Brückenkurs MATHEMATIK

Professor Dr. rer. nat. Bernd Baumann
Professor Dr. rer. nat. Ulrich Stein

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg

25. März 2008

VORBEMERKUNGEN

Liebe Studentin, lieber Student,
die ersten Semester des Studiums, für das Sie sich entschieden haben, sind durch einen relativ hohen Anteil von Mathematik-Vorlesungen geprägt. Dies ist begründet in der Tatsache, daß in praktisch allen technischen Fächern Mathematik-Kenntnisse benötigt werden. Voraussetzung zum Verständnis der Mathematik- und anderer Vorlesungen ist ein gewisses Mindestmaß an ‚Rechentechnik'und die Kenntnis einiger elementarer mathematischer Begriffe. Das (nach unseren Vorstellungen) Wichtigste ist im vorliegenden Kurs zusammengestellt. Sie sollten prüfen, inwieweit Sie die folgenden Aufgaben lösen können. Wenn Sie mindestens 90% der Aufgaben sicher beherrschen, kann auf die Teilnahme am Brückenkurs Mathematik guten Gewissens verzichtet werden. Andernfalls raten wir dringend am Brückenkurs teilzunehmen, damit Sie einen guten Einstieg in Ihr Studium haben.

In einigen Vorlesungen werden Sie von Anfang an mit Differential- und Integralrechnung konfrontiert werden. Um Ihnen eine Hilfestellung zu geben, ist dem Skript ein Kapitel mit ‚Rezepten'zu diesen Themen beigefügt. Sollte Ihnen die Differential- und Integralrechnung nicht geläufig sein, geraten Sie nicht in Panik. Diese Gebiete werden im Rahmen der Mathematik-Vorlesungen ausführlich behandelt - nur eben nicht gleich zu Beginn.

Das vorliegende Skript ist ursprünglich in Zusammenarbeit mit Prof. Dr. U. Bannier auf der Basis einer Aufgabensammlung von Prof. Dr. W. Reincke entstanden. Nachdem es formal etwas in die Jahre gekommen war, haben wir die ohnehin notwendige Überarbeitung zu einigen inhaltlichen Änderungen genützt. Erfahrungsgemäß haben sich durch die Änderungen Fehler eingeschlichen. Falls Sie Fehler finden oder Verbesserungsvorschläge haben, lassen Sie es uns bitte wissen! Dank gebührt in diesem Zusammenhang Herrn B. Costard und Herrn S. Montrone.
Wir wünschen Ihnen einen guten Start ins Studium!

Hamburg, im Frühjahr 2008

B. Baumann (baumann@rzbt.haw-hamburg.de)
U. Stein (stein@rzbt.haw-hamburg.de)

INHALTSVERZEICHNIS

1

BRÜCHE, POTENZEN UND WURZELN

1.1 RECHENREGELN

Rechenregeln für Brüche

1. $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$ wenn $k \neq 0$ (Kürzen)
2. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ (Addition*)
3. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (Multiplikation)
4. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ (Division)

Rechenregeln für Potenzen

Definition: $a^n := a \cdot a \cdot ... \cdot a$ (n Faktoren) heißt n-te **Potenz** von a. a heißt **Basis** und n heißt **Exponent**. Festlegung: $a^0 = 1$

Im Folgenden sei $n, m \in \mathbb{N}^\dagger$

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ (Multiplikation von Potenzen mit *gleicher Basis*)
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ wenn $a \neq 0$ (Division von Potenzen mit *gleicher Basis*)

   Hiermit und mit $a^0 = 1$ folgt: $a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$
3. $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$ (Potenzieren von Potenzen)
4. $a^n b^n = (ab)^n$ (Multiplikation von Potenzen bei *gleichen Exponenten*)
5. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ (Division von Potenzen bei *gleichen Exponenten*)

Im Falle $a > 0$ und $b > 0$ gelten diese Potenzregeln auch für $m, n \in \mathbb{R}^\ddagger$.

$*$ Es handelt sich hier eigentlich um zwei Gleichungen, eine mit dem $+$-Zeichen, eine mit dem $-$-Zeichen
† $\mathbb{N}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen, also die Zahlen $1, 2, 3, ...$
‡ $\mathbb{R}$ bezeichnet die Menge der reellen Zahlen

Rechenregeln für Wurzeln

Definition: Ist $x^n = a$ für $a \geq 0$, dann heißt x die $n-$**te Wurzel** aus a. a heißt **Radikant**, n **Wurzelexponent**.

Schreibweisen: $x = \sqrt[n]{a}$ (Wurzelschreibweise) oder $x = a^{1/n}$ (exponentielle Schreibweise). Im Spezialfall $n = 2$ (Quadratwurzel) lässt man den Wurzelexponenten 2 gewöhnlich weg, also $x = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

1. $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
2. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{1/n}} = \left(a^{1/n}\right)^{1/m} = a^{1/mn} = \sqrt[mn]{a}$
3. $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = a^{1/n}b^{1/n} = (ab)^{1/n} = \sqrt[n]{ab}$
4. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ für $b > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$

Binomische Formeln

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
2. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Achtung, aus der ersten Binomischen Formel sehen Sie, dass

$$(a \pm b)^2 \neq a^2 \pm b^2$$

ist. Analog ist

$$\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}.$$

Diese Ausdrücke dürfen nicht gleichgesetzt werden. Es sind die häufigsten Anfängerfehler. Merken Sie sich bitte unbedingt diese Fehlerquelle und vermeiden Sie sie.

Aufgabe 1.1.1. Vereinfachen Sie:

a) $\dfrac{\frac{3}{4} + \frac{5}{9}}{\frac{2}{3} - \frac{5}{8}}$ b) $\dfrac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ c) $\dfrac{\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

