Hamburger Beiträge
zur Angewandten Mathematik

Grundlagen der Lehre
Hier: Die Additionstheoreme

R. Ansorge

Nr. 2016-15
Juni 2016

Grundlagen der Lehre
Hier: Die Additionstheoreme.

R. Ansorge

Nachdem man am Einheitskreis und unter Ausnutzung des 2. Strahlensatzes (vgl. z.B. [1]) auch an rechtwinkligen Dreiecken die trigonometrischen Funktionen eingeführt hat, überdies inzwischen den Studierenden, auch denen der Anwendungsfächer (Physik, Ingenieurwissenschaften), Skalarprodukte von Vektoren und deren Eigenschaften, etwa

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \varphi \tag{1}$$

(φ = Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$) und bei orthogonaler Basis

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 \tag{2}$$

mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ bekannt sind, ergibt sich, insbesondere im Hinblick auf die Herleitung der Ableitungen der trigonometrischen Funktionen unter Auswertung der Differenzenquotienten, der Wunsch nach Nutzung und damit Beweis der Additionstheoreme.

Hierfür gibt es übersichtliche anschaulich geometrische Beweise (siehe z.B. [2], S. 16), die jedoch bei Kenntnis der Skalarprodukte unter Verwendung von (1) und (2) auch sehr leicht direkt gewonnen werden können. Wertet man dabei (1) als Definition des Skalarprodukts, so ist für die Herleitung von (2) die Kenntnis der Additionstheoreme nicht erforderlich.

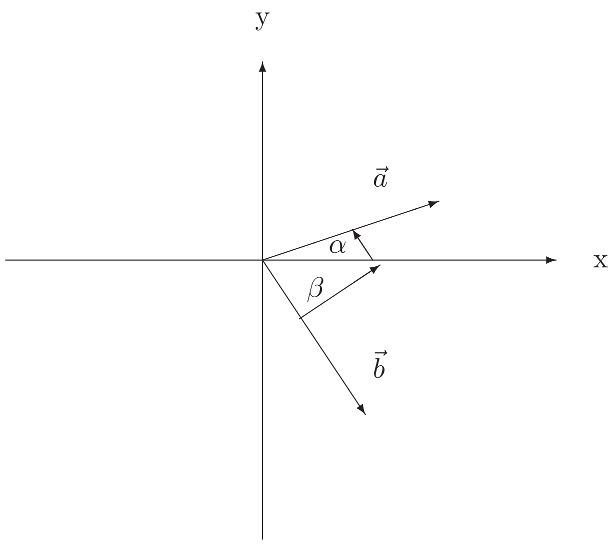

Fig.1 mit $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1$

So liefert Fig.1 bei im mathematisch positiven Sinne gezählten Winkeln α, β wegen $\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ -\sin\beta \end{pmatrix}$ (auch bei negativen Winkeln oder bei Winkeln, die grösser sind als $\frac{\pi}{2}$) unmittelbar

$(\vec{a}, \vec{b}) = \cos(\alpha + \beta)$ (gemäss (1)) oder
$(\vec{a}, \vec{b}) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ (gemäss (2))

und damit das Additionstheorem des cosinus. Aus diesem gewinnt man mittels der am Einheitskreis sofort einsichtigen Formeln

$$\cos(\varphi - \tfrac{\pi}{2}) = \sin\varphi \quad , \quad \sin(\varphi - \tfrac{\pi}{2}) = -\cos\varphi \quad , \quad \tan\varphi = \tfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

auch die Additionstheoreme des sinus und des tangens, z.B.

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta - \tfrac{\pi}{2}) = \cos\alpha\cos(\beta - \tfrac{\pi}{2}) - \sin\alpha\sin(\beta - \tfrac{\pi}{2}) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta \quad .$$

Miitels der Additionstheoreme lassen sich nun in einer auch für Studierende der Anwendungsfächer bekannten Weise die Ableitungen der geometrisch an rechtwinkligen Dreiecken eingeführten trigonometrischen Funktionen gewinnen, also

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \quad , \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \quad , \tag{3}$$

die dann per Taylor-Entwicklung zu den Potenzreihendarstellungen der trigonometrischen Funktionen führen.

Auf diese Weise ermöglichen die Additionstheoreme schliesslich den Nachweis der Identität der mittels Potenzreihen definierten trigonometrischen Funktionen mit den elementar-geometrisch eingeführten gleichnamigen Funktionen.

Literatur

[1] Ansorge, R.: *Grundlagen der Lehre. Hier: Die Strahlensätze*, Hamb. Beiträge zur Angew. Math. (2016-09), Hamburg 2016

[2] Ansorge, R., H.J. Oberle, K. Rothe, Th. Sonar: *Mathematik für Ingenieure, 4. Aufl., vol.1.* Verlag Wiley-VCH, Weinheim 2010

R.Ansorge
Augustinum Aumühle
Mühlenweg 1, App. 404
21521 Aumühle