Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung

Schriftliche Abiturprüfung

Mathematik

Beispielaufgaben zum Abitur 2017

Impressum

Herausgeber:	Freie und Hansestadt Hamburg Behörde für Schule und Berufsbildung Hamburger Straße 31, 22083 Hamburg
Referat:	Mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Unterricht
Referatsleitung:	Monika Seiffert
Fachreferat Mathematik:	Xenia Rendtel
Redaktion:	Xenia Rendtel Andreas Busse Manfred Bergunde

Internet: http://www.hamburg.de/abschlusspruefungen/

Hamburg, im Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung

Die schriftliche Abiturprüfung 2017 im Fach Mathematik bezieht sich erstmals auf die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife von 2012 und die zur Orientierung vom IQB veröffentlichte Aufgabensammlung. Zur Implementation der Bildungsstandards Mathematik wurde in Hamburg eine Konkretisierung des Rahmenplans Mathematik gymnasiale Oberstufe erforderlich, die im Sommer 2015 als Anlage zum Rahmenplan veröffentlicht und im Frühjahr 2016 aktualisiert wurde. Diese Anlage ist verbindliche Grundlage des Unterrichts und der Abiturprüfung.

Hiermit legen wir Ihnen ein neues Heft mit Beispielaufgaben zur Übung des Prüfungsteils B in der schriftlichen Abiturprüfung Mathematik 2017 vor. Die Aufgaben sind für eine Bearbeitung mit wissenschaftlichen Taschenrechnern (WTR) konzipiert, sollten aber auch in Kursen, die ein CAS-Abitur schreiben, bearbeitet werden.
Zur Unterstützung der Prüfungsvorbereitung stehen weiterhin folgende, passgenaue Materialien zur Verfügung:

- IQB Aufgabensammlung Mathematik,
  https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/abi/mathematik

Diese Aufgabensammlung enthält für beide Anforderungsniveaus sowohl für den Prüfungsteil A (ohne Hilfsmittel zu bearbeiten) als auch für den Prüfungsteil B (mit WTR oder CAS zu bearbeiten) Aufgaben für jedes mathematische Sachgebiet.

Zum Training der Anforderungen können Aufgaben aus Schulbüchern und alte Prüfungsaufgaben herangezogen werden. Eine Auflistung von Verweisen finden Sie in der Veröffentlichung „Hinweise auf Übungsaufgaben zu den IQB-Beispielaufgaben“ vom September 2016.

Speziell für den Prüfungsteil A (hilfsmittelfrei) sind weiterhin passgenau:

- *Beispielaufgaben für einen hilfsmittelfreien Prüfungsteil in der schriftlichen Abiturprüfung Mathematik - grundlegendes Niveau*
- *Musteraufgaben für einen hilfsmittelfreien Prüfungsteil in der schriftlichen Abiturprüfung Mathematik - erhöhtes Anforderungsniveau*
- *Schriftliche Abiturprüfung, Mathematik, Ergänzungsheft, Hinweise und Beispiele für den hilfsmittelfreien Prüfungsteil*

Dieses und weiteres Material findet man unter http://www.hamburg.de/abitur-2017/4793348/mathematik/.
Wir hoffen, Ihnen und Ihren Abiturientinnen und Abiturienten mit dieser Publikation eine geeignete Unterstützung für eine gezielte Vorbereitung der schriftlichen Abiturprüfung geben zu können.

I Aufgaben

1 Analysis

Aufgabe 1. Photovoltaik (erhöhtes Anforderungsniveau) **EH S. 20**

1. Für die Planung einer Photovoltaikanlage wird die elektrische Leistung der Anlage bei verschiedenen Sonnenständen mithilfe der unten stehenden Funktionen g_a modelliert. Dabei werden zunächst die möglichen wetterbedingten Leistungsminderungen vernachlässigt.
Jede der Funktionen g_a beschreibt die elektrische Leistung $g_a(t)$ in Kilowatt (kW) zu der Zeit t in Stunden, wobei $t = 0$ derjenige Zeitpunkt ist, der genau in der Mitte zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang liegt.

$$g_a(t) = 0{,}04 \cdot t^4 - 8 \cdot t^2 + a \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad a \in [215; 250]$$

Durch den Parameter a werden die jahreszeitlichen Unterschiede berücksichtigt. Die Graphen von g_a werden mit K_a bezeichnet.
Die Funktionen g_a sind zwar für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert, aber zur Modellierung wird nur der Zeitraum betrachtet, in dem die Fläche der Solarzellen von der Sonne beschienen wird.
Die Grenzen dieses Modellierungszeitraums werden durch zwei Bedingungen bestimmt:

(1) Die Grenzen dürfen weder vor Sonnenaufgang noch nach Sonnenuntergang liegen.
(2) Negative Werte von $g_a(t)$ sind nicht zulässig.

a) An einem Wintertag geht die Sonne um 08:18:44 Uhr auf und um 16:43:30 Uhr unter.
Berechnen Sie die Uhrzeit, die $t = 0$ entspricht. **(3 BE)**

b) K_a hat für alle a einen Hochpunkt an der Stelle $t = 0$.
Am Standort der Anlage liegen an keinem Tag des Jahres zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang mehr als 16 Stunden und 50 Minuten.
Zeigen Sie, dass K_a für alle a im Modellierungszeitraum keinen lokalen Tiefpunkt besitzt.
(3 BE)

c) An einem Herbsttag liegen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang bei $t_1 = -4{,}220$ und $t_2 = 4{,}220$. Für diesen Tag ist $a = 222$.
Entscheiden Sie, ob für die Grenzen des Modellierungszeitraums Bedingung (1) oder Bedingung (2) ausschlaggebend ist.
Begründen Sie Ihre Entscheidung. **(3 BE)**

d) An einem Frühlingstag ist der Modellierungszeitraum durch (2) gegeben und es ist für diesen Tag $a = 244$.

Berechnen Sie die Grenzen des Modellierungszeitraums für diesen Frühlingstag.

(Zur Kontrolle: Die Grenzen liegen bei $t \approx \pm 6{,}128$.) **(7 BE)**

e) g'_a beschreibt die momentane Änderungsrate von g_a auf $\mathbb{R}$.

Bestimmen Sie für diesen Frühlingstag den betragsmäßig größten Funktionswert von $g'_a(t)$ auf dem Intervall $[-6{,}128; 6{,}128]$. **(7 BE)**

f) Für die elektrische Energie $E(t)$, die von der Anlage im Laufe des Tages geliefert werden kann, gilt $E'(t) = g_a(t)$.

Berechnen Sie, wie groß die gesamte Menge an Energie ist, die an dem beschriebenen Frühlingstag von der Anlage geliefert werden kann.

Geben Sie Ihr Ergebnis in der korrekten Maßeinheit **an.** **(5 BE)**

2. Nun soll die Auswirkung einer gegen Mittag vorüberziehenden Wolkenfront modelliert werden. Im Zeitraum von $t = -1$ bis $t = 1$ wird $g_a(t)$ durch einen zeitabhängigen Faktor $w(t)$ mit $0{,}5 \leq w(t) \leq 1$ beeinflusst, sodass die elektrische Leistung im Intervall $[-1; 1]$ nicht mehr durch $g_a(t)$, sondern durch $h_a(t) = g_a(t) \cdot w(t)$ beschrieben wird.
Die Funktion w hat mit $w(0) = 0{,}5$ ihren kleinsten Wert an der Stelle $t = 0$.
Der Graph von h_a schließt an den Stellen $t = -1$ und $t = 1$ sprungfrei an K_a an, es gilt also $w(-1) = w(1) = 1$.

a) **Zeigen** Sie für den Anschluss bei $t = 1$, dass dort die Knickfreiheit gewährleistet ist, wenn gilt: $w'(1) = 0$ **(5 BE)**

b) **Geben** Sie für $w(t)$ einen möglichen Funktionsterm oder mögliche mehrere abschnittsweise gültige Funktionsterme **an**, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $w(-1) = 1$

(2) $w(1) = 1$

(3) $w'(-1) = 0$

(4) $w'(1) = 0$

(5) Der Graph von w hat einen lokalen Tiefpunkt in $(0|0{,}5)$.

Weisen Sie die Gültigkeit der Bedingungen (1) bis (5) für Ihre Lösung **nach.** **(5 BE)**

3. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit

$$f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

a) **Bestätigen** Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = -e^{-\frac{1}{2}x^2}$ eine Stammfunktion von f ist.

(2 BE)

b) In Abbildung 1 ist der Graph von F eingezeichnet.

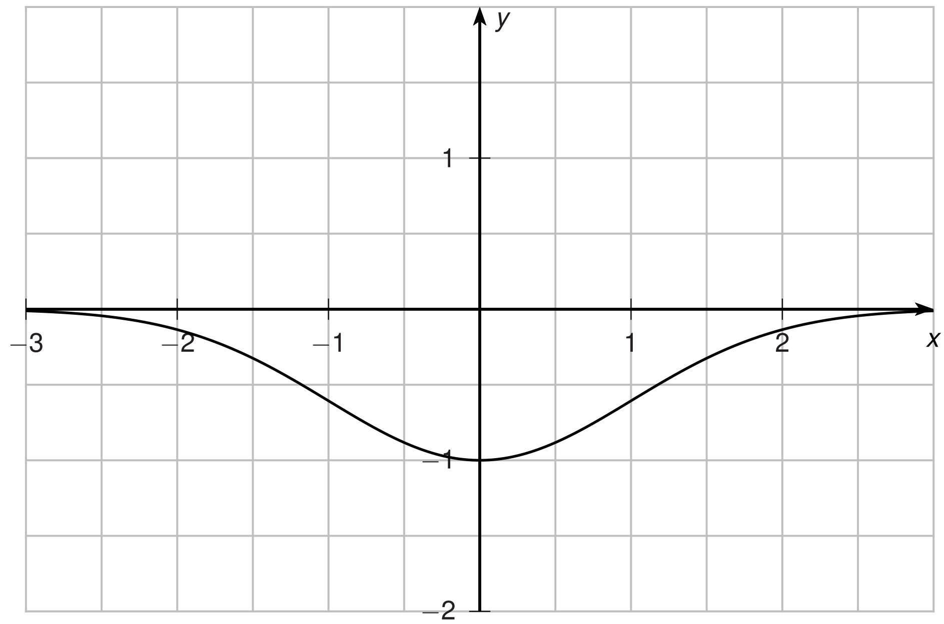


Abb. 1

Skizzieren Sie in dasselbe Koordinatensystem den Graphen von f. **(2 BE)**

c) Die Gleichung $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = r$ hat nur zu bestimmten $r \in \mathbb{R}$ Lösungen für x.

