r^2 = 1{,}21 - h^2$. Somit folgt für das Volumen des Kegels in Abhängigkeit von seiner Höhe h: $V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (R^2 - h^2) \cdot h$ oder $V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (1{,}21 - h^2) \cdot h$.		2	2
	Insgesamt 22 BWE	7	11	4

11. 2-Euro-Münze

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Eine Münze ist durch einen Zylinder modellierbar. Mit $V_{Zyl} = \pi \cdot r^2 \cdot h$, dem halben Durchmesser als Radius und der gegebenen Höhe ergibt sich $V_{Münze} \approx 1145{,}69\,\text{mm}^3 \approx 1{,}15\ \text{cm}^3$. Ebenso bestimmt sich das Volumen des Mittelteils zu ca. 572,34 mm³. Also hat das Mittelteil einen Volumenanteil von $\frac{572{,}34}{1145{,}69} \approx 49{,}96\ \%$. Der Volumenanteil des Mittelteils beträgt also ziemlich genau 50 %.	2 2	 1	
b)	Der Umfang der Münze bestimmt sich mit $U = \pi \cdot d$ zu 80,90 mm. Wenn auf dieser Strecke 250 Kerben liegen, so haben diese einen Abstand von etwa 0,32 mm (oder, anders formuliert, jeder Millimeter Rand hat drei Kerben).	1	1	
c)	Mit $\rho = \frac{m}{V}$ ergibt sich die durchschnittliche Dichte zu ca. 0,00742 g/mm³ oder 7,42 g/cm³. Da der Mittelteil praktisch das halbe Volumen aufweist, die Dichte seiner Legierung aber geringer ist, muss die Masse des Mittelteils *unter* der Hälfte der Gesamtmasse liegen.		5	
d)	Für jede neu hineingelegte Münze gilt: Das verdrängte Wasser hat das Volumen der Münze. Es bildet einen Quader mit derselben Grundfläche wie der Würfel. Die Höhe dieses Quaders ist die Höhenzunahme h des Wasserspiegels: $h = \frac{\text{Münzvolumen}}{\text{Quadergrundfläche}} \approx \frac{1145{,}69}{900} \approx 1{,}27$. Der Wasserspiegel steigt also linear, und zwar mit jeder neuen Münze um ca. 1,27 mm. Das Gefäß läuft über, wenn der Wasserspiegel um mehr als 15 mm steigt. Bei 11 Münzen steigt der Wasserspiegel um ca. 14 mm. Bei 12 Münzen läuft das Gefäß über. Also: Man kann 11 Münzen hineinlegen, ohne dass das Wasser überläuft.		5	
e)	Mit jeder neu aufgelegten Münze steigt der Wasserspiegel um ca. 1,27 mm, der Münzstapel um 2,2 mm. Da die Münze um $(2{,}2\ \text{mm} - 1{,}27\ \text{mm} =)$ 0,93 mm „dicker“ ist als der Anstieg des Wasserspiegels pro Münze, reicht der Münzturm mit jeder neuen Münze um eben diese 0,93 mm näher an den Wasserspiegel heran. Bei einer anfänglichen Wasserspiegelhöhe von 10 mm wird diese Differenz bei der 11. Münze aufgebraucht sein: 11 Münzen haben eine Höhe von 24,2 mm, 11 (vollständig untergetauchte) Münzen erhöhen den Wasserspiegel von 10 mm auf 24,0 mm. (Streng genommen taucht auch schon die 11. Münze nicht vollständig unter.) Alle weiteren Münzen landen auf dem Münzenturm, ohne überhaupt ins Wasser zu tauchen: Sie verdrängen kein weiteres Wasser, der Wasserspiegel wird nicht mehr weiter steigen, das Wasser läuft nicht über.			5
	Insgesamt 22 Punkte	5	12	5

12. Bogen-Dreiecke

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Der Umfang u besteht aus drei gleichen Bögen mit $r = a$ und dem Bogenwinkel 60°. Somit gilt $u = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2\pi = \pi \cdot a$. Mit dem gegebenen a ergibt sich für u eine Länge von ca. 31,4 cm.	3	1	
b)	Hier bietet es sich an, die Flächen der drei durch die Bögen geschaffenen Sektoren zu addieren und davon zweimal den Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks zu subtrahieren. (Ebenso kann man mit einem Sektor beginnen und die Fläche der zwei fehlenden „Möndchen“ als Differenz von Sektor und gleichseitigem Dreieck bestimmen. Der Rechenaufwand ist auch hier derselbe) Um den Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks zu bestimmen, wird dessen Höhe h benötigt. Nach dem Satz des Pythagoras gilt: $a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$, also $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$. Somit ist der Flächeninhalt $A_D = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$. Somit gilt für den gesuchten Flächeninhalt: $A_{BD} = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot a^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 = \frac{a^2}{2} \cdot \left(\pi - \sqrt{3}\right)$. Mit dem gegebenen a ergibt sich der angegebene Wert von 70,477 cm².	1	4	2
c)	Die Hilfestellung liefert: $r = \frac{2}{3} h$. Mit $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ ergibt sich $r = \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Somit gilt für den Flächeninhalt des Umkreises: $A_U = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \frac{a^2}{3}$. Mit dem gegebenen a ergibt sich für A_U ein Flächeninhalt von ca. 104,72 cm^2. Nun gilt mit den gegebenen bzw. errechneten Werten $\frac{A_U}{A_{BD}} = 1{,}4858...$. Der Umkreis hat also einen um etwa 49 % größeren Flächeninhalt. (*Hinweis: Dieser Wert lässt sich auch durch eine allgemeine Betrachtung erhalten:* $\frac{A_U}{A_{BD}} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{\pi - \sqrt{3}}\right) \approx 1{,}486$)	2	4	1

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Wichtig ist zunächst die Erkenntnis, dass bei einem Quadrat nicht „ein Eckpunkt den beiden anderen (im gleichen Abstand) gegenüberliegt“. Möchte man also erhalten, dass ein durchgehender Bogen durch zwei Eckpunkte geht, muss sein Mittelpunkt *auf der Mittelsenkrechten der gegenüberliegenden Seite liegen.* Die Forderung nach „gleichen Bögen“ bedingt, dass die Lage der gewählten Mittelpunkte bezüglich der Quadratseiten gleich ist. Natürlich gibt es viele solcher „Bogen-Vierecke“ – auch der Umkreis ist möglich, denn der Mittelpunkt des Umkreises eines Quadrats liegt auf allen vier Mittelsenkrechten im gleichen Abstand von den Quadratseiten. Besonders nahe liegt die Konstruktion, die als Mittelpunkte der Bögen die Mittelpunkte der Quadratseiten verwendet: 		1	3
		6	10	6

13. Pfadfinderzelt

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Der 7 m lange Teil einer Zeltstange, die Strecke vom Fußpunkt dieser Stange zum Zeltmittelpunkt und die Zelthöhe bilden ein rechtwinkliges Dreieck, auf das man den Satz des Pythagoras anwenden kann: $h = \sqrt{49 - s^2}$. Mit $s = 5$ ergibt sich: $h = 2 \cdot \sqrt{6} \approx 4{,}9$. Die Höhe des Zeltes beträgt ca. 4,9 m.	4		
b)	Der Zeltboden besteht aus 6 gleichseitigen Dreiecken jeweils mit der Seitenlänge $s = 5$ m. Für die Höhe dieser Dreiecke gilt nach dem Satz von Pythagoras:			

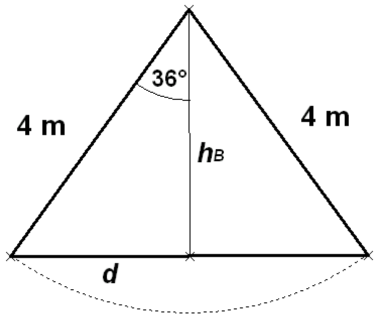
<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>$h_\Delta^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = s^2$
$h_\Delta^2 = \sqrt{s^2 - \frac{s^2}{4}}$
$h_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s\,.$
Insgesamt ergibt sich für die Bodenfläche folgender Flächeninhalt:
$A(s) = 6 \cdot \frac{s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot s^2\,.$
Mit $s = 5$ ergibt sich:
$A = \frac{3\sqrt{3} \cdot 25}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2} = 64{,}951\ldots\,.$
Der Flächeninhalt des Zeltbodens beträgt ca. 65 m^2.</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Die Zeltplanen zur Bespannung setzen sich zusammen aus 6 gleichschenkligen Dreiecken mit jeweils der Basislänge $s = 5$ m und den Schenkeln der Länge 7 m.
Wieder mit dem Pythagoras erhält man für jedes dieser Dreiecke als Basishöhe
$h_B = \sqrt{49 - 6{,}25} = \sqrt{42{,}75}\,.$
Für die Gesamtfläche der Bespannung ergibt sich
$A_B = 6 \cdot \frac{5 \cdot \sqrt{42{,}75}}{2} = 15 \cdot \sqrt{42{,}75} = 98{,}075\ldots\,.$
Es werden ca. 98 m^2 Zelttuch benötigt.</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Das Zelt ist – mathematisch gesehen – eine Pyramide (mit sechseckiger Grundfläche). Für das Volumen einer Pyramide gilt die Formel:
$V = \frac{\text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}}{3}\,.$
Für den umbauten Raum W erhält man mit den Ergebnissen aus a) und b):
$W = \frac{\left(\frac{75\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(2 \cdot \sqrt{6}\right)}{3} = 75 \cdot \sqrt{2} = 106{,}066\ldots\,.$
Das Zelt hat ein Volumen von ca. 106 m^3.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Das Volumen des Zeltes wird Null, wenn entweder $s = 0$ (die Zeltstangen stehen lotrecht in der Mitte – das ist praktisch unmöglich) oder $h = 0$, d.h. $s = 7$ (die Zeltstangen liegen flach auf dem Boden und kreuzen sich im Mittelpunkt – praktisch gesehen ist auch das kein Zelt mehr).
Die Nullstellen der Funktion W sind also bei 0 und 7.</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Zur Bestimmung des Funktionsterms von W wurde in a), b) und d) schon Vorarbeit geleistet. Wenn aber dort nur mit dem konkreten Wert s = 5 gerechnet wurde, müssen hier die allgemeinen Terme noch dargestellt werden.
$W(s) = \frac{A(s)\cdot h(s)}{3} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot s^2 \cdot \sqrt{49-s^2}}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3\cdot(49-s^2)}\cdot s^2 .$
Man kann die Nullstellen auch an diesem Term ablesen.
Aus der Zeichnung kann man nun schätzen, dass der Maximalwert von W an einer Stelle s_m zwischen $s = 5$ und $s = 6$ angenommen wird.
Deshalb berechnen wir (mit dem TR) die Werte $W(5)$, $W(6)$ und einen Zwischenwert, z.B. $W(5{,}5)$, und erhalten:
$W(5) \approx 106$ (vgl. d)
$W(5{,}5) \approx 113$ und
$W(6) \approx 112$.
Da der Wert in der Mitte größer als beide Randwerte ist, muss die Maximalstelle in dem betrachteten Intervall [5 ; 6] liegen.
Beim Aufbau des Zeltes erhält man also das größte Volumen (von mehr als 113 m³), wenn man für s den (hier nicht genau berechneten) Wert s_m zwischen 5 m und 6 m wählt.
Andere sinnvolle Vorgehensweisen sind ebenso zulässig.</td><td></td><td></td><td>2

1</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 22 BWE</td><td>6</td><td>11</td><td>5</td></tr>
</table>

14. Zeltbau

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Der 6 m lange Teil einer Zeltstange, die 4 m lange Strecke s vom Fußpunkt dieser Stange zum Zeltmittelpunkt und die Zelthöhe bilden ein rechtwinkliges Dreieck, auf das man den Satz des Pythagoras anwenden kann:
$h(s) = \sqrt{36-16} = 4{,}472... \approx 4{,}47$.
Die Höhe des Zeltes beträgt 4,47 m.</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Der Zeltboden besteht aus 5 gleichschenkligen Dreiecken jeweils mit dem Winkel 72° $\left(=\frac{360°}{5}\right)$ an der Spitze.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Für die halbe Basislänge d gilt: $\sin 36° = \frac{d}{4}$ und damit $d = 4 \cdot \sin 36°$. Für die Höhe h_B gilt: $\cos 36° = \frac{h_B}{4}$ und damit $h_B = 4 \cdot \cos 36°$.  Für die Fläche eines solchen Dreiecks gilt also: $A_\triangle = 2 \cdot \frac{d \cdot h}{2} = d \cdot h = 4 \cdot \sin 36° \cdot 4 \cdot \cos 36°$. Für die Bodenfläche gilt damit: $A = 5 \cdot 4 \cdot \sin 36° \cdot 4 \cdot \cos 36°$ $A = 38{,}042...$ Insgesamt hat die Bodenfläche also einen Flächeninhalt von etwa 38 m^2. Ersetzt man in obigen Rechnungen die 4 m durch die Variable *s,* erhält man die Formel für die Bodenfläche: $A(s) = 5 \cdot \sin 36° \cdot \cos 36° \cdot s^2$.	2	6	
c)	Das Zelt ist – mathematisch gesehen – eine Pyramide (mit fünfeckiger Grundfläche). Für das Volumen einer Pyramide gilt die Formel: $Volumen = \frac{Grundfläche \cdot Höhe}{3}$. Mit den Ergebnissen aus a) und b) erhält man: $W = \frac{5 \cdot \sin 36° \cdot \cos 36° \cdot 16 \cdot \sqrt{36-16}}{3} = 56{,}710... \approx 56{,}71$. Das Zelt hat ein Volumen von ca. 56,71 m^3.		4	
d)	Die Stehhöhenfläche am Boden ist kongruent zu der Fläche, die entstehen würde, wenn man in 1,80 m Höhe ein „Dach“ einziehen würde. Die Stehhöhenfläche ist also auch ein regelmäßiges Fünfeck mit einem „Radius“ (Eckenabstand zum Mittelpunkt) s', den man mit Hilfe eines Strahlensatzes berechnen kann (vgl. Skizze neben der Aufgabenstellung): $\frac{x}{4} = \frac{1{,}8}{h}$ $x = \frac{7{,}2}{h}$. Außerdem gilt: $s' = 4 - x = 4 - \frac{7{,}2}{h}$. h kennen wir aus a) : $h = \sqrt{36-16} = \sqrt{20}$ und damit			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	$s' = 4 - \frac{7{,}2 \cdot \sqrt{20}}{20} = 4 - 0{,}36 \cdot \sqrt{20} = 2{,}39\ldots$. Nach der allgemeinen Formel aus b) können wir nun den zur Strecke s' gehörende Flächeninhalt des Fünfecks ausrechnen: $A(s') = 5 \cdot \sin 36° \cdot \cos 36° \cdot s'^2 = 13{,}5816\ldots \approx 13{,}58$. Das Zelt hat ca. 13,58 m² Bodenfläche mit Stehhöhe.			5
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

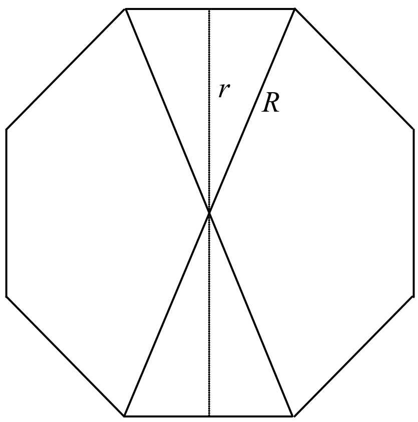
15. Vom Stern zur Pyramide

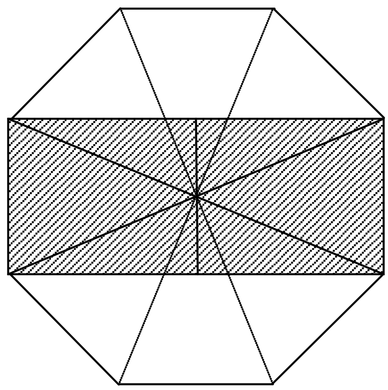
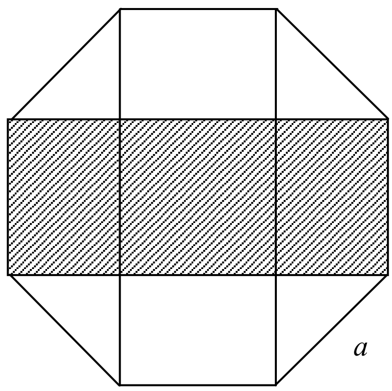
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Der Stern hat 4 Symmetrieachsen (jeweils zwei durch gegenüberliegende Spitzenpunkte und zwei durch gegenüberliegende Basispunkte).	2		
b)	Es gibt mehrere Konstruktionsmöglichkeiten. Zum Beispiel kann eine Konstruktionsbeschreibung aus folgenden Abschnitten aufgebaut sein: • Konstruktion des Quadrats *ACEG* • Konstruktion der 4 gleichseitigen Dreiecke auf den Quadratseiten.		4	
c)	Das Quadrat *ACEG* ist Grundfläche der Pyramide. Weiterhin sind die zur Bestimmung des Volumen erforderlichen Teile zu benennen: • Quadratseite a • Dreieckshöhe h_D • Pyramidenhöhe h_P	3		
	Erstellen des Hilfsdreiecks aus $\frac{a}{2}$, h_D und h_P. $h_D = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$, $h_P = \sqrt{\left(\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a$ (≈ 3,54 cm).		3	
	$V_P = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_P = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2}} \cdot a^3$ (≈ 29,5 cm³).		3	

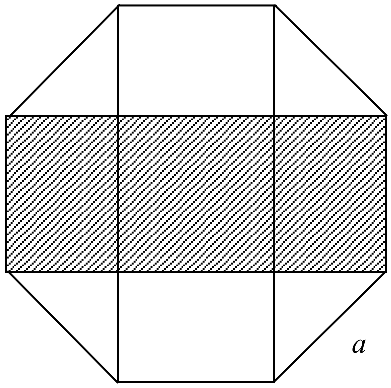
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Angabe <u>einer</u> der beiden Bedingungen: • Die Länge der Basishöhe h_D des gleichschenkligen Dreiecks muss größer sein als die halbe Seitenlänge des Quadrats: $h_D > \frac{a}{2}$. • Die Länge eines Dreiecksschenkels ist größer als die Hälfte der Diagonalenlänge des Quadrats.			3
e)	Das Volumen der Pyramide würde sich bei gleich bleibender Grundfläche dann verdoppeln, wenn sich die Pyramidenhöhe h_P verdoppeln würde. Da sich (siehe c)) $h_P = \sqrt{{h_D}^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ und da $h_D = \sqrt{4a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}a$ weit mehr als verdoppelt hat, ist das neue h_P deutlich mehr als das Doppelte der ursprünglichen Höhe: Das Volumen ist also größer als das doppelte Volumen. (*Wenn man die Angaben durchrechnet, so erhält man für die größere Pyramide:* $h_D = \sqrt{4a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}a$; $h_P = \sqrt{\frac{15}{4}a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}a\ (\approx 9{,}35cm)$ *ein Volumen von* $V_P = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_P \approx 78{,}0\ cm^3$.)		2	2
	Insgesamt 22 BWE	5	12	5

Quelle: Bearbeitete Version der Aufgabe aus den KMK-Bildungsstandards Mathematik Mittlerer Abschluss, 2003.

