Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung

Schriftliche Abiturprüfung

Mathematik

Lernaufgaben

Teil 2: Lin. Algebra / Analyt. Geometrie

Impressum

Herausgeber:
Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung
Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung
Felix-Dahn-Straße 3, 20357 Hamburg

Referat:	Mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Unterricht
Referatsleitung:	Werner Renz
Fachreferent Mathematik:	Dr. Andreas Busse

Veröffentlicht auf: www.li.hamburg.de/publikationen/abiturpruefung

Hamburg 2012

Kurs auf grundlegendem Niveau

Aufgabe 1 Vegetation

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben..

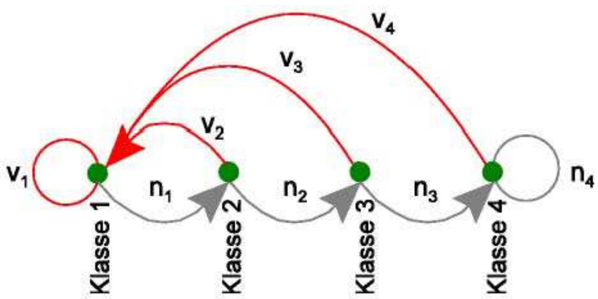
In der Übergangszone zwischen Wüstenklima und gemäßigtem Klima an der Westküste Nordamerikas trifft man auf einer Fläche von ca. 2000 km² eine Vegetation immergrüner Sträucher an. Man bezeichnet das als „Chaparral".

Die Brennbarkeit dieser Pflanzen hängt sehr von ihrem Alter ab. Besonders leicht brennen die älteren Pflanzen wegen der großen Mengen verdorrten Materials. Brände haben abgesehen von ihrer Gefahr für Mensch und Tier auch eine sehr nützliche Funktion: anstelle der verbrannten Sträucher wachsen ziemlich schnell junge, kräftige Pflanzen aus dem Boden. Spontane Brände werden daher nicht immer gelöscht. Die Verjüngung sorgt immer wieder dafür, dass die Gebiete mit dürrem Material nicht zu groß werden.

Diese Situation lässt sich z.B. in folgendem Modell darstellen:

- Die Vegetation wird entsprechend ihrem Alter in vier Klassen eingeteilt:
  Klasse 1: 0 - 10 Jahre
  Klasse 2: 10 - 20 Jahre
  Klasse 3: 20 - 30 Jahre
  Klasse 4: 30 Jahre und älter.
- Als Maß für den Umfang einer Klasse nimmt man nicht die Anzahl der Pflanzen, sondern die Fläche des durch diese Klasse bedeckten Gebietes.
- Bei jeder Klasse bleibt der prozentuale Anteil, der in 10 Jahren verbrennt, konstant.
- Die Gesamtfläche des Gebietes beträgt stets 2000 km².

Die Entwicklung der Vegetation in diesem Modell beschreibt der folgende Graph:



Bezeichnungen:
v_i = Anteil von Klasse i, der verbrennt ($v_i < 1$)
n_i = Anteil von Klasse i, der nicht verbrennt ($n_i < 1$)

a) Geben Sie unter Verwendung der Zahlenwerte in der Tabelle und gemäß dem Graphen bzw. dem oben stehenden Modell eine Populationsmatrix (Leslie-Matrix) L an und begründen Sie Ihr Vorgehen.

Verbrennende Anteile	$v_1 = 0{,}01$	$v_2 = 0{,}02$	$v_3 = 0{,}50$	$v_4 = 0{,}20$
Nicht verbrennende Anteile	$n_1 = 0{,}99$	$n_2 = 0{,}98$	$n_3 = 0{,}50$	$n_4 = 0{,}80$

b) Begründen Sie, warum für alle vier Klassen $n_i + v_i = 1$ gelten muss.

c) Zu Beginn der Modellierung nehmen die Klassen die folgenden Flächen (in km^2) ein:

Klasse 1: 302 Klasse 2: 284 Klasse 3: 314 Klasse 4: 1100

Berechnen Sie daraus mit Hilfe der Leslie-Matrix L eine Prognose für die Flächenmaße der einzelnen Klassen nach 10 Jahren (1 Zeittakt).

d) Berechnet man von der Matrix L aus Aufgabenteil a) die Potenzen L^2, L^3, L^4, … usw., so stellt man fest, dass sich die Matrizen L^n für größere Werte von n kaum noch voneinander unter scheiden. So stimmen die gerundeten Matrizen L für $n \geq 30$ mit der folgenden Matrix überein:

$$\begin{pmatrix} 0{,}185 & 0{,}185 & 0{,}185 & 0{,}185 \\ 0{,}185 & 0{,}185 & 0{,}185 & 0{,}185 \\ 0{,}18 & 0{,}18 & 0{,}18 & 0{,}18 \\ 0{,}45 & 0{,}45 & 0{,}45 & 0{,}45 \end{pmatrix}$$

Was kann man daraus für die Chaparral-Vegetation folgern?

e) Die Berechnung in Aufgabenteil c) (und auch in d)) kann als Funktion aufgefasst werden. Beschreiben Sie diese Funktion (Zuordnungsvorschrift, Definitions- und Zielmenge), und geben Sie als Beispiel mit Ihrer Funktion die Rechenvorschrift für *Prognose in 50 Jahren* an.

f) In der Praxis führen die Verwalter des Chaparral auch noch ein kontrolliertes, gewolltes Abbrennen von Teilen der Vegetation, die älter als 10 Jahre ist, durch.

Dabei soll im Modell das Abbrennen immer unmittelbar nach Ablauf von 10 Jahren (also am Ende eines Zeittaktes) auf einmal stattfinden, wobei jeweils 2% von Klasse 2, 2% von Klasse 3 und 7% von Klasse 4 abbrennen.

Bestimmen Sie als Modell zur Berechnung der Folgen für die Vegetation eine entsprechende Matrix M.

Beschreiben Sie den gesamten zehnjährigen Vorgang des spontanen und gewollten Abbrennens mit Hilfe der Matrizen M und L und begründen Sie Ihr Vorgehen.

Aufgabe 2 Schwarzwild

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben.. Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

Das Schwarzwild ist in vielen Teilen Europas seit geraumer Zeit auf dem Vormarsch und es häufen sich landwirtschaftliche Schäden. Verursacht wird dieses enorme Wachstum durch die hohe Fortpflanzungsleistung dieser Art. Unter günstigen Bedingungen, d. h. bei gutem Futterangebot, gebären beim Schwarzwild bereits die Frischlinge (Wildschweine im ersten Lebensjahr) zu einem hohen Anteil. Zusätzlich verringert sich ihre Sterblichkeit über die Wintermonate, und auch die Fruchtbarkeit der reifen Bachen (weibliche Wildschweine, älter als zwei Jahre) steigt. An diesem Punkt kommt der Mensch ins Spiel: Vor allem durch die Landwirtschaft, aber auch durch falsche Fütterung, werden ungewollt Nahrungsquellen für das Schwarzwild verfügbar gemacht. Damit kommt es zwangsläufig zu einem dramatischen Anwachsen der Bestände.

In dieser Aufgabe werden nur weibliche Wildschweine betrachtet. Diese werden in drei Altersklassen eingeteilt.

F: Frischlinge (höchstens ein Jahr alt)
U: Überläuferbachen (älter als ein Jahr bis maximal zwei Jahre alt)
B: reife Bachen (älter als zwei Jahre)

Eine Population weiblicher Wildschweine wird durch einen Populationsvektor $\begin{pmatrix} F \\ U \\ B \end{pmatrix}$ beschrieben.

a) Für eine Population gilt:
Die jährliche Geburtenrate bei Frischlingen beträgt 0,13, bei Überläuferbachen 0,56 und bei reifen Bachen 1,64.
Von den Frischlingen überleben jährlich 25 %, von den Überläuferbachen 56 % und von den reifen Bachen 58 %.
Stellen Sie in einem Übergangsgraphen die Entwicklung dieser Population dar. **10 P**

b) Entscheiden Sie, welche der Matrizen A, B, C die in a) dargestellte Entwicklung des Schwarzwildes beschreibt.

$$A = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,56 & 0,58 \\ 0,13 & 0,56 & 1,64 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,13 & 0,56 & 1,64 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,56 & 0,58 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0,13 & 0,56 & 1,64 \\ 0 & 0,56 & 0,58 \\ 0,25 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Begründen Sie auch für die beiden anderen Matrizen, warum sie zur Modellierung hier nicht geeignet sind. **20 P**

Die Werte aus a) beruhen auf Untersuchungen von Schwarzwild, das unter ungünstigen Bedingungen lebt. Die Winter sind lang und streng, nicht immer ist genug Futter vorhanden. Die folgenden Matrizen *P* und *Q* hingegen beschreiben die Entwicklung von Wildschweinpopulationen unter gemäßigten bzw. guten Lebensbedingungen.

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}59 & 1{,}76 & 2{,}29 \\ 0{,}52 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}60 & 0{,}71 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0{,}26 & 0{,}94 & 1{,}93 \\ 0{,}33 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}40 & 0{,}66 \end{pmatrix}$$

c) Entscheiden Sie, welcher der beiden Matrizen *P* oder *Q* gemäßigte Lebensbedingungen für Wildschweine und welcher gute Lebensbedingungen für Wildschweine zugrunde liegen. **10 P**

Die folgenden Aufgabenteile d) bis h) beziehen sich auf die Matrix *P*.

d) Eine weibliche Wildschweinpopulation setzt sich zum Untersuchungszeitpunkt aus 60 Frischlingen, 23 Überläuferbachen und 17 reifen Bachen zusammen.
Berechnen Sie mit Hilfe der Populationsmatrix *P* die Population nach einem Jahr und aus diesem Ergebnis die Population nach einem weiteren Jahr unter den gleichen Lebensbedingungen. **10 P**

e)
- Berechnen Sie P^2 und runden Sie die Elemente dieser Matrix auf zwei Nachkommastellen.
- Bestätigen Sie durch Nachrechnen, dass man auch mit Hilfe von P^2 den Wildschweinbestand aus Aufgabenteil d) nach zwei Jahren bestimmen kann. **10 P**

f) Begründen Sie allein im Sachkontext und unabhängig von der Rechnung in e), warum P^2 keine Null enthalten darf. **15 P**

g) Der Bestand nach 10 Jahren kann mit Hilfe der Matrix P^{10} bestimmt werden.
Für die 10. Potenz der Matrix *P* gilt:

$$P^{10} \approx \begin{pmatrix} 61 & 122 & 152 \\ 19 & 39 & 49 \\ 13 & 25 & 32 \end{pmatrix}.$$

Bestätigen Sie, dass bei ungestörtem Wachstum unter gleich bleibenden Lebensbedingungen die Ausgangspopulation von 100 Wildschweinen (s. Aufgabenteil d)) nach 10 Jahren auf mehr als 13 500 Tiere anwächst. **5 P**

Auch ohne menschliche Eingriffe sind gleich bleibende Lebensbedingungen über Jahre hinweg unrealistisch; das Schwarzwild könnte sich wegen der Futter- und Raumnot nicht ungehindert vermehren. Trotzdem würden die Bestände zunächst dramatisch wachsen.
Um die Populationen konstant zu halten, werden Wildschweine von den Jagdpächtern geschossen. Zu beachten ist dabei, dass reife Bachen in der Sozialstruktur von Wildschweingruppen eine wichtige Rolle spielen. Ohne sie würden heranwachsende Frischlinge „ausrasten“.

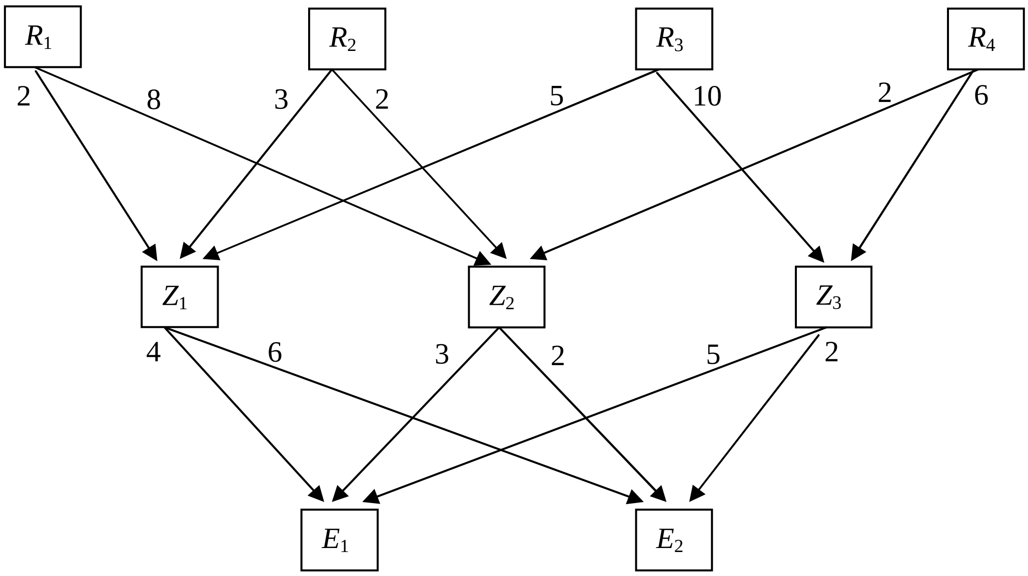
h) Bestimmen Sie eine Population, auf die der in Aufgabenteil d) beschriebene Bestand durch Abschuss reduziert werden könnte, sodass im nächsten Jahr die Population wiederum nur auf insgesamt 100 weibliche Tiere anwächst. Lassen Sie zehn alte Bachen und zehn Überläuferbachen am Leben. **20 P**

Aufgabe 3 Kosten-Preis-Kalkulation

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben..

Ein Industriebetrieb verarbeitet die Rohstoffe R_1, R_2, R_3 und R_4 zu den Zwischenprodukten Z_1, Z_2 und Z_3. Aus diesen Zwischenprodukten werden zwei Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt.

Der folgende Graph (auch Gozintograph genannt) zeigt, wie viele Mengeneinheiten (ME) der Rohstoffe für eine ME eines Zwischenproduktes und wie viele ME der Zwischenprodukte für eine ME eines Endproduktes benötigt werden.



a) Berechnen Sie die Rohstoff/Zwischenproduktmatrix A die Zwischen-/Endproduktmatrix B sowie die Rohstoff/Endproduktmatrix C.

b) Ein Kunde bestellt 20 ME von Endprodukt E_1 und 30 ME von Endprodukt E_2.

- Berechnen Sie die zur Abwicklung des Auftrages notwendigen Mengen an Rohstoffen und an Zwischenprodukten.

- Ermitteln Sie mit Hilfe der Matrizenrechnung die Gesamtkosten K des Kundenauftrages. Die Kostenrechnung liefert für die Kalkulation die nachstehend aufgeführten variablen Kosten. Die fixen Kosten werden grundsätzlich mit 20 % der variablen Kosten veranschlagt.

Materialkosten je ME der Rohstoffe:	R_1: 5,00 €	R_2: 1,00 €	R_3: 3,00 €	R_4: 2,00 €
Herstellkosten je ME der Zwischenprodukte:	Z_1: 40,00 €	Z_2: 20,00 €	Z_3: 50,00 €	
Herstellkosten je ME der Endprodukte:	E_1: 250,00 €	E_2: 100,00€		

- Bestimmen Sie den Mindestverkaufspreis p_{Min} der Endprodukte auf volle Euro gerundet, wenn beide Produkte zum gleichen Preis verkauft werden sollen und der Betrieb ohne Verlust arbeiten will.

c) Zukünftig sollen die Rohstoffvorräte des Betriebes dem tatsächlichen Absatz der Endprodukte angepasst werden. Neueste Marktuntersuchungen haben ergeben, dass sich die Endprodukte E_1 und E_2 im Mengenverhältnis von 1 : 3 absetzen lassen.

- Zeigen Sie, dass die Rohstoffvorräte unter Berücksichtigung des oben angegebenen Mengenverhältnisses dem folgenden Mengenvektor entsprechen müssen:

$$\vec{x}_R = \begin{pmatrix} 116x_{E_1} \\ 84x_{E_1} \\ 220x_{E_1} \\ 84x_{E_1} \end{pmatrix}.$$

- Vom Rohstoff R_4 sind vorübergehend nur begrenzte Mengen erhältlich, und zwar höchstens 20.160 ME.

  Bestimmen Sie, wie viele Endprodukte von E_1 und von E_2 unter Beibehaltung des obigen Mengenverhältnisses von 1:3 maximal noch produziert werden können.

- Beurteilen Sie kurz die Probleme der Lagerhaltung bezüglich des Kapitalbedarfs und der Finanzierung.

Aufgabe 4 Käferpopulation

Grundlage der Aufgabe: E. LEHMANN, Lineare Algebra mit dem Computer, Stuttgart 1983, S. 186f

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben..

Die Entwicklung eines Käfers beschreibt das folgende Modell:

Aus den Eiern schlüpfen nach einem Monat Larven, nach einem weiteren Monat werden diese zu Käfern, die nach einem Monat Eier legen und dann sterben.

- Aber nur aus einem Viertel der Eier werden Larven, die anderen Eier werden von Tieren gefressen oder verenden.
- Von den Larven wird die Hälfte zu Käfern, die andere Hälfte stirbt.

Jeder Käfer legt 8 Eier.

a) Stellen Sie das beschriebene Modell mit einem Graphen dar und geben Sie die Populationsmatrix P an.

Berechnen Sie mit P, wie eine Population von 40 Eiern, 40 Larven und 40 Käfern nach einem Monat aussieht.

b) Die in a) angegebene Population soll über einen längeren Zeitraum beobachtet werden. Dazu benötigt man ein kleines Terrarium, wenn die Anzahl der Käfer im Laufe der Zeit nicht über 60 ansteigt, andernfalls ein großes.

Ermitteln Sie, welches Terrarium nach dem Populationsmodell gekauft werden muss.

c) Bestimmen Sie für das Populationsmodell einen Anfangsbestand, der nach einem Monat unverändert ist.

Beschreiben Sie die Langzeitentwicklung dieses Bestandes.

d) Bestimmen Sie für die Populationsmatrix P die Potenzen P^2 und P^3,

und zeigen Sie damit, dass $P^3 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \textit{Einheitsmatrix}$ gilt.

Interpretieren Sie diesen Sachverhalt im Kontext der Population.

e) Diese Teilaufgabe ist eine Verallgemeinerung von d):

Gegeben sei die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{Q}_0^+$ und $0 \leq b, c \leq 1$.

Ermitteln Sie Bedingungen für a, b und c, damit $M^3 = E = \textit{Einheitsmatrix}$.

Zeigen Sie, dass für diese Matrizen M dann $M^4 = M$ gilt, und beurteilen Sie das Ergebnis im Hinblick auf alle Potenzen der Matrix M.

Aufgabe 5 Kastanien-Miniermotte

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben..
Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

Die Rosskastanien-Miniermotte (Cameraria ohridella) ist vor gut 20 Jahren entdeckt worden und breitet sich schnell in Europa aus. Dieser Kleinschmetterling ist relativ wenig erforscht. Die in dieser Aufgabe verwendeten Daten über die Entwicklungsstadien beruhen daher teilweise auf Schätzungen.

Die Motten bringen über einen Sommer zwei bis drei, unter günstigen Lebensbedingungen auch vier „Generationen“ hervor.
In dieser Aufgabe wird zur Vereinfachung davon ausgegangen, dass die Motten nur eine „Generation“ im Juni hervorbringen und eine zweite „Generation“ im August. Dabei beschreibt der Begriff „Generation“ einen vollständigen dreischrittigen Entwicklungszyklus von Puppen zu Puppen!

Die ersten Miniermotten eines Sommers entwickeln sich aus Puppen, die den Winter über in welken Kastanienblättern gelebt haben. Anfang Juni gibt es also nur diese „Winter-Puppen“ (WP).

Hier die dreischrittige Entwicklung der Junigeneration:

(1) 50 % der „Winter-Puppen“ (WP) sind lebensfähig und entwickeln sich zu Faltern (F).

(2) Jeder Falter legt Eier, aus denen sich im Durchschnitt 20 Larven (L) entwickeln.
20 % der Larven entwickeln sich zu „Winter-Puppen“ (WP), die in den Ruhezustand fallen und sich so bis zum nächsten Jahr nicht weiter entwickeln.

(3) 40 % der Larven entwickeln sich zu „Sommer-Puppen“ (SP), die sich im Juni bereits zu Faltern entwickeln. Die restlichen Larven sterben.

Zur Beschreibung der drei Entwicklungsschritte der Junigeneration soll dieselbe Übergangsmatrix P nacheinander auf den Populationsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} L \\ SP \\ WP \\ F \end{pmatrix}$ angewandt werden.

Diese Übergangsmatrix hat dabei die allgemeine Form $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix}$.

a) Für die Matrix P stehen folgende Varianten zur Verfügung:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die richtige Matrix P an und beschreiben Sie Ihre Entscheidung im Sachkontext der Aufgabe. **(10P)**

b) In einem Garten gibt es Anfang Juni 100 „Winter-Puppen“. Berechnen Sie die Anzahlen der „Sommer-Puppen“ und der „Winter-Puppen“, die sich im Laufe des Juni in den drei Schritten daraus entwickeln. **(10P)**
Kontrollergebnis: Es gibt 400 Sommer-Puppen und 200 Winter-Puppen.

c) Die Berechnung der Puppenanzahlen in b) lässt sich in einem Schritt mit Hilfe der Matrix P^3 durchführen.
Bestimmen Sie diese Matrix und zeigen Sie, dass die einfache Anwendung von P^3 auf den Bestand von 100 Winter-Puppen zum gleichen Ergebnis wie in b) führt. **(15P)**

Die leicht veränderte, ebenfalls dreischrittige Entwicklungsphase der Augustgeneration eines Sommers wird durch dreimalige Anwendung der folgenden Matrix *Q* dargestellt:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Beschreiben Sie die Bedeutung der von Null verschiedenen Einträge der Matrix Q. **(10P)**

e) Bestimmen Sie aus dem Ergebnis von b) die Anzahl der „Winter-Puppen" Ende August. **(10P)**

Die Berechnung der Entwicklung im August lässt sich auch wieder in <u>einem</u> einzigen Schritt mithilfe der folgenden Matrix durchführen:

$$Q^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 6{,}3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

f) Bestimmen Sie die Matrix *R*, die die Entwicklung im Juni und August in einem Schritt zusammenfasst, so dass man direkt aus der Anzahl der „Winter-Puppen" Anfang Juni die Anzahl der „Winter-Puppen" Ende August berechnen kann. Bestätigen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie mit dieser Matrix *R* das Ergebnis aus e) erneut berechnen. **(15P)**

g) Zur Bekämpfung der Miniermotten wird seit einigen Jahren in der Presse dazu aufgerufen, das Laub der Kastanien zu verbrennen, weil darin die Puppen überwintern und die Puppen von der Verrottung des Laubs nicht betroffen sind. Solche Aktionen bewirkten eine drastische Reduktion der überwinterten Puppen und damit des Befalls der Kastanienbäume.
Berechnen Sie, wie viel Prozent des Winterlaubs verbrannt werden müsste, damit sich – nach dem hier entwickelten Modell – die Miniermotten nicht von Jahr zu Jahr weiter ausbreiten. **(10P)**

h) Ein Unternehmen der chemischen Industrie hat ein neues Mittel speziell gegen die Falter entwickelt. Ermitteln Sie einen Rechenweg, mit dem man bestimmen könnte, wie viel Prozent der Falter getötet werden müssten, bevor sie Eier legen, damit sich – nach dem hier entwickelten Modell – die Miniermotten nicht von Jahr zu Jahr weiter ausbreiten. **(20P)**

Aufgabe 6 Fruchtsäfte

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben..