Aufgabe 1.1.2. Vereinfachen Sie:

a) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$ b) $\dfrac{9b^3}{25a^{-4}} \cdot \dfrac{20b^{-4}}{16a^2}$

c) $\dfrac{12x^{-2}y^3}{8z^2} \cdot \dfrac{4y^{-2}z}{3x^{-5}} : \dfrac{6z^{-3}}{2y^{-4}z}$ d) $\dfrac{4x^{2-m}y^{3m}}{7z^{m-n}} : \dfrac{5z^{m+n}x^{3-m}}{14y^{1-2m}}$

e) $(x^{-2} - y^{-2})(x^2 + y^2)$ f) $(u+v)^2 : \dfrac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}$

g) $\dfrac{3z}{x^2 - y^2} : \dfrac{5a}{x+y}$

Aufgabe 1.1.3. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

a) $\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{2}}$ b) $\sqrt{5}\dfrac{\sqrt{\frac{3}{10}}+\sqrt{\frac{10}{3}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}}$ c) $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2$

d) $16^{-7/4}$ e) $8^{2/3}\cdot 4^{5/2}$ f) $\left(8^4\right)^{1/3}$

Aufgabe 1.1.4. Schreiben Sie in die exponentielle Schreibweise um:

a) $\sqrt[5]{3x+2}$ a) $\sqrt[3]{(3x+2)^7}$

c) $\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{(3x+2)^4}\right)^2}$ d) $\dfrac{1}{\left(\sqrt[5]{(3x+2)^3}\right)^{-2}}$

Aufgabe 1.1.5. Geben Sie die Ergebnisse in Wurzelform an, z. B. $\sqrt[6]{a^5}=(\sqrt[6]{a})^5$.

a) $a^{3/5}\cdot a^{1/15}$ b) $a^{2/5}\cdot\sqrt[5]{a^3}$

c) $\left(a^{-3/4}\right)^{-2/3}$ d) $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}:a\sqrt{a^{-3}\sqrt{a^{-1}}}$

1.2 ZAHLEN ALS ZEHNERPOTENZEN

Beispiele

$$4567 = 4{,}567\cdot 1000 = 4{,}567\cdot 10^3$$

$$567{,}89 = 5{,}6789\cdot 100 = 5{,}6789\cdot 10^2$$

Bei der Potenzschreibweise von Zahlen stellt man diese als Produkt zweier Zahlen dar. Die erste Zahl ist eine Zahl zwischen $1{,}0$ und $9{,}999...$, die zweite eine Potenz von Zehn.

Aufgabe 1.2.1. Schreiben Sie als Zehnerpotenzen:

a) 21000000 b) $0{,}0000000000000000000000016727$

Aufgabe 1.2.2. Schreiben Sie als Zehnerpotenzen und berechnen Sie:

a) $\sqrt{\dfrac{0{,}2\cdot 512}{200^3\cdot 0{,}004}}$ b) $\sqrt{\dfrac{0{,}208\cdot 0{,}00356}{0{,}0416\cdot 2560}}$

Aufgabe 1.2.3. In der Praxis ist man ständig mit Aufgaben dieser Art konfrontiert:

a) Wie viele Kubikzentimeter enthält ein Kubikmeter?

b) Drücken Sie den Gleitmodul von Stahl $\left(G\approx 80\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{mm}^2}\right)$ in $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$ $=:\mathrm{Pa}$ aus.

Achtung, häufig hört man die Behauptung, dass für die Genauigkeit eines Messergebnisses die Anzahl der Nachkommastellen entscheidend sei. Dies ist aber falsch oder zumindest unpräzise ausgedrückt. Beispielsweise ist die Genauigkeit der folgenden Längenangaben gleich, obwohl die Zahl der Nachkommastellen sehr unterschiedlich ist:

$$L = 2{,}10\ \mathrm{m} = 210\ \mathrm{cm} = 0{,}00210\ \mathrm{km} = 2100\ \mathrm{mm}.$$

Für die Genauigkeit entscheidend ist die Anzahl der **signifikanten Ziffern** (im Beispiel sind das die 2, die 1 und die nach der 1 folgende erste 0. Die zweite 0 in der Millimeterangabe ist nicht signifikant, sondern dient nur dazu anzuzeigen, wo das Komma hingehört. Wie man im Beispiel sieht, ist hierbei eine signifikante Null nicht von einer nichsignifikanten Null zu unterscheiden. Eine eindeutige Schreibweise liefert die Dezimalschreibweise:

$$L = 2{,}10 \cdot 10^3 \text{ mm}.$$

Schreibt man nämlich

$$L = 2{,}100 \cdot 10^3 \text{ mm},$$

so drückt man damit aus, dass die Angabe um eine Stelle genauer ist als im ersten Fall.

2

GLEICHUNGEN

2.1 Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten

Allgemeine Form einer **linearen Gleichung mit einer Unbekannten** (hier x):

$$ax + b = 0.$$

Lösungsstrategie: Umformen nach $x = ...$ (Motto: „Was stört muß weg!“)

Beispiel:

$$3x - 18 = -x + 6 \qquad | + x, \text{das } x \text{ auf der rechten Seite stört}$$

$$4x - 18 = 6 \qquad | + 18, \text{die 18 auf der linken Seite stört}$$

$$4x = 24 \qquad | : 4, \text{der Faktor 4 auf der linken Seite muss weg}$$

$$x = 6 \qquad |\text{die Gleichung hat die gewünschte Form } x = ...$$

Aufgabe 2.1.1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

a) $x - 3 = 8$ b) $24 - 7x = 3$

c) $19 - 2x = 5x - 16$ d) $7 - 6x - 11 - 4x - 5 - 2x + 1 = -8$

e) $5x - (3 + 2x) = 9$ f) $x/5 + 8 = 13$

g) $4x - 3(20 - x) = 6x - 7(11 - x) + 11$ h) $x/2 + x/3 = 5$

i) $x/3 + 1/6 = x/2$

j) $x - 3x/2 + 9 = 2x/3 + 4 + 5x/6 - 6x/5 + 1/5$

Aufgabe 2.1.2. Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf. a, b, c, etc. sind dabei beliebige Zahlen.

a) $ax + b = c$ b) $a(x - b) = c$

c) $mx + nx = a$ d) $(a + b)x = m - cx$

e) $(a - x)(1 - x) = x^2 - 1$

f) $(a - b)(x - c) - (a + b)(c + x) + 2a(b + c) = 0$

g) $a/x - b/x = c$ h) $\dfrac{a - bx}{c} + x = \dfrac{cx - b}{c}$

i) $\dfrac{a + b}{c + x} = \dfrac{a - b}{c - x}$ j) $\dfrac{2x - a}{b} - \dfrac{b - 2x}{a} = \dfrac{a^2 + b^2}{ab}$

2.2 QUARDRATISCHE GLEICHUNGEN

Allgemeine Form: $ax^2 + bx + c = 0$
Normalform: $x^2 + px + q = 0$ (Die Normalform erhält man aus der allgemeinen Form, indem man durch a dividiert.)
Lösung durch quadratische Ergänzung:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 + px = -q$$

$$x^2 + 2\frac{p}{2}x = -q$$

$$x^2 + 2\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Wendet man auf die linke Seite die 1. Binomische Formel an erhält man

