

Bildungsplan gymnasiale Oberstufe

Anlage zum Rahmenplan Mathematik

zur Umsetzung der Bildungsstandards im Fach Mathematik
für die Allgemeine Hochschulreife



Hamburg

Impressum

Herausgeber:

Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung

Alle Rechte vorbehalten

Unterrichtsentwicklung Mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Unterricht

Referatsleitung:

Monika Seiffert

Fachreferenten:

Xenia Rendtel, Manfred Bergunde

Redaktion:

Philip Bumiller, Dr. Andreas Busse, Eckhard Lohmann, Reimar Pfeil

<http://www.hamburg.de/bildungsplaene>

Hamburg 2015/2016

Ergänzende Hinweise zum Rahmenplan Mathematik zur Umsetzung der Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife

Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife – im Folgenden kurz *Bildungsstandards* – wurden im Oktober 2012 auf Beschluss der Kultusministerkonferenz verabschiedet. Ab dem Schuljahr 2016/17 sind sie Grundlage der Abiturprüfungen im Fach Mathematik in allen Bundesländern und ersetzen somit die Einheitlichen Prüfungsanforderungen (EPA).

Die Bildungsstandards im Fach Mathematik sind online unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf und als Printausgabe verfügbar.

Wie in den Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss werden sechs allgemeine mathematische Kompetenzen ausgewiesen:

Allgemeine mathematische Kompetenzen

- Mathematisch argumentieren
- Probleme mathematisch lösen
- Mathematisch modellieren
- Mathematische Darstellungen verwenden
- Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
- Mathematisch kommunizieren

Die Lernenden erwerben die allgemeinen mathematischen Kompetenzen durch aktive Auseinandersetzung mit Fachinhalten, die übergreifenden Leitideen zugeordnet sind.

Mathematische Leitideen

- Algorithmus und Zahl
- Messen
- Raum und Form
- Funktionaler Zusammenhang
- Daten und Zufall

Die Bildungsstandards betonen die Bedeutung digitaler Mathematikwerkzeuge für den Kompetenzerwerb im Fach Mathematik. Darunter werden nicht nur leistungsstarke wissenschaftliche Taschenrechner verstanden, sondern auch Tabellenkalkulation, dynamische Geometriesoftware und Computeralgebrasysteme. Das Potenzial dieser Werkzeuge kann zur Förderung des Lernens im Mathematikunterricht genutzt werden

Digitale Mathematikwerkzeuge

- beim *Entdecken* mathematischer Zusammenhänge, insbesondere durch interaktive Erkundungen beim Modellieren und Problemlösen,
- durch *Verständnisförderung* für mathematische Zusammenhänge, nicht zuletzt mittels vielfältiger Darstellungsmöglichkeiten,
- mit der *Reduktion* schematischer Abläufe und der *Verarbeitung größerer Datenmengen*,
- durch die Unterstützung individueller Präferenzen und Zugänge beim Bearbeiten von Aufgaben einschließlich der reflektierten Nutzung von *Kontrollmöglichkeiten*.

Das Kapitel 4 der Bildungsstandards enthält illustrierende Aufgaben für die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik. Die Aufgabenbeispiele zeigen, wie Aufgaben für die Abiturprüfung konzipiert sein können, die auf den Bildungsstandards basieren. Unter einer „Prüfungsaufgabe“ wird wie bereits in den EPA die Gesamtheit aller Aufgaben verstanden, die ein Prüfling in der schriftlichen Abiturprüfung bearbeiten muss. Die in Kapitel 4 vorliegenden Aufgabenbeispiele sind so kon-

Illustrierende Prüfungsaufgaben

zipiert, dass jeweils zwei Aufgaben zu einer Prüfungsaufgabe zusammengesetzt werden können. Dabei ist zu bedenken, dass diese Aufgabenbeispiele bereits 2012 entwickelt wurden. In den Jahren 2013 bis 2015 wurde von der AG Aufgaben Mathematik des IQB (Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen, Berlin) durch Vertreterinnen und Vertretern aller 16 Bundesländer ein abweichendes Format für Prüfungsaufgaben entwickelt. Dennoch können die Aufgabenbeispiele von 2012 weiterhin als Lernaufgaben verwendet werden.

IQB-Aufgabensammlung

Zur Orientierung auf die neuen Aufgabenformate ab 2017 hat das IQB eine Aufgabensammlung erstellt, die unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/abi/mathematik> verfügbar ist. Eine Prüfungsaufgabe im Fach Mathematik besteht dann aus einem hilfsmittelfreien Aufgabenteil und jeweils einer Aufgabe aus den mathematischen Sachgebieten Analysis, Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Stochastik. Die Aufgaben zur Analysis haben gegenüber den Aufgaben aus den anderen beiden Sachgebieten den doppelten Umfang. Die Rahmenseetzungen für die schriftliche Abiturprüfung in Hamburg können Sie den Regelungen für die zentralen schriftlichen Prüfungsaufgaben im Abitur 2017 entnehmen.

Illustrierende Lernaufgaben

Das Kapitel 5 der Bildungsstandards stellt eine Reihe von Lernaufgaben zu ausgewählten Standards zur Verfügung. Mit diesen Aufgabenbeispielen können aktive Lernprozesse angestoßen sowie der Aufbau mathematischer Kompetenzen durch eine Folge gestufter Aufgabenstellungen unterstützt werden. Die komplexen Lernaufgaben ermöglichen den Lernenden die Steuerung der Aufgabenbearbeitung. Einzelne Lernaufgaben können, müssen sich aber nicht primär auf einzelne Kompetenzen beziehen. Oft sprechen sie eine Vielzahl von Kompetenzdimensionen an. Zu jeder Lernaufgabe werden die angesprochenen mathematischen Leitideen und die allgemeinen mathematischen Kompetenzen mit den zugehörigen Anforderungsniveaus ausgewiesen.