16. Achteck

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Aus dem Satz des Pythagoras folgt: $a^2 = h^2 + h^2 = 2 \cdot h^2$ $a = \sqrt{2} \cdot h$.	2		
b)	 Die beiden Radien r des Inkreises und R des Umkreises lassen sich mit den Winkelfunktionen berechnen: Das Achteck wird in acht gleichschenklige Dreiecke zerlegt, deren Zentrumswinkel 45° beträgt. Der Radius r teilt ein solches Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke, bei denen R die Hypotenuse darstellt, r die Ankathete zum Winkel 22,5° und $\frac{a}{2}$ dessen Gegenkathete. Somit gilt			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	$\tan 22{,}5° = \frac{\frac{a}{2}}{r} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{a}{2 \cdot \tan 22{,}5°} \approx 1{,}207\,a$ $\sin 22{,}5° = \frac{\frac{a}{2}}{R} \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{a}{2 \cdot \sin 22{,}5°} \approx 1{,}307\,a$ Für das Verhältnis der beiden Flächeninhalte gilt: $\frac{A_U}{A_I} = \frac{\pi \cdot R^2}{\pi \cdot r^2} = \left(\frac{\tan 22{,}5°}{\sin 22{,}5°}\right)^2 \approx 1{,}1716.$	3	3 3	
c)	Die geforderte Begründung kann auf viele Weisen geschehen:  <u>Geschickte Zerlegung in Diagonalendreiecke:</u> Die Diagonalen zerlegen das Achteck in acht kongruente und damit flächengleiche Dreiecke. Jedes von ihnen hat ein Achtel der Gesamtfläche. Im schraffierten Gebiet bleiben zwei Dreiecke übrig, die sich längs der senkrecht eingezeichneten Linie durch das Zentrum in je zwei Teildreiecke zerlegen lassen, die sich je wieder zu einem der acht Diagonalendreiecke zusammenlegen lassen. Also ist der Flächeninhalt des schraffierten Rechtecks gleich dem von vier der acht flächengleichen Diagonalendreiecke und damit gleich der Hälfte der Fläche des Achtecks. <u>Geschickte Zerlegung in Dreiecke und Quadrate:</u>  Bezeichnen wir die Achtecksseite mit *a*. Die beiden zusätzlichen Senkrechten zerlegen das Achteck in das zentrale Quadrat, dessen Kantenlänge a ist und das vollständig im schraffierten Bereich liegt, vier kongruente Rechtecke, von denen je zwei schraffiert und zwei nicht schraffiert sind, und vier kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, deren Hypotenuse jeweils a ist und die alle nicht schraffiert sind. Die vier Dreiecke aber lassen sich zu einem Quadrat mit der Kantenlänge *a* zusammenlegen. Also haben die vier Dreiecke zusammen denselben Flächeninhalt wie das zentrale Quadrat. Damit ist die Aussage bewiesen.		7	4

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<u>Zerlegung und Berechnung der Einzelflächen:</u>  Anknüpfend an die Betrachtungen von eben kann natürlich auch gerechnet werden: Das zentrale Quadrat hat den Flächeninhalt a^2. Da *a* die Diagonale der rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecke ist, beträgt deren Kantenlänge $\frac{a}{\sqrt{2}}$ (Anwendung des Satzes des Pythagoras oder Formelwissen). Der Flächeninhalt eines dieser Dreiecke ist damit $F=\frac{1}{2}(\frac{a}{\sqrt{2}})^2=\frac{1}{4}a^2$. Die Rechtecke haben die Seitenlängen a und $\frac{a}{\sqrt{2}}$ und damit den Inhalt $F=a\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$. Das gesamte Achteck hat damit den Flächeninhalt $F_8=a^2+4\cdot\frac{1}{4}a^2+4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a^2=(2+2\sqrt{2})a^2$. Die schraffierte Fläche hat einen Inhalt von $F_s=a^2+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a^2=(1+\sqrt{2})\cdot a^2$, und dies ist ersichtlich die Hälfte des Inhalts des Achtecks.			
	Insgesamt 22 BWE	5	13	4

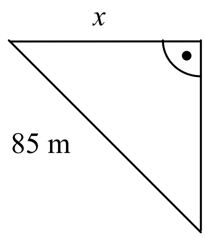
17. Kaffeefilter

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Das Volumen des Kaffeefilters ergibt sich aus der Summe der Volumen des dreiseitigen Prismas und der beiden halben Kreiskegel: Das Volumen des dreiseitigen Prismas lässt sich mit den gegebenen Größen berechnen: $V_{\text{Pr}}=\frac{1}{2}\cdot\lvert AD\rvert\cdot h\cdot\lvert AB\rvert$. Es ergibt sich $V_{\text{Pr}}=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 9\cdot 6=324$. Die beiden Halbkegel werden zu einem vollständigen Kreiskegel zusammengesetzt. Dessen Höhe ist wieder *h*, der Radius $r=\frac{1}{2}\cdot\lvert BC\rvert=6$. Somit ergibt sich mit $V_K=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h$, d.h. $V_K=\frac{1}{3}\pi\cdot 6^2\cdot 9\approx 339{,}292$. Der ganze Filter hat also ein Volumen von etwa 663 cm^3.	4	2	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>b)</td><td>Für die Berechnung der Masse des Filters wird dessen Oberfläche benötigt. Die Oberfläche lässt sich zerlegen in zwei Rechtecke und den Mantel des zusammengesetzten Kreiskegels. Hierbei sind die Mantelhöhe des Kreiskegels und die lange Seite $|AF|$ der Rechtecke gleich.
Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich
$|AF| = \sqrt{\left(\frac{|BC|}{2}\right)^2 + h^2}$
$= \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 + 9^2}$
$= \sqrt{117} \approx 10{,}82$.
Die Formel für die Mantelfläche des Kreiskegels – angewendet auf diese Situation – ergibt
$A_K = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AF|$.
Damit erhält man die gesamte Oberfläche zu
$A = 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{117} + \pi \cdot \sqrt{117} \approx 333{,}688...$.
Für einen Filter werden ca. 334 cm^2 Papier benötigt.
Da ein Quadratmeter des verwendeten Filterpapiers 50 g wiegt, hat der Filter eine Masse von etwa 1,67 g.</td><td>2</td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Der Kreisbogen $\overset{\frown}{B'H'}$ hat die Länge eines Viertels des Umfangs der Grundfläche des Kreiskegels. Dieser Bogen hat den Radius l_3.
Zwischen Winkel, Radius und Bogenlänge besteht die Beziehung
$\alpha = \frac{360°}{2\pi} \cdot \frac{|B'H'|}{l_3}$.
Es ergibt sich $\alpha \approx 49{,}92°$, also ist der Winkel praktisch 50° groß.</td><td></td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Die Breite der Schachtel ist die im Aufgabenteil b) berechnete Länge $|AF|$.
Die Länge ergibt sich aus $l = 6 + 2 \cdot \sqrt{117} \cdot \sin\alpha \approx 22{,}6$.
Die Schachtel hat also die Mindestmaße von 10,9 cm x 22,6 cm.</td><td></td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>6</td><td>12</td><td>4</td></tr>
</table>

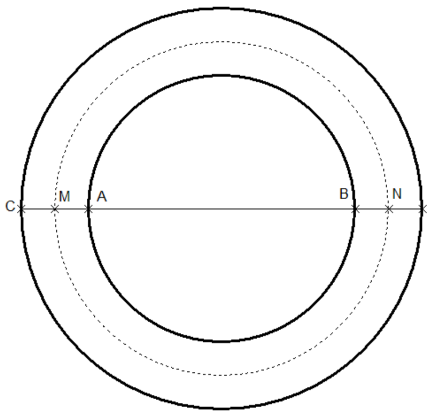
18. Stadion

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Die 400-m-Laufbahn besteht aus zwei Geraden mit je 93 m Länge und zwei Halbkreisen mit einem Gesamtumfang von $(400\text{ m} - 2 \cdot 93\text{ m}) = 214\text{ m}$.
Ein Halbkreis hat damit eine Länge von ca. 107 m.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
b)	Die Breite des Rasens entspricht dem Kreisdurchmesser der Kurventeile der Laufbahn. Bei einer Länge des Rasenfeldes von 90 m haben die Kurventeile – die einen vollen Kreis bilden – eine Gesamtlänge von 220 m. Somit ist der Durchmesser dieses Kreises $\frac{220}{\pi}\,\text{m} \approx 70{,}0\,\text{m}$. Ein Rasen mit einer Breite von 75 m kann also nicht in der Kurve untergebracht werden. (*Hinweis: Es kann natürlich auch anders herum argumentiert werden – zwei an den Rasen angesetzte Halbkreise hätten zusammen eine Länge von* $\pi \cdot 75\,m \approx 235{,}6\,m$*, was zusammen mit den Geraden mehr als 400 m ergibt.)*	3	1	
c)	Parallel zur Startbahn ist das Rasenende – vom Abwurfkreis aus gemessen – in einer Entfernung von 97 m. Keine Gefahr! Wesentlich ist nur die Betrachtung, wenn der Hammer entlang der linken Begrenzungskante quer über den Rasen fliegt: Es entsteht ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenusenlänge 85 m und einem Winkel von 45°, bei dem nach der Länge der Gegenkathete gefragt ist.  Nach dem Satz des Pythagoras gilt: $2x^2 = 85^2$ $x = \sqrt{\frac{85^2}{2}} = 60{,}10...$ Die Gegenkathete hat eine Länge von etwa 60,10 m. Da der Abwurfkreis noch 4 m in die Richtung Gegengerade verschoben ist, landet der Hammer knapp 4 m von der Gegengeraden entfernt, also noch auf dem Rasen.		3	2
d)	Der Innenradius der Außenbahn ist um 7 · 1,20 m = 8,4 m größer als der der Innenbahn, also 42,4 m. Damit beträgt die Gesamtlänge des kreisförmigen Teils der Außenbahnkurve $2\pi \cdot (34\text{ m} + 8{,}4\text{ m}) \approx 266{,}4\text{ m}$. Das macht gegenüber der Gesamtlänge der Innenbahnkurve von 214 m einen Unterschied von 52,4 m aus, der durch den Vorsprung ausgeglichen werden muss. Dieser Vorsprung bildet den Bogen b_8. Da $b_8 = \frac{\beta_8 \cdot 2\pi \cdot r}{360°}$, ergibt sich $\beta_8 = \frac{52{,}4 \cdot 360°}{2\pi \cdot 42{,}4} \approx 70{,}8°$. Für b_4 kann man die analoge Rechnung aufstellen, bei der der Radius der Bahn aber nur um 3,6 m größer ist als der der Innenbahn. Es ergibt sich $\beta 4 = \frac{(2\pi \cdot (34 + 3 \cdot 1{,}20) - 214) \cdot 180°}{\pi \cdot (34 + 3 \cdot 1{,}20)} \approx 33{,}9°$ Der Winkel ist also weniger als halb so groß.		2 2	3

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Die Frage ist mit dem Satz des Pythagoras entscheidbar. Die Katheten des betrachteten rechtwinkligen Dreiecks sind zum einen die Bahnverlängerung von 17 m, zum anderen der Kurvenradius von 34 m plus die Hälfte einer Bahnbreite, also 34,60 m. Die Hypotenuse hat dann eine Länge von 38,55 m. Das heißt, die Startblöcke für diesen Läufer befinden sich 4,55 m vom Innenrand der Kurvenbahn entfernt (und damit 5,05 m von ihrem Außenrand), also innerhalb der Laufbahn.		4	
	Insgesamt 22 BWE	5	12	5

19. Rettungsring

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Messung ergab: $\lvert CD \rvert = 1{,}2\text{ m}$ und $\lvert AB \rvert = 0{,}8\text{ m}$. Man erkennt daraus, dass $r = \lvert MA \rvert = \frac{\lvert CD \rvert - \lvert AB \rvert}{4} = \frac{0{,}4\text{ m}}{4} = 0{,}1\text{ m}$. $2 \cdot R = \lvert MN \rvert = \lvert AB \rvert + 2r$ $= 0{,}8\text{ m} + 0{,}2\text{ m} = 1\text{ m}$, also R = 0,5 m. 		4	
b)	Einsetzen der Werte von a) in die gegebenen Formeln für den Torus ergibt: $V \approx 0{,}0987\text{ m}^3 \approx 100\text{ Liter}$ und $O \approx 1{,}974\text{ m}^2 \approx 2\text{ m}^2$.	4		
c)	Zunächst: $0{,}2\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 0{,}2\,\frac{\text{kg}}{\text{l}}$. Der Ring hat eine Masse von etwa $100\,\text{l} \cdot 0{,}2\,\frac{\text{kg}}{\text{l}} = 20\text{ kg}$. Wenn er ganz eintaucht, verdrängt er eine Wassermasse, die fünfmal so groß ist, also etwa 100 kg. Der Ring kann also eine Maximallast von etwa 80 kg tragen, bis er ganz eintaucht, solange die getragene Last sich völlig außerhalb des Wassers befindet. *(Sollte die Last teilweise ins Wasser eintauchen, erhöht sich die Tragfähigkeit des Rings um den Auftrieb dieser eingetauchten Teile; man kann also sagen, dass 80 kg die minimale Traglast darstellt.)*		4	
d)	Mit den gleichen Überlegungen wie in b) erhält man: $R = \frac{D+d}{4}$ und $r = \frac{D-d}{4}$ Setzt man diese Ergebnisse in die Volumenformel für den Torus ein, dann gilt:		2	2

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$V = \frac{\pi^2 \cdot (D+d)\cdot(D-d)^2}{32} = \frac{\pi^2}{32}\cdot(D^2-d^2)\cdot(D-d)$. Setzt man diese Ergebnisse in die Oberflächenformel für den Torus ein, so ergibt sich: $O = 4\cdot\pi^2\cdot\frac{D+d}{4}\cdot\frac{D-d}{4} = \frac{\pi^2}{4}\cdot(D^2-d^2)$. (Die Aufgabenstellung ermöglich ebenso den Beweis durch Umrechnung der Formeln mit D und d in die Formeln mit R und r.)		2	
e)	Soll der Schlauch bei $D = const$ sein maximales Volumen haben, so muss $d = 0$ gelten; der Torus mit dem maximalen Volumen unter allen Tori mit gleichem Außendurchmesser hat also kein inneres Loch. Dann ist $V_{\max} = \frac{\pi^2\cdot D^3}{32}$ und damit $V_{\max} \approx 0{,}308\ \text{m}^3$.		2	2
	Insgesamt 22 BWE	4	14	4

20. Partyzelt

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Das Zelt besteht aus einem Würfel und einer aufgesetzten quadratischen Pyramide. Der Würfel hat eine Höhe von 5 m. Die Höhe h der Pyramide kann mit folgender Idee berechnet werden: Ein Eckpunkt des Grundquadrats der Pyramide, der Mittelpunkt der Diagonalen d des Grundquadrats und die Spitze der Pyramide bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Die Hypotenuse hat die Länge $a = 5$ m. Nach dem Satz des Pythagoras gilt: $\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$. Die Diagonale des Quadrats hat die Länge $d = \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2a^2} = a\cdot\sqrt{2}$. Also ergibt sich mit $h^2 = a^2 - \left(\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2$ $= a^2 - \frac{2a^2}{4}$ $= \frac{a^2}{2} = 12{,}5$ die Pyramidenhöhe zu $h \approx 3{,}536$ m. Damit ist die Gesamthöhe tatsächlich etwa 8,536 m, also gut 8,5 m. *Hinweis: Die aufgesetzte Pyramide ist die Hälfte eines regelmäßigen Oktaeders. Sollte dies erkannt und ausgenutzt werden, ist dies besonders anzuerkennen.*	2	3	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
b)	Das Volumen setzt sich aus dem Volumen des Würfels und dem der aufgesetzten Pyramide zusammen: $V = a^3 + \frac{1}{3}a^2 \cdot h$. Mit dem gegebenen a und dem aus dem in a) berechneten Wert für die Pyramidenhöhe h ergibt sich ein Volumen von etwa 154,5 m³.	2	3	
c)	Die Umhüllung besteht aus vier Quadraten mit der Kantenlänge a und aus vier gleichseitigen Dreiecken mit der Kantenlänge a. Die Höhe h_s eines gleichseitigen Dreiecks bestimmt sich mit dem Satz des Pythagoras zu $h_s = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}$ $= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}}$ $= \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$. (vergleiche Aufgabenteil a). Somit ergibt sich die nötige gesamte Planenfläche zu $A = 4 \cdot a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = (4 + \sqrt{3}) \cdot a^2$. Mit dem gegebenen a sind das etwa 143,3 m² und damit weniger als 150 m².		4	
d)	Erster Weg: Sei M der Mittelpunkt einer vertikalen Stange, S der Spitzenpunkt des Zeltes. Die Strecke $\overline{MS}$ entspricht der Girlande und bildet die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Eckpunkten M, S und H. H liegt senkrecht unter S in einer Höhe von 2,5 m, also 6,036 m unterhalb von S. Die Strecke $\overline{HM}$ hat wieder die Länge $\frac{d}{2}$. Mit dem Satz des Pythagoras gilt dann: $\lvert MS\rvert^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \lvert HS\rvert^2$ $= \left(\frac{d}{2}\right)^2 + (h + 2{,}5)^2$ $= \left(2{,}5 \cdot \sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{12{,}5} + 2{,}5\right)^2$ $= 6{,}994...$. Die Girlande ist damit etwa 6,99 m lang. Anderer Weg: Sei E ein Eckpunkt der Pyramide. Dann bilden E, S und M ein Dreieck, bei dem der Winkel bei E 135° beträgt und für die Längen der Seiten $\overline{ES}$ und $\overline{ME}$ gilt: $\lvert ES\rvert = a$ und $\lvert ME\rvert = \frac{a}{2}$.			4

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Nach dem Kosinussatz gilt dann: $\lvert MS\rvert^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos 135^0$. Eingesetzt und ausgerechnet ergibt sich die Länge der Girlande zu etwa 6,99 m.			
e)	Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck *HMS* mit dem rechten Winkel in *H* (*H* senkrecht unter *S*). Für die Strecken $\overline{HS}$ und $\overline{MH}$ gilt $\lvert HS\rvert = h + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{a}{2}$ und $\lvert MH\rvert = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$ Der Winkel α bestimmt sich z.B. über den Tangens: $\tan\alpha = \frac{\lvert HS\rvert}{\lvert MH\rvert}$ $= \frac{\frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{a}{2}}{\frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}}$ $= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\alpha \approx 59{,}638...$. Danach ist der Winkel α knapp 60° groß. *Ebenso lässt sich der Winkel aus der Girlandenlänge und der halben Quadrat-diagonale mit dem Kosinus und aus der Girlandenlänge und der Strecke* $\overline{MH}$ *mit dem Sinus bestimmen.*		4	
	Insgesamt 22 BWE	4	14	4

21. Eishockeypucks

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Hinweis: Die Maße eines Eishockeypucks werden in der englischen Maßeinheit inch angegeben. Der Durchmesser beträgt damit 3 inch und die Höhe 1 inch. Durch Umrechnung ergeben sich die „krummen“ Zahlenwerte.			
a)	Der Puck hat die Form eines Zylinders. Damit ist das Volumen bestimmbar mit $V_{Zyl} = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Die Höhe und der Radius als halber Durchmesser sind in der Aufgabenstellung gegeben. Also: $V_{Puck} = \pi \cdot 3{,}81^2 \cdot 2{,}54 = 115{,}83...$. Das Volumen eines Pucks beträgt tatsächlich ungefähr 116 cm³.	3		

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>b)</td><td>Um die Frage zu beantworten, muss zunächst das Gesamtvolumen der Schachtel bestimmt werden:

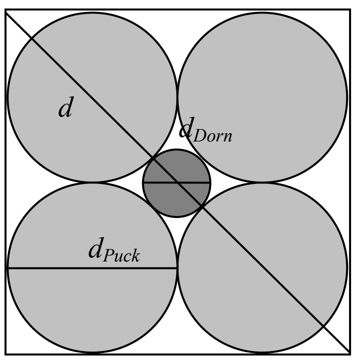
Die Schachtel ist ein Quader mit quadratischer Grundfläche. Dessen Volumen bestimmt sich mit $V_S = a^2 \cdot h$.
Die Seitenlänge des Quadrats entspricht dem doppelten Durchmesser der Pucks; damit ist a = 15,24 cm.
Da drei Pucks übereinander liegen, beträgt die Höhe $h = 3 \cdot 2{,}54\text{ cm} = 7{,}62$ cm.
Innenvolumen der Schachtel: $V_S = 15{,}24^2 \cdot 7{,}62 \approx 1769{,}80$.
Die Schachtel hat ein Innenvolumen von ca. 1 770 cm³.

Von diesem Volumen muss das Volumen der Pucks abgezogen werden.
Volumen der 12 Pucks: $V_{12} = 12 \cdot V_{Puck} = 1389{,}999...$.
Das Gesamtvolumen der 12 Pucks beträgt ca. 1 390 cm³.

Damit ist das Volumen der Luft $V_{Luft} = V_{\mathrm{Pr}} - V_{12} \approx 379{,}8\ cm^3$.
Etwa 380 cm³ Luft sind in der Schachtel enthalten.

Prozentanteil der Luft:
$\frac{V_{\mathrm{Luft}}}{V_{\mathrm{Schachtel}}} = 0{,}2146....$.

Der Luftvolumenanteil der Schachtel beträgt ca. 21,5 %.

Hinweis: Ein anderer Weg ist ebenso denkbar
Bestimmung der Querschnittsfläche
Bestimmung der von den Pucks bedeckten Fläche
Bestimmung der nicht von Pucks bedeckten Anteils an dieser Fläche (entspricht dem Volumenanteil)
Berechnung des Luftvolumens aus der nicht von Pucks bedeckten Fläche und der Höhe der Schachtel</td><td>2</td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>
Sei d die Diagonalenlänge der quadratischen Schachtel. Die Kantenlänge der Schachtel ist der doppelte Durchmesser eines Pucks d_{Puck}.
Somit gilt: $d^2 = (2 \cdot 7{,}62)^2 + (2 \cdot 7{,}62)^2$, also
$d = 2\sqrt{2} \cdot 7{,}62$ (cm).

Der Durchmesser des Dorns d_{Dorn} findet sich auf dieser Diagonalen zweimal wieder – zum einen im eingezeichneten Dorn selbst, zum anderen in zwei gleichen symmetrischen Teilen in den Ecken der Schachtel. Somit gilt:
$d = 2 \cdot 7{,}62 + 2 \cdot d_{Dorn}$, also umgeformt:
$2\sqrt{2} \cdot 7{,}62 = 2 \cdot 7{,}62 + 2 \cdot d_{Dorn}$
$2 \cdot d_{Dorn} = 2\sqrt{2} \cdot 7{,}62 - 2 \cdot 7{,}62 = 2 \cdot 7{,}62 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$
$d_{Dorn} = \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot 7{,}62 = 3{,}156...$.