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right) = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

d.h. das Wurzelziehen führt auf zwei unterschiedliche Lösungen (eine für $+$ und eine für $-$), falls die rechte Seite ungleich Null ist. Umformen ergibt schließlich die $pq-$Formel für die beiden Lösungen $x_{1,2}$

$$\boxed{x = x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Beispiel:

$$-2x^2 - 4x + 6 = 0 \qquad | : (-2) \qquad \text{(die } -2 \text{ stört)}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \qquad \text{(Normalform)}$$

$$x^2 + 2x = 3$$

$$x^2 + 2\frac{2}{2}x = 3$$

$$x^2 + 2 \cdot 1x = 3$$

$$x^2 + 2 \cdot 1x + 1 = 1 + 3$$

$$(x + 1)^2 = 4$$

$$x + 1 = \pm 2$$

$$x = x_{1,2} = -1 \pm 2 \quad \text{also} \quad x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = -3$$

Aufgabe 2.2.1. Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen:

a) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} = 0$ b) $\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} = 0$

2.3 Kubische Gleichungen

Allgemeine Form: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
Normalform: $x^3 + px^2 + qx + r = 0$
Spezialfall $(r = 0)$: $x^3 + px^2 + qx = x(x^2 + px + q) = 0$
Für kubische Gleichungen existieren zwar allgemeine Lösungsverfahren, die aber in der Anwendung recht komplex sind und daher hier nicht behandelt werden. Für den Spezialfall findet man hingegen die Lösungen sehr leicht: Die erste Lösung ist $x = x_1 = 0$. Zwei weitere Lösungen erhält man durch Lösen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$.

Aufgabe 2.3.1. Lösen Sie die folgenden kubischen Gleichungen:

a) $x^3 - 2x^2 - 15x = 0$ b) $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$

2.4 Biquadratische Gleichungen

Allgemeine Form: $ax^4 + bx^2 + c = 0$
Normalform: $x^4 + px^2 + q = 0$
Mit der Substitution $z = x^2$ erhält man die quadratische Gleichung $z^2 + pz + q = 0$ mit den Lösungen

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Hieraus erhält man zwei neue Gleichungen für x:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} \quad \text{und} \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}.$$

Offenbar liefern diese Ausdrücke zwei mal zwei Ergebnisse, so dass die ursprüngliche Gleichung vier Lösungen besitzt.

Aufgabe 2.4.1. Lösen Sie die folgende biquadratische Gleichung:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

2.5 Wurzelgleichungen

Beispiel:

$$\sqrt{2x} + x = 0$$

$$\sqrt{2x} = -x$$

$$2x = x^2$$

$$2x - x^2 = 0$$

$$x(2 - x) = 0$$

Lösungen:

$$x_1 = 0, x_2 = 2$$

Durch Einsetzen der beiden Lösungen in die ursprüngliche Wurzelgleichung sieht man, dass nur $x_1 = 0$ eine Lösung ist. x_2 ist keine Lösung, denn $\sqrt{2 \cdot 2} + 2 = 4 \neq 0$.

Achtung, bei Wurzelgleichungen unbedingt Probe durchführen!

Aufgabe 2.5.1. Lösen Sie die folgenden Wurzelgleichungen:

a) $7+\sqrt{x}=12$ b) $56-\sqrt{x}=x$

c) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{4x-4}+1=0$ d) $\sqrt{9x-2}=\sqrt{25x-1}-\sqrt{4x+1}$

2.6 Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

Allgemeine Form für die Unbekannten x und y:

$$\begin{aligned} ax+by &= c \\ dx+ey &= f \end{aligned}$$

Lösen Sie eine der Gleichungen nach y auf. Setzen Sie das Ergebnis für y in die andere Gleichung ein. Sie erhalten eine Gleichung mit der Unbekannten x. Lösen Sie diese nach x auf. Setzen Sie das Ergebnis für x in eine der Ausgangsgleichungen ein. Sie erhalten eine Gleichung für y. Bestimmen Sie y.

Beispiel:

$$x+y=0, \qquad x-y=1$$

Auflösen der ersten Gleichung nach y ergibt $y=-x$. Einsetzen in zweite Gleichung führt auf $x-(-x)=1$, also $2x=1$, d. h. $x=1/2$. Einsetzen in erste Gleichung ergibt schließlich $y=-1/2$.

Aufgabe 2.6.1. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

a) $$\begin{aligned} 24x+7y &= 27 \\ 8x-33y &= 115 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \frac{x+3y}{x-y} &= 8 \\ \frac{7x-13}{3y-5} &= 4 \end{aligned}$$

3

TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

3.1 WINKEL

Teilt man die Bogenlänge s eines Kreisbogens (vgl. Abb. 3.1) durch den zugehörigen Radius r, so erhält man eine dimensionslose Zahl α. Für einen ähnlichen Kreisbogen zu einem anderen Radius r' und daher anderer Bogenlänge s' hat das Verhältnis s'/r' den gleichen Wert α. Daher ist es nahe liegend, die Zahl α als Winkel des Kreisbogens zu bezeichnen. Um anzuzeigen, dass es sich bei dieser Zahl um einen Winkel handelt, schreibt man hinter die Zahl das Symbol rad, lies: Radiant. Man sagt, der Winkel α wird im Bogenmaß angegeben.

Achtung, rad ist keine Einheit, denn α ist das Verhältnis zweier Strecken und daher einheitenlos! Auf Taschenrechnern bedeutet die Anzeige *DEG* üblicherweise, dass Winkel im Grad*eingeben werden müssen, wohingegen bei der Anzeige von *GRD* die Eingabe von Winkeln in Neugrad (rechter Winkel entspricht 100 Neugrad) erforderlich ist. Erscheint hingegen *RAD* im Display müssen Winkel im Bogenmaß angegeben werden.