Vergleich Bildungsstandards – Hamburger Rahmenplan

Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen werden in den Bildungsstandards an einigen Stellen ausführlicher und konkreter dargestellt als die vergleichbaren, aber abstrakter formulierten Anforderungen im Hamburger Rahmenplan Mathematik. Inhaltliche Anforderungen, die in den Bildungsstandards an einigen Stellen konkreter dargestellt werden und als verbindlich festgelegt sind, werden auch im Hamburger Rahmenplan konkretisiert und verbindlich:

- Die Weiterentwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens und Grundlagen der Vektorgeometrie sind gemäß Bildungsstandards verbindlich, auch wenn später als Vertiefung die Lineare Algebra gewählt wird.
- Auch bei einer Vertiefung der Analytischen Geometrie ist gemäß Bildungsstandards der Umgang mit Matrizen verbindlich.
- Die Arbeit mit digitalen Mathematikwerkzeugen ist gemäß Bildungsstandards für beide Anforderungsniveaus verbindlich. Der Hamburger Rahmenplan sah dies bisher nur für das erhöhte Anforderungsniveau vor.
- Im Bereich der Stochastik sind gemäß Bildungsstandards Simulationen verbindlich.
- Im Bereich der Analysis ist gemäß Bildungsstandards die Bestimmung der Volumina von Körpern, die durch Rotation um die Abszissenachse entstehen, auf erhöhtem Anforderungsniveau verbindlich.

Nicht mehr verbindlich sind gemäß Bildungsstandards dagegen

- Poissonverteilung, stochastische Prozesse (Stochastik)
- Kugeln (Analytische Geometrie)
- Eigenwerte und Eigenvektoren (Lineare Algebra).

Konkretisierung des Hamburger Rahmenplans

Zur Implementierung der Bildungsstandards ist eine Konkretisierung der Anforderungen und Inhalte in den entsprechenden Kapiteln des Hamburger Rahmenplans Mathematik erforderlich. Dazu werden die Formulierungen der allgemeinen mathematischen Anforderungen weitgehend textgleich aus den Bildungsstandards übernommen. Die Anforderungen zur Kompetenz „Mit symbolischen, for-

malen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ werden bzgl. der Arbeit mit digitalen Mathematikwerkzeugen im Sinne der Bildungsstandards konkretisiert.

Die inhaltsbezogenen Anforderungen sind im Rahmenplan Mathematik von 2009 durch sechs Module strukturiert. Aufgrund der Implementierung der Bildungsstandards und den damit verbundenen Veränderungen im Bereich Vektorgeometrie wird das neue Modul 3 „Koordinatengeometrie“ aufgenommen. Das bisherige Modul 3 bleibt als Wahlpflichtmodul 7 mit leicht geänderten Inhalt erhalten. Die folgende Übersicht zeigt die neue Modulstruktur im Vergleich zu der Modulstruktur des Rahmenplans von 2009:

Module im Rahmenplan Mathematik 2009	Module nach Konkretisierung des Rahmenplans Mathematik ab Schuljahr 2015/16
Modul 1 Von der Änderungsrate zum Bestand	Modul 1 Von der Änderungsrate zum Bestand
Modul 2 Der Zufall steht Modell	Modul 2 Der Zufall steht Modell
	Modul 3 Koordinatengeometrie
Modul 4 Änderungsraten und Bestände	Modul 4 Änderungsraten und Bestände
Modul 5 Anwendungsprobleme der Stochastik	Modul 5 Anwendungsprobleme der Stochastik
Modul 6 Analytische Geometrie	Wahlpflichtmodul 6 Analytische Geometrie
Modul 3 Matrizen und Vektoren als Datenspeicher	Wahlpflichtmodul 7 Lineare Algebra

Zur besseren Kennzeichnung der Bezüge von allgemeinen mathematischen Kompetenzen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen werden die Anforderungen der allgemeinen mathematischen Kompetenzen nummeriert und die betreffenden Nummern bei den inhaltsbezogenen Anforderungen jeweils in Klammern vermerkt.

Mit den Konkretisierungen der Anforderungen ergeben sich Veränderungen auch in Kapitel 3.2.2 „Inhalte“ des Hamburger Rahmenplans von 2009. Wie bisher enthält das Inhaltskapitel eine Vorgabe zu einem Spiralcurriculum. Die bisher vorgesehene alternative Schwerpunktsetzung zwischen Variante 1 (Schwerpunkt Stochastik) und Variante 2 (Schwerpunkt Lineare Algebra/Analytische Geometrie) entfällt jedoch. In jedem Jahr der Studienstufe ist zu jedem der drei mathematischen Sachgebiete ein Modul verbindlich. Die alternative Schwerpunktsetzung besteht künftig in der Alternative zwischen der Vertiefung der Analytischen Geometrie und der Linearen Algebra.

Die beschriebene Konkretisierung der Anforderungen und Inhalte ist in der Anlage „Konkretisierung zum Rahmenplan Mathematik“ festgehalten.

Die Seiten 1 – 5 enthalten die konkret gefassten allgemeinen mathematischen Kompetenzen und ersetzen die Seiten 15 und 16 des Rahmenplans Mathematik von 2009.

Die Seiten 6 – 12 enthalten die konkret gefassten inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen für die Module 1 bis 7 sowie die Vorgaben zur Verbindlichkeit der Module und ersetzen die Seiten 19 – 24 des Rahmenplans Mathematik von 2009.