Also kann der Dorn einen maximalen Durchmesser von etwa 3,15 cm aufweisen.</td><td></td><td>2</td><td>4</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Es sind natürlich auch andere Lösungsansätze denkbar, z.B. Aufteilung in 4 Quadrate…			
d)	Erster Weg über Ausnutzen der Abbildungen: 1 Kreis im Quadrat: $\frac{\pi \cdot r_1^2}{(2r_1)^2} = \frac{\pi \cdot r_1^2}{4r_1^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785... \approx 78{,}5\%$. Der nicht bedeckte Anteil des Quadrats beträgt ca. 21,5 %. 4 Kreise im Quadrat: $\frac{4 \cdot \pi \cdot r_4^2}{(4r_4)^2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r_4^2}{16r_4^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785... \approx 78{,}5\%$. Der nicht bedeckte Anteil des Quadrats beträgt ca. 21,5 %. Analog für neun Kreise im Quadrat: $\frac{9 \cdot \pi \cdot r_9^2}{(6r_9)^2} = \frac{9 \cdot \pi \cdot r_9^2}{36r_9^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785... \approx 78{,}5\%$. Der nicht bedeckte Anteil des Quadrats beträgt ca. 21,5 %. n^2 Kreise in Quadrat: $\frac{n^2 \cdot \pi \cdot r_n^2}{(2 \cdot n \cdot r_n)^2} = \frac{n^2 \cdot \pi \cdot r_n^2}{4n^2 \cdot r_n^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785... \approx 78{,}5\%$. Der nicht bedeckte Anteil des Quadrats beträgt ca. 21,5 %. Dieser Weg lässt sich auch zu einem einzigen Gedanken verdichten: $Anteil = 1 - n^2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2n}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}215$. *Wenn ausschließlich der allgemeine Nachweis geführt wird, ist die volle Punktzahl zu erteilen.*		2	2
	Insgesamt 22 BWE	5	11	6

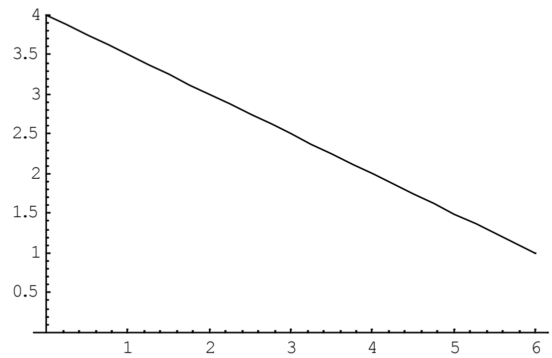
22. Ballschachtel

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Das regelmäßige Sechseck hat die Kantenlänge $s = 9$ cm. Ein regelmäßiges Sechseck ist aus sechs gleichseitigen Dreiecken aufgebaut. Der gesuchte Radius ist die Höhe dieser Dreiecke. Diese Höhe lässt sich über die Anwendung des Satzes des Pythagoras berechnen: $r = \sqrt{s^2 - \left(\frac{1}{2}s\right)^2}$, also			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	$r=\sqrt{9^2-\left(\frac{1}{2}\cdot 9\right)^2}=\sqrt{81-20,25}=\sqrt{60,75}\approx 7,794$. Die Bälle haben tatsächlich einen Radius von etwa 7,8 cm. *Die direkte Verwendung der Formel der Höhe h in einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge s ist selbstverständlich auch zugelassen:* $h_D=\frac{s}{2}\cdot\sqrt{3}=4,5\cdot\sqrt{3}\approx 7,794$.	4		
b)	Die Gesamtfläche besteht aus sechs Rechtecken und zwei regelmäßigen Sechsecken. Für die Rechtecke ist noch die Höhe zu bestimmen. Sie beträgt drei Balldurchmesser plus 6 cm Styropor-Dicke, also $h=6\cdot r+6=6\cdot\sqrt{60,75}+6\approx 52,77$. Ein Sechseck lässt sich aus sechs gleichseitigen Dreiecken zusammensetzen, deren Kantenlänge s und deren Höhe das bereits berechnete (oder übernommene) r ist. Damit ist die Gesamtfläche $A=6\cdot s\cdot h+2\cdot 6\cdot\frac{1}{2}\cdot s\cdot r=6s\cdot(h+r)$. Die Gesamtfläche hat damit etwa 3 270 cm².	2	4	
c)	Das Volumen der drei Bälle ist das Volumen dreier Kugeln mit dem Radius $r=\sqrt{60,75}\text{ cm}\approx 7,8\text{ cm}$: $V_B=3\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$ $=4\cdot\pi\cdot\left(\sqrt{60,75}\right)^3$ $=5\,950,1688...\approx 5\,950,169$ Das Volumen der Schachtel ist das Volumen eines Sechseckprismas mit bekannter Höhe und Grundfläche: $V_{\text{Pr}}=6\cdot\frac{1}{2}\cdot s\cdot r\cdot h$ $=6\cdot\frac{1}{2}\cdot 9\cdot\sqrt{60,75}\cdot\left(6\cdot\sqrt{60,75}+6\right)$. $=11104,1650...$ Das Volumen der Schachtel beträgt ca. $11104,165\text{ cm}^3$. Der Volumenanteil der Bälle ist damit $\frac{5950,169}{11104,165}\approx 0,5358...\approx 53,6\,\%$.		5	
d)	Die lange Seite des Kartons hat eine Länge von $4r$ – in ihrer Richtung berühren sich gerade zwei Bälle. Die kurze Seite ist die Diagonale eines Sechsecks und hat damit die Länge $2s$. Da $r=\frac{\sqrt{3}}{2}s$, ergibt sich für das Verhältnis Länge der kurzen Seite : Länge der langen Seite $\frac{2\cdot s}{4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot s}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, wie gefordert.		3	1

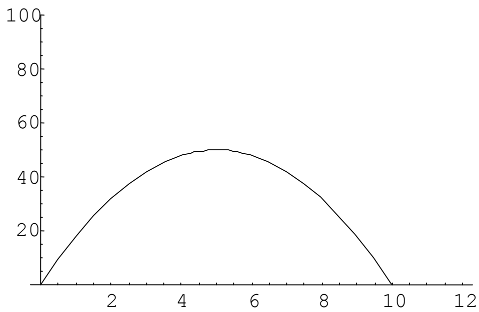
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Die Antwort lautet: Nein. Die Oberfläche steigt zwar *linear* mit der Zahl der Bälle, ist aber *nicht* zur Zahl der Bälle *proportional*. Der Grund hierfür liegt darin, dass bei jeder Anzahl von Bällen – also auch bei null Bällen – Grund- und Deckfläche und die beiden Streifen an den Seitenwänden, hinter denen das Styropor liegt, vorhanden sind. *Der Teil der Seitenflächen, hinter dem die Bälle untergebracht sind, steigt allerdings proportional zur Zahl der Bälle.*			3
	Insgesamt 22 BWE	6	12	4

23. Meteorit

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Am Anfang handelte es sich um eine Kugel mit dem Radius $r_0 = 4$ m. Mit $V_K = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ ergibt sich das Volumen zu $V_0 \approx 268$ m³. Mit der gegebenen Dichteformel ergibt sich die Masse zu $m_0 \approx 858t$.	2	2	
b)	Die beobachtbare Bahn bildet die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen 40 km und (75 km – 18 km =) 57 km. Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich die Bahnlänge zu ca. 69,6 km.		3	
c)	Der zeitliche Verlauf des Radius ist laut Aufgabenstellung eine lineare Funktion. Beginnend bei $r_0 = 4$ m, verringert er sich pro Sekunde um 0,5 m. (*Die Funktionsgleichung ist also* $r(t) = 4 - 0{,}5 \cdot t$ *.)* Das zugehörige Diagramm:  	2	2	
d)	Pro Hundertstelsekunde reduziert sich der Radius um (0,5 m / 100 =) 5 mm. Also ist $\Delta r = 5\,\text{mm}$. Mit den gegebenen Formeln für das Volumen der Kugelschale und für die Dichte ergibt sich $\Delta m = \rho \cdot 4\pi \cdot r^2 \cdot \Delta r = 3200 \cdot 4\pi \cdot 4^2 \cdot 0{,}005\ \text{kg} \approx 3220\ \text{kg}$. Nach zwei Sekunden hat sich der Radius auf 3 m verringert. Der Massenverlust ist deswegen nur noch $\Delta m = 3200 \cdot 4\pi \cdot 3^2 \cdot 0{,}005\ \text{kg} \approx 1810\ \text{kg}$.	1	1 2 1	1

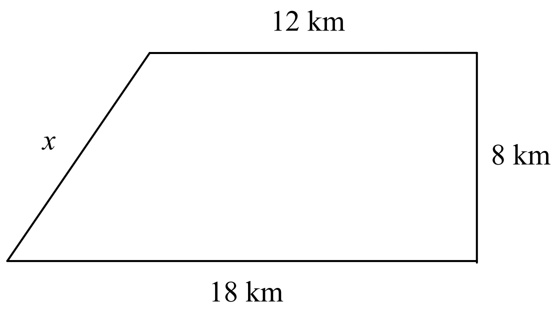
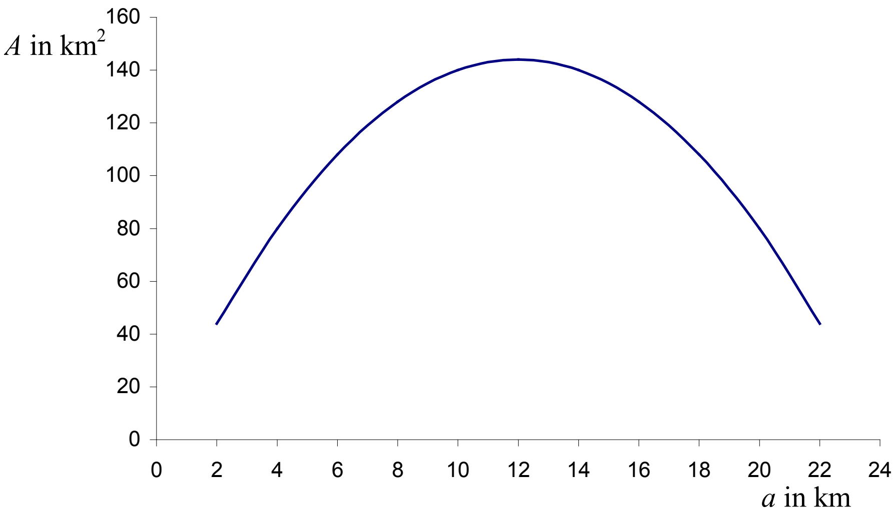
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Die geforderte Begründung ist die Verallgemeinerung der Beobachtung und Rechnung aus d): Da im Lauf der Zeit der Radius (linear) sinkt, sinkt bei konstantem Δr die Oberfläche quadratisch und damit auch der Massenverlust – der ja mit dem Quadrat des Radius geht – in gleicher Weise. Für das Volumen $V(t)$ gilt: $V(t)=\frac{4}{3}\pi\cdot r^3(t)$, und da $r(t)=4-0{,}5\cdot t$, ergibt sich die angegebene Formel. (Der zweite Term ist lediglich eine Ausmultiplizierung des Binoms.) *(Hinweis: Wie man sieht, sinkt das Volumen mit der 3. Potenz der Zeit. Den Zusammenhang zwischen dem zeitlichen Verlauf des Volumenverlusts – der Volumenveränderung – und des Volumens zu klären, ist nicht Ziel dieser Aufgabe.)*		2	2 1
	Insgesamt 22 BWE	5	3	4

24. Das neue Rosenbeet

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Fläche der beiden kleinen Dreiecke beträgt jeweils 4,5 m², die der beiden großen jeweils 24,5 m². Das ist leicht ersichtlich, wenn man die jeweils gegenüberliegenden Dreiecke zu einem Quadrat zusammenfügt. Der Inhalt der restlichen Rasenfläche beträgt also 58 m². Die Fläche des Rosenbeets ergibt sich aus der Subtraktion des Inhalts der restlichen Rasenfläche von der Quadratfläche zu 42 m². Denkbar ist auch eine Berechnung der Rechteckseiten mittels des Satzes von Pythagoras, woraus sich die Rechteckfläche direkt bestimmen lässt.	1	1	
b)	x liegt zwischen 0 und 10. Je zwei gegenüberliegende Rasendreiecke lassen sich zu je einem Quadrat zusammensetzen; diese Quadrate haben die Flächen x^2 bzw. $(10-x)^2$. Diese Flächen müssen von der Gesamtfläche von 100 m² subtrahiert werden: $A(x)=100-x^2-(10-x)^2$ $=-2x^2+20x$, wie angegeben. Der Graph dieser Funktion ist eine nach unten geöffnete Parabel, deren eine Nullstelle bei Null liegt.  	1 2 2	2	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	Durch Symmetrieüberlegungen, Kenntnis der Koordinaten des Scheitels einer Parabel, Anwendung von Verschiebungen oder durch die Anwendung der Scheitelpunktsform $A(x) = -2(x-5)^2 + 50$ ergibt sich das Maximum für $x = 5$. Die maximale Fläche ist dann $A(5) = 50$. Bei $x = 5$ ist $(10 - x) = 5$, also sind die vier Rasendreiecke kongruent und die vier Rechteckseiten damit gleich lang.		3	1
d)	Je zwei gegenüberliegende kongruente rechtwinklige Dreiecke ergeben ein Rechteck mit den Kantenlängen x und $10 - x$. Somit ist die Fläche für das verbleibende Rosenbeet $A_Q(x) = 100 - 2 \cdot x \cdot (10 - x)$ $= 2x^2 - 20x + 100$, wie angegeben. Einsetzen liefert $A(5) = A_Q(5) = 50$, für $x = 5$ sind die Werte also gleich groß (*was nicht wundern sollte, denn es handelt sich um dieselbe Figur!)*		2 1	
e)	Hier ist die quadratische Gleichung $70 = 2x^2 - 20x + 100$ zu lösen. Die Lösungen sind $x_1 = 5 + \sqrt{10}$ und $x_2 = 5 - \sqrt{10}$ *(natürlich müssen beide Lösungen zusammen 10 ergeben!).* Genähert sind das $x_1 \approx 8{,}16$ und $x_2 \approx 1{,}84$. Der geforderte Nachweis lässt sich auf etliche Weisen beibringen, z.B. durch den direkten Nachweis, dass $A(x) \leq A_Q(x)$: Die Differenz $A_Q(x) - A(x)$ ist gleich $A_Q(x) - A(x) = 4x^2 - 40x + 100$ $= 4(x^2 - 10x) + 100$ $= 4(x-5)^2$ ≥ 0 Eine andere Vorgehensweise könnte die Betrachtung der Graphen sein. Der Graph von A_Q ist eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel bei $x = 5$. Am Scheitel muss A_Q den minimalen Wert haben, also liegt der Graph von A_Q überall sonst über dem Graphen von A. Auch eine geometrische Argumentation ist möglich.		3	3
	Insgesamt 22 BWE	6	12	4

25. Pachoms Weg

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Skizze von Pachoms Weg; der Streckenzug umrandet ein Trapez mit rechten Winkeln in B und in C.

</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Berechnung des 4. Teilweges über den Satz des Pythagoras:
$x = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$
Gesamtlänge von Pachoms Wanderweg: 18 km + 8 km + 12 km + 10 km = 48 km.</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Flächeninhalt des umwanderten Landes: $A = \frac{18+12}{2} \cdot 8 = 120$ (km²).</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Rechtecke mit dem Umfang 48 km:
<table>
<tr><td>Umfang in km</td><td colspan="7">2a + 2b = 48</td></tr>
<tr><td>a</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>12</td><td>14</td></tr>
<tr><td>b</td><td>22</td><td>20</td><td>18</td><td>16</td><td>14</td><td>12</td><td>10</td></tr>
<tr><td>A in km²</td><td>44</td><td>80</td><td>108</td><td>128</td><td>140</td><td>144</td><td>140</td></tr>
</table>
Flächeninhaltsfunktion:
$A = a \cdot b$
$b = 24 - a$
$A = a \cdot (24 - a) = 24a - a^2$.

</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Das Quadrat mit der Seitenlänge 12 km hat den gleichen Umfang wie Pachoms Wanderweg, mit 144 km^2 aber eine wesentlich größere Fläche.		3	
e)	Rechtecke mit dem Flächeninhalt 120 km^2: (Tabelle unten)		4	

A in km^2	$a \cdot b = 120$						
a in km	2	4	6	8	10	12	14
b in km	60	30	20	15	12	10	8,571
U in km	124	68	52	46	44	44	45,1

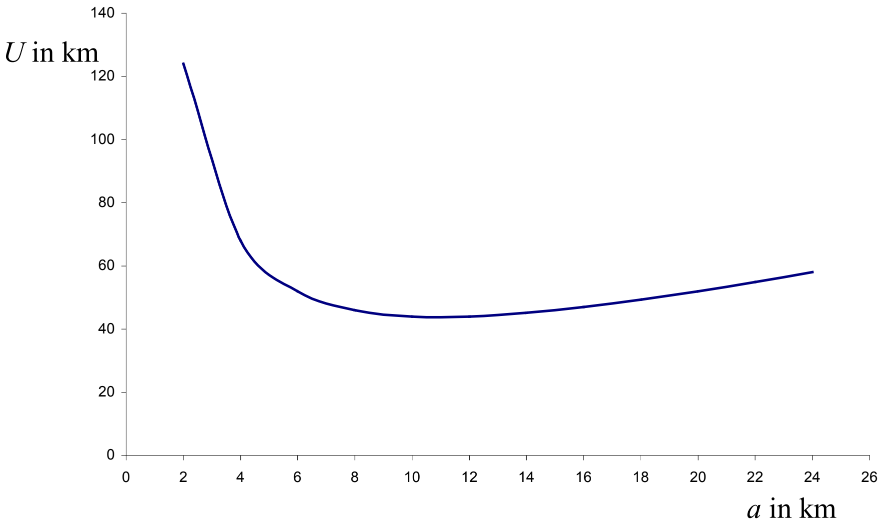
Umfangslängenfunktion:

$U = 2a + 2b$

$b = \frac{120}{a}$

$U = 2a + 2 \cdot \frac{120}{a} = 2a + \frac{240}{a}$ — 2

Grafische Darstellung:



— 2

Von allen Rechtecken mit dem Flächeninhalt 120 km^2 gibt es offensichtlich eines mit geringstem Umfang.

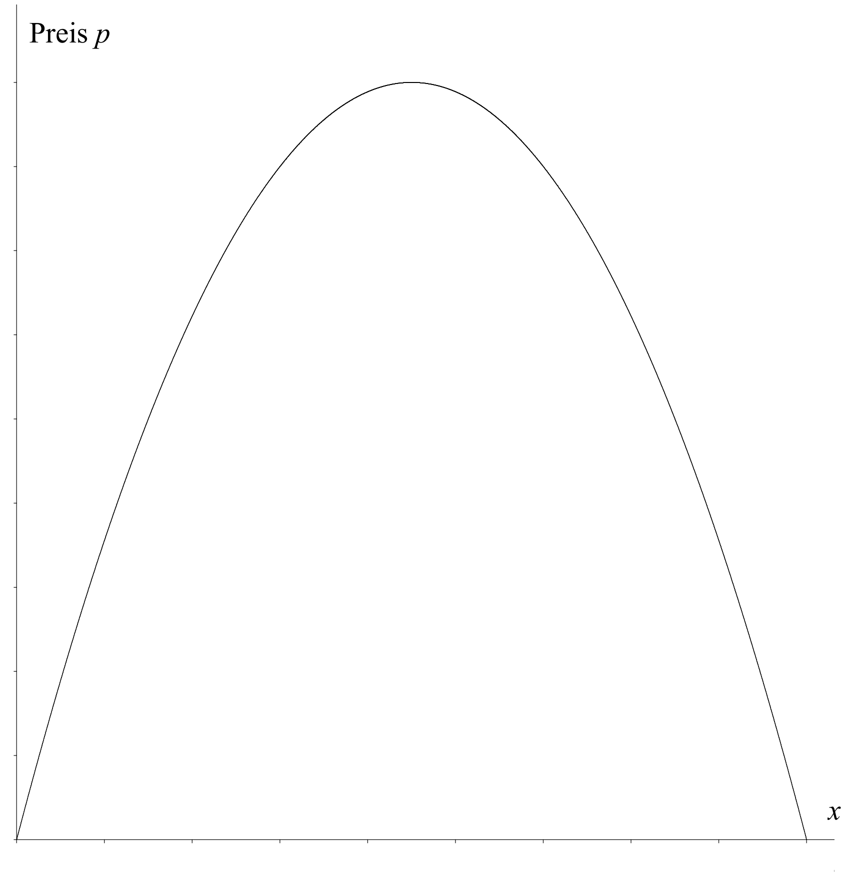
Seine Seitenlängen a und b liegen jeweils zwischen 10 km und 12 km.