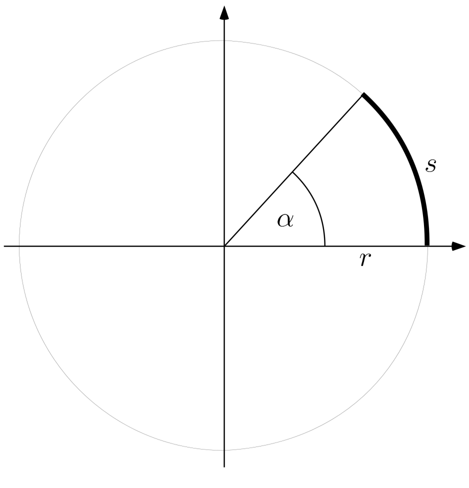

Abbildung 3.1: Zur Definition des Winkels α im Bogenmaß

Umrechnungsformeln

In den beiden folgenden Formeln bezeichnet β einen Winkel im Gradmaß und α den zugehörigen Winkel im Bogenmaß.

$$\alpha = \frac{\pi \text{ rad}\,\beta}{180^\circ} \qquad \text{bzw.} \qquad \beta = \frac{180^\circ\,\alpha}{\pi \text{ rad}}$$

∗ Analog der Untereinteilung einer Zeitstunde in 60 Minuten und diese wiederum in 60 Sekunden, teilt man das Grad in 60 Winkelminuten und diese in 60 Winkelsekunden ein.

mit $\pi = 3,1415926....$

Aufgabe 3.1.1. Ergänzen Sie die Tabelle:

α	$\frac{\alpha}{\text{rad}}$
$45°$	
$360°$	
$30°$	
$27°$	
	$\pi/2$

3.2 TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN UND IHRE UMKEHRFUNKTIONEN

Definition: Die benötigten Strecken findet man in Abbildung 3.2.

Name	**Funktion**	**Umkehrfunktion**
Sinus	$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$\arcsin\left(\frac{a}{c}\right) = \alpha$
Cosinus	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$\arccos\left(\frac{b}{c}\right) = \alpha$
Tangens	$\tan\alpha = \frac{a}{b}$	$\arctan\left(\frac{a}{b}\right) = \alpha$
Cotangens	$\cot\alpha = \frac{b}{a}$	wird kaum benötigt

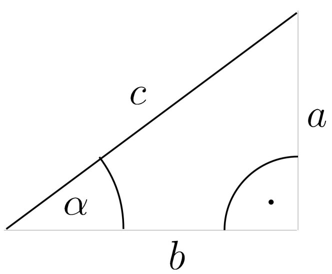

Abbildung 3.2: Zur Definition der trigonometrischen Funktionen. Die dem Winkel α gegenüberliegende Seite des rechtwinkligen Dreiecks heißt Gegenkathete, die kürzere der beiden den Winkel einschließenden Seiten heißt Ankathete, die längere Hypothenuse.

Die Umkehrfunktionen heißen *Arkus-Funktionen*. Auf dem Taschenrechner werden sie häufig mit $\sin^{-1}$ usw. bezeichnet.

Aufgabe 3.2.1. Berechnen Sie $\sin(38°49')$.

Aufgabe 3.2.2. Es ist $\tan\alpha = 0,6192$. Geben Sie α in Grad, Minuten und Sekunden und im Bogenmaß an. Gleiche Aufgabe für $\cot\alpha = 1,546$.

Aufgabe 3.2.3. Machen Sie sich klar, dass $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ und $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$ gilt.

Aufgabe 3.2.4. Für spezielle Winkel lassen sich die trigonometrischen Funktionen leicht berechnen. Z. B. gilt für $\alpha = 45°$:

$$c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

Daher gilt $c = \sqrt{2}a$ und folglich

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ergänzen Sie die Tabelle, indem Sie ähnliche Überlegungen anstellen (beginnen Sie damit, dass Sie ein gleichseitiges Dreieck mit einer Winkelhalbierenden zeichnen):

	30°	45°	60°
$\sin\alpha$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$\cos\alpha$			
$\tan\alpha$			

Aufgabe 3.2.5. Gegeben seien $\alpha = 60^\circ$, $\beta = \alpha/2$ und $r = k$ (vgl. Abb. 3.3). Variiert man den Parameter k, so ändern sich die Werte von a, b und c gemäß $a = \lambda k$, $b = \lambda k$ und $c = \lambda k$. Berechnen Sie die Werte von λ.

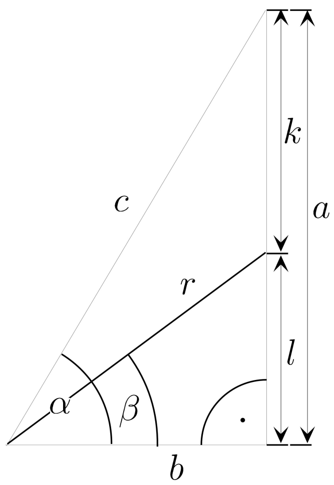

Abbildung 3.3: Zu Aufgabe 3.2.5

3.3 POLARKOORDINATEN

Definition: Zur Kennzeichnung eines Punktes in der Ebene benötigt man zwei Zahlen. Häufig verwendet man die kartesischen Koordinaten x und y (vgl. Abb. 3.4). In manchen Fällen ist es aber zweckmäßiger, die Lage des Punktes durch Angabe des Winkels φ zwischen der Geraden, die den Koordinatenursprung mit dem Punkt verbindet, und der x-Achse und dem Abstand r des Punktes vom Koordinatenursprung anzugeben. Man nennt r und φ **Polarkoordinaten**.

Umrechnungsformeln

Gegeben x und y, gesucht r und φ:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{und} \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

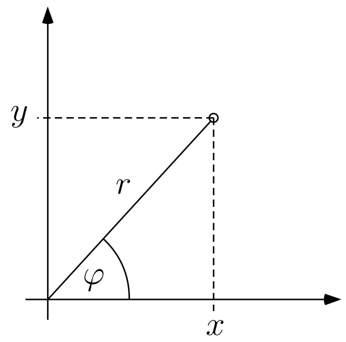

Abbildung 3.4: Zur Definition von kartesischen und Polarkoordinaten.

Gegeben r und φ, gesucht x und y:

$$x = r\cos\varphi \qquad \text{und} \qquad y = r\sin\varphi$$

Aufgabe 3.3.1. Gegeben seien die kartesischen Koordinaten (x, y) einiger Punkte. Berechnen Sie die zugehörigen Polarkoordinaten.

$a)\quad (3,4) \qquad b)\quad (-3,4) \qquad c)\quad (-3,-4) \qquad d)\quad (3,-4)$

Aufgabe 3.3.2. Gegeben seien die Polarkoordinaten (r, φ) einiger Punkte. Berechnen Sie die zugehörigen kartesischen Koordinaten.