Ein Betrieb der Getränkeindustrie produziert in zwei Werken an verschiedenen Standorten Fruchtsäfte. Im Werk A werden aus vier Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4 drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 hergestellt. Im Werk B werden aus den Zwischenprodukten dann die drei Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt. Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist durch die beiden folgenden Tabellen gegeben:

Werk A: Rohstoffeinsatz			
$R \to Z$	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	1	3	0
R_2	0	6	2
R_3	a_{31}	0	a_{33}
R_4	1	3	1

Werk B: Zwischenprodukteinsatz			
$Z \to E$	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	1	4
Z_2	8	10	1
Z_3	6	2	2

a) Berechnen Sie die Elemente a_{31} und a_{33} in der Rohstoffeinsatzmatrix A so, dass die Rohstoff/Endproduktmatrix C wie folgt lautet:

$$C = \begin{pmatrix} 26 & 31 & 7 \\ 60 & 64 & 10 \\ 16 & 6 & 12 \\ 32 & 33 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie, wie groß der Vorrat an den einzelnen Rohstoffen sein muss, damit von den Endprodukten 150 ME von E_1, 200 ME von E_2 und 250 ME von E_3 hergestellt werden können.

b) Durch technische Störungen im Produktionsablauf in Werk A gab es einen Ausfall bei der Herstellung des Zwischenproduktes Z_2. Erschwerend kommt hinzu, dass sich wegen Renovierungsarbeiten in den Lagerräumen des Werkes B nur geringe Bestände an Zwischenprodukten befinden. Zurzeit sind am Lager in Werk B nur noch die Zwischenprodukte Z_1 mit 75 ME und Z_3 mit 100 ME.

Ein Kunde bestellt kurzfristig 12 ME von Endprodukt E_3.
Dem Kundenwunsch entsprechend werden nun genau die 12 ME von E_3 produziert, wobei aber produktionsbedingt auch die beiden anderen Endprodukte E_1 und E_2 (nach obiger Tabelle) hergestellt werden.
Zeigen Sie durch eine Berechnung, dass sich die oben genannten Zwischenproduktbestände vollständig durch diese Produktion verarbeiten lassen, und bestimmen Sie, wie viele ME der Endprodukte E_1 und E_2 dabei hergestellt werden können und wie viele ME des Zwischenprodukts Z_2 das Werk A dann liefern muss.

c) Um auf Dauer einen reibungslosen Produktionsablauf in Werk B zu gewährleisten, soll das Lager nach der Renovierung einen Mindestbestand an Zwischenprodukten aufweisen.

Untersuchen und beurteilen Sie ohne Rechnungen die Probleme der Lagerhaltung bezüglich des Kapitalbedarfs und der Finanzierung.

Fortsetzung nächste Seite →

d) Zukünftig soll die Produktion im Werk A auf eine neue, sicherere Fertigungstechnik umgestellt werden. Bei dieser Technik ändern sich in Abhängigkeit von einem Technologieparameter t sowohl der Rohstoffeinsatz als auch die Fertigungskosten für die Zwischenproduktion.

Die Gesamtkosten K für die Herstellung von je 1 ME der Zwischenprodukte belaufen sich in GE

nach alter Technik auf $K_{alt} = 5000$ und

nach neuer Technik auf $K_{neu} = t^3 + 12t^2 - 144t + 5000$ mit $t \in \left]0;9\right]$.

- Bestimmen Sie den Parameter t so, dass die Gesamtkosten K minimal werden.
- Ermitteln Sie, für welche ganzzahligen Werte von t das neue Produktionsverfahren kostengünstiger ist als das alte Verfahren, und beurteilen Sie die neue Kostensituation des Betriebes.

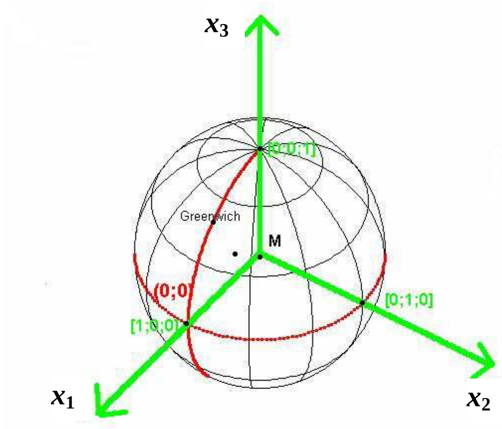
Aufgabe 7 GPS

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben..

Eine Person bestimmt ihre Position auf der Erdoberfläche mit Hilfe eines GPS-Gerätes. Dieser Vorgang soll in dieser Aufgabe prinzipiell nachvollzogen werden.

Wir machen dazu folgende vereinfachende Annahmen:

- Die Erde ist eine ideale Kugel mit einem Umfang von 40 000 km und dem zugehörigen Radius von $R =$ 6 366 km. Als Längeneinheit wählen wir gerade diesen Erdradius.
- Weiterhin betrachten wir folgendes erdgebundene Koordinatensystem:
  Der Koordinatenursprung ist der Erdmittelpunkt. Die x_3-Achse liegt auf der Erdachse und zeigt zum Nordpol. Der Nordpol ist also der Einheitspunkt auf der x_3-Achse mit den Koordinaten (0 | 0 | 1).
  Die x_1-Achse geht durch den Schnittpunkt von Äquator und Nullmeridian, dieser Punkt mit den geographischen Koordinaten 0° Breite und 0° Länge ist der Einheitspunkt auf der x_1-Achse, hat also die Koordinaten (1 | 0 | 0) .
  Der Einheitspunkt auf der x_2-Achse hat dann 0° Breite und 180° östliche Länge und die Koordinaten (0 | 1 | 0).



- Zu einem genau fixierten Zeitpunkt der Positionsbestimmung empfängt die Person mit ihrem GPS-Gerät von zwei GPS Satelliten deren genaue Positionen Sat_1 und Sat_2 in dem genannten rechtwinkligen Koordinatensystem. Außerdem empfängt der GPS-Empfänger die genaue Uhrzeit in den Satelliten zum Zeitpunkt der Aussendung der Signale. Aus der Zeitdifferenz der beiden Uhren in den Satelliten und im GPS-Empfänger zum Empfangszeitpunkt kann dieser (mit Hilfe der Lichtgeschwindigkeit) die Entfernungen d_1 und d_2 von seiner unbekannten Position zu den beiden Satelliten berechnen. (Dies ist in Wirklichkeit wegen der Ungenauigkeit der Empfängeruhr komplizierter!).

<u>Nun zur eigentlichen Aufgabe:</u>

Es sei Sat_1 (2 | 2 | 3) und $d_1 = 3{,}2$ und ebenso Sat_2 (3 | 2 | 2) und $d_2 = 3{,}3$.

a) Beschreiben Sie den prinzipiellen Weg, wie man den Standort der Person aus den gegebenen Daten berechnen kann.

b) Betrachten Sie die Kugel um Sat_1 mit dem Radius d_1 und geben Sie die Gleichung der Kugeloberfläche an.
Diese Kugeloberfläche schneidet die Erdoberfläche in einem Schnittkreis. Berechnen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der dieser Schnittkreis liegt.

c) Die gleiche Rechnung wie in b) für die Kugel um Sat_2 mit dem Radius d_2 ergibt die folgende Gleichung für die Schnittkreisebene: E_2: $600x + 400y + 400z = 711$.
Bestimmen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen E_1 und E_2 in der Parameterform.

d) Beschreiben Sie, wie man aus den bisherigen Daten die Koordinaten von zwei Punkten ermitteln kann, von denen einer der Standort der Person sein muss.

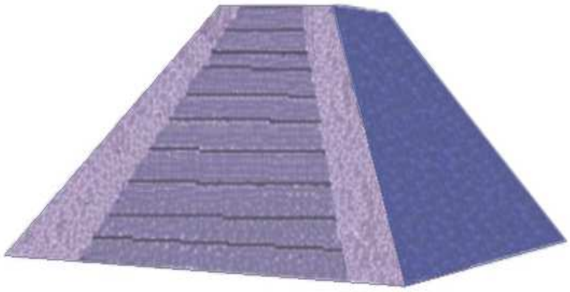
e) Die Person weiß immerhin, dass sie sich in Nordeuropa aufhält. So kann sie aus den berechneten beiden Punkten den für sie zutreffenden Punkt auswählen: *Pos* (57,3° | 17,5°).

Bestimmen Sie die Länge des kürzesten Weges auf der Erdoberfläche von Hamburg (53,5° | 10°) zum Standort *Pos* der Person.

Aufgabe 8 Ausstellungshalle

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben..
Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

In der Stadt „Future-City“ soll eine neue Ausstellungshalle gebaut werden. Ein Architektenbüro wird mit einem Entwurf beauftragt. Als Vorbild dient ein historisches Bauwerk, das die Form eines Pyramidenstumpfes besitzt (siehe Abbildung).



Das Bauwerk ist etwa 40 m hoch.

Eine breite Außentreppe führt vorn auf das Dach des Bauwerks.

Das Architektenbüro fertigt einen ersten Entwurf an:

In einem kartesischen Koordinatensystem lässt sich die <u>Grundfläche</u> der Halle durch folgende Eckpunkte beschreiben: $A_1(0|0|0)$; $B_1(180|0|0)$; $C_1(160|240|0)$; $D_1(40|240|0)$. Die <u>Dachfläche</u> wird durch die Eckpunkte $A_2(60|60|40)$; $B_2(140|30|40)$; $C_2(120|210|40)$; $D_2(60|180|40)$ dargestellt.

a) Zeichnen Sie diese Ausstellungshalle in das Koordinatensystem in der Anlage. **(15P)**

b) Begründen Sie, dass die Grundfläche ein Trapez ist.

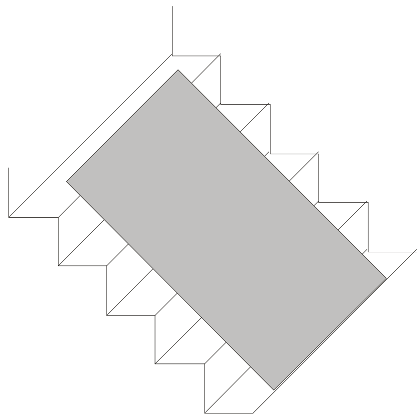
Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Grundfläche. **(15P)**

c) Die beiden Strecken $\overline{B_2 A_2}$ und $\overline{C_2 D_2}$ sind Teile von zwei Geraden, die sich in der Spitze eines in der Nähe stehenden Obelisken schneiden. Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden. **(20P)**

d) Von der Spitze des Obelisken werden abends zwei Laserstrahlen auf die Ausstellungshalle gerichtet. Die Strahlen verlaufen in Richtung der Gebäudekanten $\overline{B_2 A_2}$ und $\overline{C_2 D_2}$. Berechnen Sie den Winkel zwischen den Laserstrahlen. **(5P)**

e) Die Mitte der Gebäudekante $\overline{A_1 A_2}$ wird mit dem Punkt $\left(36\tfrac{2}{3}\,\middle|\,36\tfrac{2}{3}\,\middle|\,0\right)$ durch einen Stützpfeiler verbunden. Bestimmen Sie die Länge des Stützpfeilers und weisen Sie nach, dass der Stützpfeiler senkrecht zur Kante $\overline{A_1 A_2}$ ist. **(15P)**

Die Dachfläche wird als Aussichtsplattform genutzt. Zu dieser Aussichtsplattform gelangt man über eine 20 m breite Außentreppe, die an der Kante $\overline{B_2 C_2}$ endet. Für den Sicherheitsaspekt ist die Steilheit der Treppe interessant. Dazu wird die Ebene E genutzt, die die Lage (*Neigung*) dieser Treppe beschreibt (siehe Abbildung).



Diese „Treppenebene" E wird beschrieben durch die Gleichung

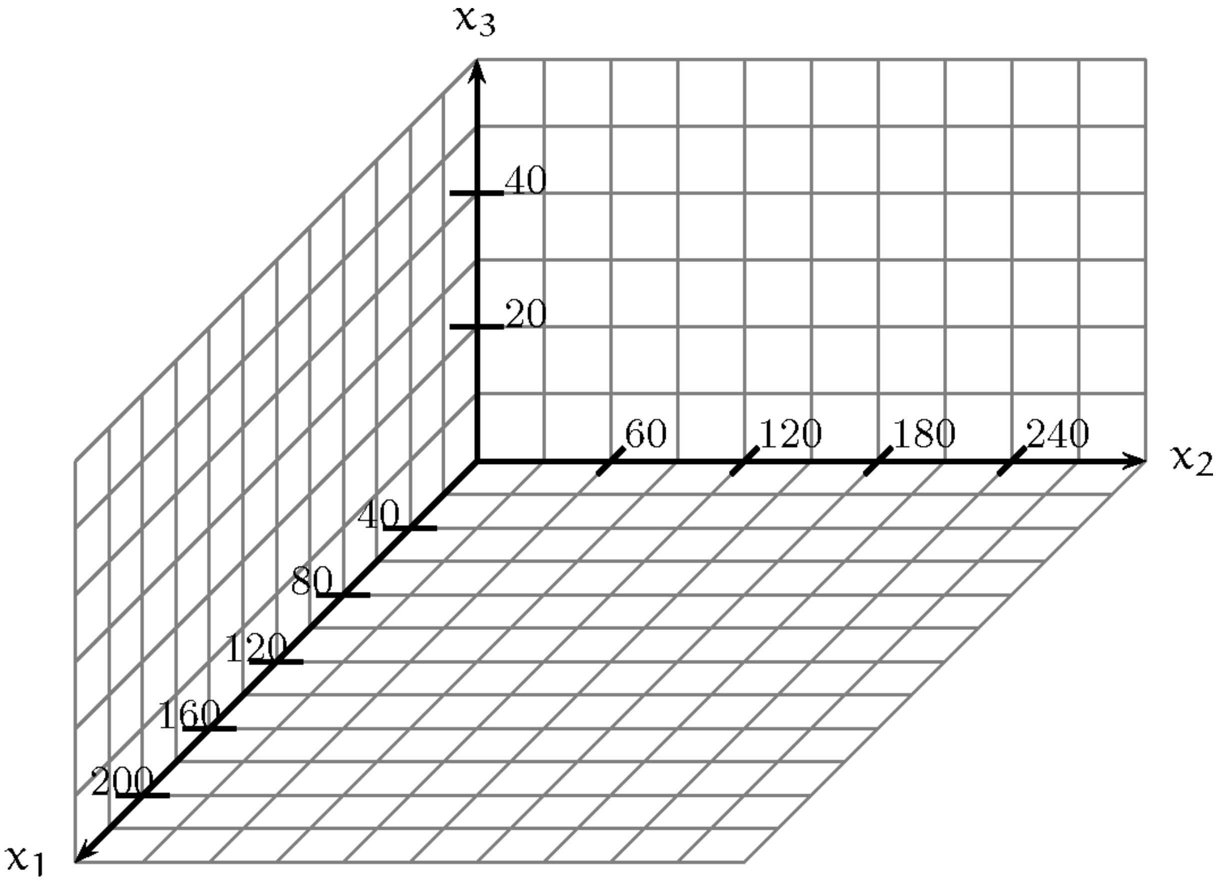
$$18x_1 + 2x_2 + k \cdot x_3 = 3660\,,$$

wobei k eine reelle Zahl ist.

f) Ermitteln Sie k so, dass die Kante $\overline{B_2 C_2}$ in der Treppenebene liegt. **(15P)**

g) Beurteilen Sie die Nutzbarkeit der Treppe unter Sicherheitsaspekten. **(15P)**
Information:
Im häuslichen Bereich ist ein Neigungswinkel im Bereich zwischen 25° und 40° üblich.
Für Garten- und Freitreppen ist ein maximaler Neigungswinkel von 28° erlaubt.

Anlage zur Aufgabe „Ausstellungshalle“



Aufgabe 9 Fußball

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben..
Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

Das Fußballfeld des FC Schienbein 08 ist 100 m lang und 60 m breit.

Ein Fußballtor hat als Innenmaße näherungsweise eine Breite von 7,3 m und eine Höhe von 2,4 m. Das Tor befindet sich genau in der Mitte der kurzen Spielfeldbegrenzungen.

In der Abbildung (siehe Anlage) ist eine Spielfeldecke im Koordinatenursprung. Eine Einheit des Koordinatensystems entspricht 1 m in der Realität.

a) Geben Sie die Koordinaten der in der Anlage mit *A* bezeichneten oberen Innenecke des rechten Tores an. **(10P)**

Bei der zweidimensionalen Darstellung eines dreidimensionalen Geschehens tritt das Problem auf, dass aus der Lage eines Punktes in der zweidimensionalen Darstellung nicht eindeutig auf die Lage des Punktes im tatsächlichen dreidimensionalen Geschehen geschlossen werden kann.
So könnte der Punkt *B* in der Abbildung (Anlage) die Koordinaten $B(40|80|10)$, aber auch die Koordinaten $B(30|75|5)$ haben. Es gibt sogar eine unbegrenzte Anzahl an Möglichkeiten, passende Koordinaten anzugeben.

b) Zeichnen Sie zur Bestätigung des oben beschriebenen Phänomens in das obige Koordinatensystem die Punkte $P\ (10|30|30)$ und $Q\ (20|35|35)$ ein und ermitteln Sie die Koordinaten eines möglichen dritten Punktes, der in der Zeichnung von *P* und *Q* nicht unterschieden werden kann. **(15P)**

Beim Pokalendspiel zwischen FC Schienbein 08 gegen Eintracht Ausdauer 98 kommt es nach einem Foulspiel zu einem Freistoß. Der Freistoß wird vom Punkt *F* aus ausgeführt, der näherungsweise durch die Koordinaten $F(20|75|0)$ gegeben ist. Bei der Fernsehübertragung wird die Entfernung zum Tor eingeblendet.

c) Beschreiben Sie, dass es mehrere sinnvolle Möglichkeiten gibt, die Entfernung des Freistoßpunktes zur Torlinie <u>zwischen den Pfosten</u> anzugeben. Nennen Sie mindestens zwei und berechnen Sie <u>**eine**</u> Entfernung. **(15P)**

Obwohl sich ein paar Spieler zum Schutz des Tores als „Mauer“ aufgestellt haben, schießt Hansi Hammerhart den Freistoß direkt in die von ihm aus rechte obere Ecke des Tores (unmittelbar links unterhalb des Punktes *A* aus Aufgabenteil a).

Dieser Torschuss soll mathematisch untersucht werden.

Dabei wird vorausgesetzt, dass die Flugbahn des Balles näherungsweise eine Gerade ist und dass der Balldurchmesser 22 cm beträgt.

d) Bestimmen Sie die Geradengleichung für den Flug des Ballmittelpunktes. **(15P)**

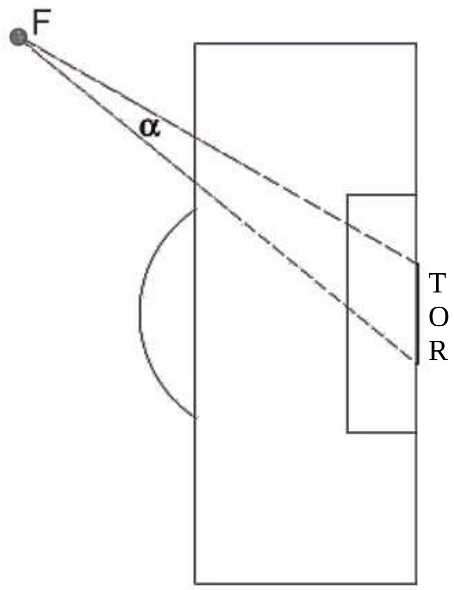
Hinweis:
Falls Sie im Aufgabenteil d) keine Gleichung ermitteln konnten, verwenden Sie die folgende:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 13{,}23 \\ 62{,}5 \\ -0{,}98 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 27{,}08 \\ 50 \\ 4{,}36 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}.$$

Bei diesem Freistoß stellt sich die Mauer etwa an der 16-Meter-Linie (Strecke, die parallel zur Torlinie ist und im Abstand von 16 m zu ihr verläuft) auf.

e) Ermitteln Sie, in welcher Höhe über dem Boden der Ballmittelpunkt die 16-Meter-Linie passiert. **(15P)**

Für den Schützen ist das Tor umso leichter zu treffen, je größer der „Torwinkel" ist. Dieser Torwinkel α hat seinen Scheitel in der Ballposition $F(20|75|0)$, in der der Ball den Boden berührt. Seine Schenkel enthalten die Schnittpunkte der beiden Torpfosten und dem Boden (siehe Abbildung rechts).