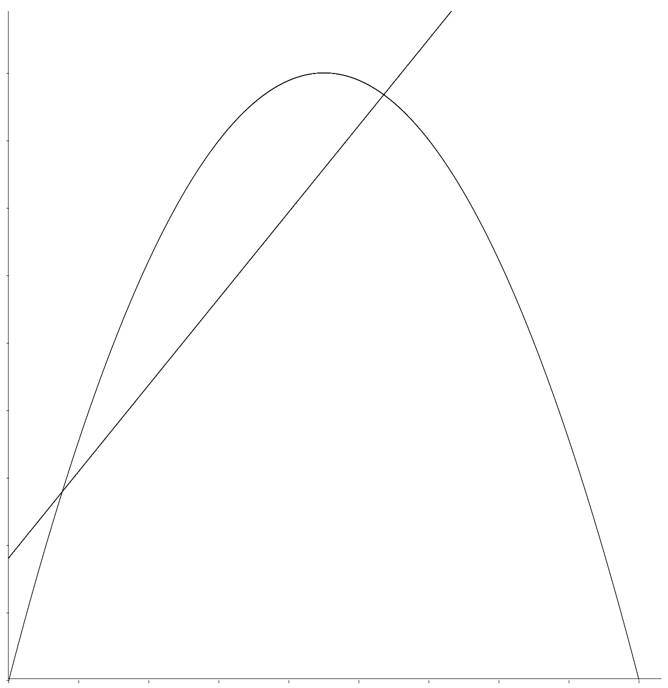
Eine genauere Prüfung ergibt:
Das Quadrat mit der Seitenlänge $\sqrt{120}$ km $\approx$ 10,954 km hat von allen Rechtecken mit dem Flächeninhalt den geringsten Umfang, nämlich
$U = 4 \cdot \sqrt{120}$ km $\approx$ 43,818 km. — 2

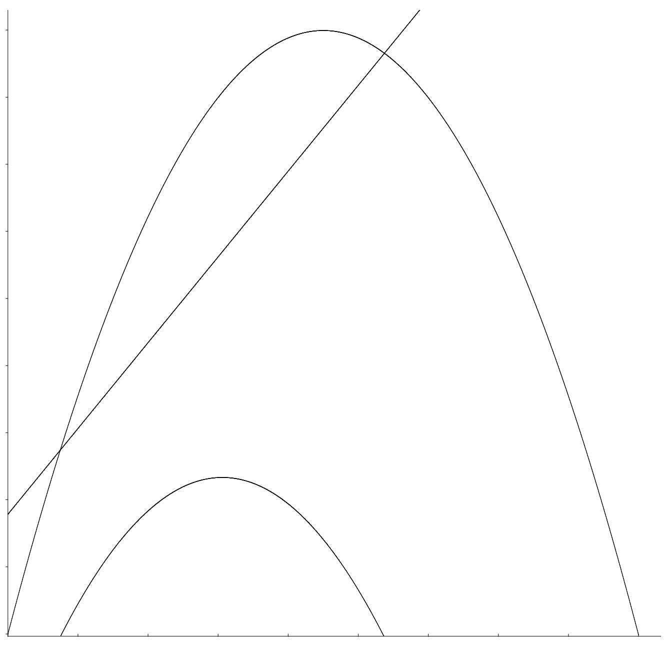
Das sind mehr als 4 km weniger, als Pachom auf seiner Wanderung zurückgelegt hat.

		I	II	III
	Insgesamt 22 BWE	6	10	6

26. Jeans

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Gesucht sind die Parameter a und b in der Gleichung der Preis-Absatz-Funktion mit der Gleichung $p(x)=a\cdot x+b$. Höchstpreis bei $x = 0$: $p(0)=100$. Also gilt $b=100$. Sättingungsmenge bei x = 18 000, d.h. $p(18000)=0$. Daraus folgt: $0=18000\cdot a+100$ $a=-\frac{1}{180}$. Die Gleichung der Preisfunktion lautet $p(x)=-\frac{1}{180}\cdot x+100$.	1	1	
b)	Die Gleichung der Erlösfunktion E lautet $E(x)=x\cdot p(x)=x\cdot\left(-\frac{1}{180}\cdot x+100\right)=-\frac{1}{180}\cdot x^2+100x$.	2		
c)		3		
d)	$E(x)=-\frac{1}{180}\cdot x^2+100x=x\cdot\left(-\frac{1}{180}\cdot x+100\right)$	1		

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Nullstellen der Parabel: $x = 0$ bzw. $-\frac{1}{180} \cdot x + 100 = 0 \Leftrightarrow x = 18\,000$. Wegen der Symmetrieeigenschaften liegt das Maximum genau in der Mitte, also bei $x = 9000$. $E(9000) = 9000 \cdot \left(-\frac{1}{180} \cdot 9000 + 100\right) = 450\,000$. Bei Produktion und Verkauf von 9 000 Jeanshosen ist der Erlös mit 450 000 € maximal.	2		
e)	Fixkosten: 90 000 € Produktionsabhängige Kosten: 32 € / Hose. $K(x) = 32x + 90000$ 		3	
f)	Zu berechnen sind die Abszissen der Schnittpunkte der Graphen von *E* und *K*. $32 \cdot x + 90000 = -\frac{1}{180} \cdot x^2 + 100x$ $-\frac{1}{180} \cdot x^2 + 68x - 90000 = 0$ $x^2 - 12\,240 \cdot x + 16200000 = 0$ $x_{1,2} = 6120 \pm \sqrt{37454400 - 16200000}$ $x_1 = 1509{,}7...$ $x_2 = 10730{,}2...$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Bis zu einer Produktion von 1 509 Hosen bzw. ab einer Produktion von 10 730 Hosen sind die Kosten höher als der Erlös.		4	
g)	$G(x) = E(x) - K(x)$ $= -\frac{1}{180} \cdot x^2 + 100x - (32 \cdot x + 90000)$ $= -\frac{1}{180} \cdot x^2 + 68x - 90000$ Zur Berechnung des Gewinnmaximums sind die Koordinaten des Scheitelpunktes zu ermitteln. Die Parabel mit der Gleichung $y = -\frac{1}{180} \cdot x^2 + 68x - 90000$ hat ihr Maximum an der gleichen Stelle wie die Parabel mit der Gleichung $y = -\frac{1}{180} \cdot x^2 + 68x$. Es gilt: $y = -\frac{1}{180} \cdot x^2 + 68x = -\frac{1}{180} \cdot x \cdot (x - 12240)$. Die Funktion hat die Nullstellen 0 bzw. 12240. Das Maximum dieser Funktion und damit auch von G liegt bei x = 6 120. Der Maximalgewinn $G(6120)$ beträgt 118 080 € im Monat. *Grafische Darstellung (im Aufgabentext nicht gefordert):* 		2	3
	Summe			

27. Abbau eines Wirkstoffes

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	*Bemerkung: Rechnungen sind sowohl in Milligramm als auch in Gramm möglich. Maßeinheiten müssen erst beim Ergebnis (z.B. Antwortsatz) angegeben werden.* 5 % vom 1 g = 50 mg, 35 % von 50 mg = 17,5 mg. Es gelangen 17,5 mg des Wirkstoffes in den Körper.	2		
b)	Die allgemeine Gleichung lautet: $f(t) = c \cdot a^t$. Da es sich um einen Abbauprozess handelt, ist $0 < a < 1$, $a = 1 - p\,\% = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$. Der Anfangswert ist $c = f(0) = 17{,}5$, also $f(t) = 17{,}5 \cdot 0{,}75^t$, t in Tagen. $f(3) = 17{,}5 \cdot 0{,}75^3 \approx 7{,}383$. Nach drei Tagen sind noch etwa 7,4 mg des Wirkstoffes im Körper vorhanden. *Bemerkung: Es kann auch Tag für Tag die noch vorhandene Menge des Wirkstoffes berechnet werden.* Dies sind 42 % der Ausgangsmenge.	4	4	
c)	Nach einem Tag: $17{,}5 \cdot 0{,}75 = 13{,}125$. Nach zwei Tagen: $(13{,}125 + 17{,}5) \cdot 0{,}75 \approx 22{,}969$. Nach drei Tagen: $(22{,}969 + 17{,}5) \cdot 0{,}75 \approx 30{,}352$. Nach drei Tagen befinden sich schon 30,352 mg des Wirkstoffes im Körper. *Alternativ*: $17{,}5 \cdot (0{,}75^3 + 0{,}75^2 + 0{,}75) \approx 30{,}4$. *Weitere Alternative*: $f(3) + f(2) + f(1) \approx 30{,}4$.		8	
d)	Zu lösen ist folgende Gleichung: $(x + 17{,}5) \cdot 0{,}75 = x$. $0{,}75 \cdot x + 13{,}125 = x$ $0{,}25 \cdot x = 13{,}125$ $x = 52{,}5$. Die Wirkstoffmenge im Blut vor der Einnahme der neuen Tablette beträgt jeden Morgen 52,5 mg. Ein alternativer Ansatz ist: $(x + 17{,}5) \cdot 0{,}25 = 17{,}5$. Er führt zum demselben Ergebnis und soll gleichermaßen bewertet werden. *Bemerkung: Die Fortsetzung der Rechnungen aus c) ist möglich, aber umständlich.*			4
	Insgesamt 22 BWE	6	12	4

28. Medikamente

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Gleichung erfüllt $f(0) = 4$. Die Konzentration soll pro Stunde um 5 % sinken, es bleiben also 95 % noch vorhanden, also $f(x) = 4 \cdot 0{,}95^x$ mit x für die Zeit in Stunden und $f(x)$ für die Konzentration im mg pro Liter Blut. Nach 1 Stunde: $f(1) = 4 \cdot 0{,}95^1 = 3{,}8$. Nach 4 Stunden: $f(4) = 4 \cdot 0{,}95^4 \approx 3{,}26$. Nach 12 Stunden: $f(12) = 4 \cdot 0{,}95^{12} \approx 2{,}16$. Die Konzentration beträgt nach einer Stunde noch 3,8 mg, nach 4 Stunden etwa 3,26 mg und nach zwölf Stunden etwa 2,16 mg pro Liter.	3	3	
b)	Konzentration nach 20 Minuten: 20 Minuten sind genau $\frac{1}{3}$ Stunde, daher ist $f(\frac{1}{3}) = 4 \cdot 0{,}95^{\frac{1}{3}} \approx 3{,}93$. Nach zwanzig Minuten müsste die Konzentration 3,93 mg pro Liter betragen.		2	
c)	Zu lösen ist folgende Ungleichung: $4 \cdot 0{,}95^x < 0{,}2$ $0{,}95^x < 0{,}05$ $x \cdot \lg 0{,}95 < \lg 0{,}05$ $x > \dfrac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}95}$ $x > 58{,}4039...$ Nach etwa 58 Stunden und 24 Minuten ist die Unverträglichkeitsgrenze unterschritten.		4	
d)	<u>Funktionsgleichung für linearen Abbau:</u> Der Term wird gebildet aus *Bestand – Abnahmerate mal Zeit*: $g(x) = 4 - 0{,}2x$. <u>Exponentielles negatives Wachstum:</u> Die Abnahme (pro Stunde) geschieht proportional zum Bestand: Je kleiner die Konzentration im Blut, desto weniger verringern sich die Werte in mg/l. Theoretisch wird die Substanz nie ganz abgebaut, weil die Exponentialfunktion f niemals Null werden kann. <u>Lineares negatives Wachstum:</u> Die Abnahme geschieht immer um den gleichen Betrag pro Stunde. Das hat auch zur Folge, dass in diesem Modell die Substanz vollständig abgebaut wird, im Beispiel ist dieser Zustand nach 20 Stunden erreicht.	2	2 2	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>

<u>Funktionsgleichung für exponentiellen Abbau nach P:</u>

$h(12{,}5) = a = 1{,}5$, also steht a schon fest.

$h(32) = 1{,}5 \cdot b^{32-12{,}5} = 0{,}11$. Damit ergibt sich für b:

$b^{19{,}5} = \frac{0{,}11}{1{,}5}$

$b = \left(\frac{0{,}11}{1{,}5}\right)^{\frac{1}{19{,}5}}$

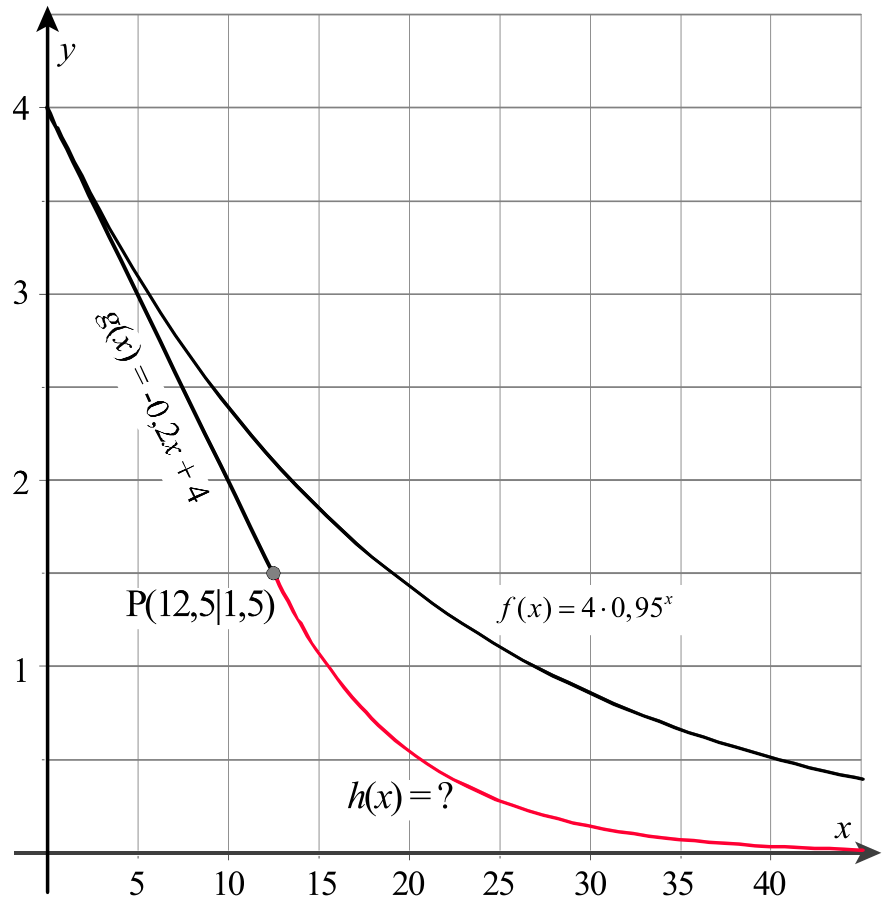
$b = 0{,}8746... \approx 0{,}875$.

Damit ist $h(x) = 1{,}5 \cdot 0{,}875^{x-12{,}5}$.

<u>Interpretation der berechneten Parameter:</u>

$a = 1{,}5$ ist der Bestand zum Zeitpunkt 12,5, der pro Stunde um ca. 12,5 % ($b \approx 1 - 0{,}125$) abgebaut wird.

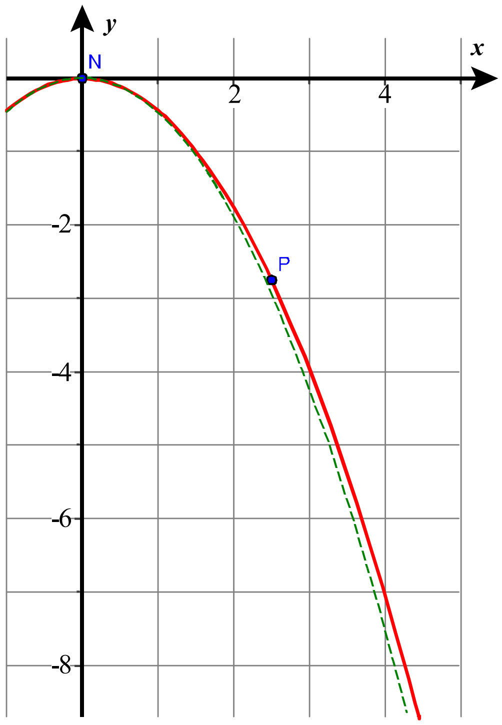
Zeichnung wird nicht erwartet. Hier ist g ab P ersetzt durch h.



</td><td></td><td></td><td>3

1</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 22 BWE</td><td>5</td><td>13</td><td>4</td></tr>
</table>

29. Lastkahn

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	 Einzutragende Punkte: $N(0\|0)$: Nullpunkt: Spitze des Förderbandes. $P(2{,}5\|-2{,}75)$: Mittelpunkt der Laderaumöffnung Funktionsgleichung: $f(x) = ax^2$, mit $f(2{,}5) = a \cdot 2{,}5^2 = -2{,}75$ $\Rightarrow a = -\frac{11}{25} = -0{,}44$ Also ergibt sich: $f(x) = -0{,}44 \cdot x^2$ Wertetabelle für *f*: (0,5|–0,11) (1|–0,44) (1,5|–0,99) (2|–1,76) (3|–3,96) (4|–7,04) Sei *g* die Ersatzfunktion mit $g(x) = -0{,}47 \cdot x^2$ (Graph gestrichelt) (0,5|–0,12) (1|–0,47) (1,5|–1,06) (2|–1,88) (3|–4,23) (4|–7,52)	5	4	
b)	Nach dem Satz des Pythagoras gilt für den Abstand *d:* $d = \sqrt{2{,}5^2 + 2{,}75^2} = \sqrt{13{,}8125} \approx 3{,}72$ Der Abstand beträgt etwa 3,7 m.		2	
c)	Der Abstand der Oberkante des Lastkahns zum Förderband beträgt jetzt 2,75 m + 4 m = 6,75 m. Die Öffnung des Laderaums beginnt wegen des linken Abstandes von 1 m also bei der *x*-Koordinate 1 und endet bei 1 + 3 = 4. Lösungsweg 1: *x*-Koordinate des Strahls in 6,75m Tiefe: $-6{,}75 = -0{,}44\,x^2 \Rightarrow x^2 \approx 15{,}34$. Da *x* im betrachteten Ausschnitt ≥ 0 ist, folgt $x \approx 3{,}92$. Es klappt also eben noch. Mit der Ersatzfunktion ergibt sich analog $x \approx 3{,}79$. Hier ist der Strahl nicht ganz so nah am Rand. Lösungsweg 2: „Tiefe" des Strahls bei $x = 4{,}0$ *(rechter Rand der Laderaumöffnung)*: $f(4{,}0) \approx -7.04 \Rightarrow$ Das Schiff könnte sogar noch etwas tiefer liegen $g(4{,}0) \approx -7{,}52 \Rightarrow$ Das Schiff könnte hier ebenso tiefer liegen.		6	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
d)	Verschiebung des Förderbandes und Ermittlung der zugehörigen Funktionsgleichung: Wurde in c) Lösungsweg 1 verwendet, so ist die tatsächliche x-Koordinate des Kiesstrahls in 6,75 m Tiefe berechnet. Die Differenz zur gewünschten x-Koordinate 2,5 ist dann die Verschiebung: 3,9 – 2,5 = 1,4. Das Förderband muss also um etwa 1,4 m nach links verschoben werden, damit der Strahl wieder durch die Mitte der Laderaumöffnung hinein fällt. Die gesuchte, geänderte Parabelgleichung lautet: $h(x) = -0{,}44\,(x + 1{,}4)^2$ Wurde in c) ein andere Lösungsweg beschritten, kann man die Funktionsgleichung und damit die Verschiebung auch über den Ansatz $h(x) = -0{,}44\,(x + b)^2$ und $h(2{,}5) = -6{,}75$ bestimmen: $15{,}34 = (2{,}5 + b)^2 \Rightarrow 3{,}92 \approx 2{,}5 + b$ (da $b > 0$ sein muss). Es folgt $b \approx 1{,}4$. Mit der Ersatzfunktion ergibt sich analog $h_2(x) = -0{,}47\,(x + 1{,}3)^2$. Interpretation: Die Oberseite des Förderbandes verläuft in 75 cm Höhe über dem Boden. Der Boden hat also die y-Koordinate –0,75. Doch $h(0) \approx -0{,}86$, wenn man um 1,4 m verschiebt bzw. $h(0) \approx -0{,}88$, wenn man um den genaueren Wert von 1,417 m verschiebt . Das bedeutet, dass an der Kante der Ladestation der Kies auf den Boden fällt statt ins Schiff. Eine derartige Verschiebung ist also nicht sinnvoll. Zu diesem Schluss gelang man auch, wenn man denjenigen x-Wert berechnet, der einer Höhe von –0,75 m entspricht. Der Ansatz $-0{,}75 = -0{,}44 \cdot (x + 1{,}4)^2$ liefert den x-Wert –0,09, d.h. der Kies fällt auf den Boden. Mit $h_2(0) \approx -0{,}79$ kann ebenso argumentiert werden.			5
	Insgesamt 22 BWE	5	12	5