Ermitteln Sie, zu welchen r das der Fall ist. **(6 BE)**

d) Die Funktion f ist eine spezielle Funktion unter den in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_n mit $f_n(x) = x^n \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist.

Ermitteln Sie, welche der Funktionen f_n einen zum Ursprung punktsymmetrischen und welche einen zur Ordinatenachse achsensymmetrischen Graphen haben. **(2 BE)**

Aufgabe 2. Photovoltaik (grundlegendes Anforderungsniveau) EH S. 24

1. Für die Planung einer Photovoltaikanlage wird die elektrische Leistung der Anlage bei verschiedenen Sonnenständen mithilfe der unten stehenden Funktionen g_a modelliert. Dabei werden zunächst die möglichen wetterbedingten Leistungsminderungen vernachlässigt.
Jede der Funktionen g_a beschreibt die elektrische Leistung $g_a(t)$ in Kilowatt (kW) zu der Zeit t in Stunden, wobei $t = 0$ derjenige Zeitpunkt ist, der genau in der Mitte zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang liegt.

$$g_a(t) = 0{,}04 \cdot t^4 - 8 \cdot t^2 + a \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad a \in [215; 250]$$

Durch den Parameter a werden die jahreszeitlichen Unterschiede berücksichtigt. Die Graphen von g_a werden mit K_a bezeichnet.
Die Funktionen g_a sind zwar für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert, aber zur Modellierung wird nur der Zeitraum betrachtet, in dem die Fläche der Solarzellen von der Sonne beschienen wird.
Die Grenzen dieses Modellierungszeitraums werden durch zwei Bedingungen bestimmt:

(1) Die Grenzen dürfen weder vor Sonnenaufgang noch nach Sonnenuntergang liegen.
(2) Negative Werte von $g_a(t)$ sind nicht zulässig.

a) An einem Wintertag geht die Sonne um 08:18:44 Uhr auf und um 16:43:30 Uhr unter.
Berechnen Sie die Uhrzeit, die $t = 0$ entspricht. **(3 BE)**

b) **Begründen** Sie ohne Berücksichtigung der Grenzen des Modellierungszeitraumes, dass K_a für alle a achsensymmetrisch zur Ordinatenachse ist. **(1 BE)**

c) K_a hat für alle a einen Hochpunkt an der Stelle $t = 0$.
Am Standort der Anlage liegen an keinem Tag des Jahres zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang mehr als 16 Stunden und 50 Minuten.
Zeigen Sie, dass K_a für alles a im Modellierungszeitraum keinen lokalen Tiefpunkt besitzt.
(3 BE)

d) An einem Herbsttag liegen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang bei $t_1 = -4{,}220$ und $t_2 = 4{,}220$. Für diesen Tag ist $a = 222$.
Entscheiden Sie, ob für die Grenzen des Modellierungszeitraums Bedingung (1) oder Bedingung (2) ausschlaggebend ist.
Begründen Sie Ihre Entscheidung. **(3 BE)**

e) An einem Frühlingstag ist der Modellierungszeitraum durch (2) gegeben und es ist für diesen Tag $a = 244$.
Bestätigen Sie, dass für diesen Frühlingstag die Grenzen des Modellierungszeitraums bei $t_1 \approx -6{,}128$ und $t_2 \approx 6{,}128$ liegen. **(3 BE)**

f) **Zeichnen** Sie für diesen Frühlingstag den Graphen von g_a im gesamten Modellierungszeitraum. **(3 BE)**

g) g'_a beschreibt die momentane Änderungsrate von g_a auf $\mathbb{R}$.

Bestimmen Sie für diesen Frühlingstag den betragsmäßig größten Funktionswert von $g'_a(t)$ auf dem Intervall $[-6{,}128; 6{,}128]$, der als lokaler Extremwert auftritt. **(5 BE)**

h) Für die elektrische Energie $E(t)$, die von der Anlage im Laufe des Tages geliefert werden kann, gilt $E'(t) = g_a(t)$.

Berechnen Sie, wie groß die gesamte Menge an Energie ist, die an dem beschriebenen Frühlingstag von der Anlage geliefert werden kann.

Geben Sie Ihr Ergebnis in der korrekten Maßeinheit **an**. **(5 BE)**

2. Nun soll die Auswirkung einer gegen Mittag vorüberziehenden Wolkenfront modelliert werden. Im Zeitraum von $t = -1$ bis $t = 1$ wird $g_a(t)$ durch einen zeitabhängigen Faktor $w(t)$ mit $0{,}5 \leq w(t) \leq 1$ beeinflusst, sodass die elektrische Leistung im Intervall $[-1; 1]$ nicht mehr durch $g_a(t)$, sondern durch $h_a(t) = g_a(t) \cdot w(t)$ beschrieben wird.
Die Funktion w hat mit $w(0) = 0{,}5$ ihren kleinsten Wert an der Stelle $t = 0$.
Der Graph von h_a schließt an den Stellen $t = -1$ und $t = 1$ sprungfrei an K_a an.
Geben Sie für $w(t)$ einen möglichen Funktionsterm oder mögliche mehrere abschnittsweise gültige Funktionsterme **an**, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $w(-1) = 1$ und $w(1) = 1$

(2) Der Graph von w hat einen lokalen Tiefpunkt in $(0|0{,}5)$.

Weisen Sie die Gültigkeit der Bedingungen (1) und (2) für Ihre Lösung **nach**. **(6 BE)**

3. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x \cdot \sin(x)$. Ihr Graph ist in Abbildung 2 abgebildet.

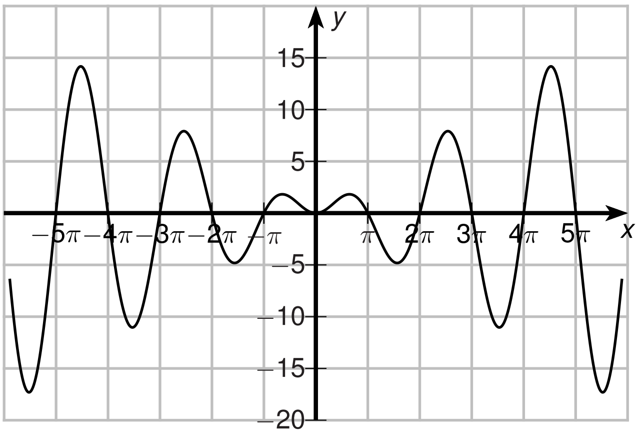
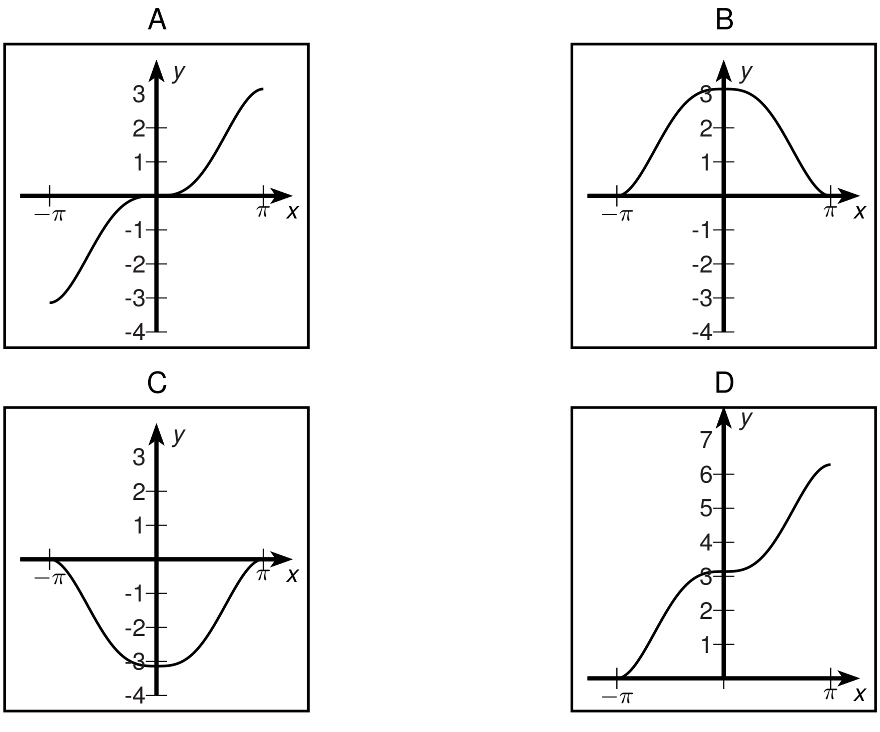


Abb. 2

a) **Bestätigen** Sie, dass die Funktion f die gleichen Nullstellen hat wie die Funktion s mit $s(x) = \sin(x)$. **(1 BE)**

b) **Zeigen** Sie, dass die Extremstellen der Funktion s keine Extremstellen der Funktion f sind. **(3 BE)**

c) Zu der Funktion F mit $F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt$ werden im Intervall $[-\pi; \pi]$ die nachfolgenden Graphen A, B, C und D angeboten.



Entscheiden Sie, welcher Graph der richtige ist.

Begründen Sie für zwei der nicht gewählten Graphen, warum sie falsch sind. **(4 BE)**

2 Analytische Geometrie

Aufgabe 3. Designerentwurf (erhöhtes Anforderungsniveau) **EH S. 27**

1. Ein Designer entwirft mithilfe einer CAD-Software ein Dekorationsobjekt für ein Juweliergeschäft. Das Ausgangsmaterial für das Objekt ist ein Metallquader. Die Eckpunkte des Quaders sind im räumlichen Koordinatensystem:

$A(2|-2|0)$, $B(2|3|0)$, $C(-2|3|0)$, $D(-2|-2|0)$,
$E(2|-2|3)$, $F(2|3|3)$, $G(-2|3|3)$ und $H(-2|-2|3)$.

Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Zentimeter in der Realität (siehe Abbildung 3 in der Anlage).