Zur Unterstützung der Implementierung der Bildungsstandards Mathematik werden zu Beginn und im Laufe des nächsten Schuljahres Hinweise und Erläuterungen zur Verfügung gestellt. Das Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung wird Angebote entsprechend der Nachfrage bereitstellen.

Unterstützungen

Allgemeine mathematische Kompetenzen

Die Kompetenz „Mathematisch argumentieren“ (A)	
Zu dieser Kompetenz gehören sowohl das Entwickeln eigenständiger, situationsangemessener mathematischer Argumentationen und Vermutungen als auch das Verstehen und Bewerten gegebener mathematischer Aussagen. Das Spektrum reicht dabei von einfachen Plausibilitätsargumenten über inhaltlich-anschauliche Begründungen bis zu formalen Beweisen. Typische Formulierungen, die auf die Kompetenz des Argumentierens hinweisen, sind beispielsweise „Begründen Sie!“, „Widerlegen Sie!“, „Gibt es ...?“ oder „Gilt das immer?“.	
Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben:	
Anforderungsbereich I	
	Die Schülerinnen und Schüler ...
A I.1	• geben Routineargumentationen (bekannte Sätze, Verfahren, Herleitungen, usw.) wieder und wenden sie an,
A I.2	• geben einfache rechnerische Begründungen oder ziehen einfache logische Schlussfolgerungen,
A I.3	• führen Argumentationen auf der Basis von Alltagswissen.
Anforderungsbereich II	
	Die Schülerinnen und Schüler ...
A II	• vollziehen überschaubare mehrschrittige Argumentationen und logische Schlüsse nach, erläutern oder entwickeln solche.
Anforderungsbereich III	
	Die Schülerinnen und Schüler ...
A III.1	• nutzen, erläutern oder entwickeln Beweise und anspruchsvolle Argumentationen,
A III.2	• bewerten verschiedene Argumente nach Kriterien wie Reichweite und Schlüssigkeit.

Die Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“ (P)	
Diese Kompetenz beinhaltet, ausgehend vom Erkennen und Formulieren mathematischer Probleme, das Auswählen geeigneter Lösungsstrategien sowie das Finden und das Ausführen geeigneter Lösungswege, auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge. Das Spektrum reicht von der Anwendung bekannter bis zur Konstruktion komplexer und neuartiger Strategien. Heuristische Prinzipien, wie z. B. „Skizze anfertigen“, „Beispiele erzeugen und analysieren“, „systematisch probieren“, „zerlegen und ergänzen“, „Symmetrien verwenden“, „Extremalprinzip“, „Invarianten finden“ sowie „vorwärts und rückwärts arbeiten“, werden gezielt ausgewählt und angewendet.	
Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben:	
Anforderungsbereich I	
	Die Schülerinnen und Schüler ...
P I	<ul style="list-style-type: none"> finden einen Lösungsweg einer einfachen mathematischen Aufgabe durch Identifikation und Auswahl einer naheliegenden Strategie, z. B. durch Analogiebetrachtung.
Anforderungsbereich II	
	Die Schülerinnen und Schüler ...
P II	<ul style="list-style-type: none"> finden einen Lösungsweg zu einer Problemstellung, z. B. durch ein mehrschrittiges, strategiegestütztes Vorgehen.
Anforderungsbereich III	
	Die Schülerinnen und Schüler ...
P III	<ul style="list-style-type: none"> entwickeln eine Strategie zur Lösung eines komplexen Problems, z. B. zur Verallgemeinerung einer Schlussfolgerung, durch Anwenden mehrerer Heuristiken oder zur Beurteilung verschiedener Lösungswege, und wenden diese an.

Die Kompetenz „Mathematisch modellieren“ (M)

Hier geht es um den Wechsel zwischen Realsituationen und mathematischen Begriffen, Resultaten oder Methoden. Hierzu gehört sowohl das Konstruieren passender mathematischer Modelle als auch das Verstehen oder Bewerten vorgegebener Modelle. Typische Teilschritte des Modellierens sind das Strukturieren und Vereinfachen gegebener Realsituationen, das Übersetzen realer Gegebenheiten in mathematische Modelle, das Interpretieren mathematischer Ergebnisse in Bezug auf die Realsituationen und das Überprüfen von Ergebnissen im Hinblick auf Stimmigkeit und Angemessenheit bezogen auf die Realsituation. Das Spektrum reicht von Standardmodellen (z. B. bei linearen Zusammenhängen) bis zu komplexen Modellierungen.

Digitale Mathematikwerkzeuge unterstützen sowohl die Entwicklung mathematischer Modelle als auch deren Variation und Bewertung. Insbesondere können damit authentische Situationen erschlossen und umfangreiche Datenmengen verarbeitet werden.

Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben:

Anforderungsbereich I

	Die Schülerinnen und Schüler ...
M I.1	<ul style="list-style-type: none"> wenden vertraute und direkt erkennbare Modelle an,
M I.2	<ul style="list-style-type: none"> überführen eine Realsituation direkt in ein mathematisches Modell,
M I.3	<ul style="list-style-type: none"> übertragen ein mathematisches Resultat auf eine gegebene Realsituation.

Anforderungsbereich II

	Die Schülerinnen und Schüler ...
M II.1	<ul style="list-style-type: none"> nehmen mehrschrittige Modellierungen mit wenigen und klar formulierten Einschränkungen vor,
M II.2	<ul style="list-style-type: none"> interpretieren Ergebnisse solcher Modellierungen,
M II.3	<ul style="list-style-type: none"> passen ein mathematisches Modell an veränderte Umstände an.