$a)\quad (1,\pi/2) \qquad b)\quad (1,-\pi/2) \qquad c)\quad (1,9\pi/2) \qquad d)\quad (2,135^\circ)$

3.4 Sätze für Sinus und Kosinus

Die folgenden Sätze beziehen sich auf Abb. 3.5.
Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Trigonometrischer Pythagoras†:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Additionstheoreme:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

Aufgabe 3.4.1. Die Seiten eines Dreiecks haben die Längen $a = 4$, $b = 13$ und $c = 15$. Geben Sie den Winkel zwischen den Seiten a und b an (Ergebnis in Grad, Minuten und Sekunden).

† Meisten verwendet man die Kurzschreibweise $\sin^2\alpha$ für $(\sin\alpha)^2$ und $\cos^2\alpha$ für $(\cos\alpha)^2$

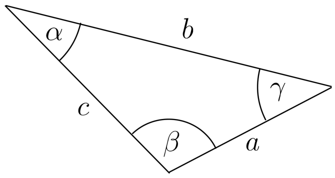

Abbildung 3.5: Im Dreieck sind Winkel und Länge der gegenüberliegen Seite analog bezeichnet. Mit dieser Bezeichnungsweise kann man sich die Sätze einigermaßen leicht merken.

Aufgabe 3.4.2. Gegeben seien $a = 36$ cm, $\beta = 72^\circ$ und $\gamma = 55^\circ$. Gesucht sind b, c und α (vgl. Abb. 3.5).

Aufgabe 3.4.3. Gegeben seien $a = 10$, $b = 8$ und $\gamma = 70^\circ$. Gesucht sind α, β und c (Ergebnis für die Winkel in Grad, Minuten und Sekunden).

Aufgabe 3.4.4. Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme

a) $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$ b) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

c) $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ d) $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$

e) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

Aufgabe 3.4.5. Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot\alpha \cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$$

Aufgabe 3.4.6. Wie hoch ist ein Turm, der unter dem Winkel von 2° in der Ferne erscheint und nach der Karte 5 km entfernt ist?

4

EXPONENTIALFUNKTION UND LOGARITHMUS

In Abschnitt 1.1 wurden Potenzen und die zugehörigen Rechenregeln eingeführt. Dort wurde gezeigt, dass man z. B. die Zahl 1000 mit Hilfe der Potenzschreibweise in der Form $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$ schreiben kann. Umgekehrt lassen sich auch beliebige Wurzelausdrücke mit Hilfe von Potenzen schreiben: $\sqrt[3]{1000} = 1000^{\frac{1}{3}} = 10$. Auch Kombinationen dieser beiden Formen sind möglich: $10^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{10})^2 = \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{10}$. Wie hier zu sehen ist, sind als Potenzen beliebige Brüche möglich. Es lässt sich zeigen, dass sogar reelle Zahlen als Potenzen möglich sind. Damit ist es möglich, die vielleicht am häufigsten benötigte Funktion zu definieren:

Definition: Für eine positive reelle Zahl a ungleich eins ist durch die Abbildung

$$x \mapsto a^x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

die **Exponentialfunktion** erklärt. Ihre Umkehrfunktion heißt **Logarithmusfunktion** zur Basis a:

$$x \mapsto \log_a x, \qquad x \in \mathbb{R}, x > 0.$$

Handelt es sich bei a um die Eulersche Zahl $\mathrm{e} = 2,71828...$, so schreibt man auch

$$x \mapsto \mathrm{e}^x \qquad \text{oder} \qquad x \mapsto \exp x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Die zugehörige Umkehrfunktion heißt **natürlicher Logarithmus**, Bezeichnungsweise

$$x \mapsto \ln x, \qquad x \in \mathbb{R}, x > 0.$$

Auch für den Fall $a = 10$ ist eine spezielle Schreibweise üblich: Anstelle von $\log_{10} x$ schreibt man häufig $\lg x$ (**Zehnerlogarithmus**). Will man ausdrücken, dass eine Aussage für den Logarithmus zu einer beliebigen Basis Gültigkeit besitzt, so lässt man den Index weg: $\log x$.

RECHENREGELN

Wie schon in Abschnitt 1.1 erwähnt, gelten die dort aufgeführten Rechenregeln auch für reellwertige Potenzen. Daher gilt für die Exponentialfunktion

$$\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}.$$

Aus den Potenzgesetzen lassen sich leicht einige Rechenregeln für Logarithmen ableiten:

1. $\log(xy) = \log x + \log y$
2. $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$
3. $\log(x^y) = y \log x$

Aufgabe 4.1. Berechnen Sie mit Hilfe von $\lg 3 \approx 0,477$ aber ohne Taschenrechner:

a) $\lg 9$ b) $\lg 10$ c) $\lg 0,9$

d) $\lg \sqrt{3}$ e) $\lg \left(\frac{1}{3}\right)$

Aufgabe 4.2. Erzeugen Sie Wertetabellen und Skizzen von $y = \mathrm{e}^x$ und $y = \ln x$.

Aufgabe 4.3. Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:

a) $3^{x-1} = 27$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 20$ c) $256 \cdot 0,5^{5x-4} = 2^x$

d) $\sqrt{3^{4x-4}} = \frac{3^{x+1}}{3}$ e) $\left(b^{20x-7}\right)^{9-3x} = \left(b^{15x-3}\right)^{7-4x}$

f) $15 = \frac{1}{2}\left(8^{x+1} - 8^{x-1}\right)$ g) $\lg(2x+3) = \frac{3}{4}$ h) $x^{\lg x} = \lg 10$

5

EINIGE GRUNDLAGEN DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

5.1 ABLEITUNG

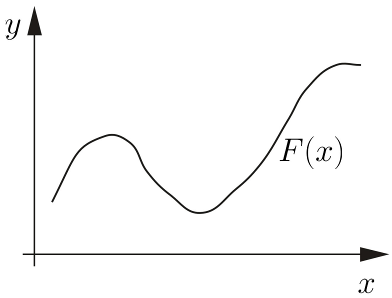

Abbildung 5.1: Funktion $y = F(x)$

Gegeben sei eine Funktion $y = F(x)$ (vgl. Abb. 5.1). Wie man sieht, ändert sich die Steigung der Funktionskurve mit x - d. h. die Steigung ist selbst eine Funktion von x. Diese Funktion heißt **Ableitungsfunktion**. Zur Bezeichnung der zur Funktion $y = F(x)$ gehörigen Ableitungsfunktion sind verschiedene Schreibweisen üblich:

$$y' \quad \text{oder} \quad F'(x) \quad \text{oder} \quad \frac{dF}{dx}.$$

Der Zahlenwert der Ableitungsfunktion für einen bestimmten Wert der Variable x heißt **Ableitung** oder **Differentialquotient***.