Der Designer plant zunächst, aus dem gegebenen Quader eine Pyramide *ABCDS* zu konstruieren, deren Spitze bei $S(0|0{,}5|3)$ liegt.

a) **Zeichnen** Sie die Pyramide in die Abbildung 3 in der Anlage ein. **(3 BE)**

b) Die Oberfläche der Metallpyramide soll vergoldet werden.
Berechnen Sie die Oberfläche der Pyramide. **(3 BE)**

c) **Bestimmen** Sie die Ebenengleichung der Ebene E_1, in der das Dreieck *ABS* liegt, in Koordinatenform.
(Zur Kontrolle: $E_1: 3x_1 + 2x_3 = 6$*)* **(3 BE)**

d) Das Dreieck *BCS* liegt in der Ebene $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3{,}6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1{,}2 \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie den Winkel, den die Dreiecksflächen *ABS* und *BCS* miteinander bilden. **(5 BE)**

e) **Beurteilen** Sie, ob die Kante $\overline{DS}$ die x_3-Achse schneidet. **(3 BE)**

f) Der Designer überlegt, an der unteren Kante $\overline{AB}$ einen kleinen Diamanten zu befestigen, der die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis 2 : 3 aufteilt.
Bestimmen Sie die beiden möglichen Positionen des Diamanten. **(3 BE)**

2. Gegeben sind eine Ebene F in Koordinatenform $F: x_2 + x_3 = 4$ und die folgenden Ebenengleichungen:

$F_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$

$F_2: -x_2 - x_3 = 8$

$F_3: x_2 - x_3 = 4$

$F_4: x_2 + x_3 = -8$

$F_5: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$

$F_6: -x_2 + 2x_3 = 4$

Zwei der angegebenen Ebenen sind orthogonal zu F.

Geben Sie diese beiden Ebenen **an** und **begründen** Sie ihre Auswahl. **(5 BE)**

Anlage zur Aufgabe „Designerentwurf“

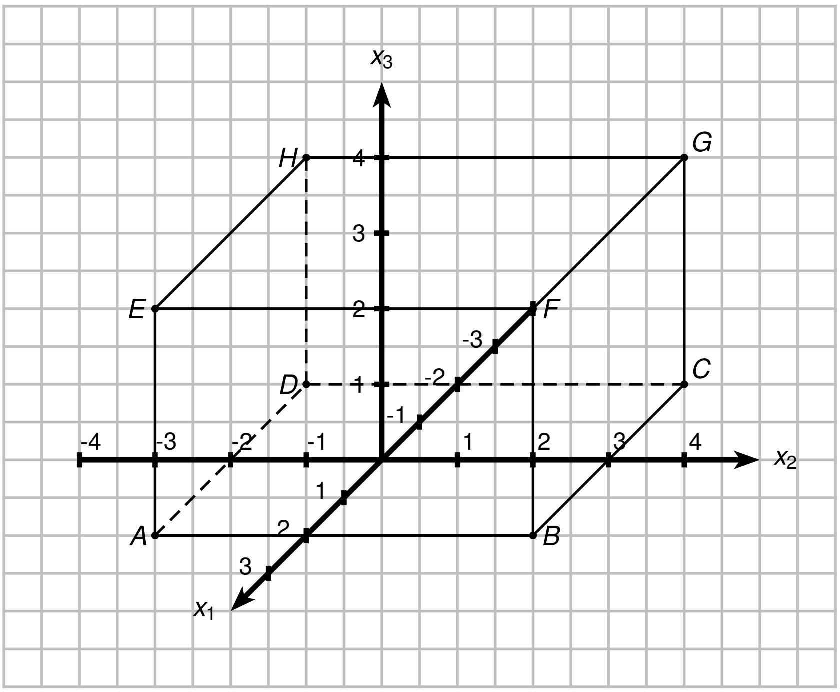


Abb. 3

Aufgabe 4. Designerentwurf (grundlegendes Anforderungsniveau) EH S. 31

Ein Designer entwirft mithilfe einer CAD-Software ein Dekorationsobjekt für ein Juweliergeschäft. Das Ausgangsmaterial für das Objekt ist ein Metallquader. Die Eckpunkte des Quaders sind im räumlichen Koordinatensystem:

$A(2|-2|0)$, $B(2|3|0)$, $C(-2|3|0)$, $D(-2|-2|0)$,

$E(2|-2|3)$, $F(2|3|3)$, $G(-2|3|3)$ und $H(-2|-2|3)$.

Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Zentimeter in der Realität (siehe Abbildung 4 in der Anlage).

Der Designer plant zunächst, aus dem gegebenen Quader eine Pyramide $ABCDS$ zu konstruieren, deren Spitze bei $S(0|0{,}5|3)$ liegt.

a) **Zeichnen** Sie die Pyramide in die Abbildung 4 in der Anlage ein. **(3 BE)**

b) **Zeigen** Sie, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck, aber kein Quadrat ist. **(3 BE)**

c) **Bestimmen** Sie die Ebenengleichung der Ebene E_1, in der das Dreieck ABS liegt, in Koordinatenform.

(Zur Kontrolle: $E_1 : 3x_1 + 2x_3 = 6$) **(3 BE)**

d) **Bestimmen** Sie den Neigungswinkel des Dreiecks ABS gegenüber der Grundfläche der Pyramide. **(3 BE)**

e) **Beurteilen** Sie, ob die Kante $\overline{DS}$ die x_3-Achse schneidet. **(3 BE)**

f) Der Designer überlegt, an der unteren Kante $\overline{AB}$ einen kleinen Diamanten zu befestigen, der die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis 2 : 3 aufteilt.

Bestimmen Sie die beiden möglichen Positionen des Diamanten. **(3 BE)**

g) Der Designer konstruiert mit seinem CAD-Programm aus dem Quader eine neue Pyramide mit rechteckiger Grundfläche, aber kleinerem Volumen. Die Kante $\overline{AD}$ lässt er gleich, die neue Pyramide hat eine Höhe von 2 cm und ein Volumen von 9 cm^3.

Bestimmen Sie die Koordinaten einer möglichen neuen Spitze und die beiden neuen Eckpunkte der Pyramidengrundfläche. **(2 BE)**

Anlage zur Aufgabe „Designerentwurf“

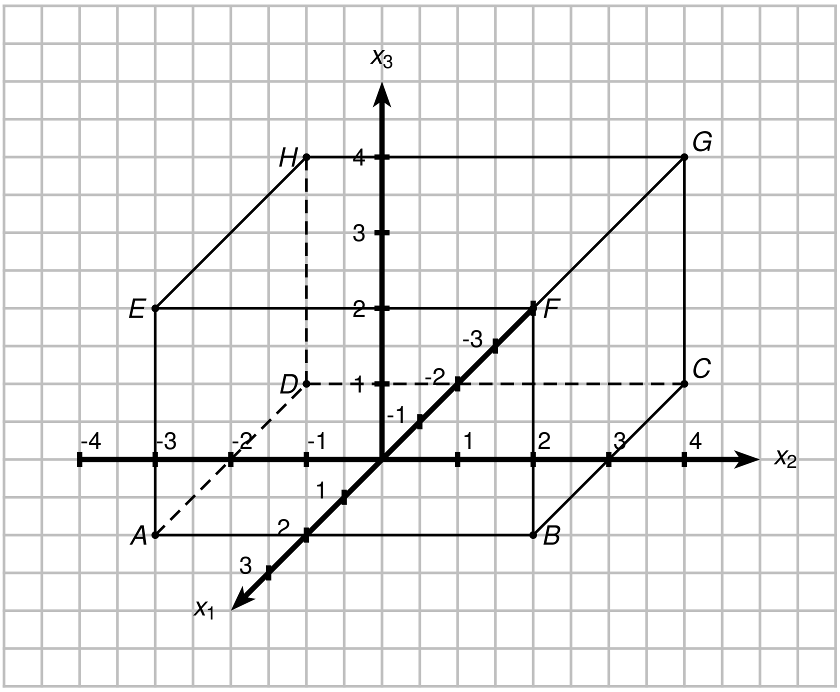


Abb. 4

3 Stochastik

Aufgabe 5. Möbelfabrik (erhöhtes Anforderungsniveau) **EH S. 34**

In einer Möbelfabrik werden Regale hergestellt. Es werden 3 Regaltypen produziert: *A*, *B* und *C*. Diese werden gepackt und als Bausatz verkauft.
In jedes Paket gehören Böden, Seitenteile und ein Tütchen mit Kleinmaterial (Schrauben, Winkel, Regalhalterungen ...). Die Pakete zu *A*, *B* und *C* unterscheiden sich in den Böden und Seitenteilen. Das Tütchen mit dem Kleinmaterial ist aus Rationalisierungsgründen bei den Paketen *A* und *B* dasselbe. Bei *C* wird ein anderes Tütchen verwendet, das sich aber äußerlich nicht vom Tütchen 1 unterscheidet.

Paket *A*	Paket B	Paket C
Böden *A*	Böden *B*	Böden *C*
Seitenteile *A*	Seitenteile *B*	Seitenteile *C*
Tütchen 1	Tütchen 1	Tütchen 2

Beim Packen können Fehler passieren, z. B. werden die Böden *B* in das Paket *C* gepackt.

1. a) Jedes Paket enthält genau eine Sorte der Böden, genau eine Sorte der Seitenteile und genau eines der beiden Materialtütchen.

Ermitteln Sie, auf wie viele Weisen man ein Paket packen kann. **(2 BE)**

b) In einer Dose befinden sich zufällig gemischt acht Tütchen des Typs 1 und zwei Tütchen des Typs 2. Beim Öffnen der Dose fallen versehentlich fünf Tütchen auf einmal auf den Boden.

Widerlegen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass beide Tütchen des Typs 2 zu den auf den Boden gefallen gehören, durch $\binom{5}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3$ gegeben ist. **(2 BE)**

Aufgrund langjähriger Erfahrungen kann angenommen werden, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Paket fehlerhaft gepackt ist, 9 % beträgt.
An einem durchschnittlichen Tag werden 117 Pakete gepackt.

c) **Interpretieren** Sie den folgenden Term im Sachkontext der vorliegenden Aufgabe:

$1 - 0{,}09^{117} - 117 \cdot 0{,}91 \cdot 0{,}09^{116}$ **(2 BE)**

d) Manchmal werden mehr Pakete als erwartet falsch gepackt.