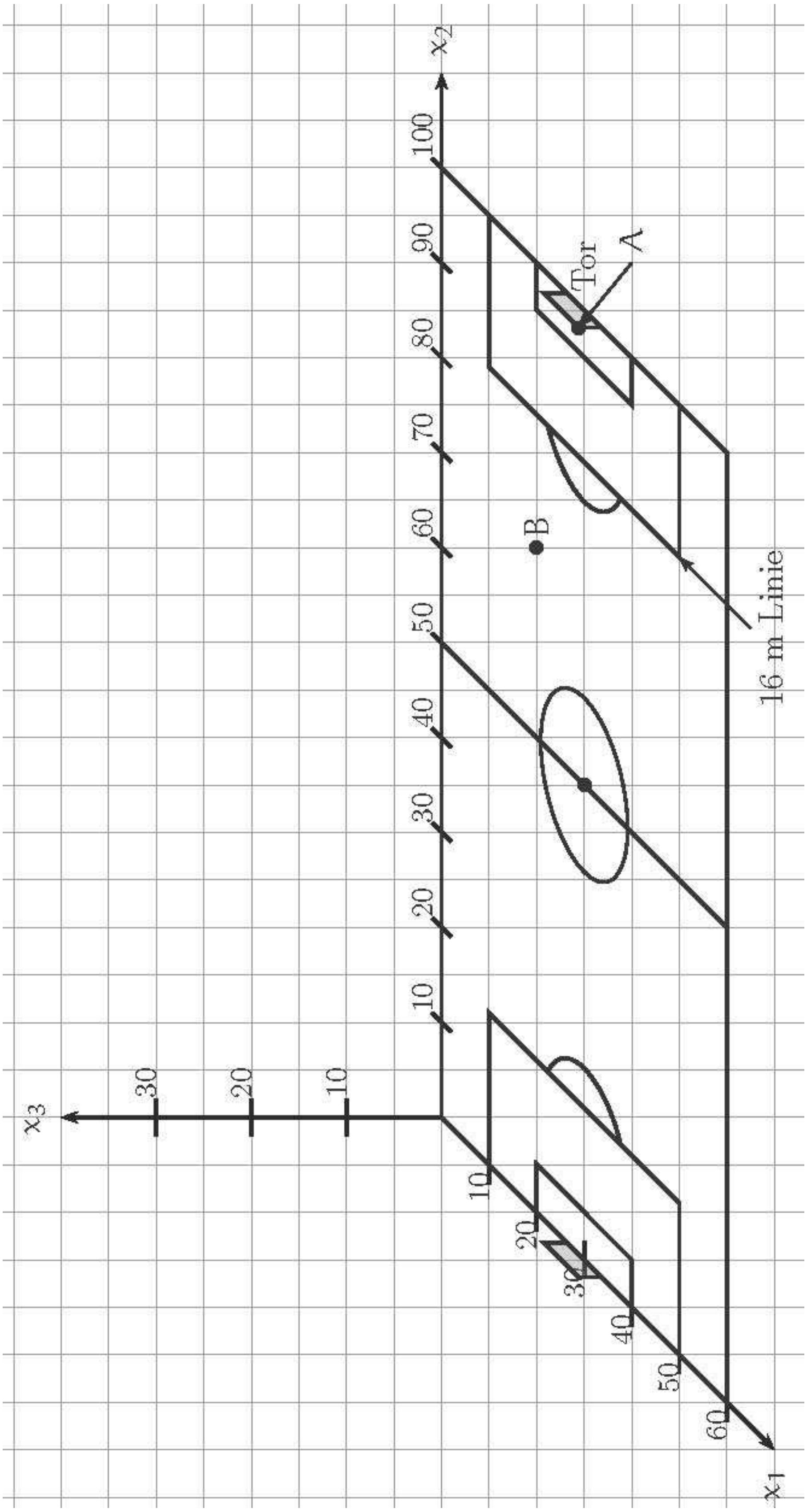


f) Bestimmen Sie den Torwinkel α für den Freistoß von Hansi Hammerhart. **(15P)**

g) Gemäß den Spielregeln muss die Mauer beim Freistoß einen Mindestabstand von 9,15 m zum Freistoßpunkt einhalten.

Ermitteln Sie die Mindestlänge einer geraden Mauer, die regelgerecht einen Torwinkel von 16° vollständig abdeckt. **(15P)**

Anlage zur Aufgabe „Fußball“



Aufgabe 10 Louvre Pyramide

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben..

Der Eingang des berühmten Pariser Kunst-Museums "Louvre" wird durch eine Glas-Pyramide mit quadratischer Grundfläche gebildet:

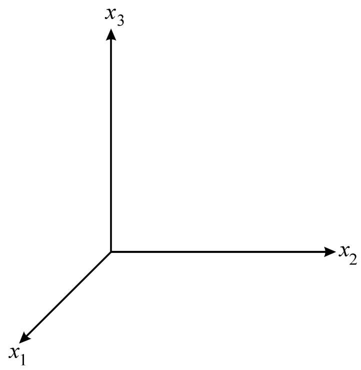
Die Breite beträgt ungefähr 35 m und die Höhe 22 m.

Diese Pyramide wird jetzt in einem dreidimensionalen rechtwinkligen Koordinatensystem (mit den Längeneinheiten von jeweils 1 m) betrachtet.

Die Bodenfläche sei die x_1-x_2-Ebene, und die x_3-Achse sei lotrecht nach oben gerichtet.
Das Koordinatensystem sei weiterhin so gewählt, dass die vier Eckpunkte auf dem Boden die folgenden Koordinaten haben:

$A(\,0\,|\,0\,|\,0\,)$ $B(35\,|\,0\,|\,0\,)$ $C(\,35\,|\,35\,|\,0\,)$ $D(\,0\,|\,35\,|\,0\,)$

a) Die Dachspitze sei S. Begründen Sie, dass S die folgenden Koordinaten hat: (17,5 | 17,5 | 22).
Zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem ein. 1 LE $\triangleq$ 1 m, der Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung beträgt $0{,}5\cdot\sqrt{2}$ und der Winkel zwischen x_1- und x_2-Achse ist 135° groß.



b) Bestimmen Sie eine Parameter- und eine Koordinatenform der Ebene $\boldsymbol{E}$, in der die Pyramidenseitenfläche ABS liegt.

c) Bestimmen Sie den Winkel, den die Seitenflächen der Pyramide jeweils mit dem Fußboden bilden.

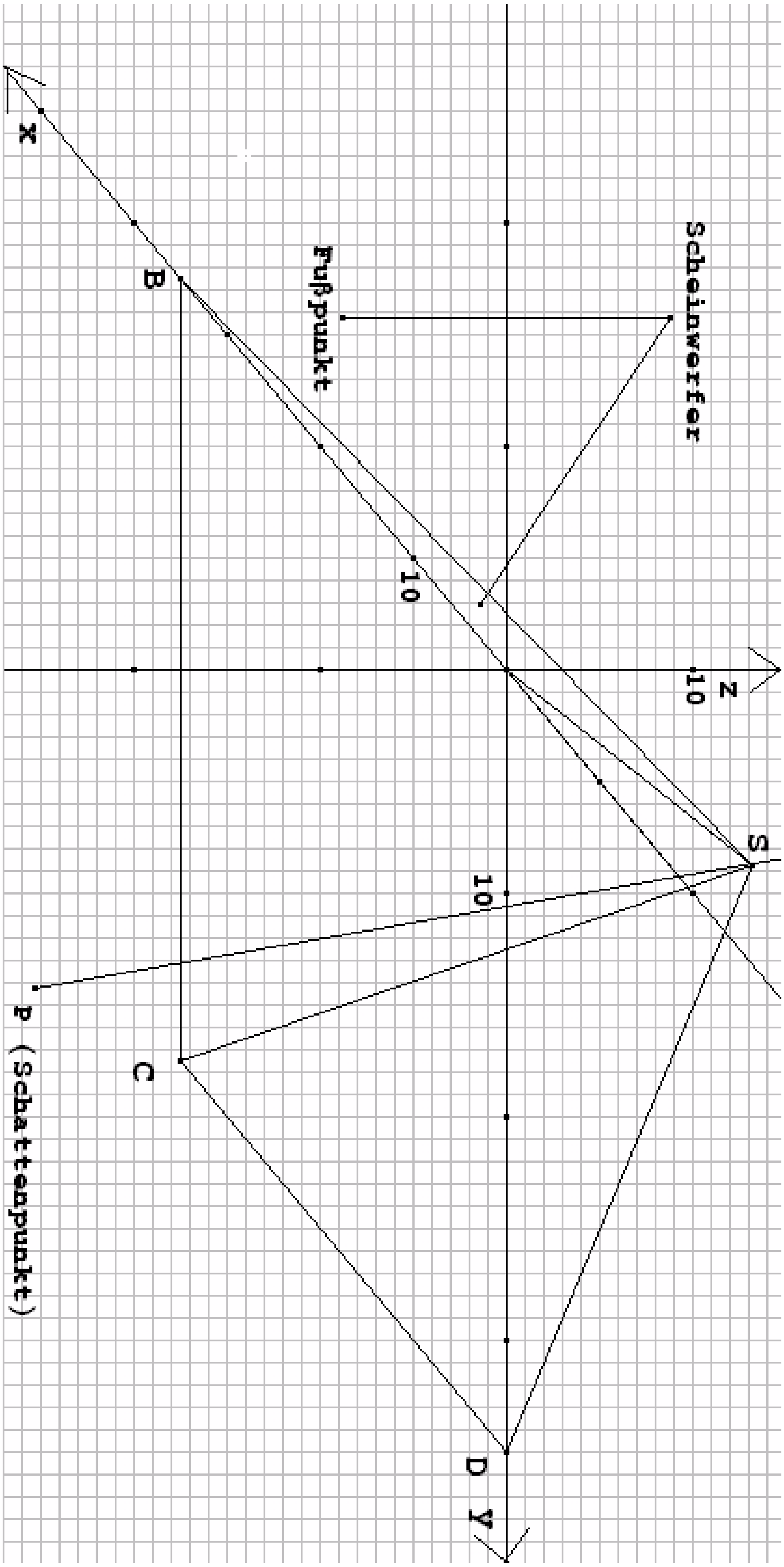
d) Um ein Angebot für die Fensterreinigung einzuholen, muss man den Flächeninhalt der Glasflächen berechnen. Berechnen Sie dazu zuerst den Flächeninhalt eines der vier (kongruenten) Seitendreiecke und dann die gesamte innen und außen zu reinigende Glasfläche.

e) Am Tage fällt bei schönem Wetter (paralleles) Sonnenlicht auf die Pyramide. Zum nun betrachteten Zeitpunkt sei der Richtungsvektor vom Sonnenlicht $\vec{r} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes P der Pyramidenspitze auf dem Boden.

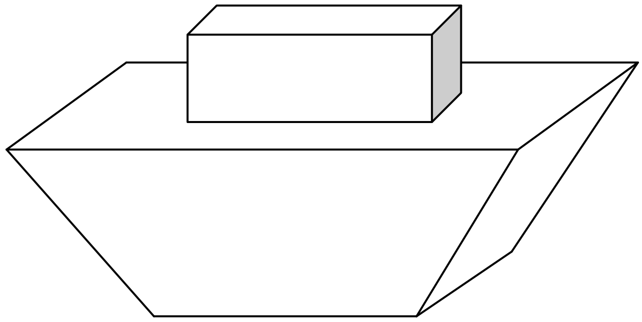
f) Nachts sollen zur Verstärkung der Lichteffekte dann und wann die Seitenflächen der Pyramide von außen mit Scheinwerfern beleuchtet werden.
Einer der Scheinwerfer soll mit Hilfe eines Lichtmastes lotrecht über dem Bodenpunkt $F(17{,}5\,|\,-7\,|\,0)$ angebracht werden. Die als punktförmig angenommene Lichtquelle soll die Seitenfläche ABS so beleuchten, dass das Licht im Schwerpunkt dieser Seitenfläche senkrecht auftrifft.
Zeigen Sie zunächst, dass der Schwerpunkt M_1 die Koordinaten $\left(\frac{35}{2}\,|\,\frac{35}{6}\,|\,\frac{22}{3}\right)$ hat.
Bestimmen Sie dann die notwendige Höhe der Lichtquelle über dem Boden.

Schrägbild



Aufgabe 11 Abenteuerspielplatz

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben..
Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.



Der Gemeinderat beschließt, einen eher langweiligen Spielplatz zu einem Abenteuerspielplatz umzugestalten. Das Motto lautet „Auf hoher See". Daher soll ein Piratenschiff inmitten des Geländes die neue Attraktion werden.

In einem kartesischen Koordinatensystem lässt sich die Grundfläche des Schiffes beschreiben durch die Eckpunkte

$$A_1(0 \mid 0 \mid 0),\ B_1(3 \mid 0 \mid 0),\ C_1(3 \mid 5 \mid 0),\ D_1(0 \mid 5 \mid 0)$$

und das Deck durch die Eckpunkte

$$A_2(0 \mid -1 \mid 2),\ B_2(3 \mid -1 \mid 2),\ C_2(3 \mid 6 \mid 2),\ D_2(0 \mid 6 \mid 2).$$

Die Koordinaten sind zugleich als Längenangaben in Metern zu lesen.

Auf dem Deck wird ein quaderförmiger, oben offener Aufbau – genannt Kommandobrücke – errichtet, der an allen Seiten 1 m Abstand zum Rand des Decks hat und 0,75 m hoch ist.
Die aus Sicherheitsgründen notwendige Reling rund um das Deck wird in dieser Aufgabe vernachlässigt.

b) Zeichnen Sie ein Schrägbild des Piratenschiffes in das Koordinatensystem in der Anlage. Geben Sie dort die Koordinaten der oberen Ecken des Aufbaus an. **15 P**

Von den alten Spielgeräten gibt es auf dem Spielplatz Betonfundamente in den Punkten $G(6 \mid 11 \mid 0)$ und $H(-3 \mid 8 \mid -1)$.
Von G zu C_2 und von H zu D_2 sollen Kletterstangen angebracht werden, die das Entern des Piratenschiffes ermöglichen und damit den Spielwert erhöhen.

b) Berechnen Sie die Länge der beiden Kletterstangen. **10 P**

Da kleine Kinder es nicht schaffen, an den Stangen an Deck zu klettern, treten die Eltern an den Gemeinderat heran und fordern, dass zwischen den beiden Stangen eine <u>ebene</u> Holzwand mit Grifflöchern so angebracht wird, dass die beiden Stangen die Begrenzung der Holzwand bilden.

c) Begründen Sie, warum der Wunsch der Eltern schon allein aus mathematisch-geometrischen Gründen nicht erfüllt werden kann. **15 P**

Der Gemeinderat bietet den Eltern an, zwischen den Kletterstangen ein Netz mit den Ecken C_2, D_2, G und H spannen zu lassen.

d) Der Flächeninhalt des gespannten Netzes lässt sich näherungsweise durch die Summe der Flächeninhalte der beiden Dreiecke GC_2H und HC_2D_2 bestimmen. Für das Dreieck HC_2D_2 wurde bereits ein Flächeninhalt von etwa 5,4 m^2 ermittelt. Zeigen Sie, dass der zu erwartende Materialverbrauch für das Netz etwa 27 m^2 beträgt. **10 P**

Durch den Rumpf des Schiffes werden aus großen Kunststoffröhren zwei Klettertunnel T_1 und T_2 gebaut.
Zunächst werden die Mitten der Röhren als Teile von Geraden dargestellt (ohne Beachtung des Durchmessers der Röhren).

Der Tunnel T_1 beginnt in $P(3 \mid 2{,}5 \mid 0{,}5)$ und endet in $Q(0 \mid 2{,}5 \mid 0{,}5)$.

Der Tunnel T_2 ist Teil der Geraden $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 5{,}25 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -6{,}5 \\ 3 \end{pmatrix},\quad r \in \mathbb{R}$.

e) Beschreiben Sie unter Berücksichtigung der folgenden Punkte, wie die beiden Klettertunnel das Piratenschiff „durchtunneln“:

- Weisen Sie nach, dass die beiden „Tunnel-Geraden“ sich nicht schneiden.
- Zeigen Sie, dass der Tunnel T_2 im Boden der Kommandobrücke endet.
- Ermitteln Sie, ob für den Tunnel T_2 die maximal zulässige Steigung von 30° gegenüber der Schiffsbodenebene nicht überschritten wird. **30 P**

f) Die Tunnelröhren werden in verschiedenen Durchmessern angeboten.
Beschreiben Sie ohne Rechnung, wie der maximale Durchmesser ermittelt werden kann. **10 P**

g) Die Tunnelröhren sollen mit einem Durchmesser von 1 m eingebaut werden.
Die Eltern beschließen, für die Einstiegsluke und die Ausstiegsluke jeweils einen Deckel anfertigen zu lassen. Dazu bestellen sie vier kreisförmige Holzdeckel mit dem Durchmesser von jeweils 1 m. Beurteilen Sie das Vorhaben. **10 P**

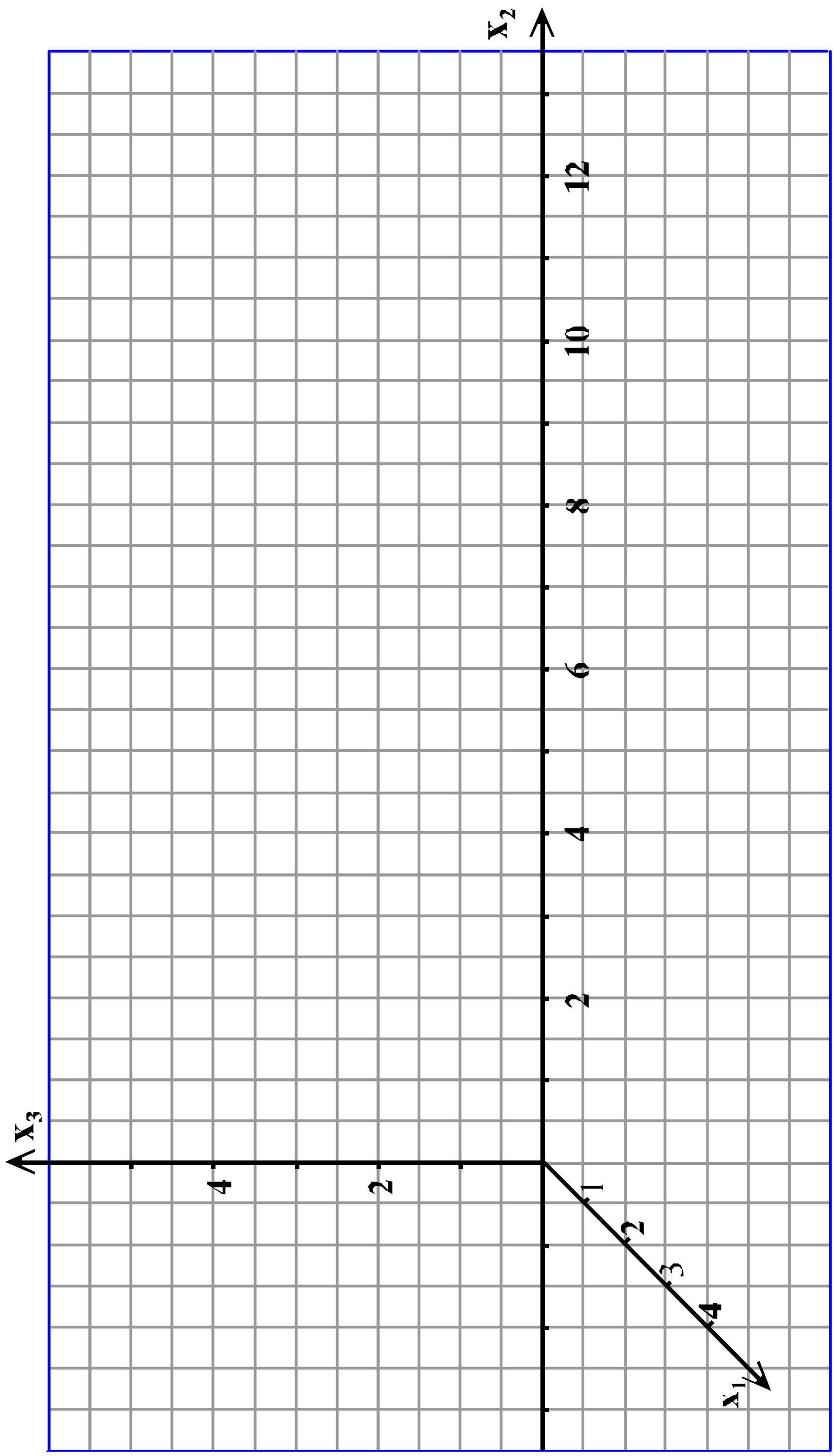
Anlage zur Aufgabe „Abenteuerspielplatz“

$A_1\,(0|0|0)$, $B_1\,(3|0|0)$, $C_1\,(3|5|0)$, $D_1\,(0|5|0)$

$A_2\,(0|-1|2)$, $B_2\,(3|-1|2)$, $C_2\,(3|6|2)$, $D_2\,(0|6|2)$

$A_3\,(\ \ |\ \ |\ \ )$, $B_3\,(\ \ |\ \ |\ \ )$, $C_3\,(\ \ |\ \ |\ \ )$, $D_3\,(\ \ |\ \ |\ \ )$

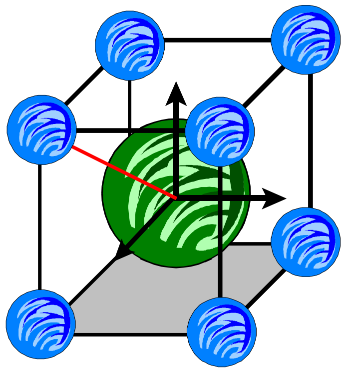
Auf allen Koordinatenachsen soll gelten: 1 LE entspricht 1 m



Aufgabe 12 Elementarzelle

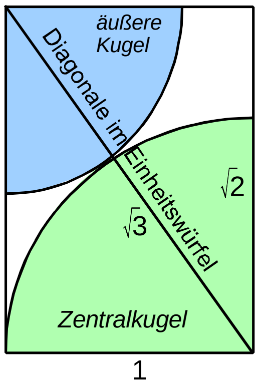
Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben..

Ein Würfel mit der Kantenlänge $a = 2$ heiße Elementarzelle.
Diese Elementarzelle wird in einem Koordinatensystem so angeordnet, dass ihr Zentrum im Koordinatenursprung liegt und die Würfelkanten parallel zu den Koordinatenachsen angeordnet sind.



schematische Darstellung

Acht gleich große Kugeln werden jetzt so angebracht, dass ihre Mittelpunkte je einen der Eckpunkte der Elementarzelle bilden.
Die neunte Kugel, die Zentralkugel, hat ihren Mittelpunkt im Zentrum der Elementarzelle, also im Ursprung des Koordinatensystems. Die Zentralkugel berührt alle anderen acht Kugeln. Ihr Radius sei mit r bezeichnet.



a) Beschreiben Sie, warum dann die äußeren Kugeln den Radius $r_a = \sqrt{3} - r$ aufweisen.
Geben Sie den Definitionsbereich von r an.

b) Bestimmen Sie zunächst r so, dass das nicht von den neun Kugeln eingenommene Volumen in der Elementarzelle maximal ist. (Bedenken Sie dabei, dass die äußeren acht Kugeln nicht vollständig in der Elementarzelle liegen!)

c) Bestimmen Sie dann r so, dass die gesamte Oberfläche der neun Kugeln in der Elementarzelle extremal wird. Um welche Art von Extremum handelt es sich?

d) Die hier behandelten Elementarzellen mit ihren Kugeln sind eine Darstellung eines bestimmten Kristalltyps, und zwar des so genannten kubisch-raumzentrierten Kristalls. (Ein Kristall „entsteht“ aus der Elementarzelle, indem man in alle Raumrichtungen dieselbe Elementarzelle immer wieder neu ansetzt.)
Steinsalz – also NaCl – kristallisiert in dieser Form, bildet also kubisch-raumzentrierte Kristalle. Ersichtlich kommen in einem Steinsalzkristall Natriumatome und Chloratome in gleicher Anzahl vor.