Anforderungsbereich III

	Die Schülerinnen und Schüler ...
M III.1	<ul style="list-style-type: none"> modellieren eine komplexe Realsituation, wobei Variablen und Bedingungen festgelegt werden müssen,
M III.2	<ul style="list-style-type: none"> überprüfen, vergleichen und bewerten mathematische Modelle im Kontext einer Realsituation.

Die Kompetenz „Mathematische Darstellungen verwenden“ (D)	
Diese Kompetenz umfasst das Auswählen geeigneter Darstellungsformen, das Erzeugen mathematischer Darstellungen und das Umgehen mit gegebenen Darstellungen. Hierzu zählen Diagramme, Graphen und Tabellen ebenso wie Formeln. Digitale Mathematikwerkzeuge ermöglichen einen schnellen Darstellungswechsel. Das Spektrum reicht von Standarddarstellungen – wie Wertetabellen – bis zu eigenen Darstellungen, die dem Strukturieren und Dokumentieren individueller Überlegungen dienen und die Argumentation und das Problemlösen unterstützen.	
Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben:	
Anforderungsbereich I	
	Die Schülerinnen und Schüler ...
D I	<ul style="list-style-type: none"> fertigen Standarddarstellungen von mathematischen Objekten und Situationen an und nutzen diese.
Anforderungsbereich II	
	Die Schülerinnen und Schüler ...
D II.1	<ul style="list-style-type: none"> interpretieren oder verändern gegebene Darstellungen verständig,
D II.2	<ul style="list-style-type: none"> wechseln zwischen verschiedenen Darstellungen.
Anforderungsbereich III	
	Die Schülerinnen und Schüler ...
D III.1	<ul style="list-style-type: none"> gehen mit unvertrauten Darstellungen und Darstellungsformen sachgerecht und verständig um,
D III.2	<ul style="list-style-type: none"> entwickeln eigene Darstellungen problemadäquat,
D III.3	<ul style="list-style-type: none"> beurteilen verschiedene Darstellungen und Darstellungsformen zweckgerichtet.

<p>Die Kompetenz „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ (T)</p> <p>Diese Kompetenz beinhaltet in erster Linie das Ausführen von Operationen mit mathematischen Objekten wie Zahlen, Größen, Variablen, Termen, Gleichungen und Funktionen sowie Vektoren und geometrischen Objekten. Das Spektrum reicht hier von einfachen und überschaubaren Routineverfahren bis hin zu komplexen Verfahren einschließlich deren reflektierender Bewertung. Diese Kompetenz beinhaltet auch Faktenwissen und grundlegendes Regelwissen für ein zielgerichtetes und effizientes Bearbeiten von mathematischen Aufgabenstellungen, auch mit eingeführten Hilfsmitteln und digitalen Mathematikwerkzeugen.</p>	
Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben:	
Anforderungsbereich I	
	Die Schülerinnen und Schüler ...
T I.1	<ul style="list-style-type: none"> • verwenden elementare Lösungsverfahren,
T I.2	<ul style="list-style-type: none"> • wenden Formeln und Symbole direkt an,
T I.3	<ul style="list-style-type: none"> • nutzen mathematische Hilfsmittel,
T I.4	<ul style="list-style-type: none"> • nutzen digitale Mathematikwerkzeuge (Tabellenkalkulation, Computeralgebrasystem, dynamische Geometriesoftware), indem sie mit diesen <ul style="list-style-type: none"> – Terme faktorisieren und ausmultiplizieren, – Wertetabellen erstellen, – Punkte und Funktionsgraphen anzeigen, – Ableitungsfunktionen, Stammfunktionen und bestimmte Integrale angeben, – Gleichungen und Gleichungssysteme lösen, – geometrische Objekte in der Ebene und im Raum visualisieren, – mit Matrizen und Vektoren rechnen, Matrixinverse und Skalarprodukte bestimmen, – Zufallszahlen erzeugen, – Werte für Wahrscheinlichkeitsverteilungen finden, – Fakultäten und Binomialkoeffizienten bestimmen.
Anforderungsbereich II	
	Die Schülerinnen und Schüler ...
T II.1	<ul style="list-style-type: none"> • wenden formale mathematische Verfahren an,
T II.2	<ul style="list-style-type: none"> • gehen mit mathematischen Objekten im Kontext um,
T II.3	<ul style="list-style-type: none"> • wählen mathematische Hilfsmittel und digitale Mathematikwerkzeuge je nach Situation und Zweck gezielt aus und setzen sie effizient ein,
T II.4	<ul style="list-style-type: none"> • gehen mit digitalen Mathematikwerkzeugen flexibel um, indem sie <ul style="list-style-type: none"> – Objekte der begrenzten Größe des Bildschirms anpassen, – beim Versagen eines Standardvorgehens oder -befehls Alternativen finden und nutzen, – Einstellungen des Werkzeugs situationsadäquat vornehmen, – Fehlermeldungen angemessen deuten.

Anforderungsbereich III	
	Die Schülerinnen und Schüler ...
T III.1	<ul style="list-style-type: none"> • führen komplexe Verfahren durch,
T III.2	<ul style="list-style-type: none"> • bewerten verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren,
T III.3	<ul style="list-style-type: none"> • reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Verfahren, Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge,
T III.4	<ul style="list-style-type: none"> • reflektieren bei der Arbeit mit digitalen Mathematikwerkzeugen die Ergebnisse, indem sie <ul style="list-style-type: none"> – die mathematische Konsistenz überprüfen, – Rundungsphänomene erkennen und beurteilen, – technikbedingte falsche oder fehlende Lösungen erkennen und beurteilen.