Ermitteln Sie für einen Stichprobenumfang von 117 Paketen auf dem 5 %-Niveau eine Entscheidungsregel zu der Nullhypothese, dass sich die Wahrscheinlichkeit, dass ein Paket fehlerhaft gepackt ist, nicht über 9 % erhöht hat.

Verwenden Sie dabei die Sigmaregeln und **begründen** Sie deren Anwendbarkeit. **(5 BE)**

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Paket falsch gepackt ist, nicht mehr auf 9 % festgelegt ist.

2. Die Pakete werden von drei verschiedenen Personen gepackt: Person I, Person II und Person III.
Langfristig hat sich gezeigt, dass die Personen I und III jeweils 11 % ihrer Pakete fehlerhaft packen, während Person II nur 3,5 % ihrer Pakete fehlerhaft packt. Diese relativen Häufigkeiten sollen im Folgenden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden.
Die Ereignisse E und F sind folgendermaßen definiert:

E**:** Das Paket ist falsch gepackt.
F**:** Das Paket wurde von Person II gepackt.

Mit den Variablen

x**:** Anteil der Pakete, die Person II packt
y**:** $P(F|E)$

wird die Funktion $f: x \rightarrow y$, $x \in D$, definiert. Ihr Graph ist in Abbildung 5 dargestellt.

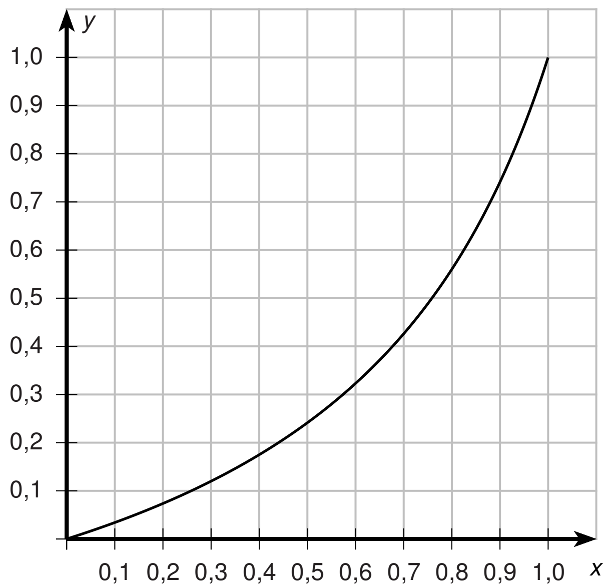


Abb. 5

a) Beurteilen Sie anhand des Graphen folgende Aussagen:

(1) „Wenn Person II die Hälfte aller Pakete packt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein falsch gepacktes Paket von ihr stammt, ungefähr 0,25."

(2) „Die Wahrscheinlichkeit, dass ein falsch gepacktes Paket von Person II stammt, steigt proportional mit dem Anteil der Pakete, die sie packt." **(4 BE)**

b) Bestimmen Sie mit den im Text angegebenen Wahrscheinlichkeiten eine Funktionsgleichung der Funktion f.

Geben Sie die im Sachkontext sinnvolle Definitionsmenge D von f **an.** **(4 BE)**

Die Dauer (gemessen in Minuten), die eine bestimmte Person benötigt, um ein Paket des Typs *C* zu packen, schwankt. Mit guter Näherung zeigt sich, dass diese Dauer bei Person I und Person II normalverteilt ist, während sich bei Person III keine Normalverteilung erkennen lässt. Die jeweiligen Verteilungsparameter sind der folgenden Tabelle zu entnehmen.

	Erwartungswert in Minuten	Standardabweichung in Minuten
Person I	$\mu_1 = 2{,}8$	$\sigma_1 = 0{,}5$
Person II	$\mu_2 = 2{,}8$	$\sigma_2 = 0{,}25$

Tab. 1

3. a) In Abbildung 6 sehen Sie den Graphen zu der normalverteilten Packdauer bezogen auf Person II.

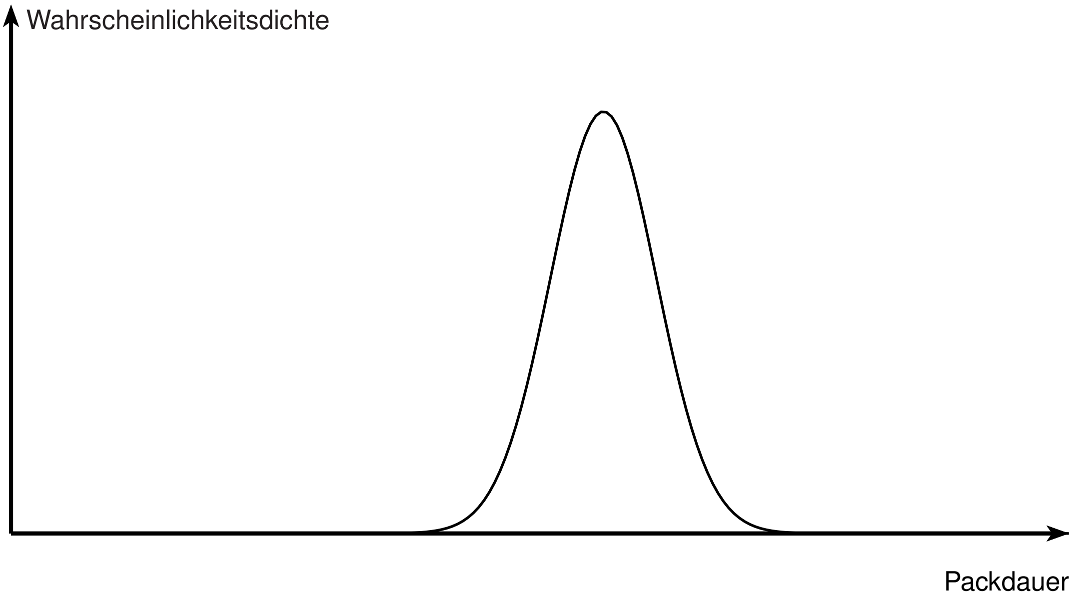


Abb. 6

Skizzieren Sie in dasselbe Koordinatensystem den entsprechenden Graphen zu Person I.

(2 BE)

b) **Ermitteln** Sie den Wert *t* so, dass die Wahrscheinlichkeiten der folgenden beiden Ereignisse gleich groß sind:

- Die Packdauer von Person I beträgt maximal *t* Minuten.
- Die Packdauer von Person II beträgt maximal 3 Minuten.

Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit. **(4 BE)**

Aufgabe 6. Möbelfabrik (grundlegendes Anforderungsniveau) EH S. 37

EH S. 37

In einer Möbelfabrik werden Regale hergestellt. Es werden 3 Regaltypen produziert: *A*, *B* und *C*. Diese werden gepackt und als Bausatz verkauft.
In jedes Paket gehören Böden, Seitenteile und ein Tütchen mit Kleinmaterial (Schrauben, Winkel, Regalhalterungen ...). Die Pakete zu *A*, *B* und *C* unterscheiden sich in den Böden und Seitenteilen. Das Tütchen mit dem Kleinmaterial ist aus Rationalisierungsgründen bei den Paketen *A* und *B* dasselbe. Bei *C* wird ein anderes Tütchen verwendet, das sich aber äußerlich nicht vom Tütchen 1 unterscheidet.

Paket *A*	Paket B	Paket C
Böden *A*	Böden *B*	Böden *C*
Seitenteile *A*	Seitenteile *B*	Seitenteile *C*
Tütchen 1	Tütchen 1	Tütchen 2

Beim Packen können Fehler passieren, z. B. werden die Böden *B* in das Paket *C* gepackt.

1. a) Jedes Paket enthält genau eine Sorte der Böden, genau eine Sorte der Seitenteile und genau eines der beiden Materialtütchen.

Ermitteln Sie, auf wie viele Weisen man ein Paket packen kann. **(2 BE)**

b) In einer Dose befinden sich zufällig gemischt acht Tütchen des Typs 1 und zwei Tütchen des Typs 2. Beim Öffnen der Dose fallen versehentlich fünf Tütchen auf einmal auf den Boden.

Widerlegen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass beide Tütchen des Typs 2 zu den auf den Boden gefallen gehören, durch $\binom{5}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3$ gegeben ist. **(2 BE)**

Aufgrund langjähriger Erfahrungen kann angenommen werden, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Paket fehlerhaft gepackt ist, 9 % beträgt.
An einem durchschnittlichen Tag werden 117 Pakete gepackt.

c) **Interpretieren** Sie den folgenden Term im Sachkontext der vorliegenden Aufgabe:

$1 - 0{,}09^{117} - 117 \cdot 0{,}91 \cdot 0{,}09^{116}$ **(2 BE)**

d) Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der an einem durchschnittlichen Tag fehlerhaft gepackten Pakete.

Ermitteln Sie k, sodass die Wahrscheinlichkeit für $X = k$ nur ein Viertel der Wahrscheinlichkeit für $X = 9$ beträgt. **(3 BE)**

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Paket falsch gepackt ist, nicht mehr auf 9 % festgelegt ist.

2. Die Pakete werden von drei verschiedenen Personen gepackt: Person I, Person II und Person III.
Langfristig hat sich gezeigt, dass die Personen I und III jeweils 11 % ihrer Pakete fehlerhaft packen, während Person II nur 3,5 % ihrer Pakete fehlerhaft packt. Diese relativen Häufigkeiten sollen im Folgenden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden.
Die Ereignisse E und F sind folgendermaßen definiert:

E**:** Das Paket ist falsch gepackt.
F**:** Das Paket wurde von Person II gepackt.

Mit den Variablen

x**:** Anteil der Pakete, die Person II packt
y**:** $P(F|E)$

wird die Funktion $f: x \to y$, $x \in D$, definiert. Ihr Graph ist in Abbildung 7 dargestellt.