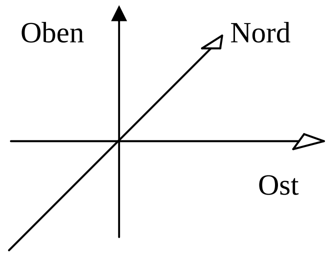
Begründen Sie, dass in einer Elementarzelle ebenfalls gleich viel Kugeln des Typs „Zentralkugel“ und des Typs „äußere Kugel“ vorkommen.

Beim Steinsalzkristall verhalten sich die Radien der Na-Atome und der Cl-Atome wie 43 : 57.
Welcher Volumenanteil der Elementarzelle wird von den Atomen eingenommen?
Beurteilen Sie dieses Radienverhältnis im Lichte Ihrer bisherigen Ergebnisse.

Aufgabe 13 Flugbahnen

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben..

Wir betrachten ein Koordinatensystem im Raum.
Die Koordinaten der Richtungsvektoren sind kartesisch mit den Koordinatenachsen in Ostrichtung, in Nordrichtung und senkrecht nach oben. Entgegen der üblichen Schreibweise wird hier, angepasst an die Navigation auf der Erde, die folgende Darstellung gewählt:



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Ost} \\ \text{Nord} \\ \text{Oben} \end{pmatrix}$$

Die Längeneinheit in allen drei Richtungen beträgt 1 km.

Gegeben sind vier Punkte im Raum:

$A\,(-5 \mid -9 \mid 8)$ $B\,(5 \mid 1 \mid 8)$ $C\,(13 \mid 33 \mid 10)$ $D(19 \mid 27 \mid 9)$.

Die Geraden

$$g:\ \vec{x} = \vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a}),\quad t \in \mathbb{R}$$
$$h:\ \vec{x} = \vec{c} + t \cdot (\vec{d} - \vec{c}),\quad t \in \mathbb{R}$$

beschreiben kurzzeitig die Bahnen zweier Flugzeuge.

Um 8.00 Uhr befand sich das erste Flugzeug im Punkt *A* und das zweite Flugzeug im Punkt *C* und beide flogen danach noch mindestens 4 Minuten mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Der Parameter *t* hatte solange auch die Bedeutung einer Zeit [in Minuten].

$t = 0$ bedeutet also 8:00 Uhr.

a) Berechnen Sie, in jeweils welche Himmelsrichtungen die beiden Flugzeuge flogen und geben Sie an, welches der beiden Flugzeuge sich im Sinkflug befand.

b) Berechnen Sie, wann und an welchem Punkt das Flugzeug, das sich im Sinkflug befindet, bis auf eine Höhe von 7500 m gesunken war.

c) Das Flugzeug aus dem Aufgabenteil b) hatte schon ziemlich genau Kurs auf den geplanten Aufsetzpunkt der Landebahn eines Flughafens. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Aufsetzpunktes.

d) Untersuchen Sie, ob sich die beiden Flugbahnen schneiden.

e) Ermitteln Sie, ob Kollisionsgefahr bestand.

f) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der beiden Flugzeuge in der Zeit zwischen 8:00 und 8:04 Uhr.

g) Fertigen Sie eine Schrägskizze der gesamten Situation an, in der die Punkte *A, B, C, D*, die Flugbahnen und der Aufsetzpunkt *AP* erkennbar sind.

h) Ein Flugsender befindet sich im Punkt *FS.* mit den Koordinaten $FS(100 \mid 100 \mid 0)$.
Bestimmen Sie, an welchem Punkt seiner Flugbahn das erste Flugzeug dem Flugsender am nächsten war und wie groß dieser Abstand dort war.
Beurteilen Sie, ob man mit den bekannten Informationen auch feststellen kann, um welche Uhrzeit das war.

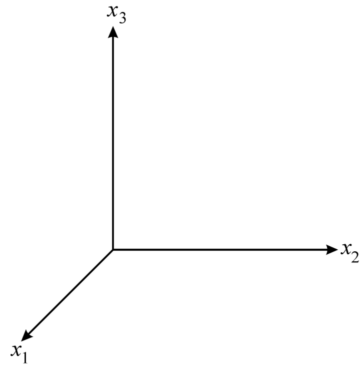
Aufgabe 14 U-Boot

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben..

Während einer Forschungsfahrt tritt ein U-Boot am Punkt $P(1200 \mid 0 \mid -540)$ – alle Angaben in m – in den Überwachungsbereich seines Begleitschiffes ein. Die Überwachung erfolgt durch SONAR (**So**und **N**avigation **a**nd **R**anging). Das Begleitschiff ruht im Ursprung des Koordinatensystems.

Bei der Darstellung von Punkten und Bewegungen durch Vektoren soll die x_1-Achse nach Süden zeigen, die x_2-Achse nach Osten und die x_3-Achse in vertikaler Richtung nach oben. Im Folgenden entspricht eine Längeneinheit 100 m in der Realität.

a) Zeichnen Sie die Standorte von U-Boot und Begleitschiff in ein Koordinatensystem ein.
1 LE $\triangleq$ 100 m, der Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung beträgt $0{,}5\cdot\sqrt{2}$ und der Winkel zwischen x_1- und x_2-Achse ist 135°groß.



b) Der Kapitän des U-Boots teilt mit, dass er Kurs Nordost mit gleich bleibender Tiefe fährt.
Geben Sie eine Gleichung einer Geraden g an, die die Fahrtroute des U-Bootes beschreibt.

c) Am Punkt $R(\ 400 \mid 800 \mid -540\ )$ ändert das U-Boot seine Fahrtrichtung und fährt in Richtung des Vektors $\vec{w} = \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ 9 \end{pmatrix}$ weiter.
Bestimmen Sie, um wie viel Grad sich das U-Boot bezüglich der horizontalen Ebene gedreht hat und berechnen Sie den Steigungswinkel bezüglich der horizontale Ebene.
Bestimmen Sie den Punkt T, an dem das U-Boot die Wasseroberfläche erreicht.
Zeichnen Sie in Ihr Koordinatensystem die Bahn des U-Boots zwischen R und T ein.

d) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts S, an dem das U-Boot bezüglich der Fahrt vom Aufgabenteil c) den geringsten Abstand zum Begleitschiff hat.

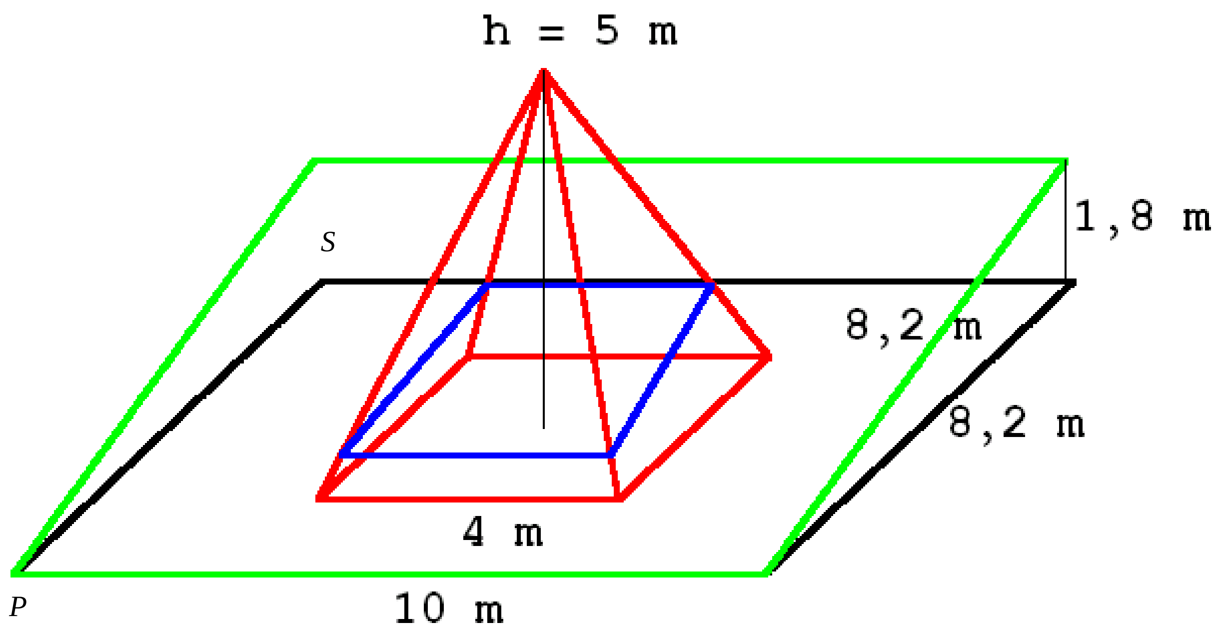
e) Nehmen wir an, das U-Boot hätte in R seine Fahrtrichtung nicht verändert und wäre also weiter in gleichbleibender Tiefe Kurs Nordost gefahren.
Ermitteln Sie den Punkt, an dem es den SONAR-Bereich verlässt.
Das U-Boot fährt mit einer Geschwindigkeit von 10 kn (kn: Knoten; 1 kn = 1 Seemeile pro Stunde; 1 Seemeile = 1852 m). Bestimmen Sie die Zeitdauer, die sich das U-Boot im Sonarbereich befindet.

f) Die *Entfernung* eines Objekts kann mittels SONAR bestimmt werden, wenn man die Zeit misst, die zwischen Ausstrahlung des Ortungssignals und Empfang des reflektierten Signals misst. Die Schallgeschwindigkeit im Wasser beträgt 1,4 km/s.
Beschreiben Sie eine Methode, mit der man die *Geschwindigkeit* eines Objekts ermitteln kann, wenn man z.B. alle Sekunde ein Ortungssignal aussendet.
Erhalten Sie mit Ihrer Methode die tatsächliche Geschwindigkeit des Objekts relativ zum (ruhend gedachten) Wasser? Begründen Sie.

Aufgabe 15 Theaterbühne

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben..

Eine Theaterbühne hat einen rechteckigen Fußboden mit der Breite 10 m und der Tiefe 8,20 m.
Genau in der Mitte steht als Bühnendekoration eine 5 m hohe quadratische Pyramide mit der Bodenseitenlänge von 4 m.
Im zweiten Akt soll aus dramaturgischen Gründen von oben ein zweiter nach hinten ansteigender Bühnenboden senkrecht herabgelassen werden. Die Pyramide soll stehen bleiben.
In der Endlage fällt die vordere Kante dieses zweiten Bodens mit der vorderen Kante des Fußbodens zusammen. Die hintere Kante des zweiten Bodens soll dann 1,8 m höher sein als der Fußboden.
Die Abmessungen des zweiten Bodens stimmen mit denen des Fußbodens überein.



Die Bühnenhandwerker müssen aus dem zweiten Boden ein Viereck aussägen, weil sonst beim Herabsenken die Pyramide im Wege wäre. In der Endlage des zweiten Bodens sollen die Seitenflächen der Pyramide und die Seiten des herausgesägten Vierecks sauber abschließen. Die Dicke des zweiten Bühnenbodens wird hier vernachlässigt.

Der zweite Boden liegt zur Bearbeitung als rechteckige Platte auf dem Boden der Werkstatt, und das herauszutrennende Viereck soll angerissen werden.

a) Berechnen Sie den Neigungswinkel des schrägen Bühnenbodens zur Fußbodenfläche.

b) Ein geeignetes 3-D-Koordinatensystem wird so gewählt, dass der Punkt *P* im Ursprung liegt und der Punkt *S* auf der negativen x_1-Achse. Benennen Sie die wichtigen Punkte und geben Sie deren Koordinaten direkt an (natürlich bis auf die Koordinaten des ausgeschnittenen Vierecks, die ja erst im Laufe der Aufgabe berechnet werden sollen). Zeichnen Sie anschließend die Punkte in das Koordinatensystem ein. 1 LE $\triangleq$ 1 m, der Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung beträgt $0{,}5\cdot\sqrt{2}$ und der Winkel zwischen x_1- und x_2-Achse ist 135° groß.

c) Bestimmen Sie eine Koordinaten- und eine Parameterform für die Ebene, in der der schräge zweite Bühnenboden in seiner Endlage liegt.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des auszusägenden Vierecks, wenn der Bühnenboden sich in der gewünschten Endlage befindet.

e) Mit den in c) berechneten Daten kann der Bühnenbauer so noch nicht viel anfangen, für ihn liegt die 10 m x 8,2 m –Platte flach auf den Boden der Werkstatt.
Machen Sie eine Skizze dieser (zweidimensionalen) Rechteckplatte und bestimmen Sie eine Bemaßung des auszusägenden Vierecks.

Aufgabe 16 Lichtkunst

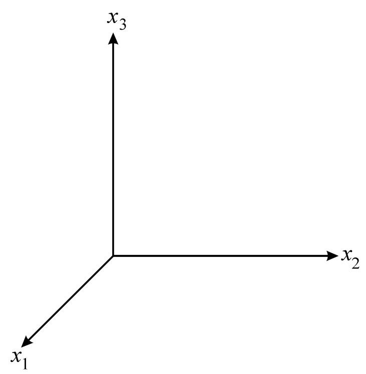
Aufgabe aus der schriftlichen Abiturprüfung Hamburg 2005

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben..

Das neueste Werk eines jungen Künstlers besteht aus einer Skulptur und zwei starren Stromschienen, die von einer Wand (x_1-x_3-Ebene) zur anderen Wand (x_2-x_3-Ebene) verlaufen. Auf diesen Schienen können Lampen bewegt werden, um die Skulptur zu beleuchten. Da die Schienen nur einen Durchmesser von 4 cm haben, soll diese Ausdehnung in den Rechnungen vernachlässigt werden. Die Schienen werden also als Teile von Geraden angesehen. Die beiden Stromschienen sind an den Wänden befestigt und verbinden die Punkte $P_1(10 \mid 0 \mid 3)$ und $Q_1(0 \mid 6 \mid 6)$ bzw. $P_2(8 \mid 0 \mid 5)$ und $Q_2(0 \mid 8 \mid 4)$.

1 Längeneinheit entspricht 1 m.

a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden g_1 und g_2, die den Verlauf der Stromschienen beschreiben und zeichnen Sie die Stromschienen in ein Koordinatensystem ein.
1 LE $\triangleq$ 1 m, der Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung beträgt $0{,}5\cdot\sqrt{2}$ und der Winkel zwischen x_1- und x_2-Achse ist 135° groß.



b) Zeigen Sie, dass sichergestellt ist, dass die Stromschienen sich nicht berühren.

c) In den Punkten $L_1(5 \mid 3 \mid 4{,}5)$ und $L_2(2 \mid 6 \mid 4{,}25)$ befinden sich Lampen, die als punktförmige Lichtquellen betrachtet werden können.
Weisen Sie nach, dass L_1 auf g_1 liegt und L_2 auf g_2, und bestimmen Sie den Abstand der beiden Lampen voneinander.
Zeichnen Sie die Lampenpunkte in das Koordinatensystem ein.

d) Der höchste Punkt der Skulptur sei $S (2 \mid 4 \mid 2{,}25)$. Der Künstler möchte, dass der Schatten dieser Skulpturenspitze noch auf den Fußboden des Raumes (x_1-x_2-Ebene) und nicht auf eine Wand fällt. Zeigen Sie, dass unter dieser Bedingung nur eine der beiden Lampen eingeschaltet werden darf. Bestimmen Sie den Schattenpunkt R auf dem Fußboden des Raumes und zeichnen Sie R und S in das Koordinatensystem ein.

e) An die Stromschienen sollen neue Lampen angebracht werden, die von der Schiene 0,2 m vertikal herunterhängen. Beurteilen Sie, ob dies möglich ist, ohne dass dadurch die freie Beweglichkeit der Lampen auf der gesamten oberen Schiene durch die untere Schiene eingeschränkt wird.

<u>Hinweis:</u> *Skizzieren Sie die vertikale Projektion der Schienen auf die x_1-x_2-Ebene, d.h. die x_3-Komponente ist Null und betrachten Sie den Höhenunterschied der Schienen über dem Schnittpunkt der Projektionsgeraden.*

Aufgabe 17 Konzerthalle

Aufgabe aus der schriftlichen Abiturprüfung Hamburg 2005

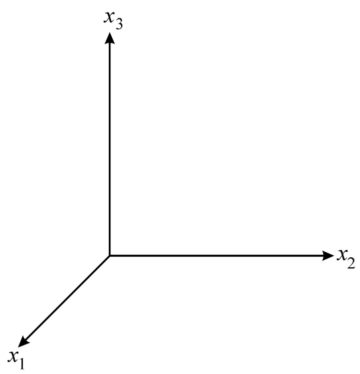
Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben..

Durch die Eckpunkte

O_1 (0 | 0 | 0)	A_1 (3| 0,25 | 0)	B_1 (3 | 2,25 | 0)	C_1 (0 | 2 | 0)
O_2 (0 | 0 | 1,5)	A_2 (3| 0,25 | 0,5)	B_2 (3 | 2,25 | 1)	C_2 (0 | 2 | 2)

sind Daten für die Skizze einer modernen Konzerthalle im kartesischen Koordinatensystem gegeben, 1 Längeneinheit entspricht 10 m.

Die Punkte O_1, A_1, B_1 und C_1 begrenzen die Grundfläche, die Punkte O_2, A_2, B_2 und C_2 sind die Eckpunkte der Dachfläche.



a) Zeichnen Sie die Konzerthalle in ein Koordinatensystem ein.
1 LE $\triangleq$ 10 m, der Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung beträgt $0{,}5\cdot\sqrt{2}$ und der Winkel zwischen x_1- und x_2-Achse ist 135° groß.
Weisen Sie nach, dass die Eckpunkte der Dachfläche in einer Ebene ***E*** liegen, und geben Sie eine Gleichung von ***E*** an.

b) Zeigen Sie, dass das Dach die Form eines Rechtecks hat, aber kein Quadrat ist, und bestimmen Sie das Flächenmaß der Dachfläche.

c) Für Gebäude mit einer Grundfläche von mehr als 700 m^2 muss eine Extra-Grundflächensteuer bezahlt werden. Ist dies für die Konzerthalle der Fall? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Aus Sicherheitsgründen sollen zwei senkrechte Stützpfeiler s_1 und s_2 eingezogen werden. s_1 stützt das Dach im Mittelpunkt der Dachfläche, s_2 wird über dem Punkt P (1 | 1,5 | 0) errichtet.
Beschreiben Sie, wie man die Längen der beiden Pfeiler berechnen könnte, und bestimmen Sie die Länge des Pfeilers s_1.

Aufgabe 18 Hafenturm

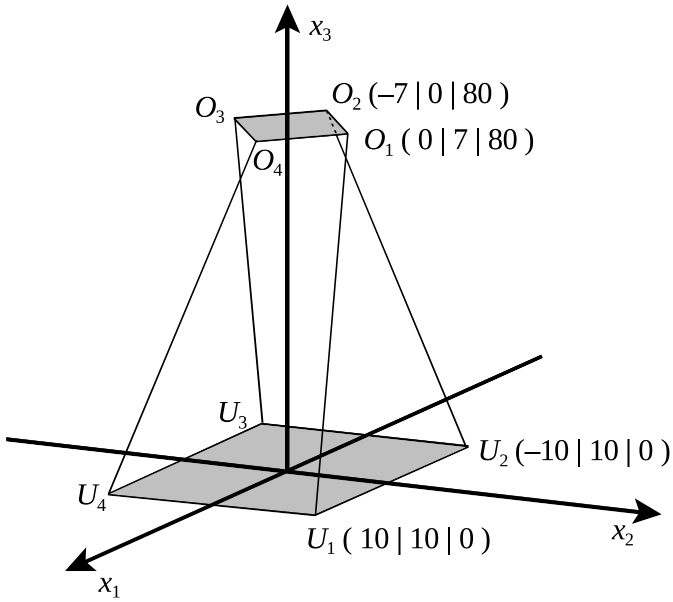
Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben..

Einige Jahre lang war in Hamburg ein Hochhaus am Hafen im Gespräch, dessen grundsätzliche architektonische Idee in der nebenstehenden Zeichnung wiedergegeben ist, die allerdings in der x_3-Richtung nicht maßstäblich ist.
Diese Idee bildet die Grundlage für diese Aufgabe.

Die Bodenfläche und das Dach bilden je ein waagerechtes Quadrat.

Die beiden Quadrate sind gegeneinander um 45° gedreht.

Die Mittelpunkte der beiden Quadrate sind senkrecht übereinander (auf der x_3-Achse).



In der Zeichnung sind die vier Eckpunkte der Bodenfläche mit U_1, U_2, U_3 und U_4 angegeben, die der Dachfläche mit O_1, O_2, O_3 und O_4. Für je zwei dieser Punkte sind die Koordinaten gegeben.

a) Die Gerade g_1 verbindet die Punkte U_1 und O_1, die Gerade g_2 die Punkte U_2 und O_2 und analog sind die Geraden g_3 und g_4 definiert.

   Berechnen Sie zunächst eine der zugehörigen Geradengleichungen und geben Sie dann unter Ausnutzung der Symmetrie auch die anderen drei an.

   Berechnen Sie die Länge einer der vier (gleichlangen) Kanten des Gebäudes.

b) In verschiedenen Höhen h haben die Stockwerke natürlich viereckige waagerechte Bodenflächen.

   Bestimmen Sie für $h = 40$ die vier Punkte des entsprechenden Vierecks und begründen Sie, dass dieses Viereck jedenfalls ein Quadrat ist.

   Begründen Sie, dass dies für jede der Bodenflächen gelten muss, also für jedes (zulässige) h.

c) Ermitteln Sie den Winkel, um den die Bodenfläche des Geschosses mit der Bodenhöhe $h = 40$ gegenüber dem Grundgeschoss gedreht ist.

d) Untersuchen Sie, ob die Bodenflächen zweier aufeinander folgender Geschosse immer um den gleichen Winkel weitergedreht sind, wenn die Höhenabstände zwischen zwei Geschossen immer gleich sind.

   Begründen Sie Ihr Ergebnis.