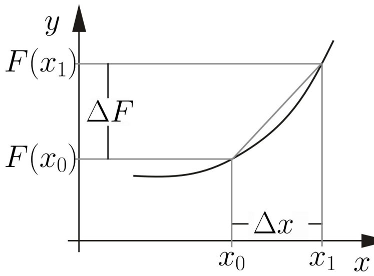

Abbildung 5.2: Zur Ableitung einer Funktion an der Stelle $x = x_0$

Wie man die Ableitung bestimmt, geht aus Abbildung 5.2 hervor. Man bildet den Quotienten $\frac{\Delta F}{\Delta x}$. Lässt man $\Delta x := x_1 - x_0$ nun immer kleiner werden, erhält man eine immer bessere Näherung für die Steigung der Kurve bei x_0. Die Steigung selbst ergibt sich, indem man den Grenzübergang $\Delta x \to 0$ ausführt. Die letzte der oben angegebenen Schreibweisen für die Ableitungsfunktion erinnert an die hier beschriebene Bestimmung der Ableitung ($\Delta x \to dx$, $\Delta F \to dF$). Wir werden hier keine Grenzwertbetrachtungen durchführen, sondern nur drei Beispiele betrachten.

* Im Sprachgebrauch wird zwischen ‚Ableitung', ‚Ableitungsfunktion' und ‚Differentialquotient' häufig nicht sauber unterschieden.

Beispiel:

$y = F(x) = a = \text{const}$ (vgl. Abb. 5.3). Offenbar hat diese einfache Funktion für alle Werte von x eine Steigung Null: $y' = F'(x) = \frac{dF}{dx} = 0$.

Beispiel:

$y = F(x) = ax + b$ mit $a, b = \text{const}$ (vgl. Abb. 5.4). Die Steigung dieser Funktion lässt sich leicht berechnen. Das Ergebnis lautet: $y' = F'(x) = \frac{dF}{dx} = a = \text{const}$.

Abbildung 5.3: Die konstante Funktion $y = F(x) = a$

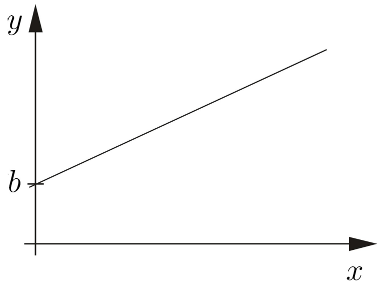

Abbildung 5.4: Die lineare Funktion $y = F(x) = ax + b$

Beispiel:

$y = F(x) = x^2$ (vgl. Abb. 5.5). Die Steigung dieser Funktion lässt sich nicht mehr so leicht berechnen. In der Mathematik wird gezeigt, daß die Ableitung durch $y' = F'(x) = \frac{dF}{dx} = 2x$ gegeben ist. Dieses Ergebnis ist konsistent mit folgenden Beobachtungen:

- ▷ Für $x > 0$ gilt $F'(x) > 0$ (positive Steigung) und für $x < 0$ gilt $F'(x) < 0$ (negative Steigung)
- ▷ Die Ableitung für $x = 0$ ist $F'(x)|_{x=0} = 0$
- ▷ Betragsmäßig gilt: Die Steigung wächst mit x.

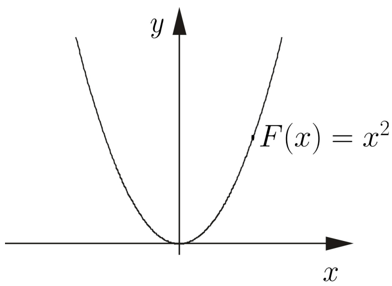

Abbildung 5.5: Die quadratische Funktion $y = F(x) = x^2$

Weitere Beispiele finden sich in Tabelle 5.1.

Bei der Bestimmung von Ableitungsfunktionen braucht man fast immer einige der folgenden Rechenregeln:
Faktorregel:

$$y = cF(x) \quad \Rightarrow \quad y' = cF'(x) \qquad \text{für } c = \text{const}$$

Beispiel:

$$y = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = 3 \cdot 2x^1 = 6x$$

Summenregel:

$$y = F(x) + G(x) \quad \Rightarrow \quad y' = F'(x) + G'(x)$$

Beispiel:

$$y = x^2 + \sin x \quad \Rightarrow \quad y' = 2x + \cos x$$

Produktregel:

$$y = F(x)G(x) \quad \Rightarrow \quad y' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$$

Beispiel:

$$y = x^2 \sin x \quad \Rightarrow \quad y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

Quotiententregel:

$$y = \frac{F(x)}{G(x)} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{F'(x)G(x) - F(x)G'(x)}{G(x)^2}$$

Beispiel:

$$y = \frac{x^2}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2x \sin x - x^2 \cos x}{\sin^2 x}$$

Kettenregel:

$$y = F(G(x)) \quad \Rightarrow \quad y' = F'(G(x))G'(x)$$

Beispiel:

$$y = \sin^2 x \quad \Rightarrow \quad y' = 2 \sin x \cos x$$

Bildet man die Ableitung einer Ableitungsfunktion, so spricht man von der **2. Ableitung**, usw.

Aufgabe 5.1.1. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $y = 2x^2$ b) $y = 4x^3 + 2$

c) $y = \frac{1}{7}x^7 - 3x^4 + 4x$ d) $y = x \cos x$

e) $y = x^2 \sin x$ f) $y = x \cos x + x^2 \sin x$

g) $y = \sin x - x \cos x$ h) $y = \tan x \ln x$

i) $y = \cos 3x$ j) $y = \cos x^3$

k) $y = \cos 3x^3$ l) $y = \cos(3x^3 + 2x - 1)$

m) $y = \cos \ln x$ n) $y = \exp(2x)$

o) $y = \exp(\cos x)$ p) $y = 4 \exp(2 \cos x) \cos(\ln x + 3) - 3 \cos x^2 - \frac{1}{\cos x}$

5.2 UNBESTIMMTE INTEGRATION

Die unbestimmte Integration ist die Umkehroperation zur Differentiation. Die in der Beschreibung von Tabelle 5.1 gemachte Aussage kann man formelmäßig so ausdrücken:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \int dx\, f(x) = F(x).$$

In der Formel mit dem Integralzeichen $\int$ nennt man $f(x)$ den **Integranden** und $F(x)$ die **Stammfunktion** von $f(x)$. x ist die **Integrationsvariable**.