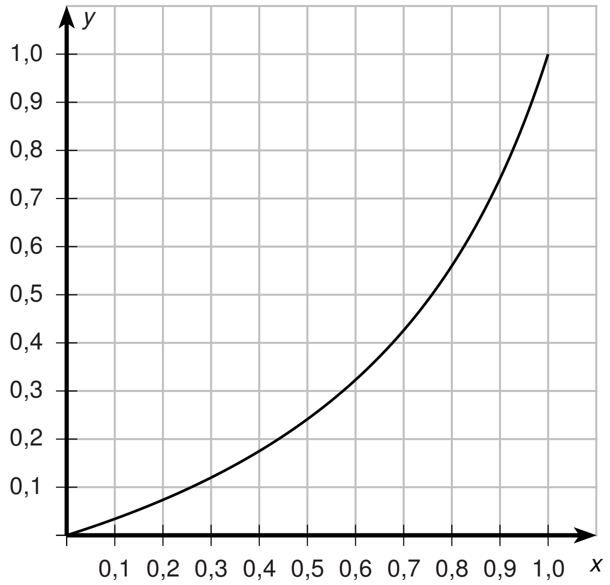


Abb. 7

a) Interpretieren Sie die Ereignisse $\overline{F}$ und $F \cap E$ im Sachkontext der Aufgabe. **(3 BE)**

b) Beurteilen Sie anhand des Graphen folgende Aussagen:

(1) „Wenn Person II die Hälfte aller Pakete packt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein falsch gepacktes Paket von ihr stammt, ungefähr 0,25."

(2) „Die Wahrscheinlichkeit, dass ein falsch gepacktes Paket von Person II stammt, steigt proportional mit dem Anteil der Pakete, die sie packt." **(4 BE)**

c) Bestimmen Sie mit den im Text angegebenen Wahrscheinlichkeiten eine Funktionsgleichung der Funktion f.

Geben Sie die im Sachkontext sinnvolle Definitionsmenge D von f **an.** **(4 BE)**

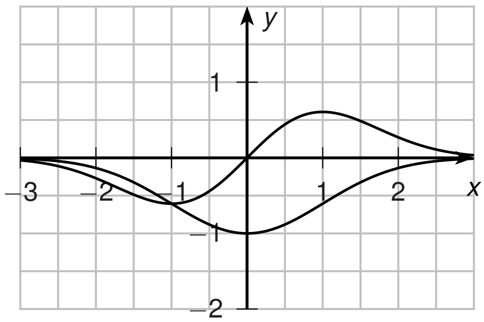
II Erwartungshorizonte

1 Analysis

Aufgabe 1. Photovoltaik (erhöhtes Anforderungsniveau)

	Lösungsskizze	BE
1 a)	Um um 08:18:44 Uhr sind 29924 Sekunden vergangen, um 16:43:30 Uhr 60210 Sekunden. Der Mittelwert beträgt 45067 Sekunden. Die Mitte entspricht der Uhrzeit 12:31:07 Uhr.	3
b)	Notwendige Bedingung für einen lokalen Extrempunkt ist $g_a'(t) = 0$. $0{,}16 \cdot t^3 - 16 \cdot t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 10 \vee t = -10$ Die Zeiten $t = 10$ und $t = -10$ liegen nach (1) außerhalb der Grenzen des Modellierungszeitraums, da ansonsten zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang mindestens 20 Stunden liegen müssten.	3
c)	Es ist $g_{222}(t) = 0{,}04 \cdot t^4 - 8 \cdot t^2 + 222$ und damit $g_{222}(4{,}220) = g_{222}(-4{,}220) \approx 92 > 0$ Die Bedingung (1) ist ausschlaggebend für den Modellierungszeitraum.	3
d)	Es ist zunächst $g_{244}(t) = 0{,}04 \cdot t^4 - 8 \cdot t^2 + 244$ Nullstellen von g_{244}: $0{,}04 \cdot t^4 - 8 \cdot t^2 + 244 = 0$ $\Leftrightarrow \quad t^4 - 200 \cdot t^2 + 6100 = 0$ Substitution $t^2 = z$: $z^2 - 200 \cdot z + 6100 = 0$ $\Leftrightarrow \quad z = 100 + 10 \cdot \sqrt{39} \quad \vee z = 100 - 10 \cdot \sqrt{39}$ Für $z = 100 + 10 \cdot \sqrt{39}$ ist: $t^2 = 100 + 10 \cdot \sqrt{39}$ $\Leftrightarrow \quad t = \sqrt{100 + 10 \cdot \sqrt{39}} \quad \vee t = -\sqrt{100 + 10 \cdot \sqrt{39}}$ $\Leftrightarrow \quad t \approx 12{,}75 \quad \vee t \approx -12{,}75$ Diese Lösungen sind im Sachkontext sinnlos, weil sie auf den vorangegangenen bzw. folgenden Tag verweisen. Für $z = 100 - 10 \cdot \sqrt{39}$ ist: $t^2 = 100 - 10 \cdot \sqrt{39}$ $\Leftrightarrow \quad t = \sqrt{100 - 10 \cdot \sqrt{39}} \quad \vee t = -\sqrt{100 - 10 \cdot \sqrt{39}}$ $\Leftrightarrow \quad t \approx 6{,}128 \quad \vee t \approx -6{,}128$ Die Grenzen liegen bei $t \approx 6{,}128$ und $t \approx -6{,}128$.	7

	Lösungsskizze	BE
e)	Der größte Betrag ist ein Extremwert, der als lokales Extremum oder als Randwert auftreten kann. Die Ableitungen von g sind: $g_a'(t) = 0{,}16 \cdot t^3 - 16 \cdot t$ und $g_a''(t) = 0{,}48 \cdot t^2 - 16$. Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von g_a' ist $g_a''(t) = 0$. Also ergibt sich $t = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{3} \vee t = -\frac{10 \cdot \sqrt{3}}{3}$. Aus $\frac{10 \cdot \sqrt{3}}{3} \approx 5{,}774 < 6{,}128$ folgt, dass die beiden möglichen lokalen Extremstellen innerhalb des Modellierungszeitraums liegen. Vergleich der möglichen lokalen Extremwerte mit den Randwerten unter Nutzung der Punktsymmetrie des Graphen von g_a': $g_a'(\pm\frac{10 \cdot \sqrt{3}}{3}) \approx \mp 61{,}584$ und $g_a'(\pm 6{,}128) \approx \mp 61{,}229$ Der größte Betrag von $g_a'(t)$ ist also ca. 61,584.	7
f)	Es ist $\int_{-6{,}128}^{6{,}128} (0{,}04 \cdot t^4 - 8 \cdot t^2 + 244)\,\mathrm{d}t = 2 \cdot \left[0{,}008 \cdot t^5 - \frac{8}{3} \cdot t^3 + 244 \cdot t\right]_0^{6{,}128}$ $\approx 1901{,}4$ Die Menge an Energie beträgt ca. 1901,4 kWh.	5
2 a)	Nach der Produktregel ist $h_a'(t) = g_a'(t) \cdot w(t) + g_a(t) \cdot w'(t)$. Also ist $h_a'(1) = g_a'(1) \cdot w(1) + g_a(1) \cdot w'(1)$. Nach Voraussetzung ist $w(1) = 1$ und $w'(1) = 0$, es folgt also $h_a'(1) = g_a'(1)$. Damit ist die Knickfreiheit gezeigt.	5
b)	*Mögliche Lösungen:* • $w(t) = 0{,}75 - 0{,}25 \cdot \cos(\pi \cdot t)$ Es gilt: – $w(0) = 0{,}75 - 0{,}25 \cdot \cos(0) = 0{,}5$ – $w(1) = 0{,}75 - 0{,}25 \cdot \cos(\pi) = 1$ – $w(-1) = 0{,}75 - 0{,}25 \cdot \cos(-\pi) = 1$ – $w'(t) = 0{,}25\pi \cdot \sin(\pi \cdot t)$ mit den Nullstellen $t = 1$ und $t = -1$. – Da die Kosinusfunktion an der Stelle $t = 0$ ein lokales Maximum hat, hat der Graph von w dort einen lokalen Tiefpunkt mit den Koordinaten $(0\|0{,}5)$.	5

	Lösungsskizze	BE
	• $w(t) = -0{,}5 \cdot t^4 + t^2 + 0{,}5$ Es gilt: – $w(0) = 0{,}5$ – $w(1) = w(-1) = -0{,}5 \cdot 1 + 1 + 0{,}5 = 1$ – $w'(t) = -2 \cdot t^3 + t$ – $w'(1) = w'(-1) = 0$ – $w'(0) = 0$ Aufgrund des negativen Leitkofeffizienten hat der Graph der Funktion an den Intervallgrenzen Hochpunkte und in der Mitte des Intervalls den Tiefpunkt $T(0\|\,0{,}5)$.	
3 a)	Es ist $F'(x) = (-1) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = f(x)$ und damit ist F eine Stammfunktion von f.	2
b)	 In der Skizze muss deutlich werden, dass ... • der Hochpunkt bei $x = 1$ und der Tiefpunkt bei $x = -1$ liegen, • der Ursprung auf der Kurve liegt sowie • der Graph sich für betragsmäßig große Argumente der x-Achse asymptotisch nähert.	2

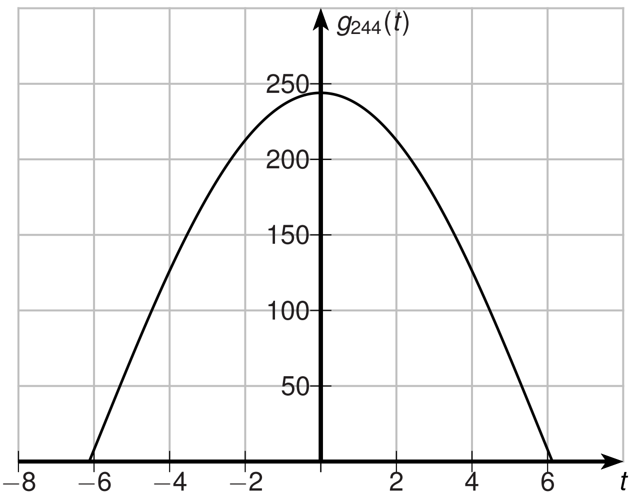
	Lösungsskizze	BE
c)	Es ist $\int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = r \quad \Leftrightarrow F(x) - F(0) = r$ $\Leftrightarrow -e^{-\frac{1}{2}x^2} + 1 = r$ $\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}x^2} = 1 - r$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 = \ln(1-r)$ Damit es für x eine Lösung gibt, muss • $(1-r) > 0$ sein, da sonst der ln-Term nicht definiert ist, • $(1-r) \leq 1$ sein, damit $\ln(1-r)$ nicht positiv ist. Es ist $0 < (1-r) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq r < 1$ Die Gleichung hat für x genau zu denjenigen r Lösungen, für die $0 \leq r < 1$ ist.	6
d)	Der Faktor $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ändert sich nicht bei Vorzeichenänderung von x. Also ist die Symmetrie bestimmt durch den Faktor x^n. Für alle geraden Zahlen n hat der Graph von f_n eine Achsensymmetrie zur Ordinate, für alle ungeraden Zahlen n hat der Graph von f_n eine Punktsymmetrie zum Ursprung.	2
	Insgesamt	50