1.1 Kurs auf erhöhtem Niveau

Aufgabe 1 Insektenpopulation

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 und durch die Umstellung von Leistungskursen auf Kurse erhöhten Niveaus werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben. Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

In den Tropen legen die Weibchen einer in Deutschland unbekannten Insektenpopulation jedes Jahr kurz vor Beginn der Regenzeit jeweils 90 Eier und sterben bald darauf. Aus den Eiern schlüpfen wenig später Larven. Der Larvenbestand nimmt von Jahr zu Jahr durch Witterungseinflüsse, aber auch durch den Verzehr durch andere Tiere, ab. Im dritten Jahr verpuppen sich die Larven, und aus einem Teil der Puppen entwickeln sich im darauf folgenden Jahr Weibchen, die wieder 90 Eier legen. Die jährliche Entwicklung dieser Insektenpopulation wird durch die nachstehende Populationsmatrix A beschrieben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Stellen Sie das beschriebene Modell mit einem Übergangsgraphen dar und beschreiben Sie die biologischen Bedeutungen der von Null abweichenden Koeffizienten der Matrix A. **15 P**

c) In der folgenden Tabelle ist eine Anfangspopulation $\vec{p}_0$ der oben genannten Insekten gegeben, die jeweils ihrem Alter entsprechend gegliedert sind:

Alter	Name	Anzahl
1 Jahr	Larven 1	9000
2 Jahre	Larven 2	3000
3 Jahre	Puppen	900
4 Jahre	Weibchen	700

- Bestimmen Sie den Populationsvektor nach einem Jahr ($\vec{p}_1$).
- Geben Sie an, wie Sie die Population nach 4 Jahren unter ausschließlicher Verwendung des Anfangspopulationsvektors $\vec{p}_0$ und der Matrix A berechnen könnten. **10 P**

c) Betrachten Sie folgende Übersicht. Dabei ist die Zeit in Jahren angegeben, der Populationsvektor besteht aus den Individuen der in b) genannten Teilgruppen, und die Gesamtpopulation ist die Summe der Individuen in den Teilgruppen, also <u>ohne die männlichen Insekten</u>.

Zeit	Populationsvektor	Gesamtpopulation (Summe)
0	$\vec{p}_0$ = (9000 | 3000 | 900 | 700)	13 600
1	$\vec{p}_1$ = (63000 | 3000 | 1000 | 90)	67 090
2	$\vec{p}_2$ = (8100 | 21000 | 1000 | 100)	30 200
3	$\vec{p}_3$ = (9000 | 2700 | 7000 | 100)	18 800
4	$\vec{p}_4$ = $\vec{p}_0$ = (9000 | 3000 | 900 | 700)	13 600

- Skizzieren Sie die jeweiligen Werte der Gesamtpopulation in anliegendes Koordinatensystem.
- Beschreiben Sie, wie sich die Populationsvektoren und damit die Gesamtpopulation in den kommenden Jahren nach dem Modell entwickeln werden, und skizzieren Sie entsprechend den weiteren Verlauf der Gesamtpopulation bis zum Jahr 10.
- Bestimmen Sie den Populationsvektor nach 25 Jahren ($\vec{p}_{25}$) und den Populationsvektor im Jahr vor Beginn der Beobachtung ($\vec{p}_{-1}$) (bei Verwendung des bisherigen Modells). **20 P**

d) Die in c) betrachtete Eigenart des verwendeten Modells kann von der Matrix abhängen, aber auch von der Startpopulation.

- Geben Sie begründet die Eigenschaft der Matrix *A* an, die unabhängig von der Startpopulation zu Ergebnissen wie in c) beschrieben führt.
- Untersuchen Sie, ob es Populationsvektoren ($\vec{p}_x$) gibt, die sich jährlich wiederholen, und bestimmen Sie gegebenenfalls einen dieser Populationsvektoren. **15 P**

Zu den eben angesprochenen Ursachen für bestimmte Eigenschaften der Population folgt jetzt ein rein mathematisches Beispiel:

Gegeben ist eine allgemeine Populationsmatrix *P*: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix}$; $a \in \mathbb{N}^*$ und $0 < b, c, d < 1$.

e) Eine quadratische Matrix *M* heißt zyklische Matrix, wenn es eine natürliche Zahl *n* gibt, so dass gilt: $M^n = E$.

- Zeigen Sie, dass die obige Populationsmatrix *P* für $n = 2$ und für $n = 3$ nicht zyklisch sein kann.
- Ermitteln Sie die Bedingungen für *a*, *b*, *c* und *d*, damit gilt: $P^4 = E$. **15 P**

Die folgenden beiden Aufgaben beziehen sich wieder auf das durch die Matrix A beschriebene Modell, das jetzt neuen Situationen angepasst werden soll:

f) Durch eine spürbare Veränderung der Trocken- und Regenzeiten, die von Wissenschaftlern auf den allseits diskutierten Klimawandel zurück geführt wird, halbiert sich seit einigen Jahren bei sonst gleich bleibenden Überlebensraten die Anzahl der von den Weibchen gelegten Eier.

- Bestimmen Sie die neue Populationsmatrix A_{neu} .
- Es gilt: $A_{neu}^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

  Interpretieren Sie, wie sich diese Veränderung auf die langfristige Entwicklung der Insektenpopulation auswirkt. **10 P**

g) Inzwischen lässt sich sogar feststellen, dass die schon erwähnten Veränderungen der Trocken- und Regenzeiten nicht nur die Anzahl der von den Weibchen gelegten Eier halbiert hat, sondern auch dazu geführt hat, dass ein Zwölftel der Larven 1 sich bereits verpuppt, also eine Generation überspringt. Damit entwickelt sich nur noch ein Viertel der Larven 1 zu Larven 2, also wie bisher.

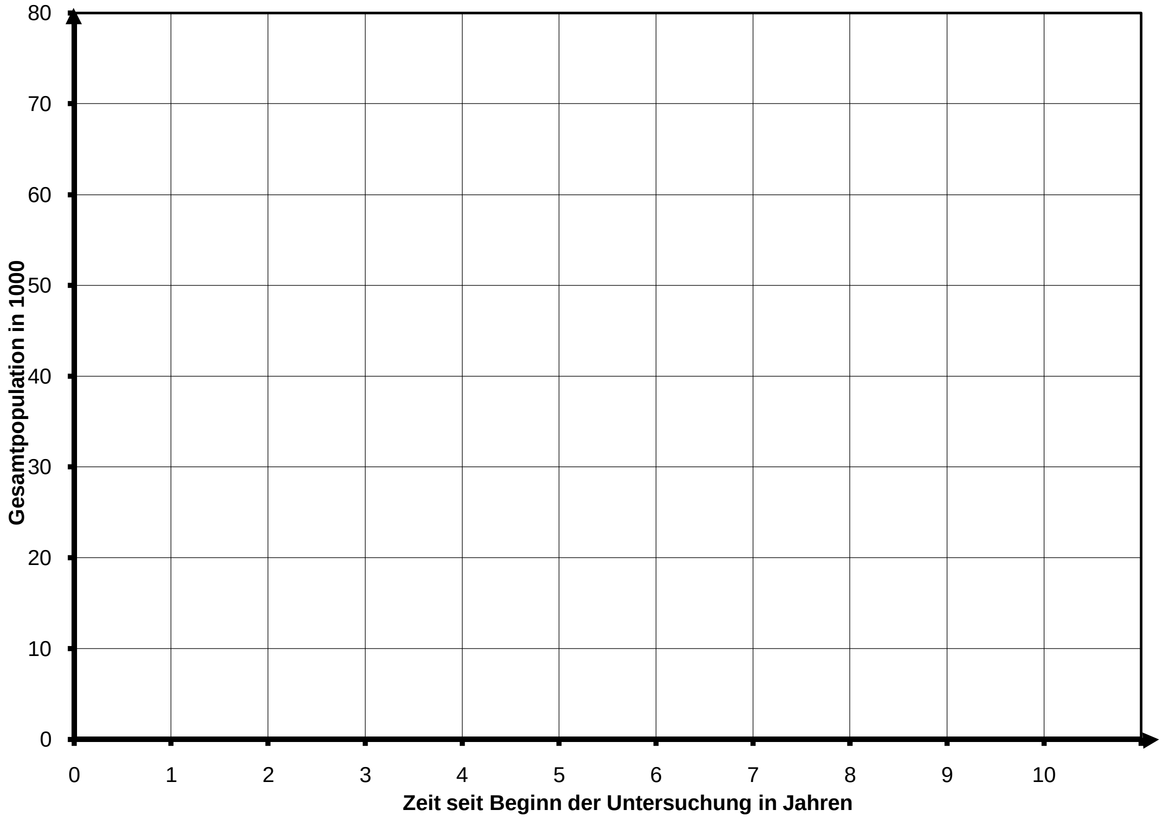
- Bestimmen Sie die neue Populationsmatrix A_{neu2} .
- Begründen Sie, warum bei dieser Populationsentwicklung die Bestimmung von Vorjahresbeständen nicht zu jedem beliebigen Populationsvektor möglich ist, und interpretieren Sie diese Fälle im Sachkontext der Aufgabe. **15 P**

Anlage zur Aufgabe „Insektenpopulation“

Bitte beachten Sie:

In x-Richtung wird die Zeit der Beobachtung in Jahren aufgetragen, „0“ steht für den Beginn der Beobachtung der Insektenpopulation.

In y-Richtung wird jeweils die Anzahl der Gesamtpopulation (als Summe der Teilgruppen) in 1000 aufgetragen.



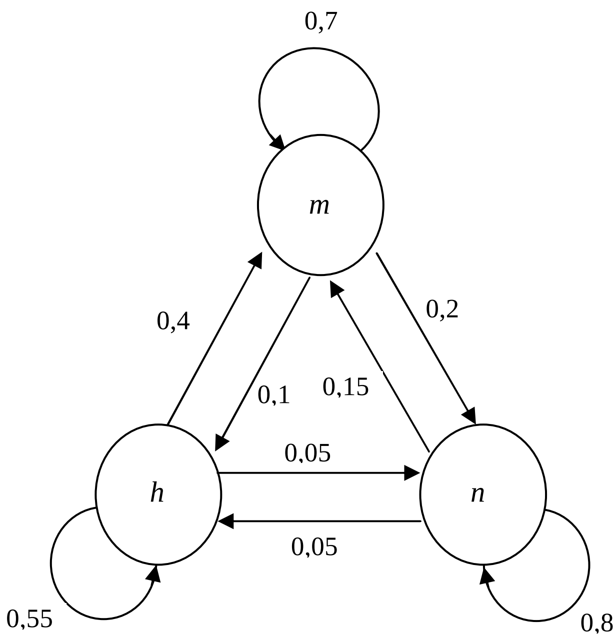
Aufgabe 2 Einkommensgruppen

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 und durch die Umstellung von Leistungskursen auf Kurse erhöhten Niveaus werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben.
Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

Die Familien eines fiktiven Landes werden einer der drei angegebenen Einkommensgruppen zugeordnet. In statistischen Erhebungen hat man festgestellt, dass Kinder der Eltern einer bestimmten Einkommensgruppe nach ihrer Ausbildung auch einer anderen Einkommensgruppe angehören können.
Es wird angenommen, dass 10 % der Einkommensgruppe hoch (*h*), 60 % der Einkommensgruppe mittel (*m*) und 30 % der Einkommensgruppe niedrig (*n*) angehören. Vereinfachend wird angenommen, dass jede Familie genau zwei Kinder hat und in der nächsten Generation jedes Kind mit einem Kind einer anderen Familie wieder eine Familie gegründet hat.

a) Es werden 4200 Familien nach repräsentativen Grundsätzen ausgewählt.
Berechnen Sie die Anfangsverteilung $\vec{p}_0$ der ausgewählten Bevölkerungsgruppe. **5 P**

Die nachfolgende Abbildung gibt für jede Einkommensgruppe an, welche Anteile dieser Gruppe von einer Generation zur nächsten die Gruppe wechseln bzw. in der Gruppe bleiben.



$$P=\begin{pmatrix}\frac{11}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20}\\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10} & \frac{3}{20}\\ \frac{1}{20} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}=\frac{1}{20}\cdot\begin{pmatrix}11 & 2 & 1\\ 8 & 14 & 3\\ 1 & 4 & 16\end{pmatrix}$$

b) Begründen Sie anhand des Graphen, dass dieser Prozess durch die Übergangsmatrix *P* beschrieben werden kann und berechnen Sie die Einkommensverteilung $\vec{p}_1$ in der nächsten Generation.
20 P

c) Ermitteln Sie die Einkommensverteilung $\vec{p}_{-1}$ der Elterngeneration der ersten Gruppe.
Setzen Sie dabei voraus, dass obiges Modell auch schon bei dieser Generation galt. **20 P**

Nach einigen Jahren stellt man fest, dass Eltern der hohen Einkommensgruppe durchschnittlich nur ein Kind bekommen, in der mittleren Einkommensgruppe dagegen zwei Kinder und in der niedrigen Einkommensgruppe drei Kinder geboren werden.

d) Ermitteln Sie die modifizierte Übergangsmatrix und begründen Sie Ihre Vorgehensweise. **15 P**

(*Hinweise:*
Überlegen Sie, welche Matrixelemente jeweils die Entwicklung einer Gruppe repräsentieren.

Kontrollergebnis: $P_{Mod} = \begin{pmatrix} \frac{11}{40} & \frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & \frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 4 & 3 \\ 8 & 28 & 9 \\ 1 & 8 & 48 \end{pmatrix}$)

e) Berechnen Sie die Einkommensverteilung in den nächsten beiden Generationen.
Vergleichen Sie das modifizierte Modell hinsichtlich der Entwicklung der Gesamtzahl der Familien mit dem ursprünglichen Modell. **20 P**

Bei einigen Populationsmatrizen A erhält man die Einheitsmatrix E durch Mehrfachmultiplikation der Matrix A mit sich selbst, also $A^n = E$ *für bestimmte* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Die Einheitsmatrix E erhält man aber auch durch Multiplikation der Matrix A mit ihrer „inversen Matrix" A^{-1}, sofern diese existiert, also $A \cdot A^{-1} = E$.

Gegeben ist nun die allgemeine Populationsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$.

f) Bestimmen Sie die Matrizen A^2 und A^3 und ermitteln Sie die Bedingungen für a, b und c, damit gilt: $A^3 = E$.
Interpretieren Sie für diesen Fall die Bedeutung der Matrix A^2. **15 P**

g) Interpretieren Sie dieses Phänomen für die Entwicklung einer zugehörigen Population. **5 P**

Aufgabe 3 Vegetation

Quelle: Wiskunde A (1. Termin), Aufgabe 3, 1994, zum Teil veränderte Zahlenwerte

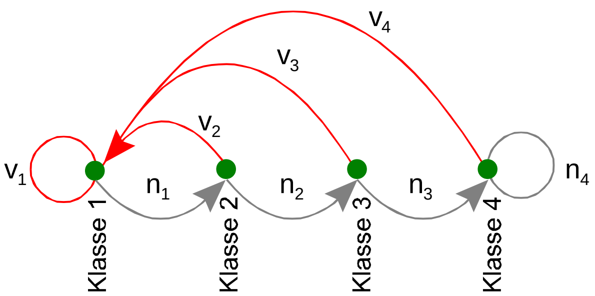
Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 und durch die Umstellung von Leistungskursen auf Kurse erhöhten Niveaus werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben.

In der Übergangszone zwischen Wüstenklima und gemäßigtem Klima an der Westküste Nordamerikas trifft man auf einer Fläche von ca. 2000 km² eine Vegetation immergrüner Sträucher an. Man bezeichnet das als „Chaparral“. Die Brennbarkeit dieser Pflanzen ist sehr von ihrem Alter abhängig. Wegen der großen Mengen verdorrten Materials brennen vor allem die älteren Pflanzen sehr leicht. Brände haben abgesehen von ihrer Gefahr für Mensch und Tier auch eine sehr nützliche Funktion: anstelle der verbrannten Sträucher wachsen ziemlich schnell junge, kräftige Pflanzen aus dem Boden. Spontane Brände werden daher nicht immer gelöscht. Die Verjüngung sorgt immer wieder dafür, dass keine großen Gebiete mit dürrem Material entstehen, die durch Brände bis hin zu einer Katastrophe Schaden nehmen könnten.

Diese Situation lässt sich in einem Modell darstellen, bei dem man von folgenden Annahmen ausgeht:

- Die Vegetation wird entsprechend ihrem Alter in vier Klassen eingeteilt:
  Klasse 1: 0 – 10 Jahre
  Klasse 2: 10 – 20 Jahre
  Klasse 3: 20 – 30 Jahre
  Klasse 4: 30 Jahre und älter
- Als Maß für den Umfang einer Klasse nimmt man nicht die Anzahl der Pflanzen, sondern die Fläche des durch diese Klasse bedeckten Gebietes.
- Bei jeder Klasse bleibt der prozentuale Anteil, der in jeweils 10 Jahren verbrennt, konstant.
- Die Gesamtfläche des Gebietes beträgt stets 2000 km².

Für dieses Modell kann der folgende Graph gezeichnet werden:



Bezeichnungen:

v_i = Anteil von Klasse *i*, der verbrennt ($v_i < 1$)

n_i = Anteil von Klasse *i*, der nicht verbrennt ($n_i < 1$)

a) Erläutern Sie, welche Bedeutung die v_i und n_i in diesem Graphen haben.

Stellen Sie gemäß dem Graphen bzw. dem oben beschriebenen Modell eine Populationsmatrix (Leslie-Matrix) *M* auf und begründen Sie Ihr Vorgehen.

b) Aus nebenstehender Tabelle können Sie entnehmen, wie groß die Fläche in km² ist, die jede Klasse zum Zeitpunkt $t = 0$ *(jetzt)* und $t = 1$ *(10 Jahre später)* bedeckt.

Berechnen Sie v_1, v_2, n_1 und n_2 .

Klasse	$t = 0$	$t = 1$
1	600	424
2	400	594
3	300	392
4	700	590

c) Die Leslie-Matrix für die in b) genannten Zahlen lautet: $M = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,02 & 0,2 & 0,5 \\ 0,99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,5 \end{pmatrix}$

Über die Gleichung $M \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,02 & 0,2 & 0,5 \\ 0,99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \\ 300 \\ 700 \end{pmatrix}$

werden in b) Flächengrößen der jeweiligen Klassen berechnet.
Diesen Vorgang kann man sich auch als Funktion mit mehreren Variablen vorstellen.
Beschreiben Sie diese Funktion *f*. Wie sieht das Urbild *(die Definitionsmenge)* aus, wie das Bild *(die Wertemenge)* ?

d) Von der Matrix *M* aus Aufgabenteil a) wurden mit dem Computer die Potenzen M^2 , M^3 , M^4 ... usw. berechnet. Man stellt fest, dass die Matrizen M^n sich für größere Werte von *n* kaum noch voneinander unterscheiden. So stimmen die auf vier Nachkommastellen gerundeten Matrizen M^n für $n \geq 30$ mit der folgenden Matrix überein:

$$\begin{pmatrix} 0,2216 & 0,2216 & 0,2216 & 0,2216 \\ 0,2194 & 0,2194 & 0,2194 & 0,2194 \\ 0,2150 & 0,2150 & 0,2150 & 0,2150 \\ 0,3440 & 0,3440 & 0,3440 & 0,3440 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich, dass in jeder Zeile die Zahlen (gerundet) übereinstimmen.
Was kann man daraus für die Chaparral-Vegetation folgern?

e) In der Praxis führen die Verwalter des Chaparral auch noch ein kontrolliertes, gewolltes Abbrennen von Teilen der Vegetation, die älter als 10 Jahre ist, durch.
In unserem Modell nehmen wir zur Vereinfachung an, dass das Abbrennen immer unmittelbar nach Ablauf von 10 Jahren auf einmal stattfindet. Nehmen wir weiter an, dass stets 2 % von Klasse 2, sowie 3 % von Klasse 3 und 7 % von Klasse 4 abbrennen. Dieser Vorgang des gewollten Abbrennens kann ebenfalls durch eine 4×4 - Matrix beschrieben werden, in der die oben genannten Prozentzahlen benutzt werden.

Stellen Sie diese Matrix *N* auf und erklären Sie Ihr Vorgehen.

Beschreiben Sie den gesamten zehnjährigen Vorgang des spontanen und gewollten Abbrennens mithilfe der Matrizen *N* und *M*.
Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 Industriehallen

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 und durch die Umstellung von Leistungskursen auf Kurse erhöhten Niveaus werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben.

Eine Firma bietet Industriehallen aus normierten Betonstahlfertigteilen an. Zur Herstellung dieser Fertigteile benötigt sie die Rohstoffe Kies (R_1), Zement (R_2), Stahl (R_3) und Wasser (R_4).
Aus den Rohstoffen werden folgende Zwischenprodukte hergestellt: Wandplatten (Z_1), Stützen (Z_2) und Träger (Z_3). Aus diesen Bauteilen können zwei Hallentypen, H_1 und H_2, montiert werden.

Die folgenden Tabellen geben an, wie viele Tonnen der Rohstoffe zur Herstellung je einer Tonne der Zwischenprodukte benötigt werden bzw. wie viele Tonnen der jeweiligen Zwischenprodukte pro Hallentyp benötigt werden.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	0,7	0,55	0,5
R_2	0,1	0,2	0,2
R_3	0,1	0,15	0,2
R_4	0,1	0,1	0,1

	H_1	H_2
Z_1	240	300
Z_2	80	120
Z_3	80	180

Die Kosten in GE pro Tonne betragen für die jeweiligen Rohstoffe:

Rohstoffe	R_1	R_2	R_3	R_4
GE / Tonne	27	190	600	3

Die Fertigungskosten in GE pro Tonne betragen für die jeweiligen Zwischenprodukte:

Zwischenprodukte	Z_1	Z_2	Z_3
GE / Tonne	80	100	120

Die Endmontagekosten betragen 40 000 GE für Hallentyp 1 und 48 000 GE für Hallentyp 2.

a) Beschreiben Sie die Verflechtungen mit einem Graphen.

Berechnen Sie die Matrix A_{RH}, aus der die Anzahl der Tonnen abgelesen werden kann, die von den einzelnen Rohstoffen pro Hallentyp verarbeitet werden.

Geben Sie an, wie viele Tonnen Kies (R_1) für Hallentyp 1 und wie viel Tonnen Stahl (R_3) für Hallentyp 2 benötigt werden.

b) Bestimmen Sie, wie viel jeweils die Herstellung einer fertig montierten Halle vom Typ H_1 und vom Typ H_2 kostet.

c) Im Lager sind noch 1 712 Tonnen Kies (R_1), 424 Tonnen Zement (R_2) und 384 Tonnen Stahl (R_3) vorrätig. Wasser ist in ausreichender Menge vorhanden.