$F(x)$ $\rightleftharpoons$	$f(x)$
$x^n + C$	$nx^{n-1} \quad (n \neq 0)$
$\sin x + C$	$\cos x$
$\cos x + C$	$-\sin x$
$\exp x + C$	$\exp x$
$\ln x + C$	$\frac{1}{x}$
$\tan x + C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\vdots$	$\vdots$

Tabelle 5.1: Differentiation des Ausdrucks in der linken Spalte führt auf den Ausdruck in der rechten Spalte. Von rechts nach links gelangt man durch Integration. C ist die **Integrationskonstante**, die so oft vergessen wird.

Zwei elementare Rechenregeln:

$$\int dx\, cf(x) = c \int dx\, f(x)$$

$$\int dx\, (f(x) + g(x)) = \int dx\, f(x) + \int dx\, g(x)$$

Ansonsten gilt: ‚Differenzieren ist ein Handwerk - Integrieren eine Kunst', eine Kunst, die wir hier nicht erlernen werden. Wir stützen uns, soweit notwendig, auf die umfangreichen Integraltabellen, die man in mathematischen Formelsammlungen findet.
Hinweis zur Schreibweise: Anstelle von $\int dx\, f(x)$ schreibt man häufig auch $\int f(x)\, dx$.

Aufgabe 5.2.1. Berechnen Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen. Machen Sie die Probe durch Bildung der Ableitung.

a) $f(x) = x^5$ b) $f(x) = 3x^5$

c) $f(x) = 4\cos x$ d) $f(x) = \cos x + x^2 + 4$

5.3 BESTIMMTES INTEGRAL

Kennt man zu einer Funktion $y = f(x)$ die zugehörige Stammfunktion $F(x)$, so kann man den Flächeninhalt, den Funktionskurve und die x-Achse einschließen, berechnen (vgl. Abb. 5.6). Es gilt (A ist der Flächeninhalt):

$$A = \int_a^b f(x)\, dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

a heißt untere **Integrationsgrenze** und b obere Integrationsgrenze. In der Differenz $F(b) - F(a)$ hebt sich die Integrationskonstante weg. Bei der Berechnung bestimmter Integrale lässt man diese daher immer weg.

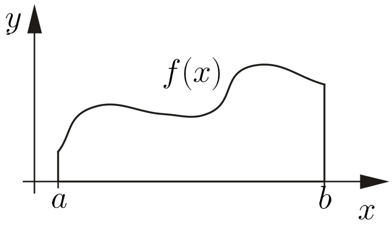

Abbildung 5.6: Die Fläche zwischen Abszisse (x-Achse), Funktionsgraf und den beiden Senkrechten bei $x = a$ und $x = b$ lässt sich mit Hilfe der Stammfunktion von $f(x)$ berechnen

Achtung, wo die Funktionskurve unterhalb der x-Achse verläuft, ergeben sich negative Beiträge zum Flächeninhalt. Integriert man z. B. $\sin x$ von 0 bis π (also $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$), so lautet das Ergebnis $A = 2$. Das Integral der Sinusfunktion, integriert von π bis 2π, hat den Wert -2. Folglich: $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0$.

Aufgabe 5.3.1. Berechnen Sie die Flächen zwischen der x-Achse und den folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ im Intervall $[0, 1]$

b) $f(x) = 2\cos x + 2x^2 + 1$ im Intervall $[0, \pi/2]$

6

SUMMENZEICHEN

$\sum_{i=m}^{n} a_i$ ist die abkürzende Schreibweise für $a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_{mn-1} + a_n$. Die Menge $\{m, m+1, m+1, ..., n-1, n\}$ heißt **Indexmenge**.

BEISPIEL

$\sum_{i=1}^{3} i$, also $i = 1, 2, 3$ und $a_i = i$. D. h. $\sum_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$.

RECHENREGELN FÜR SUMMEN

Summe gleicher Summanden: Wenn alle a_i den gleichen Wert a besitzen, gilt

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = (n - m + 1)a$$

Benennung des Index ist beliebig:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Aufspaltung in Teilsummen: Wenn $m < k < n$, gilt

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$$

Herausziehen konstanter Faktoren c:

$$\sum_{i=m}^{n} c a_i = c \sum_{i=m}^{n} a_i$$

Zusammenfassen bzw. Auseinanderziehen zweier Summen

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$$

Doppelsummen (das sind Summen von Summen) können vertauscht werden:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ik}$$

Aufgabe 6.1. Berechnen Sie die folgenden Summen:

a) $\sum_{i=1}^{3} \frac{i}{2}$ b) $\sum_{i=0}^{5} 2^i$

Aufgabe 6.2. Berechnen Sie die folgende Summe mit Hilfe des „Tricks“ von Gauß (Addition von 1. und letztem Term, 2. und vorletztem Term, etc.):

a) $\sum_{i=1}^{500} i$

Aufgabe 6.3. Schreiben Sie ausführlich:

a) $\sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{3} a_i b_k$

A

VERSCHIEDENES

Abschließend seien einige wichtige Begriffe und Bezeichnungsweisen erläutert.

Eine **Definition** ist die genaue Beschreibung eines Begriffs, der zur Bezeichnung eines mathematischen Sachverhalts eingeführt wird.

Beispiele

Oben stehender Satz ist die Definition des Begriffs „Definition“.
Eine **Raute** ist ein Parallelogramm mit vier gleichlangen Seiten.

Eine wahre Aussage über einen mathematischen Sachverhalt nennt man einen (mathematischen) **Satz**.

Beispiel

Wenn die Quersumme einer Zahl durch 9 teilbar ist, dann ist auch die Zahl durch 9 teilbar.

Eine Gleichung, welche die gesamte Grundmenge als Lösungsmenge besitzt, heißt **Identität**.

Beispiel

Die Grundmenge sei $\mathbb{R}$. Für jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$. Man sagt: Die Gleichung ist identisch erfüllt.

Gegenbeispiel

$x^2 - x = 0$. Diese Gleichung ist nur für ganz bestimmte Werte von x, nämlich für $x = 0$ und für $x = 1$ erfüllt. Solche Gleichungen nennt man **Bestimmungsgleichungen**.