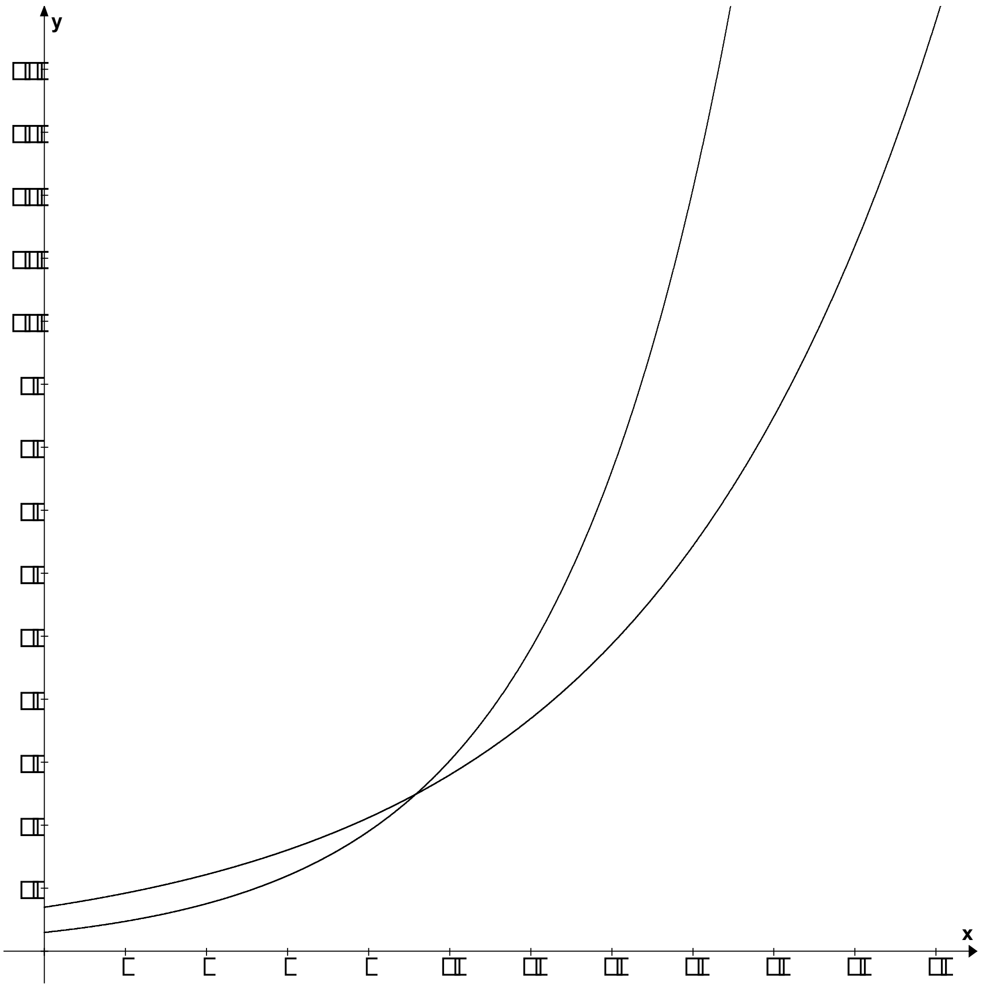
30. Laichplätze

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	$1000 \cdot 0{,}97^{11} \approx 715{,}3$. Ungefähr 715 Fische erreichen die Laichplätze.	1		
b)	$0{,}97^x < 0{,}85$ $x \cdot \log 0{,}97 < \log 0{,}85$ $x > \dfrac{\log 0{,}85}{\log 0{,}97}$ $x > 5{,}335...$ Also sind nach 6 Gefahrenstufen erstmals weniger als 85 % der ursprünglichen Fischzahl unterwegs. Oder: Nach 5 Gefahrenstufen: $0{,}97^5 = 0{,}858... > 0{,}85$. Nach 6 Gefahrenstufen: $0{,}97^6 = 0{,}832... < 0{,}85$.		3	

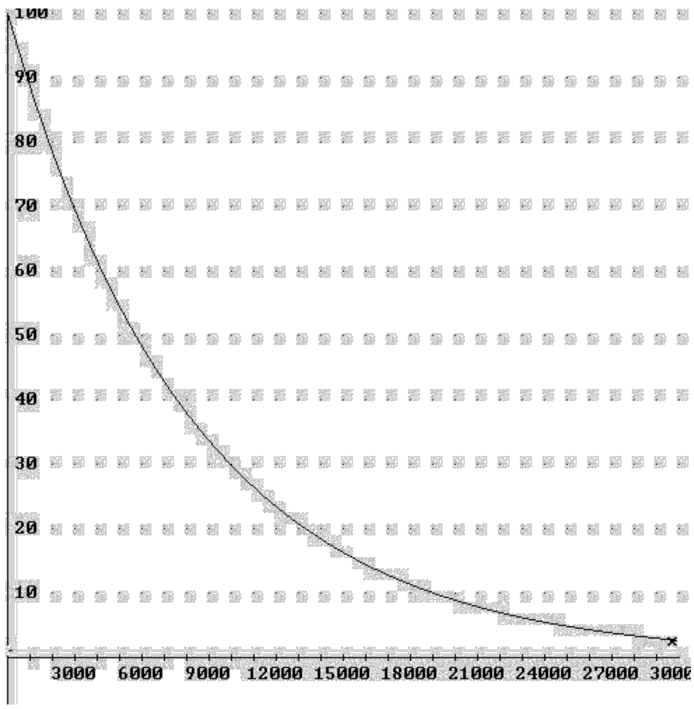
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	$\left(\left(1000\cdot 0{,}97^5-250\right)\cdot 0{,}97^5-250\right)\cdot 0{,}97\approx 264{,}56$; also ungefähr 264 Fische.			
	Etwa 26,4 % der Lachse erreichen ihr Ziel.	1	2	2
d)	(1) a) Doppelt so viele Fische am Anfang: ungefähr 1430 Fische am Ende (doppelt so viele Fische am Ziel).	1	1	
	c) $\left(\left(2000\cdot 0{,}97^5-250\right)\cdot 0{,}97^5-250\right)\cdot 0{,}97\approx 979{,}86$; also ungefähr 980 Fische. Anteil: $\frac{980}{2000}\approx 0{,}49=49\ \%$			
	Anzahl fast viermal so groß; Anteil fast doppelt so viel.	1	1	
	(2) a) $1000\cdot 0{,}94^{11}\approx 506{,}3$; also ungefähr 506 Fische (mehr als die Hälfte)	1		
	c) $\left(\left(1000\cdot 0{,}94^5-250\right)\cdot 0{,}94^5-250\right)\cdot 0{,}94\approx 98{,}8$; also ungefähr 98 Fische		1	1
	Anteil: $\frac{98}{1000}\approx 0{,}098=9{,}8\ \%$.		1	
	Anzahl weniger als die Hälfte; Anteil etwas weniger als ein Drittel.	1		
e)	$\left(\left(1000\cdot 0{,}8\cdot 0{,}97^4-250\right)\cdot 0{,}97^5-250\right)\cdot 0{,}97\approx 139{,}2$. $\left(\left(1000\cdot 0{,}97^5-250\right)\cdot 0{,}97^5-250\right)\cdot 0{,}8\approx 218{,}2$.			2
	Die Zahl der Fische, die ihr Ziel erreichen, ist größer, wenn die letzte Gefahrenstelle eine Verlustrate von 20 % bewirkt.		2	
	Insgesamt 22 BWE	6	11	5

31. Algen

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	I	III
a)	Sorte A: $y=3\cdot 2^{\frac{x}{3}}$, Sorte B: $y=7\cdot 2^{\frac{x}{5}}$			
	Zeichnung auf der nächsten Seite.		3	
b)	Sorte A: $y=3\cdot 2^{\frac{x}{3}}=3\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^x\approx 3\cdot 1{,}260^x$.			1
	Bei Sorte A beträgt der Wachstumsfaktor ungefähr 1,260 pro Tag, das ist eine tägliche Zunahme von 26,0%.		1	
	Sorte B: $y=7\cdot 2^{\frac{x}{5}}=7\cdot\left(\sqrt[5]{2}\right)^x\approx 7\cdot 1{,}149^x$		2	
	Bei Sorte B beträgt der Wachstumsfaktor ungefähr 1,149 pro Tag, das ist eine tägliche Zunahme von 14,9 %.	1		

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	I	III
	Grafische Darstellung zu a): 	3		
c)	Aus der Zeichnung ergibt sich, dass das Wachstum nach etwa 9 Tagen gleich groß ist. $3 \cdot 2^{\frac{x}{3}} = 7 \cdot 2^{\frac{x}{5}}$ $\lg 3 + \frac{x}{3} \cdot \lg 2 = \lg 7 + \frac{x}{5} \cdot \lg 2$ $\lg 3 + x \cdot \frac{1}{3} \lg 2 = \lg 7 + x \cdot \frac{1}{5} \lg 2$ $x = \frac{\lg 7 - \lg 3}{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \cdot \lg 2} = \frac{\lg 7 - \lg 3}{\frac{2}{15} \cdot \lg 2} \approx 9{,}17$ Die Flächen sind nach etwas über 9 Tagen gleich groß.	2	1 2	3
d)	$A = 3 \cdot 2^{\frac{23}{3}} + 7 \cdot 2^{\frac{23}{5}} \approx 779{,}32$ Der Teich ist ungefähr 780 m^2 groß.		2	1
	Insgesamt 22 BWE	6	11	5

32. ^{14}C

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	$f(5730) = 0{,}5^{\frac{5730}{5730}} = 0{,}5 = 50\%$ $\quad f(11500) = 0{,}5^{\frac{11500}{5730}} \approx 0{,}249 \approx 25\%$	2	3	
b)		2	2	
c)	$0{,}53 = 0{,}5^{\frac{x}{5730}}$ $\quad \lg 0{,}53 = \frac{x}{5730} \lg 0{,}5 \Rightarrow x = 5248{,}3$ Ötzi starb vor etwa 5 250 Jahren.		2	2
d)	Altersbestimmung: $1922 - (-1323) = 3245$. $f(3245) = 0{,}5^{\frac{3245}{5730}} = 0{,}6753 = 67{,}53\%$ In Tutanchamuns Mumie waren noch ca. 67,5 % des ursprünglichen C14-Anteils vorhanden.	2	2	
e)	Der noch vorhandene Anteil an C14 ist $\frac{0{,}97}{15{,}3} \approx 0{,}0634$. Es gilt $0{,}0634 = 0{,}5^{\frac{x}{5730}} \Rightarrow x \approx 22\,802$. Die Höhlenmalereien sind danach etwa 23 000 Jahre alt.		1 2	2
	Insgesamt 22 BWE	6	12	4

33. Gefahr aus dem Weltall

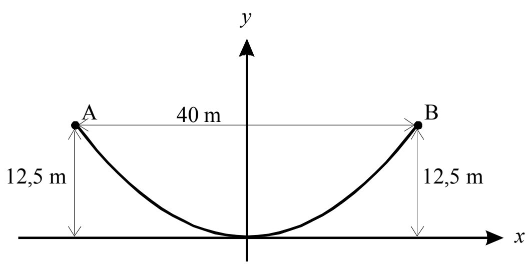
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Aus der Zeichnung abgelesen: 20 Minuten $f(x)=2^x$ x in Einheiten von 20 min $w(x)=2^{3x}=8^x$ x in Einheiten von Stunden $w(5)=8^5=32\,768$ Nach 5 Stunden beträgt die Länge des Wurms 32 768 mm oder ca. 32,77 m.	2	1 1 2	
b)	$v=300\,000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}=1{,}08\cdot10^9\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. $s(1\text{h})=1{,}08\cdot10^9$ km = 1 080 000 000 km. $s(1\,\text{Tag})=1{,}08\cdot10^9\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot24\text{h}=2{,}592\cdot10^{10}\ \text{km}=25\,920\,000\,000\ \text{km}$.	1	2	
c)	Das Funksignal breitet sich linear aus; das Wurmwachstum hingegen verläuft exponentiell.		1	1
d)	$2{,}59\cdot10^{10}\,\text{km}=2{,}59\cdot10^{16}\,\text{mm}$ $2{,}59\cdot10^{16}=8^x$ $x=\frac{\lg 2{,}59+16}{\lg 8}$ $x\approx18{,}17$ Nach etwas mehr als 18 Stunden (bzw. 13 Stunden nach Absenden des Warnsignals) hat der Wurm die Erde mit seinem Vorderteil erreicht.		3	2
e)	Das Funksignal braucht 24 Stunden, um die Erde zu erreichen, d.h. es erreicht die Erde erst 29 Stunden nach Beginn der Katastrophe. Es kommt damit zu spät auf der Erde an.	2	1	1
	Insgesamt 22 BWE	5	12	5

34. Stuntman

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	$w=v\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}$ $=\frac{100}{3{,}6}\cdot\sqrt{\frac{4}{9{,}81}}$ $\approx17{,}74$ Die Flugweite beträgt ca. 17,74 m.	2	1	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
b)	$w = v \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} \Leftrightarrow v = \frac{w}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} = \frac{100}{\sqrt{\frac{2 \cdot 2}{9{,}81}}} \approx 156{,}6$. Ein Fahrzeug müsste eine Geschwindigkeit von mindestens $156{,}6\,\frac{m}{s}$ bzw. $563{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ beim Absprung besitzen, was für „einen normalen Pkw“ unmöglich ist.	1	3	1 1
c)	$w = v \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \left(\frac{w}{v}\right)^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow h = \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{w}{v}\right)^2 = 8{,}11$. Die Absprunghöhe müsste mindestens 8,11 m betragen, damit ein Fahrzeug bei einer Geschwindigkeit von $140\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ eine Flugweite von über 50 m erreicht.	1	2	2
d)	(1) Veränderung der Flugweite bei doppelter Geschwindigkeit und gleich bleibender Absprunghöhe: $w = 2v \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$ w ist proportional zu v. Eine Verdopplung der Geschwindigkeit bewirkt eine Verdoppelung der Flugweite. (2) $w = v \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 2h}{g}} = \sqrt{2} \cdot v \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$ w ist proportional zu $\sqrt{h}$. Wird die Höhe verdoppelt, wächst die Flugweite um den Faktor $\sqrt{2}$, sie verdoppelt sich also nicht. Erst bei einer Vervierfachung der Höhe verdoppelt sich die Flugweite.	3	4	
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

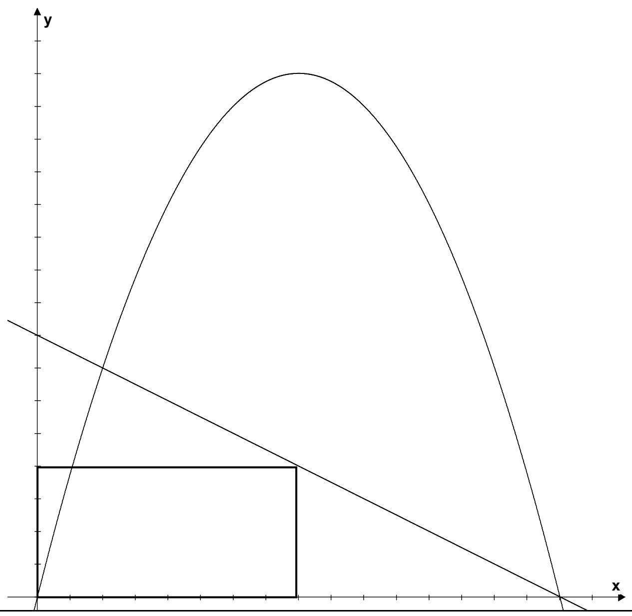
35. Brücken

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Zeichnung z.B. so:  A(–20 | 12,5) und B(20 | 12,5)	3		
b)	Gleichung (3) ist richtig. Eine Begründung ist nicht gefordert.		2	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>Aus Symmetriegründen müssen lediglich 3 Einzellängen berechnet werden, da jede Seillänge viermal auftritt.
Für die Gesamtlänge der Seile gilt also
$4\cdot\left(f(5)+f(10)+f(15)\right)=4\cdot\left(0{,}78125+3{,}125+7{,}03125\right)=4\cdot 10{,}9375=43{,}75$.
Bei korrekter Auswahl in Aufgabenteil b) ergeben sich damit 43,75 m.
Falls in Aufgabenteil b) die falsche Auswahl (1) getroffen und damit folgerichtig weitergerechnet wurde, ist dies zwar einerseits als korrekt zu beurteilen, wegen des dann geringeren Rechenaufwands in Aufgabenteil c) aber mit zwei Punkten Abzug zu werten. Im Falle der falschen Auswahlen (2) oder (4) in Aufgabenteil b) und folgerichtigem Weiterarbeiten in Aufgabenteil c) ist wegen des dann vergleichbaren Rechenaufwands in diesem Aufgabenteil die volle Punktzahl zu geben.</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Da eine Fahrbahnseite nach den Angaben aus der Abbildung 5 m breit ist, ergibt sich die maximale Durchfahrtshöhe zu $|f(5)|$ m = 4 m.
Eine Fahrzeughöhe von 3,19 m bedeutet, dass bis zur maximalen Durchfahrtshöhe noch 0,81 m fehlen. Es ist also die Gleichung
$-0{,}81=-0{,}16x^2$ zu lösen. Die negative der beiden Lösungen ist irrelevant, da das Fahrzeug auf der rechten Fahrbahnhälfte fahren muss. Das Fahrzeug darf also maximal 2,25 m breit sein.</td><td></td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>$c = 45$. Zur Berechnung von a können die Koordinaten des Punktes P (50/20) genutzt werden:
$20=a\cdot 50^2+45$
$20=2500a+45$
$2500a=-25$
$a=-\frac{1}{100}$
Die Gleichung des Brückenbogens lautet damit $y=-\frac{1}{100}x^2+45$.</td><td>1</td><td>2
1</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Die Fußpunkte der beiden Pfeiler lassen sich durch die Nullstellen der Parabel beschreiben:
$-\frac{1}{100}\cdot x^2+45=0$
$x^2=4500$
$x=\pm 67{,}08...$
Entfernung der Pfeilerfußpunkte: $2\cdot 67{,}08...=134{,}16...$
Die Fußpunkte der Pfeiler sind etwa 134 m voneinander entfernt.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 22 BWE</td><td>4</td><td>14</td><td>4</td></tr>
</table>

36. Flächeninhalt eines Rechtecks

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Für das Rechteck *OBCD* ergibt sich: $A_{OBCD} = 2 \cdot 5{,}5 = 11$ und für das Rechteck *OEFG*: $A_{OEFG} = 8 \cdot 2{,}5 = 20$. Der Flächeninhalt des Rechtecks *OBCD* beträgt 11 cm^2, der des Rechtecks *OEFG* 20 cm^2.	2		
b)	$g(x) = -0{,}5x + 6{,}5$		3	
c)	$g(x) = -0{,}5x + 6{,}5$. Eine Möglichkeit ist, $x = -2$ in die Funktionsgleichung einzusetzen. $g(-2) = -0{,}5 \cdot (-2) + 6{,}5 = 1 + 6{,}5 = 7{,}5$. Also liegt der Punkt (–2 | 7,5) auf der Geraden *g*. Andere Argumentation: Der Punkt (0 | 6,5) liegt auf der Geraden. Zwei Einheiten links davon ist wegen der Steigung von –0,5 der Funktionswert dort um eine Einheit höher, also liegt (–2 | 7,5) auf der Geraden. Ersatzlösung: $h(x) = -0{,}5\,x + 5{,}5$. $h(-2) = -0{,}5 \cdot (-2) + 5{,}5 = 1 + 5{,}5 = 6{,}5 \neq 7{,}5$. Der Punkt (–2 | 7,5) liegt nicht auf der Geraden *h*. *Bei richtiger Bearbeitung der Ersatzlösung wird 1 Punkt gegeben.*	3		
d)	$A(x) = x \cdot g(x) = x \cdot (-0{,}5x + 6{,}5) = -0{,}5x^2 + 6{,}5x$		3	
e)	*Es gibt mehrere Lösungswege: Drei werden hier dargestellt.* 1. Lösungsweg: Berechnen der Nullstellen der quadratischen Funktion und anschließend Bestimmung der *x*-Koordinate des Scheitelpunktes durch Symmetrieüberlegungen: $A(x) = -0{,}5x^2 + 6{,}5x = x \cdot (-0{,}5x + 6{,}5)$ $A(x) = 0$ bedeutet $x = 0$ oder $-0{,}5x + 6{,}5 = 0$. Also: $A(x) = 0$ bedeutet $x = 0$ oder $x = 13$. Die *x*-Koordinate des Scheitelpunktes liegt in der Mitte zwischen den Nullstellen, d. h. der Scheitelpunkt liegt bei $x = 6{,}5$. Eingesetzt in *A* ergibt sich: $A(6{,}5) = -0{,}5 \cdot 6{,}5^2 + 6{,}5 \cdot 6{,}5 = -21{,}125 + 42{,}25 = 21{,}125$. Also ist (6,5 | 21,125) der Scheitelpunkt von *A*. Das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt hat die Längen 6,5 cm und 3,25 cm. Der Flächeninhalt beträgt danach 21,125 cm^2. 2. Lösungsweg: Die Scheitelpunktsform kann mit der quadratischen Ergänzung bestimmt werden: $A(x) = -0{,}5 \cdot (x - 6{,}5)^2 + 21{,}125$. Die Scheitelpunktkoordinaten lassen sich nun ablesen: *S*(6,5 | 21,125).		5	2