Standardbezug zur Aufgabe „Photovoltaik (erhöhtes Anforderungsniveau)“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a)	3				X				II					X	
b)	3		X		X		II		II		I			X	
c)	3				X		II		II					X	
d)	7	X			X				I		I		X		
e)	7		X		X		II				II	II		X	
f)	5		X		X				I		I		X		
2 a)	5		X		X		III	II			II				X
b)	5		X		X		II	III			II				X
3 a)	2		X		X						II			X	
b)	2		X		X					II	II			X	
c)	6						III	II			III				X
d)	2				X			II			II	II		X	

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	**Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)**	**Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)**
24 %	44 %	32 %

Aufgabe 2. Photovoltaik (grundlegendes Anforderungsniveau)

	Lösungsskizze	BE
1 a)	Um um 08:18:44 Uhr sind 29924 Sekunden vergangen, um 16:43:30 Uhr 60210 Sekunden. Der Mittelwert beträgt 45067 Sekunden. Die Mitte entspricht der Uhrzeit 12:31:07 Uhr.	3
b)	Der jeweilige Funktionsterm hat für alle a ausschließlich gerade Exponenten in den Potenzen von x.	1
c)	Notwendige Bedingung für einen lokalen Extrempunkt ist $g_a'(t) = 0$. $0{,}16 \cdot t^3 - 16 \cdot t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 10 \vee t = -10$ Die Zeiten $t = 10$ und $t = -10$ liegen nach (1) außerhalb der Grenzen des Modellierungszeitraums, da ansonsten zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang mindestens 20 Stunden liegen müssten.	3
d)	Es ist $g_{222}(t) = 0{,}04 \cdot t^4 - 8 \cdot t^2 + 222$ und damit $g_{222}(4{,}220) = g_{222}(-4{,}220) \approx 92 > 0$ Die Bedingung (1) ist ausschlaggebend für den Modellierungszeitraum.	3
e)	Es ist $g_{244}(t) = 0{,}04 \cdot t^4 - 8 \cdot t^2 + 244$ Einsetzen der Werte liefert $g_{244}(6{,}128) = g_{244}(-6{,}128) \approx -0{,}012$ Die angegebenen Grenzen sind in guter Näherung Nullstellen der Modellfunktion.	3
f)		3

	Lösungsskizze	BE
g)	Die Ableitungen von g sind: $g_a'(t) = 0{,}16 \cdot t^3 - 16 \cdot t$ und $g_a''(t) = 0{,}48 \cdot t^2 - 16$. Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von g_a' ist $g_a''(t) = 0$. Also ergibt sich $t = \frac{10\cdot\sqrt{3}}{3} \vee t = -\frac{10\cdot\sqrt{3}}{3}$. Aus $\frac{10\cdot\sqrt{3}}{3} \approx 5{,}774 < 6{,}128$ folgt, dass die beiden möglichen lokalen Extremstellen innerhalb des Modellierungszeitraums liegen. Unter Nutzung der Punktsymmetrie des Graphen von g_a': $g_a'(\pm\frac{10\cdot\sqrt{3}}{3}) \approx \mp 61{,}584$ Der größte Betrag von $g_a'(t)$ ist also ca. 61,584.	5
h)	Es ist $\int\limits_{-6{,}128}^{6{,}128} (0{,}04 \cdot t^4 - 8 \cdot t^2 + 244)\,\mathrm{d}t = 2 \cdot \left[0{,}008 \cdot t^5 - \frac{8}{3} \cdot t^3 + 244 \cdot t\right]_0^{6{,}128}$ $\approx 1901{,}4$ Die Menge an Energie beträgt ca. 1901,4 kWh.	5
2)	*Mögliche Lösung:* • $w(t) = 0{,}5 \cdot t^2 + 0{,}5$ • $w(-1) = 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}5 = 1$ • $w(1) = 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}5 = 1$ • $w(0) = 0{,}5$ Der Graph von w ist eine nach oben geöffnete Parabel mit Symmetrie zur y-Achse. Ihr Scheitelpunkt ist ein lokaler Tiefpunkt mit den Koordinaten $(0\|0{,}5)$.	6
3 a)	Es ist $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \sin(x) = 0$. Die Nullstellen der Funktion s sind Nullstellen der Funktion f, unter ihnen ist die Nullstelle $x = 0$ bereits enthalten.	1
b)	Es ist $f'(x) = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)$ Die Extremstellen der Funktion s sind die Nullstellen der Kosinusfunktion. An diesen ist $\sin(x) = 1$ bzw. $\sin(x) = -1$, sodass sich $f'(x)$ dort von 0 unterscheidet. Somit kann die Funktion f an diesen Stellen keine Extremstellen besitzen.	3

	Lösungsskizze	BE
c)	Graph D ist richtig. *Mögliche Argumente gegen andere Graphen*: • $F(-\pi) = \int_{-\pi}^{-\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$; das spricht gegen Graph A. • $f(x)$ ist im gesamten Integrationsbereich größer gleich Null, daher kann $F(x)$ keine negativen Werte haben; das spricht gegen Graph A und Graph C; auch kann $F(x)$ nicht monoton fallen, das spricht gegen die Graphen B und C.	4
	Insgesamt	40

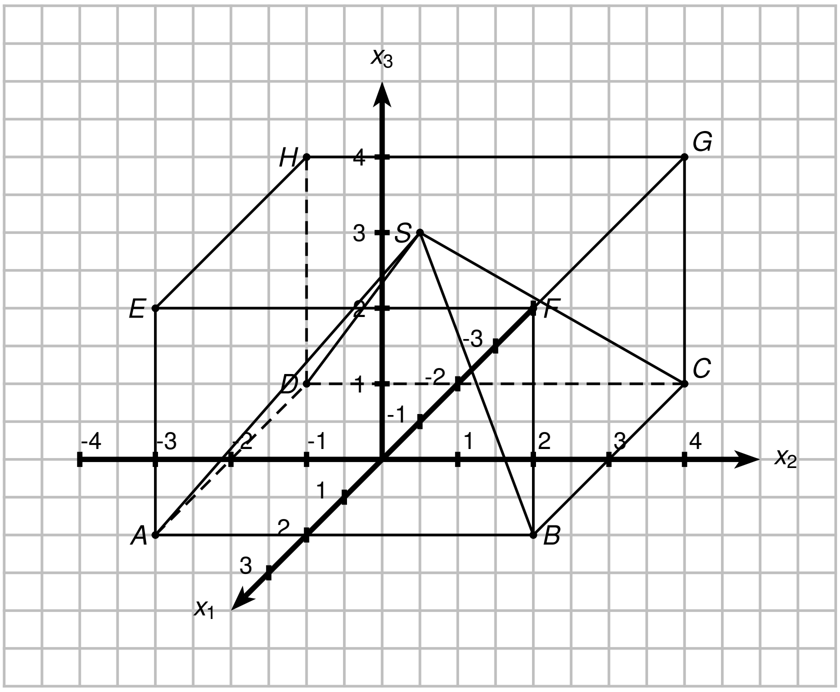
Standardbezug zur Aufgabe „Photovoltaik (grundlegendes Anforderungsniveau)"

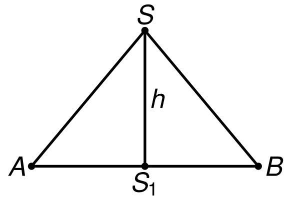
Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a)	3				X				II					X	
b)	1				X		I						X		
c)	3		X		X		II		II		I			X	
d)	3				X		II		II					X	
e)	3				X		I		I				X		
f)	3				X					I			X		
g)	5		X		X		II				II	II		X	
h)	5		X		X				I		I		X		
2	6		X		X		II	III			II				X
3 a)	1				X		I				I		X		
b)	3		X		X		II				I			X	
c)	4				X		III	III		III					X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	**Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)**	**Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)**
32,5 %	42,5 %	25 %

2 Analytische Geometrie

Aufgabe 3. Designerentwurf (erhöhtes Anforderungsniveau)

	Lösungsskizze	BE
1 a)		3

	Lösungsskizze	BE
b)	Die Grundfläche der Pyramide ist $A_G = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{BC}\rvert = 5 \cdot 4 = 20$. Die Grundseite des Dreiecks ABS hat die Länge $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = 5$.  Die Höhe h des Dreiecks ist die Länge des Vektors $\overrightarrow{S_1S}$, wobei S_1 die Koordinaten $(2\|0{,}5\|0)$ hat. Dann ist $\lvert\overrightarrow{S_1S}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \approx 3{,}61$ Damit ergibt sich die Dreiecksfläche A_{D1} zu $A_{D1} = \frac{5\cdot\sqrt{13}}{2} \approx 9{,}01$ Die Grundseite des Dreiecks BCS hat die Länge $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = 4$. Die Höhe beträgt $\left\lvert\begin{pmatrix}0\\-2{,}5\\3\end{pmatrix}\right\rvert = \frac{\sqrt{61}}{2} \approx 3{,}91$. Damit ergibt sich eine Fläche von $A_{D2} = \frac{\sqrt{61}}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{61} \approx 7{,}81$ Da die Dreiecke DCS und ABS, sowie die Dreiecke ADS und BCS kongruent sind, ergibt sich für die Oberfläche: $O = 20 + 2 \cdot (\frac{5\cdot\sqrt{13}}{2} + \sqrt{61}) \approx 53{,}65$ Die Oberfläche der Pyramide beträgt rund 54 cm^2.	3
c)	Die allgemeine Koordinatenform einer Ebene lautet: $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sind. Setzt man die Koordinaten der drei Punkte A, B und S in diese Gleichung ein, so erhält man die drei Gleichungen: I) $2a - 2b = d$ II) $2a + 3b = d$ III) $0{,}5b + 3c = d$ Aus I) und II) folgt mit dem Additionsverfahren $b = 0$ und somit $a = \frac{d}{2}$. Einsetzen in III) liefert $c = \frac{d}{3}$. Mit frei wählbarem d erhält man z. B. für $d = 2 \cdot 3 = 6$ die Ebenengleichung $E_1 : 3x_1 + 2x_3 = 6$.	3