B

LÖSUNGEN

Aufgabe 1.1.1

a) 31,33 b) $\frac{ab}{a+b}$ c) $\frac{a^3+b^3}{a+b}$

Aufgabe 1.1.2

a) 27 b) $\frac{(3a)^2}{20b}$ c) $\frac{2}{3}\left(\frac{xz}{y}\right)^3$ d) $\frac{8y}{5x}\left(\frac{y}{z^2}\right)^m$
e) $\frac{y^4-x^4}{x^2y^2}$ f) $\frac{u^3+uv^2+vu^2+v^3}{u-v}$ g) $\frac{3z}{5a(x-y)}$

Aufgabe 1.1.3

a) $1/3$ b) 13 c) $\frac{(a+b)^2}{ab}$ d) $1/128$ e) 128 f) 16

Aufgabe 1.1.4

a) $(3x+2)^{1/5}$ b) $(3x+2)^{7/3}$ c) $(3x+2)^{-8/3}$ d) $(3x+2)^{6/5}$

Aufgabe 1.1.5

a) $\left(\sqrt[3]{a}\right)^2$ b) a c) $\sqrt{a}$ d) $\sqrt[12]{a^{19}}$

Aufgabe 1.2.1

a) $2,1 \cdot 10^7$ b) $1,6727 \cdot 10^{-24}$

Aufgabe 1.2.2

a) $5,657 \cdot 10^{-2}$ b) $2,637 \cdot 10^{-3}$

Aufgabe 1.2.3

a) 10^6 cm^3 b) 80 GPa

Aufgabe 2.1.1

a) $x = 11$ b) $x = 3$ c) $x = 5$ d) $x = 0$ e) $x = 4$
f) $x = 25$ g) $x = 1$ h) $x = 6$ i) $x = 1$ j) $x = 6$

Aufgabe 2.1.2

a) $x = \frac{c-b}{a}$ b) $x = \frac{ab+c}{a}$ c) $x = \frac{a}{m+n}$ d) $x = \frac{m}{a+b+c}$ e) $x = 1$
f) $x = a$ g) $x = \frac{a-b}{c}$ h) $x = \frac{a+b}{b}$ i) $x = \frac{bc}{a}$ j) $x = \frac{a^2+b^2}{a+b}$

Aufgabe 2.2.1

a) $x_1 = 1$ $x_2 = -3$ b) $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{6}$

Aufgabe 2.3.1

a) $x_1 = -3$ $x_2 = 0$ $x_3 = 5$ b) $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ $x_3 = 3$

Aufgabe 2.4.1

$x_1 = -3$ $x_2 = -1$ $x_3 = +1$ $x_4 = 3$

Aufgabe 2.5.1

a) $x = 25$ b) $x = 49$ c) $x = 10$ d) $x = 2$

Aufgabe 2.6.1

a) $x = 2$ $y = -3$ b) $x = 11$ $y = 7$

Aufgabe 3.1.1

α	$\frac{\alpha}{\text{rad}}$
$45°$	$\pi/4$ $(0{,}7854)$
$360°$	2π $(6{,}2832)$
$30°$	$\pi/6$ $(0{,}5236)$
$27°$	$0{,}4712$
$90°$	$\pi/2$

Aufgabe 3.2.1

$0{,}6268$

Aufgabe 3.2.2

$31°45'57''$ $\quad$ $32°53'46''$

Aufgabe 3.2.4

	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Aufgabe 3.2.5

$a = \frac{3}{2}k \qquad b = \frac{\sqrt{3}}{2}k \qquad c = \sqrt{3}k$ $\qquad$ (Hinweis: $r = k$)

Aufgabe 3.3.1

a) $r = 5 \quad \varphi = 53{,}1°$ $\qquad$ b) $r = 5 \quad \varphi = 126{,}9°$
c) $r = 5 \quad \varphi = 233{,}1°$ $\qquad$ d) $r = 5 \quad \varphi = 306{,}9°$

Aufgabe 3.3.2

a) $x = 0 \quad y = 1$ $\qquad$ b) $x = 0 \quad y = -1$
c) $x = 0 \quad y = 1$ $\qquad$ d) $x = -\sqrt{2} \quad y = \sqrt{2}$

Aufgabe 3.4.1

$112°37'12''$

Aufgabe 3.4.2

$b = 42,87$ cm $\quad c = 36,92$ cm $\quad \alpha = 53°$

Aufgabe 3.4.3

$\alpha = 64°01'00''$ $\quad \beta = 45°59'00''$ $\quad c = 10,45$

Aufgabe 3.4.6

$h = 175$ m

Aufgabe 4.1

a) $2 \lg 3 = 0,954$ b) 1 c) $2 \lg 3 - \lg 10 = -0,046$
d) $\frac{1}{2} \lg 3 = 0,239$ e) $- \lg 3 = -0,477$

Aufgabe 4.2

Vgl. ein Mathematikbuch oder eine Formelsammlung.

Aufgabe 4.3

a) $x = 4$ b) $x = -4,32$ c) $x = 2$ d) $x = 2$ e) $x = 1/2$
f) $x = 0,643$ g) $x = 1,312$ h) $x = 1$

Aufgabe 5.1.1

a) $y' = 4x$ b) $y' = 12x^2$ c) $y' = x^6 - 12x^3 + 4$
d) $y' = \cos x - x \sin x$ e) $y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$
f) $y' = (1 + x^2) \cos x + x \sin x$ g) $y' = x \sin x$ h) $y' = \frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{x}$
i) $y' = -3 \sin(3x)$ j) $y' = -3x^2 \sin x^3$ k) $y' = -9x^2 \sin(3x^3)$
l) $y' = -(9x^2 + 2) \sin(3x^2 + 2x - 1)$ m) $y' = -\frac{\sin(\ln x)}{x}$
n) $y' = 2 \exp(2x)$ o) $y' = - \sin x \exp(\cos x)$
p) $y' = -8 \exp(2 \cos x) \sin x \cos(\ln x + 3) - \frac{4}{x} \exp(2 \cos x) \sin(\ln x + 3)$
$\qquad + 6x \sin(x^2) - \frac{\tan x}{\cos x}$

Aufgabe 5.2.1

a) $\frac{1}{6}x^6 + C$ b) $\frac{1}{2}x^6 + C$ c) $4 \sin x + C$ d) $\sin x + \frac{x^3}{3} + 4x + C$

Aufgabe 5.3.1

a) $A = 1/12$ b) $A = 2 + \frac{\pi^3}{12} + \frac{\pi}{2}$

Aufgabe 6.1

a) 3 b) 63

Aufgabe 6.2

$125\,250$

Aufgabe 6.3

$a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3$