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, die Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 durch Herstellung von Zwischenprodukten restlos aufzubrauchen, und ermitteln Sie, wie viele Tonnen der einzelnen Zwischenprodukte mit diesen Lagerbeständen produziert werden können. Bestimmen Sie zusätzlich, wie viel Wasser zur Herstellung dieser Zwischenprodukte nötig ist.

d) Bestimmen Sie, wie viele Hallen vom Typ1 sich aus den Zwischenprodukten aus Teil c) montieren lassen, wenn man keine Halle vom Typ 2 montiert, und bestimmen Sie, wie viele Hallen vom Typ2 sich aus den Zwischenprodukten aus Teil c) montieren lassen, wenn man keine Halle vom Typ 1 montiert.
Ermitteln Sie, ob man die Anzahl der herstellbaren Hallen vergrößern könnte, wenn man Hallen beiden Typs montieren würde.

e) Ein Mitarbeiter der Firma behauptet, dass jeder Vorrat der Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 bei ausreichendem Wasservorrat restlos für die Herstellung von Zwischenprodukten aufgebraucht werden kann.
Er argumentiert folgendermaßen:
Wenn $\vec{v}$ der Vorratsvektor ist, können die Vorräte genau dann restlos aufgebraucht werden, wenn folgende Gleichung lösbar ist:

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,55 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,15 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{v}$$

Dies ist für jeden Vorratsvektor $\vec{v}$ der Fall, da die Spaltenvektoren der Matrix linear unabhängig sind.
Beurteilen Sie, ob der Mitarbeiter Recht hat.

Aufgabe 5 Libellenentwicklung

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 und durch die Umstellung von Leistungskursen auf Kurse erhöhten Niveaus werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben.

In dieser Aufgabe sollen die Anzahlen der Individuen in den verschiedenen Entwicklungsstadien einer Libellenart betrachtet werden. Dabei werden folgende Annahmen zu Grunde gelegt.

Eine junge Libelle legt 90 Eier, von denen sich 5 % zu Junglarven weiterentwickeln. 50 % der Junglarven entwickeln sich zu Altlarven (Nymphen), während 5 % der Junglarven das Altlarven-Stadium überspringen und zu jungen Libellen werden. Von den Altlarven entwickeln sich 30 % zu jungen Libellen. 25 % der jungen Libellen überleben eine Generation und legen als alte Libellen immerhin noch 40 Eier, deren Entwicklungsfähigkeit denen der Junglibellen entspricht. Die fehlenden Prozentanteile entsprechen jeweils einem Nichtüberleben dieses Stadiums. Alle alten Libellen sterben in der nächsten Generation.

a) Geben Sie eine graphische Darstellung dieses Lebenszyklus' an und ermitteln Sie daraus eine Populationsmatrix P.

(Benutzen Sie abkürzend: $\begin{cases} A = \text{Anzahl der jungen Libellen} \\ B = \text{Anzahl der alten Libellen} \\ C = \text{Anzahl der Eier} \\ D = \text{Anzahl der Junglarven} \\ E = \text{Anzahl der Altlarven} \end{cases}$, und damit $\vec{v} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{pmatrix}$

als Populationsvektor.)

b) In einem Teich sind zu Beginn 25 Junglibellen, 5 Altlibellen, 6000 Eier, 200 Junglarven und 80 Altlarven vorhanden.

Berechnen Sie die Anzahlen der einzelnen Entwicklungsstadien für die nächsten zwei Generationen.

c) Bestimmen Sie eine Startpopulation, die sich in jeder Generation reproduziert.

Beschreiben Sie das Populationsmodell geeignet als Funktion und interpretieren Sie das eben berechnete Ergebnis *(Startpopulation, die sich in jeder Generation reproduziert)* mithilfe dieser Funktion.

d) Ermitteln Sie eine Startpopulation, aus der nach einer Generation 11 Junglibellen, 5 Altlibellen, 2000 Eier, 40 Junglarven und 20 Altlarven geworden sind.

Durch einen besonderen Umwelteinfluss werden die Anzahlen der Larven (jung und alt) ad hoc halbiert, während die Eier und die Libellen davon unbeeinflusst bleiben.

e) Geben Sie begründet eine Matrix H an, die die Halbierung der Larvenanzahlen beschreibt.

f) Dieser besondere Umwelteinfluss tritt periodisch und nur alle 10 Generationen auf.

Beschreiben Sie mit den Matrizen P und H, welcher Populationsvektor $\vec{v}_E$ sich nach 10 Generationen aus einer Anfangspopulation $\vec{v}_A$ ergibt, wenn die Halbierung der Larven am Ende des Beobachtungszeitraumes auftritt.

Beurteilen Sie, ob das Ergebnis, also der Populationsvektor $\vec{v}_E$, davon beeinflusst wird, dass die Halbierung der Larvenanzahlen zu Beginn, in der Mitte oder am Ende eines Beobachtungszeitraumes von 10 Generationen auftritt.

Aufgabe 6 Geckos

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 und durch die Umstellung von Leistungskursen auf Kurse erhöhten Niveaus werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben.

Geckos gehören zur Familie der Schuppenkriechtiere. Sie bevölkern seit etwa 50 Millionen Jahren die Erde und haben sich im Laufe ihrer Entwicklung weltweit ausgebreitet. Aufgrund ihrer hervorragenden Anpassungsfähigkeit haben Geckos die verschiedensten Lebensräume erobert und sind sowohl in den gemäßigten Zonen als auch in den Wüsten und den Tropen anzutreffen.

Im Folgenden wird eine spezielle Art von Geckos in drei verschiedenen Regionen *A, B, C* in den Tropen untersucht. Die drei Regionen bieten den Geckos ganz unterschiedliche Lebensbedingungen, die sich durch besondere Vegetationsformen, Temperatur- und Niederschlagsvariabilität auszeichnen. Vereinfachend wird angenommen, dass sich die Geckos in jeder Region in zwei Altersklassen aufteilen lassen: Jungtiere (J) und Alttiere (S).

Die Entwicklung der Geckos in den Regionen lässt sich – unter Vernachlässigung von Wanderbewegungen von einer Region in die anderen – für einen Beobachtungszeitraum von einem Jahr näherungsweise folgendermaßen modellieren:

Region A: 30 % der Alttiere bekommen durchschnittlich einen Nachfahren.
90 % der Jungtiere verbleiben in ihrer Klasse, 10 % Jungtiere wechseln die Altersklasse.
Die Sterblichkeit der Alttiere beträgt 30 %.

Region B: 20 % der Alttiere und 35 % der Jungtiere haben durchschnittlich einen Nachfahren.
55 % der Jungtiere verbleiben in ihrer Klasse, 40 % der Jungtiere erreichen das Alttieralter. Die Sterblichkeit der Alttiere beträgt 30 %.

a) Ordnen Sie begründet die Matrizen *K* und *L* den Gecko-Entwicklungen in den beiden Regionen *A* und *B* zu.

$$K = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Stellen Sie für die Region *A* und *B* die Entwicklungsmodelle mit je einem Graphen dar. **(15P)**

Ein Forscherteam junger Biologen möchte die Entwicklung der Geckos in Abhängigkeit von den Umweltbedingungen untersuchen. Dazu steckt es in den Regionen *A* und *B* Gebiete ab, in denen sich zum Untersuchungszeitpunkt genau 1000 Jungtiere und 2000 Alttiere aufhalten.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Populationsmatrizen für beide Gebiete die Anzahl der Geckos jeder Klasse nach einem und nach zwei Jahren.

Bestimmen Sie für beide Gebiete den Bestand nach 20 Jahren mit Hilfe der Matrizen K^{10} bzw. L^{10}. Es gilt:

$$K^{10} \approx \begin{pmatrix} 1,729 & 0,864 \\ 1,729 & 0,865 \end{pmatrix} \qquad L^{10} \approx \begin{pmatrix} 0,752 & 0,745 \\ 0,248 & 0,255 \end{pmatrix}$$ **(20P)**

Im folgenden Aufgabenteil geht es jeweils um die Größe der gesamten Geckopopulation, also um die Summe der Jung- und Alttiere. Neben den Gebieten *A* und *B* wird außerdem ein Gebiet in einer Region *C* betrachtet. Die Entwicklung der Geckozahlen in diesem Gebiet ist in folgender Tabelle dargestellt.

Zeit t	**Populationsvektoren für Gebiet C:**
0	$\vec{p}_0$ = (4000 | 2000)
1	$\vec{p}_1$ = (2800 | 2200)
2	$\vec{p}_2$ = (2120 | 2100)
10	$\vec{p}_{10}$ = (526 | 673)
20	$\vec{p}_{20}$ = (111 | 143)

c) Vergleichen Sie anhand Ihrer Ergebnisse und unter Berücksichtigung der tabellierten Werte die Entwicklungen der Geckozahlen in allen drei Gebieten miteinander.

Bestimmen Sie mit Hilfe der Wertepaare für $t = 0$ und $t = 20$ für jedes Gebiet eine Exponentialfunktion vom Typ $f(t) = c \cdot a^t$ zur diskreten Beschreibung der Gecko-Entwicklung. Dabei soll *f(t)* die Gesamtzahl der Geckos in Abhängigkeit von der Zeit *t* in Jahren darstellen.

Bestimmen Sie, nach wie vielen Jahren in den Gebieten B und C gleich viele Geckos leben. **(20P)**

Wanderbewegungen zwischen den Regionen blieben bisher unberücksichtigt. Tatsächlich wandern aber jährlich 5 % der Alttiere von Region B nach Region A. 10 % der Jungtiere wandern von Region A nach Region B über. Die bereits erwähnte hohe Anpassungsfähigkeit der Geckos führt dazu, dass sich die Tiere in ihrer Populationsentwicklung sofort den ansässigen Geckos anpassen.

d) Die Population in beiden Regionen wird durch den Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} J_A & S_A & J_B & S_B \end{pmatrix}^T$ angeben. Leiten Sie für die neue Situation einen Übergangsgraphen her.

Ermitteln Sie eine modifizierte Übergangsmatrix *P* und begründen Sie Ihre Vorgehensweise. **(20P)**

Im letzten Aufgabenteil wird erneut die Matrix *L* aus Teil a) betrachtet. Sie lässt sich mit einer Transformationsmatrix *T*, deren „inverser Matrix“ T^{-1}, sofern diese existiert, und einer Diagonalmatrix *D* schreiben als $L = T \cdot D \cdot T^{-1}$ $(*)$.

e) Bestätigen Sie, dass mit $T = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \begin{pmatrix} -0,25 & 0,75 \\ 0,25 & 0,25 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Gleichung $(*)$ erfüllt wird.

- Leiten Sie mit der Gleichung (*) eine Formel für L^n her. Verwenden Sie dabei die Eigenschaft inverser Matrizen: $T^{-1} \cdot T = E$, wobei *E* die Einheitsmatrix ist.
- Begründen Sie, dass sich die Potenzen L^n selbst für große n mit dieser Formel auch ohne Computereinsatz recht leicht berechnen lassen. Berechnen Sie mit Ihrer Formel nun selbst die Matrix L^{10}, die Ihnen in Teil b) vorgegeben war. **(25 P)**

Aufgabe 7 Kosten und Gewinne

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 und durch die Umstellung von Leistungskursen auf Kurse erhöhten Niveaus werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben.

Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 her und aus diesen die Endprodukte E_1, E_2 und E_3.
Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist folgenden Tabellen zu entnehmen.

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
R_1	a	b	0	0
R_2	0	c	d	0
R_3	0	0	e	0
R_4	0	0	f	g

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	0	0
Z_2	1	4	0
Z_3	0	3	1
Z_4	1	0	2

	E_1	E_2	E_3
R_1	5	12	0
R_2	2	11	1
R_3	0	12	4
R_4	2	3	5

a) Geben Sie die zugehörigen Matrizen A_{RZ} , A_{ZE} und A_{RE}.
Berechnen Sie die fehlenden Werte der Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix.

b) Wegen eines Umbaus soll das Rohstofflager weitgehend geräumt werden. Dabei sollen zwei Bedingungen erfüllt werden:
i) Die Lagerbestände von R_2 und R_3 sollen vollständig aufgebraucht werden.
ii) Von R_1 und R_4 soll gleich viel übrig bleiben.
Der Lagerbestand beträgt 1 000 ME von R_1, 720 ME von R_2, 960 ME von R_3 und 1 000 ME von R_4.
Untersuchen Sie, ob die beiden obigen Bedingungen erfüllt sind, wenn 80 ME von E_1, 40 ME von E_2 und 120 ME von E_3 produziert werden.

c) Der Betrieb erhält einen Auftrag über 200 ME von E_1. Bestimmen Sie die Gesamtkosten für diesen Auftrag, wenn folgendes gilt:
i) Die Rohstoffkosten in GE pro ME betragen: 1 für R_1, 3 für R_2, 4 für R_3 und 2 für R_4.
ii) Die Fertigungskosten in GE je ME eines Zwischenprodukts betragen:
1 für Z_1, 1 für Z_2, 3 für Z_3 und 4 für Z_4.
iii) Die Fertigungskosten je ME des Endproduktes E_1 betragen 2 GE.
iv) Die Fixkosten betragen 400 GE.

d) Durch eine Änderung im Produktionsablauf werden die Fertigungskosten für die Zwischenprodukte und für die Endprodukte voneinander abhängig. Mit der Einschränkung: $0 < x < 2$ gilt:

Kosten	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
GE/ME	$2 - x$	$2 - x$	$4 - x$	$5 - x$

Kosten	E_1	E_2	E_3
GE/ME	$3 - x$	$4 - x$	$5 - x$

Es werden 200 ME von E_1, 100 ME von E_2 und 300 ME von E_3 bestellt.
Ermitteln Sie unter der Voraussetzung, dass sich die Rohstoffkosten [Teil c) i)] nicht ändern und die Fixkosten 1000GE betragen, den Wert für x, für den die Gesamtkosten für diesen Auftrag 32.000 GE betragen.

e) Die Endprodukte können nach einer weiteren Umstellung aus produktionsspezifischen Gründen nur im Verhältnis $E_1 : E_2 : E_3 = 2 : 1 : 3$ produziert werden.
Eine Produktion besteht demnach aus $2t$ ME von E_1, t ME von E_2 und $3t$ ME von E_3, mit $(100 < t < 1\,200)$. Die Fixkosten betragen 4000 GE pro Produktion.
Für die Herstellungskosten der Endprodukte bzw. die Verkaufspreise der Endprodukte gilt (in Abhängigkeit von den jeweils produzierten ME t):

Kosten je ME	E_1	E_2	E_3
GE/ME	$29 - 0{,}5\ln(t)$	$130 - 2\ln(t)$	$54 - 1{,}5\ln(t)$

Preis je ME	E_1	E_2	E_3
GE/ME	$42 - 2\ln(t)$	$145 - 4\ln(t)$	$65 - 3\ln(t)$

Bestimmen Sie den Wert für t, für den der Gewinn $G(t)$ maximal wird, wenn die gesamte Produktion verkauft wird.

Aufgabe 8 Oktaeder

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 und durch die Umstellung von Leistungskursen auf Kurse erhöhten Niveaus werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben.
Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

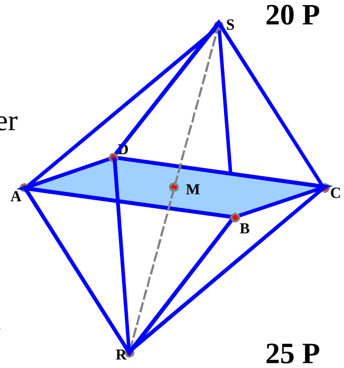
In einem kartesischen Koordinatensystem sind folgende Punkte gegeben:

$$A\,(\,2 \mid 0 \mid 4\,),\ B\,(\,-2 \mid 5 \mid 1\,) \text{ und } C\,(\,2 \mid 10 \mid 4\,).$$

a) • Berechnen Sie einen vierten Punkt *D* so, dass die Punkte *A*, *B* und *C* durch diesen Punkt *D* zu einem Quadrat ergänzt werden.

• Bestätigen Sie, dass der Vektor $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ senkrecht zur Ebene $\boldsymbol{E_1}$ ist, in der die vier Punkte *A*, *B*, *C* und *D* liegen, und berechnen Sie seine Länge.

20 P



b) Auf dem Quadrat *ABCD* lässt sich ein reguläres (regelmäßiges) Oktaeder ***O*** = *ABCDRS* aufbauen (siehe Abbildung). Regulär bedeutet, dass alle Kanten gleich lang sind.

• Berechnen Sie den Abstand der Punkte *R* und *S*.

• Bestimmen Sie die Koordinaten dieser beiden Punkte und skizzieren Sie das Oktaeder im Koordinatensystem in der Anlage.

25 P

c) Als regulärer Körper besitzt ***O*** eine so genannte Inkugel $\boldsymbol{K_I}$, also eine einbeschriebene Kugel, die alle Seitenflächen berührt.

• Begründen Sie argumentativ unter Ausnutzung der Regularität, in welchem charakteristischen Punkt die Inkugel $\boldsymbol{K_I}$ die jeweilige Seitenfläche berührt.

• Bestimmen Sie den Berührpunkt *P* von $\boldsymbol{K_I}$ mit der Seitenfläche *BRC*.
(Hinweis: Sollten Sie in b) den Punkt *R* nicht errechnet haben, verwenden Sie *R*(5 | 5 | 0).)

• Bestimmen Sie den Radius von $\boldsymbol{K_I}$ und geben Sie ihren Mittelpunkt an. **15 p**

d) Gegeben ist jetzt noch die Ebenenschar $\boldsymbol{F_t}$ mit $F_t: t\cdot x_1 + (7t-1)\cdot x_3 + (4-30t) = 0 \ \ (t \in \mathbb{R})$.

• Zeigen Sie, dass jede Ebene dieser Ebenenschar die Gerade g_{AC} durch *A* und *C* enthält.

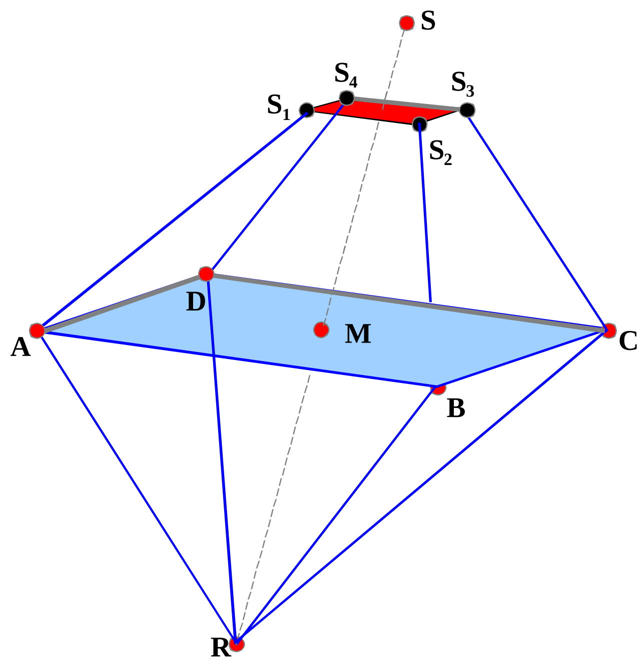
• Bestimmen Sie das Intervall *I* der Werte von *t*, für die die Ebene $\boldsymbol{F_t}$ die Kante $\overline{BR}$ des Oktaeders schneidet. Bestimmen Sie auch das entsprechende Intervall bezogen auf die Kante $\overline{SD}$.

• Ermitteln Sie die Form der Schnittfigur, die jede Ebene $\boldsymbol{F_t}$ mit dem Oktaeder ***O*** aufweist, falls der Parameter *t* aus dem eben bestimmten Intervall *I* ist.
Benennen Sie dabei die Schnittpunkte von F_t mit $\overline{BR}$ bzw. $\overline{SD}$ mit *T* und *U*.

• Untersuchen Sie, für welchen Wert von *t* aus dem Intervall *I* die zugehörige Schnittfigur den kleinsten Flächeninhalt aufweist, und geben Sie diesen an.
Skizzieren Sie die zugehörige Schnittfigur.

30 P

e) In dieser Teilaufgabe geht es um einen Oktaederstumpf. Dabei wird jede der Ecken *A*, *B*, *C*; *D*, *R* und *S* entfernt, wie es beispielhaft für *S* im Schrägbild dargestellt ist.



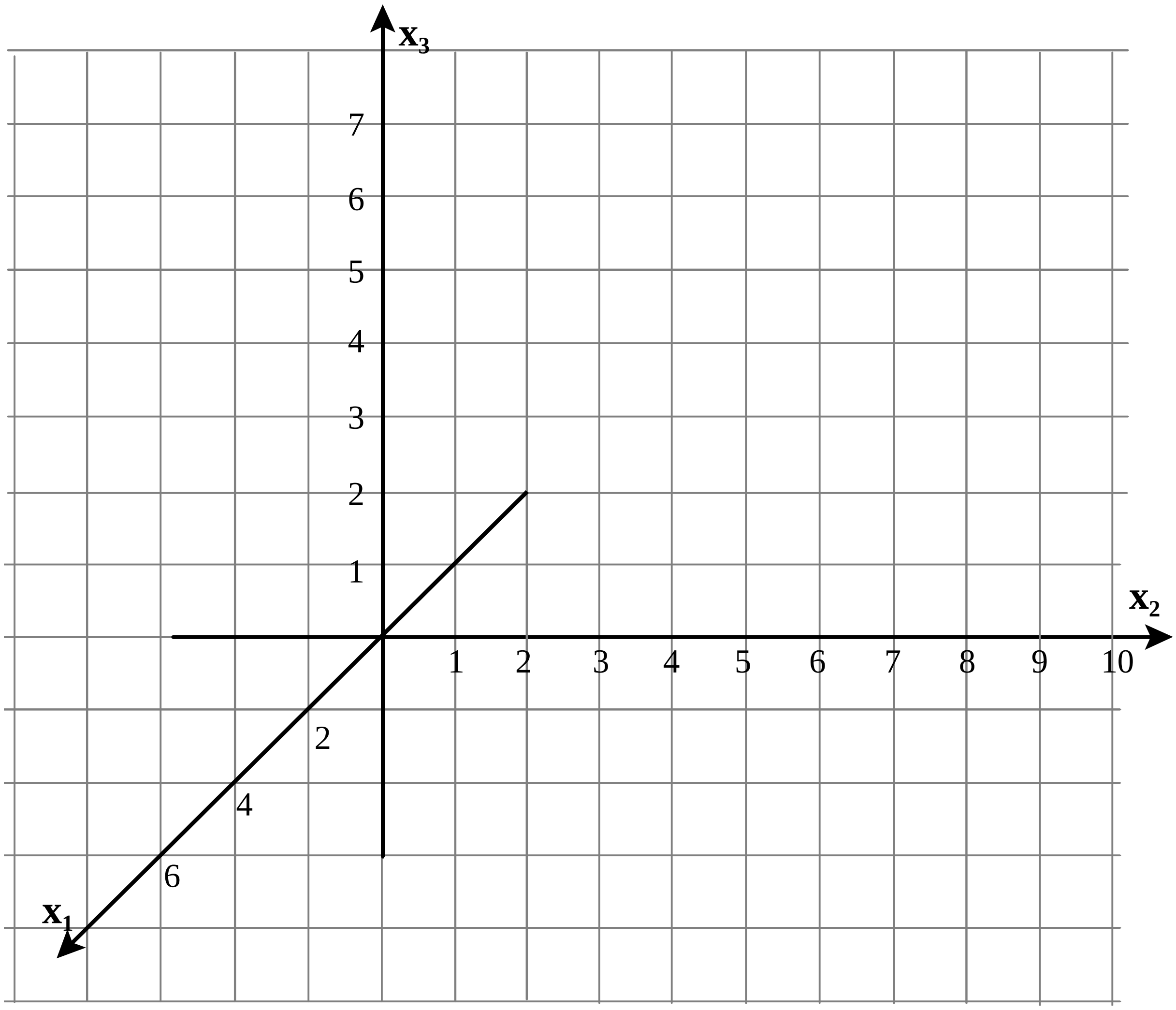
Die Schnittebene $\boldsymbol{E_2}$, welche die vier Punkte S_1, S_2, S_3 und S_4 enthält, ist parallel zur Ebene $\boldsymbol{E_1}$ aus Teilaufgabe a), in der die Punkte *A*, *B*, *C*, *D* und *M* liegen.