	Lösungsskizze	BE
d)	Es ist zunächst die Ebene E_2 in Koordinatenform umzuwandeln. Man erhält das Gleichungssystem I $x_1 = s$ II $x_2 = t$ III $x_3 = 3{,}6 - 1{,}2 \cdot t$ Da II und III unabhängig von s sind, liefert Einsetzen von II in III die Gleichung $x_3 = 3{,}6 - 1{,}2x_2$, also $1{,}2x_2 + x_3 = 3{,}6$. Also ist ein passender Normalenvektor der Ebene E_2 der Vektor $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ein Normalenvektor für das Dreieck ABS ist $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ Für den Winkel α zwischen den beiden Dreiecken gilt: $\cos(\alpha) = \frac{\lvert\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_2}\rvert}{\lvert\overrightarrow{n_1}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{n_2}\rvert} = \frac{2}{\frac{\sqrt{793}}{5}}$. Daraus ergibt sich $\alpha \approx 69{,}2°$. Der Winkel zwischen den beiden Dreiecken ABS und BCS beträgt rund $69°$.	5
e)	Die Kante $\overline{DS}$ wird durch die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in [0; 1]$. beschrieben. Es ist also $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ zu lösen. Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda = 1$ und aus der zweiten $\lambda = 0{,}8$. Dies ergibt einen Widerspruch und somit schneidet die Kante $\overline{DS}$ nicht die x_3-Achse. *Alternative:* S liegt in der x_2-x_3-Ebene, der Punkt D nicht. Daher kann die Strecke $\overline{DS}$ mit der x_2-x_3-Ebene nur den Punkt S gemeinsam haben. S liegt nicht auf der x_3-Achse, also schneidet die Kante $\overline{DS}$ die x_3-Achse nicht.	3
f)	Der Diamant wird als punktförmig angenommen. Es ist K der Punkt auf der Kante $\overline{AB}$, in dem der Diamant befestigt wird. Damit liegt K auf der Geraden $g_1 : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $t = \frac{2}{5}$ oder $t = \frac{3}{5}$. Dann ist $\overrightarrow{OK_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OK_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die möglichen Koordinaten sind $K_1(2\|0\|0)$ und $K_2(2\|1\|0)$.	3

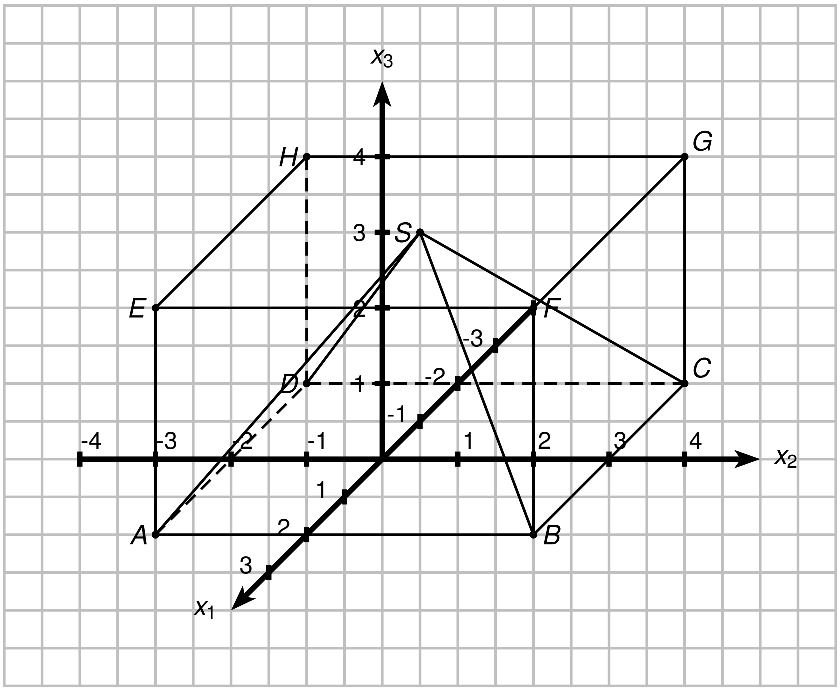
	Lösungsskizze	BE
2)	F_3 und F_5 sind orthogonal zu F. Ein Normalenvektor von F ist $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. • Ebene F_1 ist die Ebene F in Parameterform. • Ebene F_2 ist parallel zu F, da die Normalenvektoren kollinear sind. • Ein Normalenvektor von F_3 ist $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, damit ist das Produkt der beiden Normalenvektoren von F und F_3 gleich 0 und somit stehen die Ebenen senkrecht aufeinander. • Ebene F_4 ist parallel zu F, da die Normalenvektoren identisch sind. • Ein Normalenvektor von F_5 ist $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, damit ist das Produkt der beiden Normalenvektoren von F und F_5 gleich 0 und somit stehen die Ebenen senkrecht aufeinander. • Ein Normalenvektor von F_6 ist $\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$, damit ist das Produkt der beiden Normalenvektoren F und F_6 ungleich 0 und somit stehen die Ebenen nicht senkrecht aufeinander.	5
	Insgesamt	25

Standardbezug zur Aufgabe „Designerentwurf (erhöhtes Anforderungsniveau)“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a)	3			X						I		I	X		
b)	3		X	X			I				I		X		
c)	3	X		X			II			I	II			X	
d)	5	X	X	X				II			II			X	
e)	3			X			II	II				II		X	
f)	3			X				III			II	II			X
2	5			X			III	III				II			X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	**Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)**	**Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)**
24 %	44 %	32 %

Aufgabe 4. Designerentwurf (grundlegendes Anforderungsniveau)

	Lösungsskizze	BE
a)		3
b)	Es ist $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit liegt schon einmal ein Parallelogramm vor. Da $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0$ und $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert \neq \lvert\overrightarrow{BC}\rvert$, liegt ein Rechteck und kein Quadrat vor.	3
c)	Die allgemeine Koordinatenform einer Ebene lautet: $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sind. Setzt man die Koordinaten der drei Punkte A, B und S in diese Gleichung ein, so erhält man die drei Gleichungen: I) $2a - 2b = d$ II) $2a + 3b = d$ III) $0{,}5b + 3c = d$ Aus I) und II) folgt mit dem Additionsverfahren $b = 0$ und somit $a = \frac{d}{2}$. Einsetzen in III) liefert $c = \frac{d}{3}$. Mit frei wählbarem d erhält man z. B. für $d = 2 \cdot 3 = 6$ die Ebenengleichung $E_1 : 3x_1 + 2x_3 = 6$.	3

	Lösungsskizze	BE
d)	Die Grundfläche der Pyramide liegt in $x_3 = 0$. Ein passender Normalenvektor ist $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ein Normalenvektor für das Dreieck ABS ist $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Für den Winkel α zwischen den beiden Ebenen gilt: $\cos(\alpha) = \frac{\lvert \vec{n_1} \circ \vec{n_2} \rvert}{\lvert \vec{n_1} \rvert \cdot \lvert \vec{n_2} \rvert} = \frac{2}{\sqrt{13}}$. Daraus ergibt sich $\alpha \approx 56{,}3°$. Der Neigungswinkel von ABS zur Grundfläche ist rund 56°.	3
e)	Die Kante $\overline{DS}$ wird durch die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in [0; 1]$. beschrieben. Es ist also $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ zu lösen. Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda = 1$ und aus der zweiten $\lambda = 0{,}8$. Dies ergibt einen Widerspruch und somit schneidet die Kante $\overline{DS}$ nicht die x_3-Achse. *Alternative:* S liegt in der x_2-x_3-Ebene, der Punkt D nicht. Daher kann die Strecke $\overline{DS}$ mit der x_2-x_3-Ebene nur den Punkt S gemeinsam haben. S liegt nicht auf der x_3-Achse, also schneidet die Kante $\overline{DS}$ die x_3-Achse nicht.	3
f)	Der Diamant wird als punktförmig angenommen. Es ist K der Punkt auf der Kante $\overline{AB}$, in dem der Diamant befestigt wird. Damit liegt K auf der Geraden $g_1 : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $t = \frac{2}{5}$ oder $t = \frac{3}{5}$. Dann ist $\overrightarrow{OK_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OK_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die möglichen Koordinaten sind $K_1(2 \mid 0 \mid 0)$ und $K_2(2 \mid 1 \mid 0)$.	3
g)	Es ist zunächst $\lvert \overrightarrow{AD} \rvert = 4$. Das Volumen der Pyramide berechnet sich mit $V = \frac{1}{3} \cdot \lvert \overrightarrow{AD} \rvert \cdot \lvert \overrightarrow{AB_2} \rvert \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \lvert \overrightarrow{AB_2} \rvert \cdot 2 = 9$ Damit ergibt sich $\lvert \overrightarrow{AB_2} \rvert = 3{,}375$. Eine mögliche neue Spitze liegt im Punkt $(0 \mid 0 \mid 2)$. Die neuen Eckpunkte liegen in $(2 \mid 1{,}375 \mid 0)$ und $(-2 \mid 1{,}375 \mid 0)$.	2
	Insgesamt	20

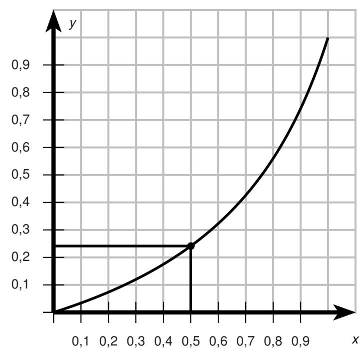
Standardbezug zur Aufgabe „Designerentwurf (grundlegendes Anforderungsniveau)“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a)	3			X						I		I	X		
b)	3		X	X			I				I		X		
c)	3	X		X			II			I	II			X	
d)	3		X	X				I			II			X	
e)	3			X			II	II				II		X	
f)	3			X				III			II	II			X
g)	2		X	X			II	III			II				X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	**Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)**	**Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)**
30 %	45 %	25 %