Die Kompetenz „Mathematisch kommunizieren“ (K)

Zu dieser Kompetenz gehören sowohl das Entnehmen von Informationen aus schriftlichen Texten, mündlichen Äußerungen oder sonstigen Quellen als auch das Darlegen von Überlegungen und Resultaten unter Verwendung einer angemessenen Fachsprache. Das Spektrum reicht von der direkten Informationsentnahme aus Texten des Alltagsgebrauchs bzw. vom Aufschreiben einfacher Lösungswege bis hin zum sinnentnehmenden Erfassen fachsprachlicher Texte bzw. zur strukturierten Darlegung oder Präsentation eigener Überlegungen. Sprachliche Anforderungen spielen bei dieser Kompetenz eine besondere Rolle.

Die drei Anforderungsbereiche zu dieser Kompetenz lassen sich wie folgt beschreiben:

Anforderungsbereich I

	Die Schülerinnen und Schüler ...
K I.1	<ul style="list-style-type: none"> • legen einfache mathematische Sachverhalte dar,
K I.2	<ul style="list-style-type: none"> • identifizieren Informationen aus kurzen Texten mit mathematischem Gehalt und wählen geeignete aus, wobei die Ordnung der Informationen im Text die Schritte der mathematischen Bearbeitung nahelegt.

Anforderungsbereich II

	Die Schülerinnen und Schüler ...
K II.1	<ul style="list-style-type: none"> • legen mehrschrittige Lösungswege, Überlegungen und Ergebnisse verständlich dar,
K II.2	<ul style="list-style-type: none"> • interpretieren Äußerungen (auch fehlerhafte) anderer Personen zu mathematischen Aussagen,
K II.3	<ul style="list-style-type: none"> • identifizieren mathematische Informationen aus Texten und wählen geeignete aus, wobei die Ordnung der Informationen nicht unmittelbar den Schritten der mathematischen Bearbeitung entsprechen muss.

Anforderungsbereich III

	Die Schülerinnen und Schüler ...
K III.1	legen eine komplexe mathematische Lösung oder Argumentation kohärent und vollständig dar oder präsentieren sie,
K III.2	erfassen mathematische Fachtexte sinnentnehmend,
K III.3	vergleichen mündliche und schriftliche Äußerungen mit mathematischem Gehalt von anderen Personen miteinander, bewerten sie und korrigieren sie ggf.

Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen

Die Module 1 bis 3 beschreiben den erwarteten Lernstand am Ende des ersten Jahres der Studienstufe. Dazu werden in den jeweiligen Zusammenhängen auch Anforderungen genannt, denen die Lernenden bereits beim Übergang in die Studienstufe genügen mussten.

Bei den folgenden inhaltlich konkretisierten Anforderungen sind jeweils in Klammern Verweise auf allgemeine mathematische Kompetenzen angegeben, die besonders zu berücksichtigen sind.

Modul 1 Von der Änderungsrate zum Bestand
Funktionen und Änderungsraten
<p>Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • erstellen zu Anwendungskontexten mit funktionalen Zusammenhängen mathematische Modelle und stellen Funktionsgraphen auch mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge dar (M I.1, D I, T I.4), • untersuchen die Veränderung der Graphen von Funktionen bei Variation von Parametern, auch mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge, und beschreiben diese Veränderungen (A II, D II.1, T I.4, T II.4, K II.1), • stellen zur Bestimmung der Koeffizienten ganzrationaler Funktionen ein lineares Gleichungssystem auf und lösen es (T II.1), • bestimmen aus Argumenten Funktionswerte und umgekehrt, auch durch Lösen von Gleichungen, und interpretieren die Ergebnisse im Anwendungskontext (M I.3, T I.1, T I.2), • wählen geeignete Verfahren zur Lösung von linearen, quadratischen, biquadratischen Gleichungen, einfachen Bruch- und Wurzelgleichungen sowie durch Ausklammern der Unbekannten in faktorisierbaren Gleichungen aus und wenden sie an (T II.1), • bestimmen Sekanten- und Tangentensteigungen an Funktionsgraphen und beschreiben die Annäherung der mittleren an die lokale Änderungsrate (A I.2, T I.2, T I.4), • wählen digitale Mathematikwerkzeuge (Tabellenkalkulation, Computeralgebrasystem, dynamische Geometriesoftware) situationsgerecht aus und setzen sie effizient ein, auch zur Unterstützung von Erkenntnisprozessen (T II.3), • berechnen lokale Änderungsraten und interpretieren diese im Anwendungskontext (T II.1, M I.3), • beschreiben Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion) und interpretieren diese im Anwendungskontext (M II.2), • entwickeln Ableitungsgraphen aus Funktionsgraphen und umgekehrt (D II.1), • leiten Funktionen ab und wenden dabei Faktor-, Summen-, Produkt- und Kettenregel an (T I.2, T II.1), • nutzen die erste und zweite Ableitung zur Bestimmung von Monotonie, Krümmungsverhalten, lokalen Extrem- und Wendepunkten von Funktionen und interpretieren diese im Anwendungskontext (M I.1, T II.1), • untersuchen die Existenz lokaler Extrem- und Wendepunkte durch Prüfen notwendiger und hinreichender Bedingungen und legen ihre Überlegungen und Ergebnisse verständlich dar (A I.1, K II.1), • modellieren funktionale Zusammenhänge in Anwendungssituationen mit abschnittsweise definierten Funktionen und untersuchen die Übergänge auf Sprung- und Knickfreiheit (M II, T II), • überprüfen Passung und Grenzen gewählter mathematischer Modelle in den jeweiligen Anwendungskontexten und modifizieren Modelle zielgerichtet (M III.2), • beschreiben das Verhalten von Funktionen im Unendlichen und bestimmen ggf. senkrechte und waagerechte Asymptoten (A I.2), • nutzen Symmetrie zur Ordinatenachse sowie zum Koordinatenursprung für Argumentationen und zur Vereinfachung von Berechnungen (A I.1, T II.1), • entwickeln einen Plan zur Lösung von Optimierungsproblemen, setzen diesen um, stellen den Lösungsweg argumentativ dar und reflektieren ihr Vorgehen (P II, A II, K II.1).