Der Abstand der Ebene $\boldsymbol{E_2}$ von *S* betrage 1 LE.

- Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S_2.und dessen Abstand zu *S*.
- Begründen Sie, von welcher Art das Viereck S_1, S_2, S_3, S_4 ist.
- Alle Eckpunkte werden nun auf die geschilderte Art entfernt.
  Geben Sie begründet an, welche Form die ursprünglichen gleichseitigen Dreiecke dann angenommen haben.

10 P

Anlage zur Aufgabe „Oktaeder“



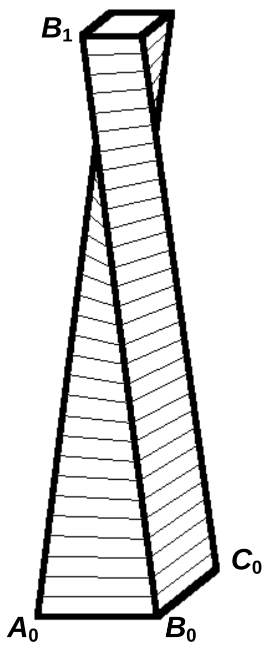
Aufgabe 9 Quadrille

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 und durch die Umstellung von Leistungskursen auf Kurse erhöhten Niveaus werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben.
Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

Der **Turning Torso** ist ein Hochhaus in der schwedischen Stadt Malmö. Der 57 Etagen hohe Wolkenkratzer erreicht eine Höhe von 190 Metern und ist damit der höchste Wolkenkratzer Skandinaviens und das zweithöchste Wohngebäude in Europa. Er wurde im Sommer 2005 eingeweiht und gilt seither als ein Wahrzeichen der Stadt.

Die einzelnen Stockwerke sind gegeneinander verdreht und haben alle eine gleich große, im Wesentlichen quadratische Grundfläche.

Der „Turning Torso“ regte einen anderen Architekten an, das rechts unten skizzierte Hochhaus **„Quadrille“** zu entwerfen, auf das sich alle Aufgabenteile beziehen.



Das Hochhaus „Quadrille“ hat eine quadratische horizontale Grundfläche der Seitenlänge 20 m und schließt in 120 m Höhe ab mit einer dazu parallelen kleineren (im Gegensatz zu Malmö) quadratischen Dachfläche mit der Seitenlänge von nur 10 m.

Die Mittelpunkte von Dach- und Bodenfläche sind lotrecht übereinander und liegen in dieser Aufgabe auf der z-Achse.

Die Dachfläche ist gegenüber der Bodenfläche von oben gesehen um 90° nach rechts gedreht.

Das Hochhaus hat 30 Stockwerke gleicher Höhe mit jeweils waagerechtem Boden und waagerechter Decke.

Alle Hauskanten sind gerade Strecken (dies auch im Gegensatz zu Malmö).

Aus Symmetriegründen folgt, dass alle vier von oben nach unten verlaufenden Gebäudekanten gleich lang sind und dass alle Stockwerke (alle horizontalen Schnittflächen) Quadrate sind.

a) Geben Sie für ein geeignetes Koordinatensystem (Einheit entspricht 1 m), in dem der Eckpunkt A_0 (siehe Abbildung) die Koordinaten (10 | –10 | 0) hat, die Koordinaten der anderen 7 Eckpunkte des Hochhauses an. **10 P**

Wenn Ihnen das nicht gelingt, verwenden sie für die weiteren Aufgabenteile die folgenden 8 Punkte:

$$A_0(10\,|10\,|\,0)\;,\;B_0(-10\,|10\,|\,0)\;,\;C_0(-10\,|-10\,|\,0)\;,\;D_0(10\,|-10\,|\,0)$$
$$A_1(5\,|-5\,|\,120)\;,\;B_1(5\,|\,5\,|\,120)\;,\;C_1(-5\,|\,5\,|\,120)\;,\;D_1(-5\,|-5\,|\,120)$$

Die Stockwerke werden – wie üblich – von unten nach oben gezählt, und es gelte hier die Verabredung, dass das Erdgeschoss die Nummer 1 trägt, also als erstes Stockwerk bezeichnet wird.

b) – Berechnen Sie die Längen der von oben nach unten verlaufenden Hauskanten.

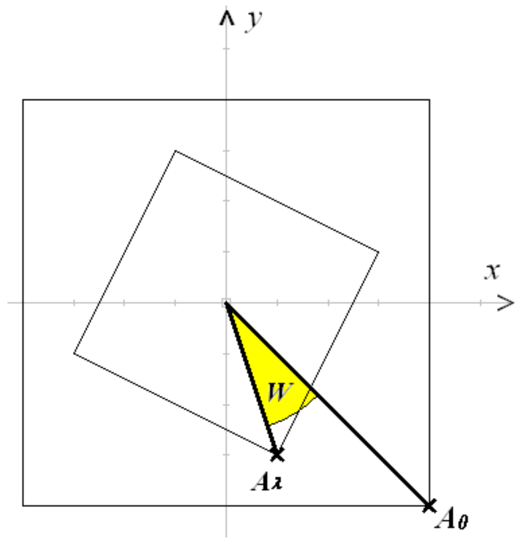
– Bestätigen Sie, dass in der Höhe h der zugehörige Punkt A_λ auf der Kante $\overline{A_0A_1}$ die Koordinaten $\left(10-\frac{h}{8} \mid -10+\frac{h}{24} \mid h\right)$ hat.

– Berechnen Sie die Koordinaten der vier Eckpunkte der Bodenfläche in 40 m Höhe, also in Höhe der Bodenfläche des 11. Stockwerkes. **15 P**

c) Es werden in diesem Aufgabenteil die Winkel untersucht, um die – von oben gesehen – die Bodenflächen der einzelnen Stockwerke gegenüber der Bodenfläche des Erdgeschosses nach rechts verdreht sind.
(Die z-Koordinaten brauchen also nicht betrachtet zu werden!)

– Bestimmen Sie den Winkel W, um den die Bodenfläche des 16. Stockwerks in 60 m Höhe gegenüber der des Grundgeschosses (1. Stock) gedreht ist.

– Bestimmen Sie das Stockwerk, bei dem $W = 45°$, bei dem also die Bodenfläche gegenüber der Bodenfläche des Grundgeschosses um 45° gedreht ist. **20 P**



d) Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt der Bodenfläche in der Höhe h – gemessen in m^2 – gilt:
$F(h) = \frac{5}{144}\left(h^2 - 192h + 11520\right)$ und dass das 25. Stockwerk ($h = 96$ m) die geringste Bodenfläche hat. **15 P**

e) Die Miete p pro Quadratmeter steigt – wegen der immer schöneren Aussicht – linear mit der Höhe der einzelnen Stockwerke über dem Boden. Im Erdgeschoss – also bei der Höhe 0 m – kostet der Quadratmeter 10 € Miete, im 30. Stockwerk – also in 116 m Bodenhöhe – hat sich die Miete pro Quadratmeter auf 20 € verdoppelt.
Bestimmen Sie das Stockwerk mit der geringsten Miete und das Stockwerk mit der höchsten Miete (dabei sollen Fahrstuhlschächte, Treppenhäuser etc. als Teil der Mietfläche mitgerechnet werden). **15 P**

f) Die Seitenflächen des Hochhauses werden durch die Schar der waagerechten Verbindungsstrecken zwischen den entsprechenden von oben nach unten verlaufenden Hauskanten gebildet. Begründen Sie,

– dass zwei benachbarte von oben nach unten verlaufende Hauskanten windschief sind,

– dass die Punkte P und Q als Endpunkte der kürzesten Verbindungsstrecke zwischen zwei benachbarten Hauskanten nicht auf gleicher Höhe liegen,
zur Kontrolle: Die Punkte haben die Koordinaten $\left(-\frac{1132}{581} \mid -\frac{3496}{581} \mid \frac{55536}{581}\right)$ bzw. $\left(\frac{3476}{581} \mid -\frac{1192}{581} \mid \frac{56016}{581}\right)$,

– dass der Mittelpunkt von P und Q genau in Höhe der minimalen Bodenfläche liegt,

– dass der Mittelpunkt von P und Q nicht auf der zugehörigen Seitenfläche liegt, dass die Seitenflächen des Hauses also gekrümmt sein müssen. **25 P**

Aufgabe 10 GPS

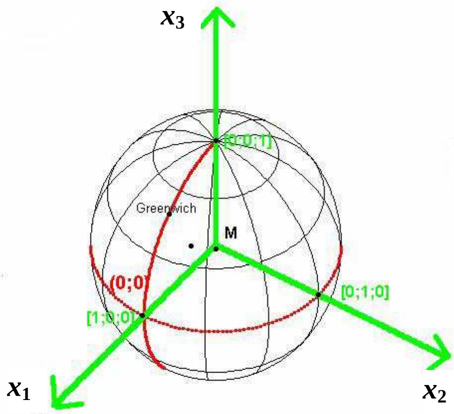
Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 und durch die Umstellung von Leistungskursen auf Kurse erhöhten Niveaus werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben.

Eine Person bestimmt ihre Position auf der Erdoberfläche mit Hilfe eines GPS-Gerätes. Dieser Vorgang soll in dieser Aufgabe prinzipiell nachvollzogen werden.

Wir machen dazu folgende vereinfachende Annahmen:

- Die Erde ist eine ideale Kugel mit einem Umfang von 40 000 km und dem zugehörigen Radius von $R =$ 6 366 km. Als Längeneinheit wählen wir gerade diesen Erdradius.

- Weiterhin betrachten wir folgendes erdgebundene Koordinatensystem:
  Der Koordinatenursprung ist der Erdmittelpunkt. Die x_3-Achse liegt auf der Erdachse und zeigt nach Norden. Der Nordpol ist also der Einheitspunkt auf der x_3-Achse mit den Koordinaten (0 | 0 | 1).
  Die x_1-Achse geht durch den Schnittpunkt von Äquator und Nullmeridian, dieser Punkt mit den geographischen Koordinaten 0° Breite und 0° Länge ist der Einheitspunkt auf der x_1-Achse, hat also die Koordinaten (1 | 0 | 0) .
  Der Einheitspunkt auf der x_2-Achse hat dann 0° Breite und 180° östliche Länge und die Koordinaten (0 | 1 | 0).



- Zu einem genau fixierten Zeitpunkt der Positionsbestimmung empfängt die Person mit ihrem GPS-Gerät von zwei GPS Satelliten deren genaue Positionen Sat_1 und Sat_2 in dem genannten rechtwinkligen Koordinatensystem. Außerdem empfängt der GPS-Empfänger die genaue Uhrzeit in den Satelliten zum Zeitpunkt der Aussendung der Signale. Aus der Zeitdifferenz der beiden Uhren in den Satelliten und im GPS-Empfänger zum Empfangszeitpunkt kann dieser (mit Hilfe der Lichtgeschwindigkeit) die Entfernungen d_1 und d_2 von seiner unbekannten Position zu den beiden Satelliten berechnen. (Dies ist in Wirklichkeit wegen der Ungenauigkeit der Empfängeruhr komplizierter!).

<u>Nun zur eigentlichen Aufgabe:</u>

Es sei $Sat_1 = (\,2 \mid 2 \mid 3)$ und $d_1 = 3{,}2$ und ebenso $Sat_2 = (\,3 \mid 2 \mid 2)$ und $d_2 = 3{,}3$.

a) Erläutern Sie den prinzipiellen Weg, wie man den Standort der Person aus den gegebenen Daten berechnen kann.

b) Betrachten Sie die Kugel um Sat_1 mit dem Radius d_1 und stellen Sie die Gleichung der Kugeloberfläche auf.
Diese Kugeloberfläche schneidet die Erdoberfläche in einem Schnittkreis. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der dieser Schnittkreis liegt.
(zur Kontrolle: Einen mögliche Antwort ist: E_1: $100x + 100y + 150z = 194$)

c) Wenn wir die gleiche Rechnung wie in b) für die Kugel um Sat_2 mit dem Radius d_2 durchführen, erhalten wir folgende Gleichung für die Schnittkreisebene: E_2: $600x + 400y + 400z = 711$.
Bestimmen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen E_1 und E_2 in der Parameterform.

d) Bestimmen Sie nun die Koordinaten von zwei Punkten, von denen einer der Standort der Person sein muss.

e) Die Person weiß immerhin, dass sie sich in Nordeuropa aufhält.
Berechnen Sie die geographischen Koordinaten des Standorts der Person.

Gehen Sie gedanklich von Hamburg aus (53,5° N; 10° O) soweit nach Norden oder Süden, bis Sie in genau östlicher oder westlicher Richtung den Standort der Person erreichen können, und berechnen sie die Länge dieser beiden Wegstrecken.

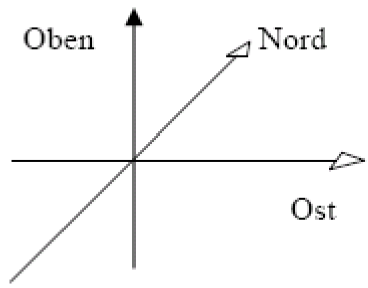
f) Berechnen Sie die Länge des kürzesten Weges von Hamburg zum Standort der Person.

Aufgabe 11 Flughafen

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 und durch die Umstellung von Leistungskursen auf Kurse erhöhten Niveaus werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben.
Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

Flugzeuge beschleunigen auf Rollbahnen, die in dieser Aufgabe in einer Ebene liegen.

Diese Ebene sei die x_1-x_2-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems. Alle Längen haben die Einheit Meter. Entgegen der üblichen Schreibweise wird hier, angepasst an die Navigation auf der Erde, die folgende Darstellung gewählt:



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} Ost \\ Nord \\ Oben \end{pmatrix}$$

Mit dem Abheben eines Flugzeuges beginnt die Startflugphase, die durch die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -200 \\ -400 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \\ 36 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

unter der vereinfachenden Annahme **einer konstanten Geschwindigkeit** beschrieben werden soll.

Dabei ist der Parameter t die Zeit in Sekunden nach dem Abheben des Flugzeugs zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Zahlenangaben sind in der Einheit Meter zu lesen.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v des Flugzeugs in der Startflugphase in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Hinweis: Berechnen Sie dazu den in der 1. Sekunde zurückgelegten Weg.
Bestimmen Sie die Größe des Steigungswinkels α, den das Flugzeug in der Startflugphase gegenüber der Rollbahn hat. **(15P)**

b) Der Kontrollraum des Flughafentowers befindet sich im Punkt $T(0|100|30)$. Berechnen Sie die kürzeste Entfernung e, die das Flugzeug in der Startflugphase zum Tower hat. **(15P)**

c) Der Start des Flugzeugs erfolgt bei sonnigem Wetter. Die Richtung der Sonneneinstrahlung wird durch $\vec{s} = \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix}$ beschrieben.

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Schattens des Flugzeugs, der sich fortwährend auf der x_1-x_2-Ebene bewegt.
- Begründen Sie, dass es einen Unterschied zwischen Schattengeschwindigkeit und Geschwindigkeit des Flugzeugs gibt.
- Untersuchen Sie, ob es eine Situation geben könnte, in der die Schattengeschwindigkeit gleich Null ist. **(20P)**

d) In direkter Nähe des Flughafens hat sich eine Regenfront aufgebaut. Die Front liegt in der Ebene $E:\ 4x_1 + 3x_2 = 12000$.

- Beschreiben Sie (kurz) die Lage der Regenfront bezüglich der x_1-x_2-Ebene und der x_3-Achse.
- Ermitteln Sie den Zeitpunkt t_1, zu dem das Flugzeug in die Regenfront eintaucht.
- Bestimmen Sie die dazugehörige Flughöhe. **(15P)**

e) Der Flughafentower überwacht den gesamten Flugverkehr im Überwachungsbereich seines Radars. Der halbkugelförmige Überwachungsbereich hat einen Radius von 15 km, der Mittelpunkt der Halbkugel befinde sich in T(0|100|30).
Ein vorüber fliegendes Flugzeug, das sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Radar in der Position $P(3000|–8000|6000)$ befindet, fliegt (auch vor dem Zeitpunkt $t = 0$) in konstanter Höhe mit einer Geschwindigkeit von 150 m/s geradlinig nordwärts.

- Ermitteln Sie die Zeitspanne, in der sich das Flugzeug im Überwachungsbereich des Radars befindet.
- Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_2, in dem sich das startende (aus den vorhergehenden Aufgaben) und das vorüber fliegende Flugzeug am nächsten kommen.
- Man spricht von einer Beinahekollision, wenn sich Flugzeuge um weniger als 2 km nähern.
  Entscheiden Sie, ob es zwischen den beiden Flugzeugen zu einer Beinahekollision kommt.
  Untersuchen Sie, ob die Entfernung beider Flugzeuge zu dem kritischen Zeitpunkt t_2 mit dem Abstand der Flugbahnen übereinstimmt. **(25P)**

f) Das zweite Flugzeug aus e) befindet sich nach wie vor in 6000 m Höhe.
Der GPS-Empfang ist schlecht, deshalb bittet der Pilot drei in der Nähe befindliche Radarstationen um Navigationshilfe. Die drei Stationen haben folgende Positionen:
$T(0 \mid 100 \mid 30)$ (aus b) bekannt), $T_2(–2000 \mid –10\,000 \mid 30)$ und $T_3(5000 \mid –12\,000 \mid 30)$.
Der Pilot erfährt (fast zeitgleich), dass sich die drei Radarstationen in folgenden Distanzen (zu seiner Position) befinden: $d = 8405$ m, $d_2 = 9254$ m und $d_3 = 9415$ m.
Bestimmen Sie die Position des Flugzeuges zum Zeitpunkt der Anfrage.
Beurteilen Sie Ihr Ergebnis mit dem Wissen aus e) auf Plausibilität. **(10P)**

Aufgabe 12 Hafenturm

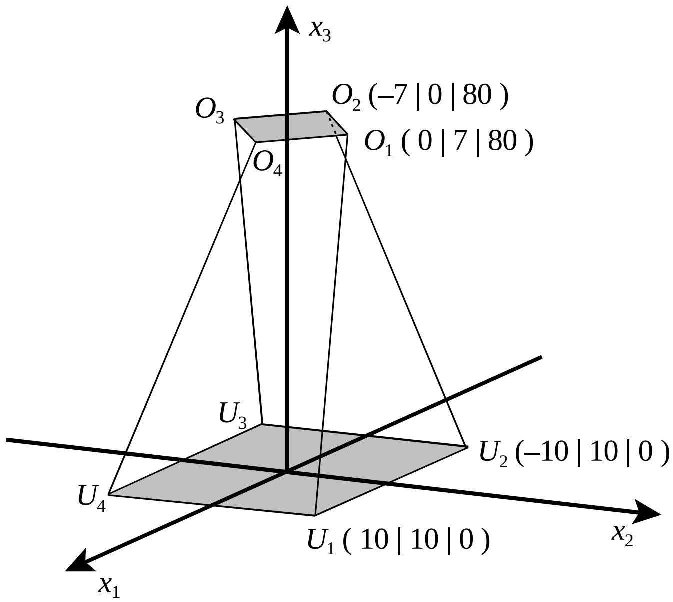
Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 und durch die Umstellung von Leistungskursen auf Kurse erhöhten Niveaus werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben.

Einige Jahre lang war in Hamburg ein Hochhaus am Hafen im Gespräch, dessen grundsätzliche architektonische Idee in der nebenstehenden Zeichnung wiedergegeben ist, die allerdings in der x_3-Richtung nicht maßstäblich ist.
Diese Idee bildet die Grundlage für diese Aufgabe.

Die Bodenfläche und das Dach bilden je ein waagerechtes Quadrat.

Die beiden Quadrate sind gegeneinander um 45° gedreht.

Die Mittelpunkte der beiden Quadrate sind senkrecht übereinander (auf der x_3-Achse).