3 Stochastik

Aufgabe 5. Möbelfabrik (erhöhtes Anforderungsniveau)

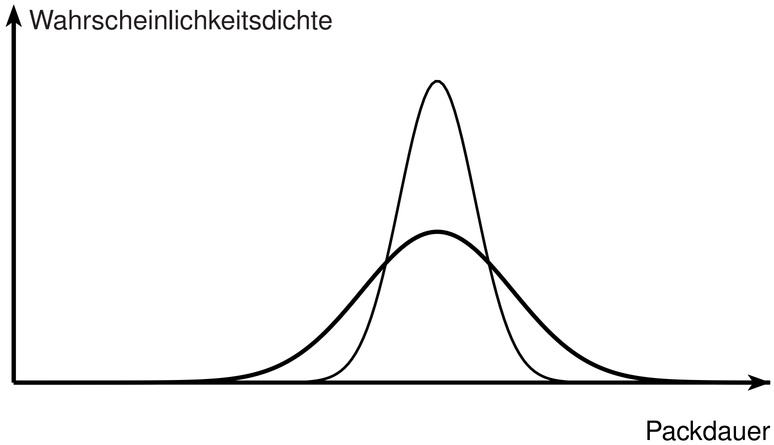
	Lösungsskizze	BE
1 a)	$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ Auf 18 Weisen lässt sich ein solches Paket packen.	2
b)	Die angegebene Formel bezieht sich auf ein Ziehen mit Zurücklegen. Da die Tütchen zum gleichen Zeitpunkt, nämlich beim Öffnen der Dose, auf den Boden fallen, handelt es sich aber um ein Ziehen ohne Zurücklegen.	2
c)	Der Term gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass höchstens 115 Pakete falsch gepackt sind.	2
d)	Es gilt $\mu = n \cdot p = 117 \cdot 0{,}09 = 10{,}53$ und $\sigma = \sqrt{117 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}91} \approx 3{,}0955$ Wegen $\sigma > 3$ ist die Laplace-Bedingung erfüllt und die Sigma-Regeln dürfen angewendet werden. Sei die Zufallsvariable X die Anzahl der fehlerhaft gepackten Pakete. Aufgrund der Einseitigkeit des Tests wird zur Berechnung des kritischen Werts mithilfe der Sigma-Regeln wie folgt angesetzt: $0{,}95 \approx P(X \leq 10{,}53 + 1{,}64 \cdot \sqrt{117 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}91}) \approx P(X \leq 15{,}6)$ Die Nullhypothese wird also verworfen, wenn mehr als 15 Pakete fehlerhaft gepackt sind.	5
2 a)	(1) Die Aussage ist korrekt. Am Graph liest man die zu $x = 0{,}5$ gehörige Wahrscheinlichkeit mit ca. 0,25 ab.  (2) Die Aussage stimmt nicht. Begründung: Zu einer Proportionalität gehört ein geradliniger Verlauf des Graphen. Dies ist hier offensichtlich nicht der Fall.	4

	Lösungsskizze	**BE**
b)	Lösung mithilfe einer unvollständigen Vierfeldertafel: (Tafel siehe unten)	4

	Das Paket ist fehlerhaft gepackt.	Das Paket ist nicht fehlerhaft gepackt.	
Person II hat das Paket gepackt.	$0{,}035x$		x
Person II hat das Paket nicht gepackt.	$0{,}11 \cdot (1-x)$		$1-x$
	$0{,}035x + 0{,}11 \cdot (1-x)$		1

Damit ergibt sich als gesuchte Funktionsgleichung
$f(x) = \frac{0{,}035x}{0{,}035x+0{,}11\cdot(1-x)} = \frac{0{,}035x}{0{,}11-0{,}075x}$
Die Definitionsmenge ist $D = [0;1]$.
Hinweis: Auch andere Festlegungen der Definitionsmenge können im Sachkontext sinnvoll sein, etwa $D =]0;1[$. Diese können ebenfalls als korrekt gewertet werden.

3 a)		2



Hinweis: In der Skizze muss deutlich werden, dass die Kurve von Person I flacher und breiter verläuft, sodass die Inhalte der beiden Flächen zwischen dem Graphen und der x-Achse ungefähr gleich sind. Beide Kurven müssen dieselbe Maximalstelle haben. Außerdem müssen in der zu skizzierenden Kurve die achsensymmetrische Glockenform des Graphen sowie der asymptotische Verlauf deutlich werden.

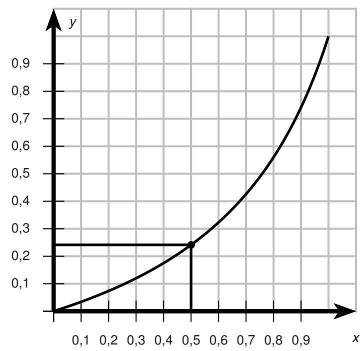
	Lösungsskizze	BE
b)	Die Zufallsvariablen T_1 bzw. T_2 stehen für die Packdauern von Person I bzw. Person II. Ansatz: $P(0 \leq T_1 \leq t) = P(0 \leq T_2 \leq 3)$ Mithilfe der Standardnormalverteilung gilt dann: $\phi\left(\frac{t-2{,}8}{0{,}5}\right) - \phi\left(\frac{0-2{,}8}{0{,}5}\right) = \phi\left(\frac{3-2{,}8}{0{,}25}\right) - \phi\left(\frac{0-2{,}8}{0{,}25}\right)$ $\Leftrightarrow \quad \phi\left(\frac{t-2{,}8}{0{,}5}\right) - \phi(-5{,}6) = \phi(0{,}8) - \phi(-11{,}2)$ In sehr guter Näherung gilt dann $\phi\left(\frac{t-2{,}8}{0{,}5}\right) \approx \phi(0{,}8)$ und damit $\frac{t-2{,}8}{0{,}5} \approx 0{,}8$, woraus sich $t \approx 3{,}2$ ergibt. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit w gilt dann: $w = \phi(0{,}8) - \phi(-11{,}2) \approx \phi(0{,}8) \approx 0{,}7881$ *Hinweis: Auch eine direkte Berechnung mithilfe eines geeigneten Taschenrechners ist zulässig. In diesem Fall sind Zwischenschritte entbehrlich*	4
	Insgesamt	25

Standardbezug zur Aufgabe „Möbelfabrik (erhöhtes Anforderungsniveau)“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a)	2	X				X		I	I		I		X		
b)	2					X	I		I			I	X		
c)	2					X			II	II		I		X	
d)	5				X	X			II		II	II		X	
2 a)	4				X	X	II		I	II				X	
b)	4				X	X			II	III	III				X
3 a)	2				X	X		I	I	I			X		
b)	4				X	X		III	II		III				X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (20 % - 24 %)	**Anforderungsbereich II (44 % - 52 %)**	**Anforderungsbereich III (28 % - 32 %)**
24 %	44 %	32 %

Aufgabe 6. Möbelfabrik (grundlegendes Anforderungsniveau)

	Lösungsskizze	BE
1 a)	$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ Auf 18 Weisen lässt sich ein solches Paket packen.	2
b)	Die angegebene Formel bezieht sich auf ein Ziehen mit Zurücklegen. Da die Tütchen zum gleichen Zeitpunkt, nämlich beim Öffnen der Dose, auf den Boden fallen, handelt es sich aber um ein Ziehen ohne Zurücklegen.	2
c)	Der Term gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass höchstens 115 Pakete falsch gepackt sind.	2
d)	Es ist $P(X = 9) = \binom{117}{9} \cdot 0{,}09^9 \cdot 0{,}91^{108} \approx 0{,}12$, damit ergibt sich $\frac{1}{4} \cdot 0{,}12 = 0{,}03$. Dann ist $P(X = 5) = \binom{117}{5} \cdot 0{,}09^5 \cdot 0{,}91^{112} \approx 0{,}03$ $P(X = 16) = \binom{117}{16} \cdot 0{,}09^{16} \cdot 0{,}91^{101} \approx 0{,}03$ Die Anzahlen 5 und 16 erfüllen die Bedingung.	3
2 a)	(1) Das Paket wurde nicht von Person II gepackt. (2) Das Paket wurde von Person II gepackt und es ist falsch gepackt.	3
b)	(1) Die Aussage ist korrekt. Am Graph liest man die zu $x = 0{,}5$ gehörige Wahrscheinlichkeit mit ca. 0,25 ab.  (2) Die Aussage stimmt nicht. Begründung: Zu einer Proportionalität gehört ein geradliniger Verlauf des Graphen. Dies ist hier offensichtlich nicht der Fall.	4

	Lösungsskizze	BE
c)	Lösung mithilfe einer unvollständigen Vierfeldertafel:	4

	Das Paket ist fehlerhaft gepackt.	Das Paket ist nicht fehlerhaft gepackt.	
Person II hat das Paket gepackt.	$0{,}035x$		x
Person II hat das Paket nicht gepackt.	$0{,}11 \cdot (1-x)$		$1-x$
	$0{,}035x + 0{,}11 \cdot (1-x)$		1

Damit ergibt sich als gesuchte Funktionsgleichung
$f(x) = \frac{0{,}035x}{0{,}035x+0{,}11\cdot(1-x)} = \frac{0{,}035x}{0{,}11-0{,}075x}$
Die Definitionsmenge ist $D = [0;1]$.
Hinweis: Auch andere Festlegungen der Definitionsmenge können im Sachkontext sinnvoll sein, etwa $D =]0;1[$*. Diese können ebenfalls als korrekt gewertet werden.*

	Insgesamt	20

Standardbezug zur Aufgabe „Möbelfabrik (grundlegendes Anforderungsniveau)“

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a)	2	X				X		I	I		I		X		
b)	2					X	I		I			I	X		
c)	2					X			II	II		I		X	
d)	3				X	X		II			I			X	
2 a)	3					X		I	I		I		X		
b)	4				X	X	II		I	II				X	
c)	4				X	X			II	III	III				X

Anteil der Bewertungseinheiten in Prozent im		
Anforderungsbereich I (30 % - 35 %)	**Anforderungsbereich II (40 % - 50 %)**	**Anforderungsbereich III (20 % - 25 %)**
35 %	45 %	20 %