<p>Zusätzlich im erhöhten Anforderungsniveau:</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • deuten die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen (A II, T II.4), • bestimmen Randextrema (A II, T II.2), • bestimmen Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte von Funktionsscharen in Abhängigkeit von Parametern und unterscheiden dabei unterschiedliche Fälle (T II.2, T III.1), • nutzen Funktionsscharen zum Lösen von Problemen (P III). 	
<p>Bestandsänderungen</p>	
<p>Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • beschreiben Bestandsänderungen in Anwendungskontexten als Flächen unter Funktionsgraphen und interpretieren Flächen als Bestandsänderungen (M I.2, M I.3), • bestimmen Inhalte von Flächen unter Funktionsgraphen näherungsweise durch Berechnen von Unter- und Obersummen mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge (Tabellenkalkulation, Computeralgebrasystem) und beschreiben deren gegenseitige Annäherung bei steigender Anzahl von Teilintervallen (T I.4, T II.4, K II.1), • begründen den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung geometrisch-anschaulich (A II, K II.1), • nutzen den Zusammenhang von Ableitung und Integral, auch in Anwendungskontexten (T I, T II, M I), • bestimmen Stammfunktionen von ganzrationalen Funktionen und Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten (mit Ausnahme von -1), sowie von der Sinus- und der Kosinusfunktion, auch mithilfe der Faktor- und Summenregel (T I.1, T I.2, T II.1), • nutzen in Anwendungskontexten Integrale zur Berechnung von Mittelwerten von Funktionswerten (T II.2), • bestimmen Integrale mithilfe von Stammfunktionen und durch Abschätzungen, auch zur Berechnung des Inhalts der Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen (P I, T II.1). 	
<p>Zusätzlich im erhöhten Anforderungsniveau:</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • bestimmen das Volumen von Körpern, die durch Rotation von Funktionsgraphen um die Abszissenachse entstehen (T II.1), • begründen die Volumenformel für Körper, die durch Rotation von Funktionsgraphen um die Abszissenachse entstehen (A II), • berechnen bei Sinus- und Kosinusfunktionen mit linearen Argumenten bestimmte Integrale als Bestandsänderungen, wenden elementare Rechenregeln für bestimmte Integrale an und nutzen Symmetriebetrachtungen (T II, A II, P II). 	
<p>Verbindliche Funktionsklassen</p>	
<p>Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau</p> <ul style="list-style-type: none"> • ganzrationale Funktionen • einfache gebrochen-rationale Funktionen • einfache Wurzelfunktionen • Potenzfunktionen $f(x) = x^q$, $q \in \mathbb{Q}$ • Sinus- und Kosinusfunktionen • sowie Funktionen, die durch elementare Verknüpfungen und Verkettungen dieser Funktionen entstehen 	<p>Unter einfachen Funktionen werden Funktionen verstanden, deren jeweiliger Graph aus dem Graphen zu $f(x) = \frac{1}{x}$ bzw. $f(x) = \sqrt{x}$ durch Verschieben in x-Richtung und y-Richtung, Strecken in x- oder y-Richtung sowie Spiegeln an Abszissenachse oder Ordinatenachse hervorgehen kann.</p>

Modul 2**Der Zufall steht Modell**

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Häufigkeits- und Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf unterschiedliche Weise dar (z. B. in Histogrammen und Boxplots), interpretieren und nutzen diese Darstellungen (D I, D II) und beurteilen deren Angemessenheit (D III.3),
- bestimmen und deuten Lage- und Streumaße, u. a. Varianz und Standardabweichung (T I.2, M II.2),
- beschreiben Zufallsexperimente durch Ergebnismengen und Baumdiagramme (M I, D I),
- greifen je nach Situation auf angemessene Grundvorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff (z. B. als beste prognostische Erwartung, als erwartete relative Häufigkeit, als relativer Anteil nach Laplace) zurück (A I.3),
- unterscheiden die Begriffe relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit sowie arithmetisches Mittel und Erwartungswert sachgerecht voneinander und nutzen ihre gegenseitige Beziehung, auch mithilfe von Simulationen (T I.2, T I.4, A I.2),
- erstellen mithilfe digital erzeugter Zufallszahlen Simulationen zur Untersuchung von Zufallsexperimenten (z. B. zum Gesetz der großen Zahlen oder zur Bestimmung von Erwartungswerten) (P II, T II.3),
- nutzen Baumdiagramme und Mehrfeldertafeln, auch zur Bestimmung bedingter Wahrscheinlichkeiten (D II, A I.2, A II),
- bearbeiten realistische Problemstellungen mithilfe bedingter Wahrscheinlichkeiten, wenn von einer vorliegenden „Wirkung“ auf deren „Ursache“ geschlossen werden soll oder um ein Vorwissen durch stochastische Zusatzinformationen zu verbessern (A II, M II, T II.1, T II.2),
- untersuchen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente hinsichtlich stochastischer Unabhängigkeit (A II),
- entnehmen Daten aus Texten und anderen Darstellungsformen, prüfen ihre Plausibilität mithilfe stochastischer Methoden, beurteilen wahrscheinlichkeitsbasierte Aussagen und ziehen selbst geeignete Schlüsse (P II, M II, A II, K II.2, K II.3).

Erhöhtes Anforderungsniveau

Auf erhöhtem Anforderungsniveau bearbeiten die Schülerinnen und Schüler auf derselben inhaltlichen Basis komplexere Aufgabenstellungen.