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	3. Lösungsweg: Als Lösungsweg kann das Probieren mit Hilfe einer Wertetabelle akzeptiert werden, wenn genügend Werte, auch in der Umgebung von $x = 6{,}5$ berechnet werden. Ersatzlösung mit $A(x) = -0{,}5\,x^2 + 5{,}5\,x$. $A(x) = -0{,}5x^2 + 5{,}5x = x \cdot (-0{,}5x + 5{,}5)$. Nullstellen von A: $x = 0$ oder $x = 11$. Scheitelpunkt der Parabel von A liegt bei $x = 5{,}5$. $A(5{,}5) = -0{,}5 \cdot 5{,}5^2 + 5{,}5 \cdot 5{,}5 = -15{,}125 + 30{,}25 = 15{,}125$.			
f)	Die Funktion $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ hat die Nullstelle $x_0 = -\frac{b}{a}$. Das Rechteck (s. Abbildung) mit den Seitenlängen x und $f(x)$ mit $f(x) = ax + b$ ($a < 0$ und $b > 0$) hat den Flächeninhalt $A(x) = x \cdot f(x)$. Wegen $f(x) = ax + b$ gilt $A(x) = x \cdot (a \cdot x + b)$ Der Graph der Funktion A ist eine Parabel mit den Nullstellen 0 und $-\frac{b}{a}$. Wegen der Symmetrieeigenschaft von Parabeln quadratischer Funktionen liegt das Maximum der Funktion A in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen und damit an der Stelle $x_{\max} = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} x_{\text{Nullstelle}}$ 			4
	Insgesamt 22 BWE	5	11	6

37. Rechteck im Trapez

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Flächeninhalt des Trapezes: Es gibt verschiedene Lösungswege. $A = \frac{15+3}{2} \cdot 8 = 72$ (cm²).	3		
b)	Es gibt verschiedene Lösungswege. P liegt auf der Geraden durch C und D. Diese hat die Gleichung $f(x) = -1{,}5x + 15$. Der Punkt P hat die y-Koordinate $f(2) = -1{,}5 \cdot 2 + 15 = 12$, also: $P(2 \mid 12)$. Flächeninhalt des Rechtecks: $A_R = 2 \cdot 12 = 24$ (cm²).	3	4	
c)	Der Flächeninhalt des Rechtecks ergibt sich aus dem Produkt der Koordinaten des Punktes P. $A_R = x \cdot y = x \cdot (-1{,}5x + 15)$		3	
d)	$A_R = x \cdot y = x \cdot (-1{,}5x + 15) = -1{,}5x^2 + 15x$. Es gibt mehrere Möglichkeiten, das Maximum des Flächeninhalts zu berechnen, z.B.: 1. über die Nullstellen der Parabel: Die Gleichung $x \cdot (-1{,}5x + 15) = 0$ hat die Nullstellen 0 und 10. Aus Symmetriegründen liegt das gesuchte Maximum an der Stelle $x = 5$. Das Maximum selbst beträgt $A_{\max} = 5 \cdot (-1{,}5 \cdot 5 + 15) = 37{,}5$. 2. durch Scheitelpunktberechnung: $A_R = -1{,}5x^2 + 15x$ $A_R = -1{,}5(x^2 - 10x + 25) + 37{,}5$ $A_R = -1{,}5(x-5)^2 + 37{,}5$ Scheitelpunkt $S\,(5 \mid 37{,}5)$. Die Lage des gesuchten Rechtecks mit maximalem Flächeninhalt wird durch den Punkt $P\,(5 \mid -1{,}5 \cdot 5 + 15) = P\,(5 \mid 7{,}5)$ beschrieben. Der maximale Flächeninhalt beträgt 37,5 cm².		3	2
e)	Die geforderte Gerade hat die Gleichung $p(x) = \frac{2}{3}x$. Zum Nachweis des Senkrechtstehens der Geraden 1. Mit Geradensteigungen: Die Steigung von p ist $m_p = \frac{2}{3}$. Die Steigung der Geraden durch C und D ist, wie schon bekannt, $m_{CD} = -\frac{3}{2}$. Das Produkt dieser Steigungen ist (– 1), also sind die Geraden senkrecht zueinander. *(Sollte dieser Sachverhalt nicht bekannt sein, so kann mit den zugehörigen Steigungsdreiecken argumentiert werden.)*	1		3

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	2. mit dem Dreieck AP_SD: Das Dreieck ist genau dann rechtwinklig, wenn (Satz des Pythagoras!) $\lvert AD\rvert^2 = \lvert AP_S\rvert^2 + \lvert P_SD\rvert^2$ gilt. Mit $\lvert AD\rvert^2 = 225$, $\lvert AP_S\rvert^2 = 69{,}2308$ und $\lvert P_SD\rvert^2 = 155{,}7692$ ergibt sich das gewünschte Resultat.			
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

Quelle: Bearbeitete Version der Aufgabe aus den KMK-Bildungsstandards Mathematik Mittlerer Abschluss, 2003.

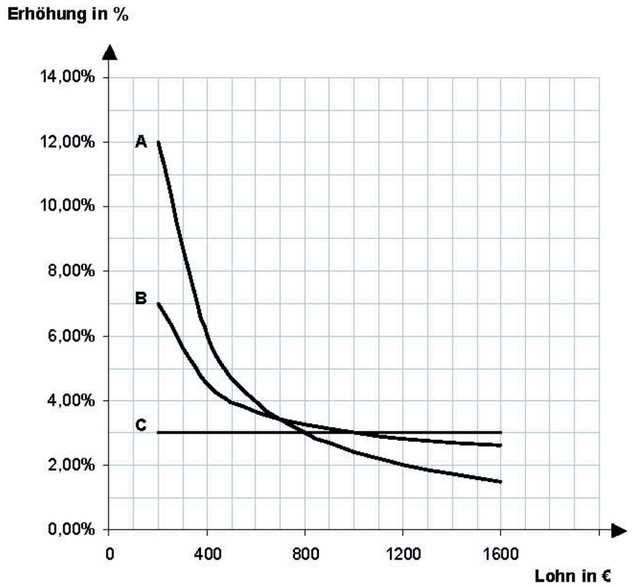
38. Lohnerhöhung

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Lohnerhöhungen in Abhängigkeit vom Lohn:	3		

Lohn	200 €	400 €	600 €	800 €	1000 €	1200 €	1400 €	1600 €
A	24 €	24 €	24 €	24 €	24 €	24 €	24 €	24 €
B	14 €	18 €	22 €	26 €	30 €	34 €	38 €	42 €
C	6 €	12 €	18 €	24 €	30 €	36 €	42 €	48 €

		I	II	III
b)	Berechnen der Lohnerhöhung in % und Erstellen der Tabelle und Grafik (berechnete Werte auf eine Stelle gerundet):	4	4	

Lohn	200 €	400 €	600 €	800 €	1000 €	1200 €	1400 €	1600 €
A	12 %	6 %	4 %	3 %	2,4 %	2 %	1,7 %	1,5 %
B	7 %	4,5 %	3,7 %	3,3%	3 %	2,8 %	2,7 %	2,6 %
C	3 %	3 %	3 %	3 %	3 %	3 %	3 %	3 %



		I	II	III
			6	
c)	Je nach dem, was zum Ausdruck gebracht werden soll, gilt eine der beiden			5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Begründungen: • Soll zum Ausdruck gebracht werden, dass untere Lohngruppen stärker profitieren, ist die Grafik mit prozentualer Lohnerhöhung auszuwählen. • Soll dagegen zum Ausdruck gebracht werden, dass alle das Gleiche an Lohnerhöhung erhalten, ist die gegebene Grafik auszuwählen.			
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

Quelle: Bearbeitete Version der Aufgabe aus den KMK-Bildungsstandards Mathematik Mittlerer Abschluss, 2003.

39. Herr Sorgenfrei

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	$K_n = K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^n$			
	$93\,649{,}06 = 50\,000 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^{16}$			
	$1+\frac{p}{100} = \sqrt[16]{\frac{93\,649{,}06}{50\,000}}$			
	$p = 4$			
	Im ersten Modell wird das Geld mit 4% verzinst.	1	2	
b)	1. Modell:			
	Gewinn: 93 649,06 – 50 000 = 43 649,06			1
	Steuern: $43\,649{,}06 \cdot 0{,}25$ = 10 912,27	1		
	Nettoauszahlung: 93 649,06 – 10 912,27 = 82 736,79			
	2. Modell:	1		
	$50\,000 \cdot 1{,}0325^{16} = 83\,408{,}63$			
	Also ist das 2. Modell trotz niedriger Zinsen wegen der Steuerfreiheit um 671,84 € ertragreicher.		1	
c)	$93\,649{,}06 = K_0 \cdot \left(1+\frac{3{,}25}{100}\right)^{14}$		1	
	$K_0 = \frac{93\,649{,}06}{1{,}0325^{14}}$	1		
	$K_0 = 59\,847{,}03$	1		
	Die Schwester von Herrn Sorgenfrei müsste 59 847,03 € anlegen.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Nach 16 Jahren: $50\,000 \cdot \left(1-\frac{2}{100}\right)^{16} = 50\,000 \cdot 0{,}98^{16} \approx 36\,189{,}89$ Nach 16 Jahren beträgt die Kaufkraft der 50 000 € noch ca. 36 190 €. 1. Modell: $82\,736{,}79 \cdot 0{,}98^{16} \approx 59\,884{,}70$ Kaufkraft des Vermögens entsprechend dem ersten Modell: ca. 59 885 €.	1 1	2 2	1
e)	$100\,000 = 50\,000 \cdot \left(1+\frac{3{,}25}{100}\right)^{x}$ $1{,}0325^{x} = 2$ $x = \dfrac{\lg 2}{\lg 1{,}0325}$ $x \approx 21{,}7$ Herr Sorgenfrei müsste sein Geld etwa 21,7 Jahre anlegen. Bei 100 000 € müsste er das Geld genauso lange anlegen, da der Zeitraum für die Verdoppelung des Kapitals nicht vom Anfangskapital abhängig ist.	1	2	2
	Insgesamt 22 BWE	8	10	4

40. Lotterie auf dem Schulfest

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Es gibt 6 mögliche gleichwahrscheinliche Ergebnisse: rbg, rgb, brg, bgr, gbr, grb. Das Ergebnis rbg ist eins davon. Also beträgt die Wahrscheinlichkeit $P(\text{rbg}) = \frac{1}{6}$. Es kann auch mit Hilfe der einzelnen Züge argumentiert werden: $P(\text{r-b-g}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6} \approx 17\%$.	2	2	
b)	Die Anzahl n der möglichen Ergebnisse berechnet sich aus $n = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. *Hinweis Die Anzahl ergibt sich aus 5!.*	2	2	
c)	Wenn man das „Tippen" der Lotterieteilnehmer als einen zufälligen Vorgang auffasst, bei dem alle 120 Ergebnisse gleichverteilt getippt werden, dann ist die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Ereignisses $\frac{1}{120}$. Bei 500 Tippscheinen werden 4,2 Gewinne erwartet, da $500 \cdot \frac{1}{120} \approx 4{,}2$.		4	
d)	Einnahmen: $500 \cdot 1{,}5\ € = 750\ €$ Ausgaben: $25\ € + 5 \cdot 100\ € = 525\ €$. Gewinn = Einnahmen – Ausgaben = $750\ € - 525\ € = 225\ €$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	30 % von den Einnahmen sind $750\ € \cdot 0{,}3 = 225\ €$. Die Planung ist also – so gesehen – stimmig. Das Risiko liegt in der Anzahl der auftretenden Gewinner. Die erwartete Anzahl von Gewinnern ist ein Durchschnittswert für eine große Anzahl von Tippscheinen. Es können also durchaus mehr als 5 Gewinner vorkommen. Man muss deshalb bedenken, ob man auf Vorrat gekaufte Gewinne zurückgeben kann bzw. ob man schnell Gewinne nachkaufen kann.		3	2
e)	Der Tabelle liegt eine Binomialverteilung zugrunde. Die Schwierigkeit für die Schülerinnen und Schüler liegt darin, dass die Prozentangaben summiert und der Unterschied zu 100 % betrachtet werden muss. Es ist zu prüfen, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Anzahl von Gewinnen erwartet werden kann. Die Klasse hat mit 5 Gewinnen kalkuliert. Diese werden mit einer Wahrscheinlichkeit von 75,8 % ausreichen, d.h. in einem Viertel der Fälle werden mehr Gewinne abgefordert werden. Das Risiko, Verlust zu machen, ist groß. Es empfiehlt sich, die Anzahl der Gewinne zu erhöhen: Bei 6 und 7 Gewinnen bleibt noch eine Chance von 12,9 % bzw. 6,2 %, dass mehr Gewinne abgefordert werden. Erst ab 8 Gewinnen sinkt die Wahrscheinlichkeit, dass mehr Gewinne ausgezahlt werden, auf 2,7 %. Je nach Sicherheitsbedürfnis können Schülerinnen und Schüler argumentieren, dass also mit 8 Gewinnen das Restrisiko genügend klein gehalten ist. Das Produkt aus Anzahl der gekauften Gewinne und den Kosten für einen Gewinn muss 500 ergeben. Man könnte also 8 Gewinne zu 62,5 € kaufen. *Hinweis: Wenn Schülerinnen und Schüler aufgrund eines anderen Sicherheitsbedürfnisses auf eine andere Zahl als 8 kommen und diese sinnvoll begründen, so ist die Aufgabe auch als richtig zu bewerten.*		2	3
	Insgesamt 22 BWE	4	13	5

41. Lotterie

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Für die erste Ziffer (das erste Plättchen) gibt es 5 Möglichkeiten, für jede dieser 5 Möglichkeiten gibt es 4 Möglichkeiten für die nächste Ziffer u.s.w. Insgesamt gibt es also $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ verschiedene mögliche fünfstellige Zahlen, die gezogen werden können.	3		
b)	Von den 120 bei der Ziehung gleichwahrscheinlichen möglichen Gewinnzahlen ist für den Käufer (eines einzigen Loses) genau eine günstig. Also $p_1 = \frac{1}{120} = 0{,}00833... \approx 0{,}83\ \%$.	3		

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	Wenn nur die letzten beiden Ziffern übereinstimmen sollen, können die drei ersten Ziffern bei der Ziehung für den Losbesitzer beliebig sein. Dafür gibt es dann $3! = 6$ Varianten. Insgesamt gibt es von den 120 bei der Ziehung gleichwahrscheinlichen möglichen Zahlen also 6, bei denen die letzten beiden Ziffern mit denen des Losbesitzers übereinstimmen. Eine von diesen 6 Gewinnzahlen würde dem Losbesitzer aber einen Hauptgewinn bringen, so dass genau die verbleibenden 5 Gewinnzahlen zur „Riesenwurst mit Beilage" führen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also $p_2 = \frac{5}{120} = \frac{1}{24} = 0{,}04166... \approx 4{,}2\ \%$.		4	
d)	Die Veranstalter haben 600 € ($= 1200 \cdot 0{,}5$ €) Einnahmen und 12 € Materialkosten. Nachdem die Gewinnzahl gezogen worden ist, gibt es 10 Lose, die zu einem Hauptgewinn gehören. Entsprechend der Argumentation von c) gibt es 50 Lose, die zur „Riesenwurst mit Beilage" gehören. Also müssen die Veranstalter noch 100 € für Würstchen und 300 € für Buchpreise einkalkulieren. Dann bleiben also 188 € ($= 600$ € $- 12$ € $- 100$ € $- 300$ €) als „Gewinn" für die Veranstalter übrig. Ausgeschüttet werden 400 €, das sind als 50 % der Einnahmen von 600 €.	2	3	
e)	Wenn nur 1 000 Lose verkauft werden, dann haben die Schüler nur noch Einnahmen in Höhe von 500 €. Im für sie ungünstigsten Fall haben sie dabei alle auch alle 60 Lose verkauft, die durch die Ziehung zu „Ausschüttungskosten" führen. Dann bleiben als Gewinn gegenüber d) 100 € weniger, also 88 €. Im für die Schüler finanziell günstigsten Fall haben sie keines der 60 Lose verkauft, die durch die Ziehung zu „Ausschüttungskosten" führen. Dann bleiben als Gewinn 488 €. *Bemerkung:* *Dieser Fall wäre natürlich für die Veranstalter peinlich und würde sie Betrugsvorwürfen aussetzen, glücklicherweise sind die beiden genannten Extremfälle – vor allem der zweite – sehr unwahrscheinlich:* $\approx 10^{-5}$ *bzw.* $5 \cdot 10^{-51}$!		3	2
f)	Genau dann, wenn bei der Ziehung als letzte Ziffer gerade die letzte Ziffer der Losnummer des Losbesitzers gezogen wird, bekommt dieser überhaupt einen Gewinn. Man könnte diese Wahrscheinlichkeit über ein Abzählargument (vgl. c)) oder mit Hilfe eines Baumdiagramms bestimmen. Die einfachste Argumentation besteht aber darin, dass ja alle Plättchen gleichberechtigt sind (Symmetrieargument), also auch in Bezug auf den letzten Zug. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also $p_2 = \frac{1}{5} = 20\ \%$.			2
	Insgesamt 22 BWE	8	10	4

42. Spielenachmittag

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	• Björn gewinnt genau noch dann, wenn Eva eine "1" würfelt. Also ist $P(\text{"Björn gewinnt"}\mid\text{"Björn wirft eine 2"}) = \frac{1}{6} \approx 17\%$. • Eva gewinnt genau noch dann, wenn sie eine „4", eine „5" oder eine „6" würfelt. Also ist $P(\text{"Eva gewinnt"}\mid\text{"Björn wirft eine 3"}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\,\%$. *<u>Bemerkung:</u> Diese beiden Punkte kann man – vom fortgeschrittenen Standpunkt aus – als Fragen nach <u>bedingten</u> Wahrscheinlichkeiten auffassen, dies wird der klaren Verständlichkeit wegen hier in der Lösung auch in der Notation zum Ausdruck gebracht. Dennoch ist Kenntnis und Umgang mit dem Begriff und dem Kalkül „bedingte Wahrscheinlichkeit" hier keine Voraussetzung. Durch die Bedingungen werden hier vielmehr die Situationen beschrieben, welche die Schülerinnen und Schüler mit einfachen Wahrscheinlichkeitsvorstellungen bearbeiten können.*	2	2	
b)	• Das Spiel geht genau dann unentschieden aus, wenn insgesamt ein „Pasch" geworfen wird: $P(\text{"Spiel geht unentschieden aus"}) = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \approx 17\%$. • Hier muss Björn eine „1" werfen und Eva eine „2". Also P(„Eva würfelt eine „2" und gewinnt damit) $= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \approx 2{,}8\%$. (Argumentation entweder mit der (stochastischen)Unabhängigkeit der beiden Würfe oder mithilfe eines zweistufigen Wahrscheinlichkeitsbaumes). • Hier verwendet man am besten einen zweistufigen Wahrscheinlichkeitsbaum: Björn hat nur eine Gewinnchance, wenn er eine „3" oder eine „5" würfelt. Damit er tatsächlich gewinnt, muss Eva im ersten Fall eine „1" oder eine „2" werfen und im zweiten Fall eine der vier Zahlen von „1" bis „4". Also gilt: P(„Björn würfelt eine ungerade Zahl und gewinnt damit") $= \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2+4}{36} = \frac{1}{6} \approx 17\%$.	4	2	
c)	Die Gewinnregel vergleicht die jeweiligen Augenzahlen, die (stochastisch) <u>unabhängig</u> voneinander geworfen werden. Daher spielt es für die Wahrscheinlichkeiten der der drei möglichen Spielausgänge keine Rolle, wer jeweils beginnt: Björn kann Eva ruhig anfangen lassen.		4	
d)	Da sich beliebig oft hintereinander die Situation „unentschieden" ergeben könnte, liegt streng genommen ein Zufallsexperiment mit unendlich viele möglichen Ausgängen vor, das auf zwei Ausgänge reduziert werden muss. Durch folgende Argumentation kann man diesem Problem entgehen: Nachdem Björn geworfen hat, endet das Spiel, wenn Eva zum ersten Mal eine der <u>fünf</u> Zahlen wirft, die <u>verschieden</u> von der Zahl des Wurfes von Björn sind. Aus Symmetriegründen sind diese fünf Zahlen gleichberechtigt, treten also mit gleicher Wahrscheinlichkeit als entscheidende letzte Zahl auf. Es wird also der gleiche Effekt erzielt, als wenn im zweiten Zug aus einer Urne mit den fünf vom ersten Wurf verschiedenen Zahlen gezogen würde.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Man kann nun entweder so weiter argumentieren, dass alle Wurfpaare mit verschiedenen Werten gleichwahrscheinlich sind, von denen jeweils genau die Hälfte zum Sieg von Björn bzw. Eva führen, oder man geht explizit auf das zugehörige Baumdiagramm ein und betrachtet z.B. alle Wege die zum Sieg von Björn führen: $P(\text{„Björn gewinnt“}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{0}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{5}=\frac{1}{6}\cdot\frac{15}{5}=\frac{1}{2}$ Das Spiel ist also fair. <u>*Bemerkung:*</u> *Eine Argumentation in der hier vorgeführten Schärfe wird nicht für die volle Punktzahl erwartet, aber eine halbwegs überzeugende Argumentation sollte schon sichtbar werden.*		2	2
e)	Aus (c) folgt, dass das Spiel jetzt fair ist. Das schließt jedoch nicht aus, dass die relative Häufigkeit - z.B. für einen Sieg von Eva - auch bei einer großen Anzahl von Spielen („Gesetz der großen Zahl“) von 0,5 deutlich abweicht. Eva hatte einfach eine „Glückssträhne“! (Dazu muss sie lediglich viermal mehr gewonnen haben als Björn.).		2	2
	Insgesamt 22 BWE	6	12	4

43. Verkehrszählung

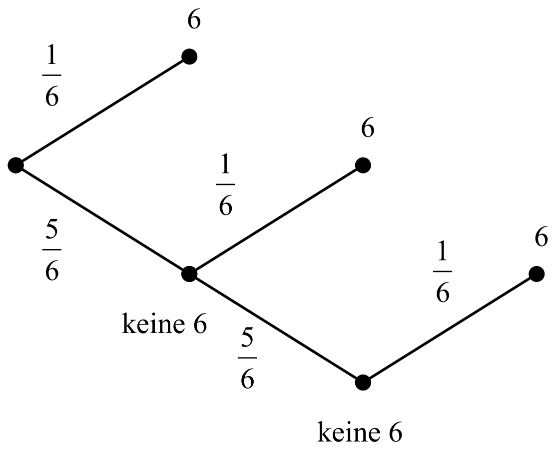
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Vorbemerkung: Die Bearbeitung dieser Aufgabe erfordert wenig Rechnungen, aber die Fähigkeiten, - Aussagen zu verstehen, - sorgfältig zwischen Anteilen und Zahlen (also zwischen relativen und absoluten Häufigkeiten) zu unterscheiden und - Überschlagsrechnungen ausführen zu können.	2	2	
a)	Die Aussage ist richtig: Ein Blick auf das Diagramm zeigt, dass die **Zahl** der Pkws pro Stunde in der Zeit von 17 Uhr bis 18 Uhr zu keiner anderen Tageszeit erreicht wird.	2		
b)	Die Aussage ist falsch: In der Zeit von 22 Uhr bis 7 Uhr sind mehr als 6 500 (6 738) Autos unterwegs, während das Maximum am Nachmittag (pro Stunde) bei 5 468 Autos liegt.	2		
c)	Die Aussage ist falsch: Z. B. zwischen 2 und 3 Uhr sind mehr als 30 % der Fahrer nicht angeschnallt, während zwischen 14 und 18 Uhr sind niemals mehr als 10 % nicht angeschnallt.	1	2	
d)	Die Aussage ist falsch: Addiert man alle Werte, so erhält man, dass im gesamten Beobachtungszeitraum 49 995 Pkws gezählt wurden, also im Schnitt etwas mehr als 2 000 pro Stunde		3	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Hinweis: Legt man eine Parallele zur x-Achse bei 1500 Pkws pro Stunde in das Diagramm, so sieht man, dass in 14 Stunden der Verkehr diesen Wert teilweise um das Doppelte überschritten hat; dies kann in den anderen zehn Stunden nicht ausgeglichen werden.			
e)	Die Aussage ist richtig: Da eine Stunde 3 600 Sekunden hat, bedeutet „mehr als ein Auto pro Sekunde" mehr als 3 600 Pkws pro Stunde. Dieser Wert wird sowohl im morgendlichen wie im frühabendlichen Verkehr deutlich überschritten.		2	
f)	Die Aussage ist richtig: 10 % ist einfach zu erkennen, ohne Rechnung.		2	
g)	Die Aussage ist richtig: Hier ist es sinnvoll, die jeweiligen Anteile nicht angeschnallter Fahrer zu errechnen; es reichen hierfür ungefähre Schätzungen. (Die genauen Werte – die nicht alle berechnet werden müssen – sind in der unten angeführten Tabelle zusammengefasst.) Man sieht, dass in den Nachtstunden der Anteil mit 27 % - 35 weit höher als am Tag liegt.		2	
h)	Interpretationsmöglichkeiten sind: • Es werden die absoluten Zahlen betrachtet. Dann ist die Aussage falsch, denn die absoluten Werte der nicht angeschnallten Autofahrer sind am Nachmittag am höchsten. • Es werden die prozentualen Anteile betrachtet. Dann ist die Aussage richtig, denn in der Nacht ist der Anteil der nicht angeschnallten Autofahrer mit z.T. über 30 % am höchsten. • Die „meisten" kann auch „mehr als die Hälfte" bedeuten. Dann ist die Aussage falsch, denn es sind niemals mehr als 50 % der Autofahrer nicht angeschnallt.			6
	Insgesamt 22 BWE	5	11	6

Zeitraum	Anteil der nicht angeschnallten Fahrer
0 Uhr - 1 Uhr	27,6 %
1 Uhr - 2 Uhr	31,0 %
2 Uhr - 3 Uhr	36,2 %
3 Uhr - 4 Uhr	33,6 %
4 Uhr - 5 Uhr	13,6 %
5 Uhr - 6 Uhr	7,2 %
6 Uhr - 7 Uhr	7,4 %
7 Uhr - 8 Uhr	6,1 %
8 Uhr - 9 Uhr	7,1 %
9 Uhr - 10 Uhr	9,7 %
10 Uhr - 11 Uhr	8,3 %
11 Uhr - 12 Uhr	9,4 %

Zeitraum	Anteil der nicht angeschnallten Fahrer
12 Uhr - 13 Uhr	9,8 %
13 Uhr - 14 Uhr	8,9 %
14 Uhr - 15 Uhr	9,9 %
15 Uhr - 16 Uhr	9,9 %
16 Uhr - 17 Uhr	8,0 %
17 Uhr - 18 Uhr	7,8 %
18 Uhr - 19 Uhr	10,1 %
19 Uhr - 20 Uhr	12,5 %
20 Uhr - 21 Uhr	14,1 %
21 Uhr - 22 Uhr	15,3 %
22 Uhr - 23 Uhr	18,0 %
23 Uhr - 24 Uhr	20,7 %

44. Mensch ärgere dich nicht

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Eine „4“ führt auf das Feld a, eine „5“ auf das Feld b, eine „6“ auf das Feld c. Das Feld d ist mit einmaligem Würfeln nicht erreichbar. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *„4, 5 oder 6“* beträgt $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.	4		
b)	Das Ereignis tritt ein, wenn man eine „1“ oder eine „3“ würfelt. Die Wahrscheinlichkeit für *„1 oder 3“* beträgt $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.	2	1	
c)	Der dritte Wurf ist unabhängig von den beiden vorigen Würfen, also beträgt die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$.		2	
d)	Dies ist ein mehrstufiger Vorgang. Deshalb ist ein Baumdiagramm nützlich. 1. Wurf 2. Wurf 3. Wurf  Seine Struktur ist in den ersten beiden Teilen aufgebaut; es ist möglich, diese Ergebnisse zu verwenden: Wenn man in der ersten Runde auf das Startfeld rückt, so hat man entweder – im ersten Wurf eine Sechs, oder – man hat im ersten Wurf keine Sechs, aber im zweiten, oder – man zwei Würfe hintereinander keine Sechs und dann, im dritten, eine Sechs. Die Wahrscheinlichkeit für das erste Ereignis ist $P=\frac{1}{6}$. Das zweite Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit $P=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$. Das dritte Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit $P=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}$. Die Summe dieser drei Zahlen ist die gefragte Wahrscheinlichkeit, also $P=\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{25}{216}=\frac{91}{216}\approx 42\,\%$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Der einfachere Lösungsweg verwendet das Gegenereignis G („Nach drei Würfen immer noch keine Sechs") zum betrachteten Ereignis E („Mindestens einer der ersten drei Würfe war eine Sechs"): $P(G)=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$. Da $P(E)=1-P(G)$, ergibt sich $P(E)=1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}\approx 42\,\%$. Im Mittel in weniger als der Hälfte aller Fälle kann man seine Figur in der ersten Runde auf das Startfeld stellen. Dies hat also schon mit Glück zu tun, ist aber auch nicht unwahrscheinlich.		7	
e)	Felix hat neun Mal hinter einander keine Sechs gewürfelt. Dafür ist die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{5}{6}\right)^9\approx 19{,}38\,\%$. Wenn etwas mit der Wahrscheinlichkeit von knapp 20 % vorkommt, so passiert es im Mittel in jedem fünften Fall und nicht „in jedem tausendsten Fall". Felix hat also nicht Recht.		1	2
f)	Die Wahrscheinlichkeit, dass alle vier in der ersten Runde „rauskommen", beträgt $\left(\frac{91}{216}\right)^4\approx 3\,\%$, also beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass „mindestens einer nicht rauskommt", ca. 97 %, das ist „fast sicher". Allerdings ist Miriams Aussage auch keine sinnvolle Entgegnung zu Felix' Unglück, sie hätte wie in e) argumentieren müssen.		2	2
	Insgesamt 22 BWE	6	12	4

45. Quader

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	(Tabelle siehe unten)	4		
b)	Für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung müssen die 1 und die 6, die 2 und die 5 und die 3 und 4 jeweils gleich wahrscheinlich sein. Außerdem muss die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 100 % ergeben, Dies kann erreicht werden, indem z.B. die Wahrscheinlichkeit für die 4 auf 30 % gesetzt werden. Sein Vorschlag ist also stimmig.		3	

Tabelle zu a):

	1	2	3	4	5	6
Gerd	43	34	122	119	40	42
Frauke	43	36	115	125	33	48
Martha	46	35	117	123	32	47
Absolute Häufigkeit	132	105	354	367	105	137
Relative Häufigkeit	0,11	0,09	0,30	0,31	0,09	0,11
Relative Häufigkeit in Prozent	11	9	30	31	9	11

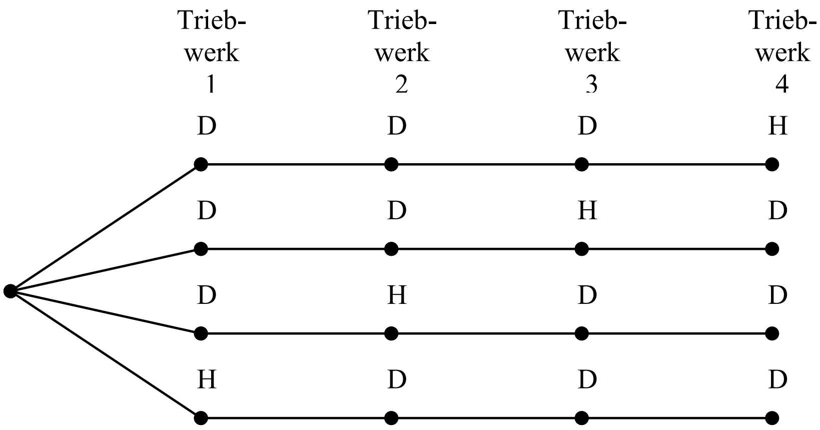
<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>Der zu erwartende Gewinn pro Spiel beträgt aus Sicht der Losbudenbetreiber:
$2\cdot 0{,}09\cdot(-5+1)\ € + (2\cdot 0{,}11 + 2\cdot 0{,}3)\cdot 1\ € = 0{,}10\ €$.
Auf lange Sicht machen die drei Losbudenbetreiber im Durchschnitt pro Durchführung einen Gewinn von 0,10 €. Sie können also auf lange Sicht damit rechnen, einen Gewinn zu machen.</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Die Auszahlungssumme ist x. Dann gibt die folgende Gleichung den auf lange Sicht zu erwartenden Gewinn wieder:
$2\cdot 0{,}09\cdot(-x+1)\ + (2\cdot 0{,}11 + 2\cdot 0{,}3)\cdot 1\ = 0{,}70$
Durch Ausmultiplizieren erhält man
$-0{,}18\cdot x + 0{,}18\ + 0{,}82\ = 0{,}70$
$-0{,}18x + 1 = 0{,}70 \mid -1$
$-0{,}18x = -0{,}3 \mid : -0{,}18$
$x = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$
Bei einer Auszahlungssumme von 1,67 € machen die drei Losbudenbetreiber einen durchschnittlichen Gewinn von 0,70 € pro Spiel.

Für einen Spieler ist dieses Spiel aber nicht sehr attraktiv. Einerseits ist der Gewinn eines Spielers nur $1{,}67\ € - 1\ € = 0{,}67\ €$. Andererseits ist die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen mit 0,18 (also ungefähr 20 %) auch ziemlich gering.</td><td>3</td><td>2

2</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Martha hat nicht Recht. Es kann durchaus passieren, dass in den ersten Spielen hintereinander Auszahlungen von 5 € (also ein Verlust von 4 € für die Losbudenbetreiber) vorgenommen werden müssen.
Im schlimmsten Fall müssen am Anfang mehrere Auszahlungen hintereinander vorgenommen werden. Für diesen Fall ist das Startkapital einzusetzen. Die Wahrscheinlichkeit für n Auszahlungen hintereinander lässt sich durch $0{,}18^n$ berechnen und einige Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle dargestellt.
<table>
<tr><td>Anzahl n</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>Wahrscheinlichkeit für n Auszahlungen hintereinander</td><td>0,0324</td><td>0,005832</td><td>0,001050</td><td>0.000189</td><td>0,000034</td><td>0,000006</td></tr>
<tr><td>Verlust bei n Auszahlungen hintereinander</td><td>8</td><td>12</td><td>16</td><td>20</td><td>24</td><td>28</td></tr>
</table>
Hier spielt das Sicherheitsbedürfnis eine Rolle. Natürlich kann es vorkommen, dass z. B. 7 Auszahlungen hintereinander vorgenommen werden müssen. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ist allerdings sehr klein: 0,0006 %. Die Wahrscheinlichkeit, 4 Auszahlungen hintereinander vornehmen zu müssen, beträgt etwa 1 % mit insgesamt 16 € Verlust. Geht man davon aus, dieses Risiko abdecken zu wollen, so reichen 10 € nicht aus und man sollte ein Startkapital von 16 € haben. In diesem Fall hätte nicht Frauke Recht, sondern Gerd.

Hinweis: Jede schlüssige und mit Zahlen belegte Antwort ist hier als richtig zu bewerten.</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 22 BWE</td><td>7</td><td>12</td><td>4</td></tr>
</table>

46. Triebwerke

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Eine Schwierigkeit dieser Aufgabe sind die sehr kleinen Ausfallwahrscheinlichkeiten. Daher wird die Exponentialdarstellung verlangt. Zur Lösung ist ein konkret gezeichnetes oder auch ein nur gedanklich vorgestelltes Baumdiagramm sehr nützlich. Für die Wahrscheinlichkeiten ergeben sich dann: P(„kein Triebwerk fällt aus“)=$\left(1-10^{-5}\right)^4=0{,}99999^4\approx 0{,}99996\approx 99{,}996\,\%$ P(„alle Triebwerke fallen aus“)=$\left(10^{-5}\right)^4=10^{-20}$. Für die dritte Teilaufgabe muss (z.B. mithilfe eines Baumes) ausgezählt werden: Es bedeuten: D = fällt aus, H = fällt nicht aus.  P(„drei Triebwerke fallen aus“) = $4\cdot\left(10^{-5}\right)^3\cdot\left(1-10^{-5}\right)\approx 3{,}99996\cdot 10^{-15}$. Die letzte Teilaufgabe ist sinnvoll mithilfe des Gegenereignisses (und damit des ersten Aufgabenteils) zu lösen: $\begin{aligned} \text{P("mindestens ein Treibwerk fällt aus")} &= 1-P(\text{"kein Triebwerk fällt aus"})\\ &= 1-0{,}99996000059999600001\\ &= 0{,}00003999940000399999\\ &\approx 0{,}00399994\,\%\\ &\approx 0{,}004\,\%. \end{aligned}$ *Hinweis: Durch die Rundung wird die Tatsache unterschlagen, dass die eben berechnete Wahrscheinlichkeit größer ist als die unter b) berechnete. Das ist inhaltlich auch klar, denn im Verhältnis zu dem Ereignis „genau ein Triebwerk fällt aus“ sind die Wahrscheinlichkeiten, „dass zwei oder noch mehr Triebwerke ausfallen“ zu vernachlässigen.*	4	6	2
b)	$\begin{aligned} P(\text{"genau ein Triebwerk fällt aus"}) &= 4\cdot 0{,}00001\cdot 0{,}99999^3\\ &= 4\cdot 0{,}00000999970000299999\\ &= 0{,}00003999880001199996\\ &\approx 0{,}00399988\,\%\\ &\approx 0{,}004\,\%. \end{aligned}$ In der Schülerrechnung liegen drei Rechenfehler vor:			

	Lösungsskizze	I	II	III
	• Jedes der 4 Triebwerke kann ausfallen, der Schüler hat nicht mit 4 multipliziert. • 10^{-5} wurde falsch in 0,0001 umgerechnet und auch die Gegenwahrscheinlichkeit wurde daher falsch zu 0,9999. • Ein weiterer Fehler ergibt sich entweder durch eine falsche Rundung oder durch eine falsche Umrechnung in die Prozentdarstellung.	2	4	
c)	Es ist zu erwarten, dass $100 \cdot 300 \cdot 4 \cdot \frac{1}{100000} = \frac{12}{10} = 1,2$ Triebwerke pro Jahr ausfallen. Die Anforderungen der Fluggesellschaft werden daher erfüllt.		2	2
	Insgesamt 22 BWE	6	12	4

47. Dominosteine

	Lösungsskizze	I	II	III
a)	Tabellen siehe unten	3		
b)	Ein Spiel ist dann fair, wenn die Wahrscheinlichkeiten für Gewinnen und Verlieren gleich groß sind. Von den 55 Steinen haben 30 Steine eine einstellige Augenzahl und 25 Steine eine zweistellige Augenzahl. Die Wahrscheinlichkeit, einen beliebigen Stein zu ziehen, beträgt $\frac{1}{55}$. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, einen Stein mit einer einstelligen Augenzahl zu erhalten, $\frac{30}{55} \geq 0,5 = 50\%$. Anna hat Recht. Das Spiel ist nicht fair.	3		
c)	Das Domino-Spiel enthält 55 Steine, das ist eine ungerade Anzahl. Deshalb kann es keine Aufteilung für ein faires Spiel geben. Entweder Anna oder Leo wird immer mindestens <u>ein Stein mehr</u> zugeordnet.			2

Tabellen zu a):

Augenwert	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Anzahl der Steine mit diesem Augenwert	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5

Augenwert	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Anzahl der Steine mit diesem Augenwert	5	4	4	3	3	2	2	1	1

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Auf lange Sicht erhält Leo durchschnittlich $\frac{30}{55}\cdot 40$ Eurocent $=\frac{240}{11}$ Eurocent pro Spiel, muss aber an Anna durchschnittlich $\frac{25}{55}\cdot 60$ Eurocent $=\frac{300}{11}$ Eurocent abgeben. Er macht also pro Durchführung durchschnittlich einen Verlust von ungefähr $\frac{300}{11}-\frac{240}{11}=\frac{60}{11}$ Eurocent. Bei 50 Durchführungen macht Leo also einen durchschnittlichen Verlust von $\frac{60}{11}\cdot 50$ Eurocent ≈ 273 Eurocent.		5	
e)	Auch wenn das Spiel fair ist, sind immer Abweichungen vom Erwartungswert möglich. Deshalb hat Leo nicht Recht. Aus demselben Grund hat aber auch Anna nicht Recht. Selbst wenn sehr häufig gespielt wird, sind <u>Abweichungen vom Erwartungswert immer möglich und sogar zu erwarten.</u>		2	1
f)	Das Verhältnis der Anzahl der Steine mit einstelligen Augenzahlen zur Anzahl der anderen Steinen ist $30:25$. Also muss das Verhältnis der Gewinne umgekehrt sein, also 25 : 30. Zum Beispiel kann Leo 25 Eurocent gewinnen und Anna 30 Eurocent. Auf lange Sicht nimmt damit Leo pro Durchführung $\frac{30}{55}\cdot 25$ Eurocent $=$ $\frac{150}{11}$ Eurocent ein, und für Anna beträgt die durchschnittliche Einnahme $\frac{25}{55}\cdot 30$ Eurocent $=\frac{150}{11}$ Eurocent. Die Strategie steckt in der obigen Erläuterung. Das Verhältnis der Gewinne muss dem umgekehrten Verhältnis der Anzahl der Steine entsprechen. Damit erhält man beliebig viele Gewinnpläne.		4	2
	Insgesamt 22 BWE	6	11	5

48. Wortlegespiel

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Das Alphabet hat 26 Buchstaben. Davon sind die fünf Vokale A, E, I, O, U mit den Anzahlen gegeben. Es bleiben 21 Konsonanten. $21\cdot 18$ Plättchen $=378$ Plättchen. Fünf Vokale: 90 Plättchen. Insgesamt sind es also 468 Plättchen.	2		