Modul 3 Koordinatengeometrie
Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau Die Schülerinnen und Schüler <ul style="list-style-type: none">modellieren im Alltag vorkommende räumliche Objekte durch geradlinig und ebenflächig begrenzte räumliche Objekte, koordinatisieren die Modelle und stellen sie zeichnerisch oder mithilfe eines digitalen Mathematikwerkzeugs als Schrägbilder und als orthogonale Projektionen auf die Koordinatenebenen dar (M I, M II, D I, D II, T I.4),veranschaulichen räumliche Objekte und ihre Lage im Koordinatensystem, auch mithilfe von Geometriesoftware (P I, D II, T I.4),berechnen im Raum Streckenlängen sowie Winkelgrößen zwischen Vektoren, auch mithilfe des Skalarproduktes (T I.1, T I.2),addieren und subtrahieren Vektoren, multiplizieren sie mit einem Skalar und veranschaulichen diese Operationen geometrisch (T I.2, D I),untersuchen Vektoren im Kontext geometrischer Anwendungen auf Kollinearität (T II.1, T II.2),deuten das Skalarprodukt geometrisch (A II, D I, K II.1).
Erhöhtes Anforderungsniveau Auf erhöhtem Anforderungsniveau bearbeiten die Schülerinnen und Schüler auf derselben inhaltlichen Basis komplexere Aufgabenstellungen.

Die Module 4 bis 7 beschreiben den im Laufe des zweiten Jahres der Studienstufe erwarteten Lernzuwachs.

<p>Modul 4 Änderungsraten und Bestände</p>
<p>Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • erstellen und modifizieren mathematische Modelle zu Wachstums- und Veränderungsprozessen unter Verwendung von Exponentialfunktionen mit linearen Exponenten und stellen zugehörige Funktionsgraphen mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge dar (M II.1, M II.3, D I.1, T I.4), • beschreiben die Veränderung der Graphen von Exponentialfunktionen bei Variation von Parametern (D II.1, A I.2), • skizzieren Graphen von Exponentialfunktionen und beschreiben jeweils den prinzipiellen Verlauf, einschließlich ihres asymptotischen Verhaltens (D I, K I.1), • bestimmen mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge die eulersche Zahl als die Basis einer Exponentialfunktion, bei der Funktionswert und lokale Änderungsrate übereinstimmen (T I.2, T I.4, A I.2), • bestimmen die Ableitungsfunktionen von Exponentialfunktionen, einschließlich der e-Funktion, von deren Verkettungen mit linearen Funktionen und von deren Summen und Produkten mit ganzrationalen Funktionen (T II.1), • berechnen in Anwendungskontexten zu Exponentialfunktionen aus Argumenten Funktionswerte und umgekehrt, auch mithilfe des natürlichen Logarithmus, und interpretieren die Ergebnisse (T I.2, T II.2, M I.3), • nutzen den Zusammenhang von Ableitung und Integral auch bei Wachstums- und Veränderungsprozessen (T I, T II, M I), • berechnen bei Exponentialfunktionen mit linearen Exponenten bestimmte Integrale als Bestandsänderungen, wenden elementare Rechenregeln für bestimmte Integrale an und nutzen Symmetriebetrachtungen (T II, A II, P II).
<p>Zusätzlich im erhöhten Anforderungsniveau:</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler</p> <ul style="list-style-type: none"> • bestimmen numerisch Nullstellen von Funktionen mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge (T I.4, T II, T III.1), • beschreiben die Auswirkungen der prinzipiell begrenzten Rechengenauigkeit von Taschenrechnern und Tabellenkalkulation bei der schrittweisen Annäherung der mittleren an die lokale Änderungsrate (T III.3, A I.1), • bestimmen Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte von Funktionsscharen in Abhängigkeit von Parametern und unterscheiden dabei unterschiedliche Fälle (T II.2, T III.1), • nutzen Funktionsscharen zum Lösen von Problemen (P III), • nutzen die In-Funktion als Stammfunktion von einfachen gebrochen-rationalen Funktionen (T II.1), • beschreiben den Verlauf von einfachen Logarithmusfunktionen (D I, T I.3, K I.1).
<p>Verbindliche Funktionsklassen</p>
<p>Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau</p> <ul style="list-style-type: none"> • Exponentialfunktionen einschl. der e-Funktion sowie Funktionen, die durch elementare Verknüpfungen und Verkettungen mit Funktionen aus Modul 1 entstehen.

Modul 5

Anwendungsprobleme der Stochastik

Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau

Die Schülerinnen und Schüler

- beschreiben Zufallsexperimente mit diskreten Zufallsgrößen und den entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen und nutzen charakteristische Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (M II.1, K I.1, T I.2, T I.4),
- begründen die Formel für die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße (A II),
- nutzen die Binomialverteilung zur stochastischen Modellierung (M I, K I.1, T II.1),
- bestimmen und nutzen Erwartungswerte und Standardabweichungen von binomialverteilten Zufallsgrößen (T I.1),
- nutzen bei binomialverteilten Zufallsgrößen Sigma-Regeln für Wahrscheinlichkeitsaussagen (A I.1, T II.2),
- führen mithilfe der Binomialverteilung zweiseitige Hypothesentests durch (T II.1, T II.2, T III.1, A II, A III.2, M II.2, K II.1),
- erstellen, interpretieren und beurteilen stochastische Modelle (M II, P II, T II.3, K II.1, D I),
- erstellen mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge passende Simulationen für stochastische Modelle und stellen die Ergebnisse graphisch dar (P II, P III, T II.4, D I),
- reflektieren die Problematik der Übertragung von Eigenschaften einer Stichprobe auf die Grundgesamtheit (A I.3, A III.2, M II.2, M III.2).

Zusätzlich im erhöhten Anforderungsniveau:

Die Schülerinnen und Schüler

- beurteilen die Unsicherheit und Genauigkeit von Hypothesentests mithilfe der Untersuchung der Wahrscheinlichkeit von Fehlern erster und zweiter Art (M II.2, T II.1, T II.2, A II),
- stellen Null- und Alternativhypothese bei einseitigen Hypothesentests auf und führen die Tests durch (T II.1, T II.2, A II, M II.2, K II.1),
- modellieren mithilfe der Normalverteilung und nutzen dabei auch Erwartungswerte und Standardabweichungen von normalverteilten Zufallsgrößen für Wahrscheinlichkeitsaussagen (M I, T II.2),
- beschreiben den Unterschied zwischen diskreten und stetigen Zufallsgrößen am Beispiel der Binomial- und Normalverteilung (A II, K II.1),
- vergleichen Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsgröße mit den durch die Normalverteilung genäherten Werten (M III.2).

Wahlpflichtmodul 6

Analytische Geometrie

Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau

Die Schülerinnen und Schüler

- beschreiben Geraden und Ebenen mithilfe von Vektoren analytisch (D I, T II.1),
- nutzen bei Problemlösungen Ebenengleichungen auch in Koordinatenform (P II, T II.1),
- untersuchen, ob ein Punkt auf einer bestimmten Geraden oder in einer bestimmten Ebene liegt (T II.1, A I.1, A I.2, K II.1),
- wählen geeignete Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen aus und wenden sie an (T II.1, T I.4),
- erläutern das Gaußsche Eliminationsverfahren für lineare Gleichungssysteme und wenden es an (K II.1, T II.1),
- untersuchen die Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden im Raum sowie zwischen Gerade und Ebene, setzen diese in Beziehung zur Lösungsvielfalt des entsprechenden Gleichungssystems und begründen diese (T II.1, A II, K II.1),
- bestimmen Neigungswinkel von Ebenen gegen die Horizontale mithilfe des Skalarprodukts (T II.1),
- berechnen Größen von Winkeln zwischen Geraden sowie zwischen Gerade und Ebene sowie zwischen Ebenen (T II.1, K II.1),
- entwickeln ein Verfahren zur Berechnung des Abstands zwischen Punkt und Ebene und wenden dieses an (P II, D II.1, T II.1, K II.1),
- bestimmen rechnerisch die Koordinaten von Bildern geometrischer Objekte in der Ebene mithilfe der Multiplikation mit 2×2 -Matrizen und untersuchen anschaulich den Einfluss der Abbildungsmatrizen, auch mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge (P II, A II, D II.1, T I.2),
- lösen geometrische Probleme durch strategiegestütztes Vorgehen und dokumentieren ihren Lösungsprozess verständlich (P II, A II, K II.1).

Zusätzlich im erhöhten Anforderungsniveau:

Die Schülerinnen und Schüler

- bestimmen den Abstand zwischen Punkt und Gerade sowie zwischen zwei Geraden (T II.1),
- untersuchen die Lagebeziehung zwischen zwei Ebenen (T II.1, A II, K II.1),
- untersuchen die Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen (T II.1, A II, K II.1).

Wahlpflichtmodul 7

Lineare Algebra

Grundlegendes und erhöhtes Anforderungsniveau

Die Schülerinnen und Schüler

- modellieren Wachstums- und Umverteilungsprozesse sowie Produktionsverflechtungen mithilfe von Übergangsgraphen und Matrizen (M I, M II),
- vergleichen und validieren Modelle, auch indem sie Übergangsgraphen und Matrixelemente im Kontext interpretieren (M III.2),
- modifizieren Modelle durch Berücksichtigung zusätzlicher Einflussgrößen (M II.3),
- bestimmen Zustandsvektoren zur Beschreibung von nachfolgenden und vorausgehenden Zuständen, auch mithilfe von Matrixmultiplikation und inversen Matrizen. Dabei nutzen sie auch digitale Mathematikwerkzeuge (M I.1, T II, M I.3).
- stellen im Anwendungskontext lineare Gleichungssysteme auf, wählen geeignete Verfahren zur Lösung aus und wenden sie an, auch mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge (M I.2, T II.3, M I.3, T I.4),
- erläutern das Gaußsche Eliminationsverfahren für lineare Gleichungssysteme und wenden es an (K II.1, T II.1),
- bestimmen und interpretieren Fixvektoren (M I.3, T I.4, T II.1),
- bestimmen Matrizenpotenzen mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge und interpretieren diese im Sachkontext (T II.3, M II.2),
- stellen ihre Lösungswege beschreibend und argumentativ dar (A II, K II.1).

Zusätzlich im erhöhten Anforderungsniveau:

Die Schülerinnen und Schüler

- untersuchen das Langzeitverhalten von Wachstums- und Umverteilungsprozessen experimentell mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge und formulieren dazu begründete Aussagen (T II, M II.2, A II, K II.1),
- bestimmen Grenzmatrizen und Grenzvektoren mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge und interpretieren diese im Kontext (T II.3, M II.).

3.2.2 Inhalte

Die inhaltsbezogenen Kompetenzen bauen auf den Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe I auf. Paradigmatische Beispiele, die Kernideen der Module enthalten, bilden jeweils die Grundlage für die Entwicklung der vorgesehenen Kompetenzen.

Im ersten Jahr der Studienstufe werden die Module 1, 2 und 3 erarbeitet, im zweiten Jahr die Module 4 und 5 sowie eines der Wahlpflichtmodule 6 und 7.