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
b)	$P(\text{A}) = \frac{25}{468} \approx 0{,}0534$. $P(\text{kein B}) = \frac{468-18}{468} \approx 0{,}9615$. $P(\text{Konsonant}) = \frac{378}{468} \approx 0{,}8077$. Die letzten 13 Buchstaben sind N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z. Damit ergibt sich als Wahrscheinlichkeit $\frac{2\cdot 10+11\cdot 18}{468} \approx 0{,}4658$.	2	2	
c)	$P(\text{3 Vokale}) = \frac{90}{468}\cdot\frac{89}{467}\cdot\frac{88}{466} \approx 0{,}0069 = 0{,}69\,\%$. $P(\text{Vokal, Konsonant, Vokal}) = \frac{90}{468}\cdot\frac{378}{467}\cdot\frac{89}{466} \approx 0{,}0297 \approx 3{,}0\,\%$.	1	4	
d)	Buchstabenkombination H A U S beim Ziehen in genau dieser Buchstaben-reihenfolge: $P(\text{H A U S}) = \frac{18}{468}\cdot\frac{25}{467}\cdot\frac{10}{466}\cdot\frac{18}{465} \approx 0{,}00000171 \approx 0{,}00017\,\%$.	1	4	1
e)	Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer beliebigen Kombination ist die Gleiche wie im Aufgabenteil d) . Nun muss geklärt werden, wie viele verschiedenen Kombinationen es gibt. Dazu kann man sich ein Baumdiagramm vorstellen: in der ersten Stufe gibt es 4 Möglichkeiten, für die zweite Stufe gibt es dann noch 3 Möglichkeiten. In der dritten Stufe gibt es 2 Möglichkeiten und in der letzten Stufe eine Möglichkeit. Insgesamt gibt es $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ verschiedene Kombinationen: *Hinweis: Die Berechnung der Anzahl der Kombinationen kann auch durch Abzählen in einem Baumdiagramm erfolgen.* Also ist die Wahrscheinlichkeit, die 4 Buchstaben ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu ziehen, gleich $24\cdot\frac{18}{468}\cdot\frac{25}{467}\cdot\frac{10}{466}\cdot\frac{18}{465} \approx 0{,}0000410 \approx 0{,}004\%$. Auch aufgrund der Rechnung folgt, dass diese Wahrscheinlichkeit 24 Mals so groß ist wie die Wahrscheinlichkeit beim beachten der Reihenfolge.		2	3
	Insgesamt 22 BWE	6	12	4

49. Pralinenherstellung

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Ziehen ohne Zurücklegen: $p(\text{keine Praline mit Alkoholfüllung}) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} = \frac{21}{38} \approx 55\,\%$.	4		
b)	Stellt man sich die Überprüfung der einzelnen Pralinen als zwanzigstufiges Baumdiagramm vor, so könnte man argumentieren, dass es 20 Äste gibt, die jeweils eine fehlerhafte und 19 einwandfreie Pralinen besitzen. $p(\text{genau eine fehlerhafte Praline}) = 20 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97^{19} \approx 0{,}336 = 33{,}6\,\%$.	4		
c)	Es bietet sich das Rechnen mit dem Gegenereignis an: $p(\text{zwei oder mehr fehlerhafte Pralinen})$ $= 1 - p(\text{keine fehlerhafte Praline}) - p(\text{genau eine fehlerhafte Praline})$ $p(\text{keine fehlerhafte Praline}) = 0{,}97^{20} \approx 0{,}5438 \approx 54{,}4\,\%$. $p(\text{zwei oder mehr fehlerhafte Pralinen}) = 1 - 0{,}544 - 0{,}336 = 0{,}12 = 12\,\%$. <u>*Bemerkung:*</u> *Ein Ansatz, bei dem die Einzelwahrscheinlichkeiten für 2, 3, 4 , ... 20 fehlerhafte Pralinen addiert werden, ist selbstverständlich auch als richtig zu bewerten.* *Die Rechnung wird wegen der Binomialkoeffizienten schwieriger und sehr aufwändig; eine Abschätzung des Ergebnisses, also ein Abbrechen der Terme ab 4 oder spätestens 5 fehlerhaften Pralinen, ist sinnvoll. Eine kurze Begründung sollte jedoch für die volle Punktzahl angeführt werden (z. B. „Der Zahlenwert 0,0002 ist so klein, dass er zu vernachlässigen ist, und die folgenden Werte werden noch kleiner“).* $p(2\,fPr) + p(3\,fPr) + p(4\,fPr) + p(5\,fPr) + \ldots \approx$ $0{,}0988 + 0{,}0183 + 0{,}0024 + 0{,}0002 + \ldots \geq 0{,}1197 \approx 12\,\%$.		6	
d)	Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Konsequenzen einzuschätzen. Werden 100 Pralinenschachteln verkauft, so treten durchschnittlich 12 Garantiefälle ein. Demnach werden als Garantieleistung $12 \cdot 24 = 288$ Pralinenschachteln ausgeliefert, für die sich weitere und mehr Garantiefälle ergeben. Es entsteht eine „Lawine“ von Garantiefällen, die die Firma ruinieren würden. Zudem muss ja auch noch das Porto bezahlt werden. Es kann auch mit der Möglichkeit des Betruges argumentiert werden. Man müsste nur zwei fehlerhafte Pralinen sammeln (vielleicht sogar auch nur an ihnen manipulieren), um die Garantie zu erschleichen. *Neben der mathematischen Ausführung sollte die Kreativität der Begründungen bewertet werden. Es wird nicht erwartet, dass die Schüler alle hier genannten Aspekte angeben.*		2	2

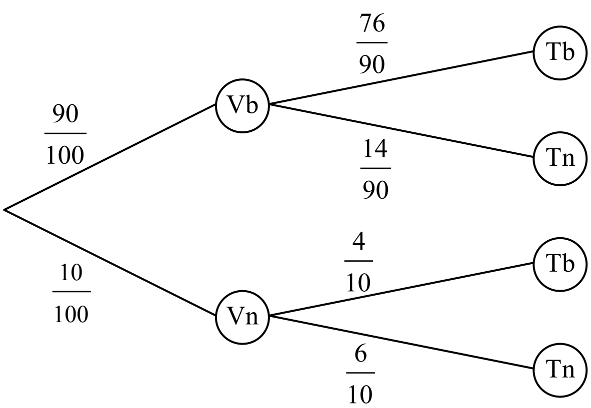
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Gesucht ist p, so dass $p^{20} = 0{,}90$, also $p = \sqrt[20]{0{,}90} \approx 0{,}9947 = 99{,}47\,\%$. *<u>Bemerkung:</u> Alternativ kann der Wert für p auch durch Probieren bestimmt werden. Für die Gesamtpunktzahl ist dann eine Begründung erforderlich.*		2	2
	Insgesamt 22 BWE	8	10	4

50. Volksabstimmung

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Da sich 70 % der Abstimmungsberechtigten an der Abstimmung beteiligt haben, sind dies $42\,000\,000 \cdot 0{,}7 = 29\,400\,000$. Also: 29,4 Millionen Franzosen haben abgestimmt.	2		
b)	In den Niederlanden haben von 11,6 Millionen Berechtigten 64 % teilgenommen, davon haben 38,4 % mit „Ja“ gestimmt. Das sind also $11600000 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}384 = 2\,850\,816$ Bürger. Die Aussage stimmt also. Nein-Stimmen: $11\,600\,000 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}616 = 4\,573\,184$. Das ist weniger als die Hälfte aller Stimmberechtigten. Man kann also nicht sagen, dass sich die Mehrheit der Niederländer gegen die Verfassung entschieden hat.	3 1	2	
c)	Hier muss jeweils in mehreren Schritten gerechnet werden. Frankreich: 1. Tatsächlich haben 29 400 000 Franzosen abgestimmt. 2. Tatsächlich gab es $(29\,400\,000 \cdot 0{,}451 =)\ 13\,259\,400$ Ja-Stimmen. 3. Die gewünschte halbe Million zusätzlicher Ja-Stimmen erhöht diese Zahl auf 13 759 400 und 4. die Zahl der Abstimmenden auf 29 900 000. 5. Nun ist aber $\frac{13\,759\,400}{29\,900\,000} \approx 46\,\%$; auch so wäre die Verfassung in Frankreich nicht angenommen worden. Niederlande: 1. Tatsächlich haben $11\,600\,000 \cdot 0{,}64 = 7\,424\,000$ Niederländer abgestimmt. 2. Tatsächlich gab es $7\,424\,000 \cdot 0{,}384 = 2\,850\,816$ Ja-Stimmen. 3. Die gewünschte halbe Million zusätzlicher Ja-Stimmen erhöht diese Zahl auf 3 350 816 und 4. die Zahl der Abstimmenden auf 7 924 000. 5. Nun ist aber $\frac{3\,350\,816}{7\,924\,000} \approx 42\,\%$; auch so wäre die Verfassung in den Niederlanden nicht angenommen worden. In beiden Ländern hätte auch jeweils eine halbe Million zusätzlicher Ja-Stimmen das Abstimmungsergebnis nicht wesentlich geändert.		3 4	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	760 von 1200 entspricht einem Anteil von 63,3 %. Die Befragung deckt sich also gut mit der Abstimmung.	2		
e)	Wenn auch in der Befragung ein „Ja"-Anteil von etwa 45 % hätte auftreten sollen, so hätten nur 185 der Befragten angeben dürfen, dass sie mit „Ja" stimmen wollen. Also sind 21 „Ja"-Stimmen zu viel.		2	
f)	Einsetzen in die Formel liefert für die Franzosen einen Sicherheitsbereich von etwa $\pm 4\,\%$. Andererseits gilt $\frac{206}{410} \approx 50{,}2\,\%$. Das Ergebnis der Abstimmung lag also knapp außerhalb des Sicherheitsbereichs, den die Wahlforscher angegeben hatten.		3	
	Insgesamt 22 BWE	8	14	0

51. Führerscheinprüfung

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	In der Tabelle stehen (prozentual angegebene) relative Häufigkeiten von Ereignissen. Relative Häufigkeiten kann man dann bei genügend hoher Versuchszahl, d.h. hier Teilnehmerzahl, als Schätzwerte für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten verwenden. So kann man sagen, dass ein Fahrschüler, der sich ähnlich vorbereitet wie seine Vorgänger, ungefähr mit der Wahrscheinlichkeit 14 % „die Vorprüfung besteht, aber die eigentliche theoretische Prüfung nicht". *Bemerkung: Das Wort „aber" hat hier die gleiche logische Bedeutung wie das Wort „und", es handelt sich hier also um die „und-Verknüpfung" der beiden Ereignisse „der Schüler besteht die Vorprüfung" und „der Schüler besteht die eigentliche theoretische Prüfung nicht". Hier ist in der Formulierung Sorgfalt geboten, denn im Gegensatz dazu handelt es sich auf der zweiten Stufe des Baumdiagramms in b) und im Aufgabenteil c) um bedingte Wahrscheinlichkeiten!*	3		
b)	 Die Brüche können auch (teilweise) gekürzt, als Dezimalbrüche oder Prozentangaben geschrieben werden:			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$\frac{90}{100}=\frac{9}{10}=0{,}9=90\%$ $\frac{10}{100}=\frac{1}{10}=0{,}1=10\,\%$. $\frac{76}{90}=\frac{38}{45}\approx 0{,}844=84{,}4\%$ $\frac{14}{90}=\frac{7}{45}\approx 0{,}156=15{,}6\,\%$. $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}=0{,}4=40\%$ $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}=0{,}6=60\,\%$.	4	2	
c)	• Die gefragte bedingte Wahrscheinlichkeit kann man direkt aus dem Baumdiagramm als Wert rechts am zweiten Ast von oben ablesen: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrschüler, der die die Vorprüfung besteht, die theoretische Führerscheinprüfung nicht besteht, ist etwa 15,6 %. • Die gefragte bedingte Wahrscheinlichkeit kann man direkt aus dem Baumdiagramm als Wert rechts am dritten Ast von oben ablesen: die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrschüler, der die Vorprüfung nicht besteht, die theoretische Führerscheinprüfung trotzdem besteht, ist etwa 40 %. *Bemerkung: Da im Aufgabenteil vorher das Baumdiagramm verlangt war, ist der genannte Lösungsweg naheliegend, aber man hätte die Ergebnisse natürlich auch leicht direkt aus der gegebenen Vierfeldertafel ausrechnen können. Es handelt sich ja um bedingte Wahrscheinlichkeiten, für die folgende Formel gilt:* $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. *Nenner und Zähler stehen direkt in der Vierfeldertafel.* • Mit Hilfe der vorangehenden Bemerkung kann auch die dritte gefragte bedingte Wahrscheinlichkeit direkt bestimmt werden: Für die Wahrscheinlichkeit p_3, dass ein Fahrschüler, der die theoretische Führerscheinprüfung nicht bestanden hat, schon vorher die Vorprüfung nicht bestanden hat, gilt $p_3=\frac{6\,\%}{20\,\%}=30\,\%$. *<u>Bemerkung:</u> Man hätte auch zur Bestimmung von p_3 ein neues Baumdiagramm anlegen können, bei dem der Ausgang der theoretischen Prüfung auf der ersten Stufe und der Ausgang der Vorprüfung auf der zweiten Stufe modelliert wird. Auch wenn der zeitliche Ablauf andersherum ist, spricht nichts dagegen, das Baumdiagramm so zu verwenden. Aber das Umgehen mit entsprechenden Baumdiagrammen ist im Grunde überflüssig, wenn die zugehörige Vierfeldertafel – wie in dieser Aufgabe – bereits bekannt ist.*		6	
d)	• Nach der Voraussetzung, dass die Theorie-Prüfung schon einmal nicht bestanden ist, müsste eine diesbezüglich <u>bedingte</u> Wahrscheinlichkeit angesetzt werden; hierüber sind keine Erfahrungswerte bekannt. Die vorgeführte einfache Quadrierung geht hingegen von Unabhängigkeit bzw. Unbedingtheit aus. • Die (bedingte) Wahrscheinlichkeit ist beeinflussbar durch Lernanstrengungen; die Prüfung ist kein Zufallsexperiment.			3

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Bemerkung: *Eine der beiden Begründungen ist ausreichend für die volle Punktzahl.* *Es liegt im Ermessen der korrigierenden Lehrkraft, andere Argumentationen ähnlich zu bewerten.*			
e)	Die 25 Personen sind „gleichberechtigt“, d.h. für jede beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie die Vorprüfung nicht besteht, 10 %. Man kann auch aus dem Nichtbestehen der Vorprüfung einer Person nicht auf das Bestehen oder Nichtbestehen der anderen Personen schließen. Es ist also sinnvoll, stochastische Unabhängigkeit anzunehmen. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit p_4, dass alle 25 Personen die Vorprüfung bestehen: $p_4 = 0{,}9^{25} \approx 7{,}2\,\%$. Die Wahrscheinlichkeit, dass diesmal wenigstens ein Fahrschüler die Vorprüfung nicht besteht, beträgt also 92,8 %.		2	2
	Insgesamt 22 BWE	7	10	5

52. Auf dem Jahrmarkt

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	(siehe Tabelle)			

	0	1	gesamt
rot	**10**	**2**	**12**
blau	**18**	6	**24**
gesamt	**28**	**8**	**36**

	Lösungsskizze	I	II	III
b)	• $P(\text{„rot“}) = \frac{1}{3}$. • $P(\text{„beide Felder blau“}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. • $P(\text{„einmal 0, einmal 1“}) = \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{81}$			
c)	Um zu untersuchen, ob für den Glücksradbesitzer ein Verlust zu erwarten gewesen wäre, wird der Erwartungswert für die Auszahlung berechnet:			

Ereignis	$r-1$	$b-1$	$r-0$	$b-0$
P	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{9}{18}$
Auszahlung	10 €	6 €	1 €	1 €

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Der Erwartungswert beträgt: $E = \frac{1}{18} \cdot (1 \cdot 10\,€ + 3 \cdot 6\,€ + 5 \cdot 1\,€ + 9 \cdot 1\,€) = \frac{1}{18} \cdot 42\,€ = \frac{7}{3}\,€.$ Da der Einsatz pro Spiel nur 2 € beträgt, macht der Glücksradbesitzer pro Spiel einen durchschnittlichen Verlust von $\frac{1}{3}$ €. Der Verlust war zu erwarten gewesen.			
	Insgesamt 22 BWE			

53. Mit und ohne Brille

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	• $P(E) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$ • $P(E) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ • $P(E) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1023}{1024}$			
b)	(Tabelle b) unten)			
c)	Frage 2: $66,\overline{6}$ % Frage 3: $33,\overline{3}$ %			
d)	(Tabelle d) unten)			
e)	Frage 1: 60 % Frage 3: 20 %			
	Insgesamt 22 BWE	6	12	4

b)

	Brille	keine Brille	gesamt
älter als 50 Jahre	4 000	0	4 000
50 Jahre und jünger	2 000	6 000	8 000
gesamt	6 000	6 000	12 000

d)

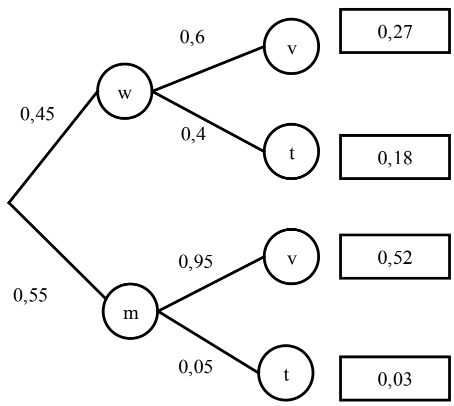
	Brille	keine Brille	gesamt
älter als 50 Jahre	1 800	1 200	3 000
50 Jahre und jünger	2 700	3 300	6 000
gesamt	4 500	4 500	12 000

54. Teilzeitarbeit

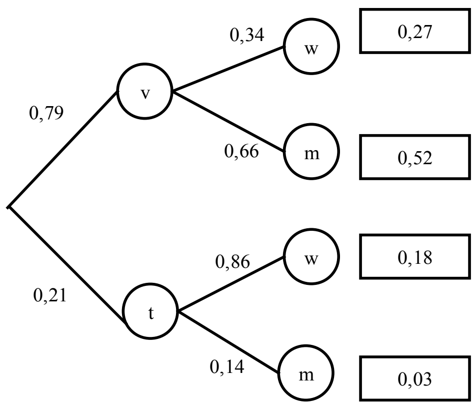
<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung, Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>w</td><td>m</td><td>gesamt</td></tr>
<tr><td>vollzeitbeschäftigt</td><td>27 %</td><td>52 %</td><td>79 %</td></tr>
<tr><td>teilzeitbeschäftigt</td><td>18 %</td><td>3 %</td><td>21 %</td></tr>
<tr><td>gesamt</td><td>45 %</td><td>55 %</td><td>100 %</td></tr>
</table>
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

- $p(E) = \frac{52}{55} \approx 0{,}95.$
- $p(E\ ) = \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \approx 0{,}73.$
- $p(E\ ) = 0{,}4^2 = 0{,}16.$

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>
Baumdiagramm 1:



Baumdiagramm 2:



</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Aussage 1 ist falsch, denn 40 % aller berufstätigen Frauen sind teilzeitbeschäftigt. Aussage 2 ist wahr, denn von den berufstätigen Männern sind lediglich 5 % teilzeitbeschäftigt.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 22 BWE</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

55. Medikament

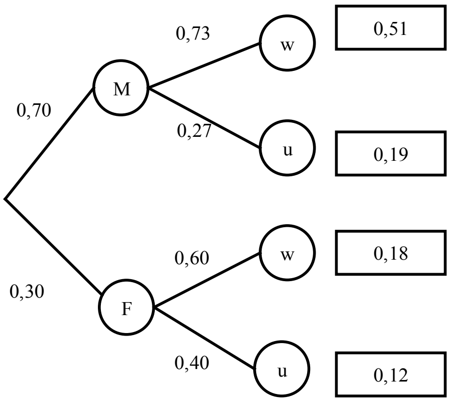
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III

a)

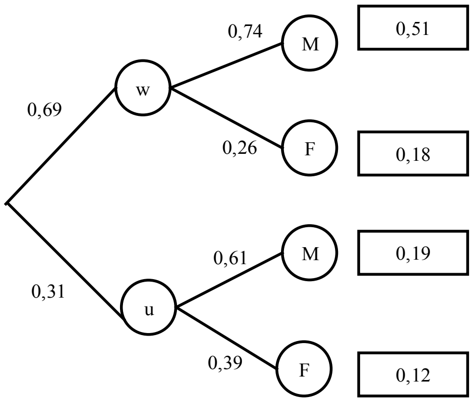
- $p(E) = \dfrac{0,51}{0,70} \approx 0,73,$
- $p(E\ ) = \dfrac{0,18}{0,30} = 0,60.$

b)

Baumdiagramm 1:



Baumdiagramm 2:



c) Bei den 1000 in der ersten Studie nicht berücksichtigten Männern war das Medikament bei 730 Männern wirksam, bei 270 nicht. Diese Werte müssen in der – auf absolute Zahlen umgeschriebenen – vorgegebenen Tafel addiert werden:

	w	*u*	gesamt
Männer (*M*)	5100 + **730**	1900 + **270**	9000
Frauen (*F*)	1800	1200	3000
gesamt	7630	3370	11000

Hier die Angaben in %:

	w	*u*	gesamt
Männer (*M*)	0,53	0,20	0,73
Frauen (*F*)	0,16	0,11	0,27
gesamt	0,69	0,31	1,00

d) Die Werte *c* und *d* müssten annähernd gleich bleiben, da das Medikament in schwächerer Dosis bei Frauen gleich bleibende Wirkung hat.
Da das Medikament in schwächerer Dosis bei Männern an Wirkung verliert, müsste *a* kleiner und *b* entsprechend größer werden.

Insgesamt 22 BWE