In der Zeichnung sind die vier Eckpunkte der Bodenfläche mit U_1, U_2, U_3 und U_4 angegeben, die der Dachfläche mit O_1, O_2, O_3 und O_4. Für je zwei dieser Punkte sind die Koordinaten gegeben.

a) Die Gerade g_1 verbindet die Punkte U_1 und O_1, die Gerade g_2 die Punkte U_2 und O_2 und analog sind die Geraden g_3 und g_4 definiert. Berechnen Sie zunächst eine der zugehörigen Geradengleichungen und geben Sie dann unter Ausnutzung der Symmetrie auch die anderen drei an.

b) Berechnen Sie die Länge einer der vier (gleichlangen) Kanten des Gebäudes.

c) In verschiedenen Höhen h haben die Stockwerke natürlich viereckige waagerechte Bodenflächen. Bestimmen Sie die vier Punkte eines solchen Vierecks als Funktion von h und begründen Sie, dass diese Vierecke immer Quadrate sind.

d) Um welchen Winkel ist die Bodenfläche des Geschosses mit der Bodenhöhe $h = 40$ gegenüber dem Grundgeschoss gedreht?

e) „Wenn die Höhenabstände zwischen zwei Geschossen immer gleich sind, dann sind die Bodenflächen zweier aufeinander folgende Geschosse immer um den gleichen Winkel weitergedreht.“ Entscheiden Sie, ob diese Aussage richtig ist.

f) Begründen Sie, dass zwei benachbarte Gebäudekanten windschief sind.

g) Stellen Sie sich vor, die Konstruktion würde in der gleichen Weise nach oben weitergebaut werden. Beurteilen Sie, wie sich die Größe der Bodenflächen der Geschosse ändern wird.

h) Ermitteln Sie, in welchem Geschoss man die geringste Miete bezahlen müsste und wie hoch diese bei einem Mietpreis von 20 € pro Quadratmeter Bodenfläche wäre, wenn das Gebäude mit 30 Geschossen bis auf eine Gesamthöhe von 120 m weitergebaut würde und der Höhenabstand zwischen den Geschossböden immer 4 m hoch wäre.

Aufgabe 13 Flugbahnen

Die Aufgabe entspricht mit Veränderungen einer Aufgabe in der KMK-EPA.

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 und durch die Umstellung von Leistungskursen auf Kurse erhöhten Niveaus werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben.

In einem räumlichen Koordinatensystem beschreibt die x_1-x_2-Ebene eine flache Landschaft, in der sich ein Flughafen befindet. Die x_1-Achse weise in die Ostrichtung und die x_2-Achse in die Nordrichtung. Unmittelbar nach dem Abheben von der Startbahn im Punkt P steigt das Flugzeug F_1 näherungsweise geradlinig auf.

Die Flugbahn von F_1 verläuft auf der Geraden $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -10{,}5 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 28 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Ein zweites Flugzeug F_2 bewegt sich entlang der Geraden $h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -7{,}2 \\ -9{,}6 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Längeneinheit ist 1 km.

a) Beschreiben Sie die Himmelsrichtungen, in welche die beiden Flugzeuge fliegen.

Das Flugzeug F_1 überfliegt in 6 km Höhe das Zentrum einer Stadt.
Berechnen Sie den Abstand des Stadtzentrums vom Abhebepunkt P.

Berechnen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn von F_1.

b) Als das Flugzeug F_1 in einer Wolkendecke verschwindet, hat es vom Punkt P einen Abstand von 37 km. Bestimmen Sie die Höhe, in welcher F_1 in die Wolkendecke eintaucht.

Zeigen Sie, dass die Flugzeuge F_1 und F_2 auf den angegebenen Bahnen nicht kollidieren können.

Bestimmen Sie den Abstand der beiden Flugzeuge für den Fall, dass sich F_2 genau über F_1 befindet. Entscheiden Sie, ob dieser Abstand mit dem Abstand der beiden Flugbahnen übereinstimmt.

c) Nahe der Startbahn befindet sich im Punkt R (–10,2 | –13,6 | 0) eine Radarstation mit einem halbkugelförmigen Überwachungsbereich mit dem Radius 85 km.
Ermitteln Sie, wie viele Kilometer das Flugzeug F_2 im Überwachungsbereich des Radars fliegt.

d) Die geradlinige Grenze zu einem Nachbarstaat verläuft durch die Punkte G_1 (84 | –3 | 0) und G_2 (12 | –99 | 0).
Bestimmen Sie, wie weit hinter der Grenze ein im Nachbarland landendes Flugzeug von dem Radar theoretisch noch erfasst werden kann.
Nennen Sie begründet Argumente, welche die errechnete Lösung in Frage stellen können.

e) Im letzten Teil wird die Landschaft nicht mehr als Ebene, sondern als Teil der Erdkugel (r = 6376km) angesehen.

Die Radarstation kann nur Objekte registrieren, die sich oberhalb ihres „Horizonts“ befinden.

Bestimmen Sie die maximale Flughöhe, bis zu der ein „unbekanntes Flugobjekt“ in 70km Entfernung von der Radarstation unentdeckt bliebe.

Erstellen Sie dazu eine Skizze.

Aufgabe 14 Kugel und Ebene

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 und durch die Umstellung von Leistungskursen auf Kurse erhöhten Niveaus werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben.

Gegeben seien eine Kugel K mit dem Mittelpunkt $M(4 \mid 4 \mid 3)$ und dem Radius $r = 7$ LE sowie eine Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u, v \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass die Ebene E und die Kugel K mehr als einen Punkt gemeinsam haben. Berechnen Sie den Mittelpunkt S und den Radius r_s des Schnittkreises.

b) Die Kugel K soll an der Ebene E gespiegelt werden.

Begründen Sie die folgende Aussage:

> „Die Strecke von M zum Mittelpunkt M^* der Bildkugel K^* verläuft durch den Mittelpunkt des Schnittkreises.“

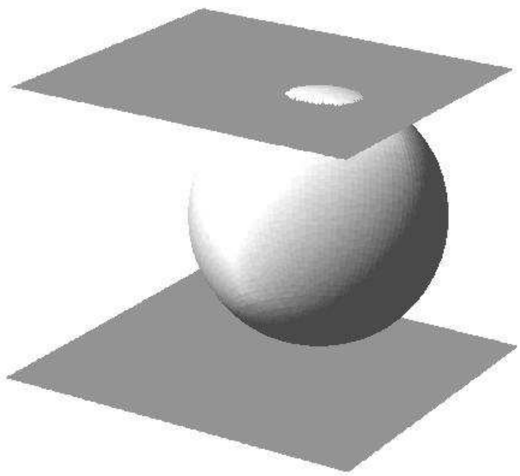
Bestimmen Sie die Gleichung der Bildkugel K^*.

c) Berechnen Sie $z > 0$ so, dass $P(6 \mid 1 \mid z)$ auf der Kugeloberfläche K liegt.

d) Genauso, wie es zu jedem Punkt auf einem Kreis eine Tangente mit diesem Punkt als Berührpunkt gibt, gibt es zu jedem Punkt auf einer Kugel eine Ebene, die die Kugel in diesem Punkt berührt – die so genannte Tangentialebene. Beim Kreis steht der Radius zum Berührpunkt senkrecht zur Tangente. Entsprechendes gilt bei der Kugel.

Ermitteln Sie die Koordinatenform derjenigen Tangentialebene T, welche die Kugel K im Punkt P berührt.

e) Bestimmen Sie alle zu T parallelen Ebenen, die die Kugel K schneiden.
Ermitteln Sie, wie von diesen Ebenen diejenigen gefunden werden können, für die der Radius des Schnittkreises mit der Kugel 2 LE ist.
Bestimmen Sie die Koordinatenform einer dieser Ebenen.



Aufgabe 15 Eckpyramide

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 und durch die Umstellung von Leistungskursen auf Kurse erhöhten Niveaus werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben.

Gegeben ist die Ebenenschar $\boldsymbol{E}_a$ mit $\boldsymbol{E}_a$: $(a+1)\cdot x_1 + a\cdot x_2 + (a-1)\cdot x_3 = a, \quad a \in \mathbb{R}$.

a) Beschreiben Sie die Lage von $\boldsymbol{E}_0$.

b) Beschreiben Sie, warum die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$ in jeder der Ebenen $\boldsymbol{E}_a$ liegt.

c) Mit S_1, S_2 und S_3 seien die Schnittpunkte der jeweiligen Ebene mit den Koordinatenachsen bezeichnet.

   Berechnen Sie S_1, S_2 und S_3 in Abhängigkeit von a.

   Fassen Sie die Punkte S_1, S_2 und S_3 sowie den Koordinatenursprung O als Eckpunkte einer Pyramide auf, der so genannten Eckpyramide.

   Zeigen Sie, dass für das Volumen V_a einer Eckpyramide gilt: $V_a = \frac{1}{6}\cdot|\overline{OS_1}|\cdot|\overline{OS_2}|\cdot|\overline{OS_3}|$.

   Bestimmen Sie diejenigen positiven a, bei denen die zugehörige Eckpyramide das Volumen 1 aufweist.

d) Beschreiben Sie, welche Bedingung die Parameter m und a zweier Ebenen $\boldsymbol{E}_m$ und $\boldsymbol{E}_a$ dieser Schar erfüllen müssen, damit diese beiden Ebenen senkrecht zueinander stehen und begründen Sie Ihre Angaben.
   Ermitteln Sie für $a = 2$ den Parameter m der zu $\boldsymbol{E}_2$ senkrechten Ebene $\boldsymbol{E}_m$.

e) Bestimmen Sie die Ebenen aus der gegebenen Ebenenschar, die vom Ursprung O den Abstand 0,5 aufweisen.

f) Es wird das Volumen V_a der Eckpyramiden der Ebenenschar $\boldsymbol{E}_a$ betrachtet.
   Zeigen Sie:

   Für $a \to \pm\infty$ geht V_a gegen den Wert $\frac{1}{6}$.

   V_a hat ein Minimum, aber kein Maximum.

Aufgabe 16 Ortskurve der Schnittpunkte

Diese Aufgabe basiert auf der Abituraufgabe Analytische Geometrie V des Abiturjahrgangs 1997 in Bayern.

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 und durch die Umstellung von Leistungskursen auf Kurse erhöhten Niveaus werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben.

Gegeben sind 2 Ebenenscharen $\boldsymbol{E_t}$: $2x_1 - tx_2 + 4x_3 = 0$ und

$\boldsymbol{H_t}$: $x_2 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie den Wert von t, für den der Punkt $Q\,(-3{,}2 \mid -4 \mid 5{,}6)$ in der Ebene $\boldsymbol{E_t}$ liegt.

Zeigen Sie, dass sich alle Ebenen $\boldsymbol{E_t}$ in einer Geraden s schneiden. Geben Sie eine Parametergleichung für s an.

b) Berechnen Sie den Wert von t, für den die Ebenen $\boldsymbol{E_t}$ und $\boldsymbol{H_t}$ senkrecht zueinander liegen.

Beschreiben Sie, welche besondere Lage die Ebenen $\boldsymbol{H_t}$ im Koordinatensystem haben.

c) Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden g_t von $\boldsymbol{E_t}$ und $\boldsymbol{H_t}$.

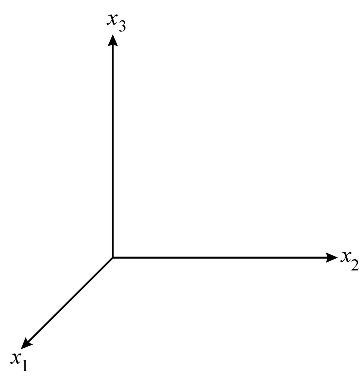
$$\text{[mögliches Ergebnis: } g_t: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mu \in \mathbb{R} \text{]}$$

Bestimmen Sie den Winkel, den die Gerade g_t mit der Ebene $x_1 = 0$ einschließt.

d) Zeigen Sie, dass durch g_0 und die x_2-Achse die Ebene $\boldsymbol{E_0}$ eindeutig festgelegt ist. Untersuchen Sie, ob alle Geraden g_t auf derselben Seite von $\boldsymbol{E_0}$ liegen.

e) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S_t der Geraden g_t mit der x_2x_3-Ebene. Zeigen Sie, dass die Punkte S_t alle auf einer Parabel in der x_2x_3-Ebene liegen. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel.

Zeichnen Sie die Geraden g_{-4}, g_{-2}, g_0 und g_2 sowie die oben beschriebene Kurve in ein Koordinatensystem. Beschreiben Sie begründend den Verlauf der Geradenschar.



f) Der Graph der Ortskurve aus Teil e) rotiert im Intervall [0;4] um die x_2-Achse. Beschreiben Sie die Form des entstehenden Körpers.

Das Volumen eines Körpers, der durch Rotation des Graphen einer Funktion k im Intervall [a, b] um die x-Achse entsteht,

kann durch die Formel $V = \pi \cdot \int_a^b (k(x))^2\,dx$ berechnet werden.

Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

Falls Sie die Ortskurve in Teil e) nicht haben bestimmen können, betrachten Sie die Ortskurve $s_3 = 0{,}5\,s_2^2$. (Dies ist aber nicht die gesuchte Ortskurve.)

Aufgabe 17 Meteoriteneinschlag

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 und durch die Umstellung von Leistungskursen auf Kurse erhöhten Niveaus werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben.

In sternklaren Nächten in den Ebenen von Kansas beobachten die beiden Amateurastronomen Myers und Smith den Himmel auf der Suche nach Meteoren und Meteoriten. Smith hat dabei eine Beobachtungsposition, die gegenüber der von Myers fünf Kilometer weiter westlich und drei Kilometer weiter nördlich ist. – Sehen Sie für diese Aufgabe den Erdboden als Ebene an und setzen Sie voraus, dass der Koordinatenursprung am Ort der Beobachtungsposition von Smith ist. Die Längeneinheit ist 1km.

In der Nacht zum 4. März beobachten sie beide einen Meteoriten. Seine Feuerspur beginnt irgendwo hoch in der Atmosphäre und endet beim Eintritt in die dichtere, untere Atmosphäre. Die Astronomen bezeichnen diese beiden wesentlichen Punkte der Bahn des Meteors mit „Upper Event (U)“ und „Lower Event (L)“.
Beide können nur jeweils die Richtung angeben, in der sie die Ereignisse U und L sehen. Wenn sie sich über diese Punkte verständigen, so geben sie jeweils einen Richtungsvektor an, der von ihrer Position zum Ereignispunkt zeigt. Die Koordinaten der Richtungsvektoren sind kartesisch mit den Koordinatenachsen in Ostrichtung, in Nordrichtung und senkrecht nach oben.
Gehen Sie davon aus, dass die Bahn des Meteoriten eine Gerade ist.

Für das Ereignis am 4. März ermitteln die beiden Astronomen folgende vier Richtungsvektoren.

$$\vec{r}_{My,U} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}8 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_{My,L} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_{Sm,U} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1{,}2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_{Sm,L} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Koordinaten von *U* und *L*.

b) Berechnen Sie den räumlichen Abstand von *U* und *L*.

Der Meteorit schlägt am Ende seiner Bahn im Punkt *K* auf dem Erdboden auf.

c) Berechnen Sie die Koordinaten dieses Aufschlagpunktes *K* und bestimmen Sie den Winkel der Bahn zur Erdoberfläche.

d) Berechnen Sie, für welchen der beiden Beobachter der Aufschlagpunkt näher ist, und ermitteln Sie für diesen die Richtung zum Aufschlagpunkt. Geben Sie dabei die Richtung in Grad gegenüber der Nordrichtung an.

Am Punkt *L* spalten sich vom Meteoriten einige kleinere Teile ab, die ebenfalls auf geraden Bahnen weiterfliegen. Die Abweichung von der Bahn des Meteoriten beträgt jeweils höchstens 1°.

e) Für zwei dieser Bruchstücke sollen Sie genaue Berechnungen vornehmen. Beide weichen in ihrer Richtung um genau 1° nach oben bzw. nach unten von der Richtung des Meteoriten ab. Fertigen Sie eine nicht maßstabgetreue Skizze an und bestimmen Sie die Entfernungen der Aufschlagpunkte der beiden Bruchstücke vom Aufschlagpunkt des Meteoriten.

f) Geben Sie begründet eine obere Abschätzung für die Größe der Fläche an, auf die der ganze Meteoritenschauer niedergeht.

Aufgabe 18 Haus mit Dach

Teile dieser Aufgabe stammen aus der Zentralabiturprüfung 1999 in Baden-Württemberg.

Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 und durch die Umstellung von Leistungskursen auf Kurse erhöhten Niveaus werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben.

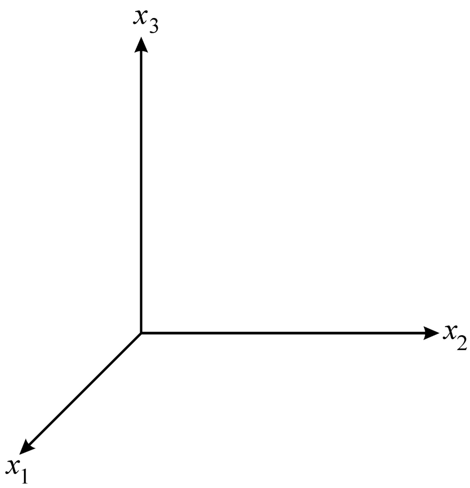
Ein quaderförmiges Haus mit aufgesetztem Dach kann in einem Koordinatensystem dargestellt werden mit Hilfe der Eckpunkte des Fußbodens B_i, der Eckpunkte des Fußbodens des Speichers S_i und der Punkte D_i , die den Dachabschluss – ein horizontal liegendes Rechteck – bilden.

Diese Punkte haben folgende Koordinaten (1 LE $\triangleq$ 1 m):

$$B_1\,(0\,|\,0\,|\,0),\quad B_2\,(10\,|\,0\,|\,0),\quad B_3\,(10\,|\,12\,|\,0),\quad B_4\,(0\,|\,12\,|\,0).$$
$$S_1\,(0\,|\,0\,|\,10),\quad S_2\,(10\,|\,0\,|\,10),\quad S_3\,(10\,|\,12\,|\,10),\quad S_4\,(0\,|\,12\,|\,10).$$
$$D_1\,(2\,|\,3\,|\,12),\quad D_2\,(6\,|\,3\,|\,12),\quad D_3\,(6\,|\,9\,|\,12),\quad D_4\,(2\,|\,9\,|\,12).$$

Die Strecken $\overline{S_1D_1}$, $\overline{S_2D_2}$, $\overline{S_3D_3}$ und $\overline{S_4D_4}$ nennt man Grate.

a) Zeichnen Sie ein Schrägbild des Gebäudes samt Dach. (Längeneinheit 1cm $\triangleq$ 1m; Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung $0{,}5\cdot\sqrt{2}$; Winkel zwischen x_1- und x_2-Achse 135°).



b) Berechnen Sie den Neigungswinkel des Grates $\overline{S_2D_2}$ gegen den Fußboden des Speichers.

c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$ und dem Fußboden des Speichers.

d) Ermitteln Sie das Flächenmaß der Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$.

Im Punkt A (9 | 5 | 10) wird ein 6 m langer Antennenmast, der das Dach durchstößt, senkrecht auf dem Fußboden des Speichers montiert.

e) Bestimmen Sie die Länge, mit der der Mast ins Freie ragt.

f) Vom Mittelpunkt des Mastes aus ist eine Stütze senkrecht zur Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$ angebracht. Ermitteln Sie die Länge der Stütze, wenn sie auf dieser Dachfläche endet.

g) In der Vorderfront des Hauses befindet sich ein Torbogen. Er hat die Form eines Kreisbogens und geht durch die Punkte K_1 (10 | 3 | 0), K_2 (10 | 9 | 0) und K_3 (10 | 4 | 2).
Bestimmen Sie die Höhe des Torbogens.

Aufgabe 19 Tribüne

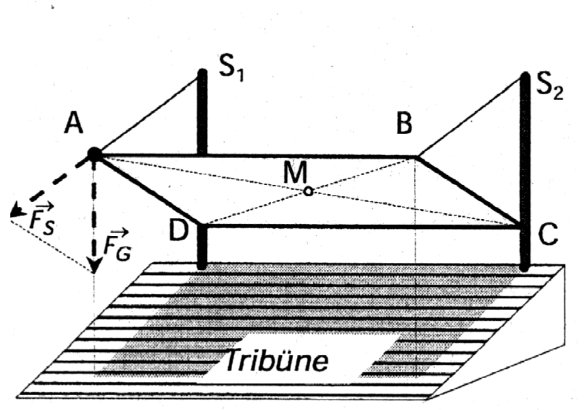
Mit der Einführung eines hilfsmittelfreien Teils ab dem Abitur 2014 und durch die Umstellung von Leistungskursen auf Kurse erhöhten Niveaus werden die dann gestellten Aufgaben einen etwas geringeren Umfang als diese haben.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(6|-12|22)$, $B(38|4|22)$ und $M(19|2|19)$ sowie die Ebene $\boldsymbol{E_1}$: $2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 65$ gegeben. .

a) Die Punkte A, B und M bestimmen eine Ebene $\boldsymbol{E_2}$.
Berechnen Sie eine Ebenengleichung von $\boldsymbol{E_2}$ in Koordinatenform und den Winkel, den $\boldsymbol{E_2}$ mit der x_1x_2-Ebene einschließt.
[Mögliches Ergebnis: $\boldsymbol{E_2}$: $-x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 80$.]

b) Die Punkte A und B seien Eckpunkte, der Punkt M sei Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms *ABCD.*
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte C und D und zeigen Sie, dass dieses Parallelogramm ein Rechteck ist.

Das Dach über dem Teilbereich einer Tribüne kann durch das Rechteck *ABCD* aus Aufgabenteil b) beschrieben werden, wenn 1LE im Koordinatensystem 1m entspricht und die Horizontalebene durch die x_1x_2-Ebene dargestellt wird.
In den Punkten C und D ist das Dach an zwei zur Horizontalebene senkrecht stehenden Masten befestigt. Von den Punkten $S_1(0|0|26)$ und $S_2(32|16|26)$ führt jeweils ein Befestigungsseil zu den Punkten A bzw. B.
Die Tribüne liege in der Ebene $\boldsymbol{E}_1$.



c) Im Punkt M soll ein Kontrollgerät installiert werden. Aus technischen Gründen ist ein Mindestabstand von 10 m zu jedem Punkt der Tribüne vorgeschrieben. Untersuchen Sie, ob diese Vorschrift erfüllt wird.

d) Die Punkte $A'(6|-12|1)$, B', C' und D' seien die Projektionen der Punkte A, B, C und D auf die Tribüne, die durch zur Horizontalebene senkrechte Strahlen entstehen. Ermitteln Sie die Koordinaten von B', C' und D'.
A', B', C' und D' seien die Eckpunkte der überdachten Fläche der Tribüne. Bestimmen Sie das Maß dieser Fläche.

e) Ermitteln Sie den Winkel, den die Seile mit dem Dach einschließen.
Im Punkt A wirkt eine Gewichtskraft $\overrightarrow{F_G}$, mit $|\overrightarrow{F_G}| = 10\,000\ N$, senkrecht zur Horizontalebene.
Diese Kraft kann in eine Komponente $\overrightarrow{F_s}$, die in Richtung der Befestigungsseile wirkt, und in eine Komponente, die in Richtung des Punktes D wirkt, zerlegt werden.
Ermitteln Sie den Betrag der Kraft $\overrightarrow{F_s}$.

2 Erwartungshorizonte und Bewertung

2.1 Kurs auf grundlegendem Niveau

Aufgabe 1 Vegetation

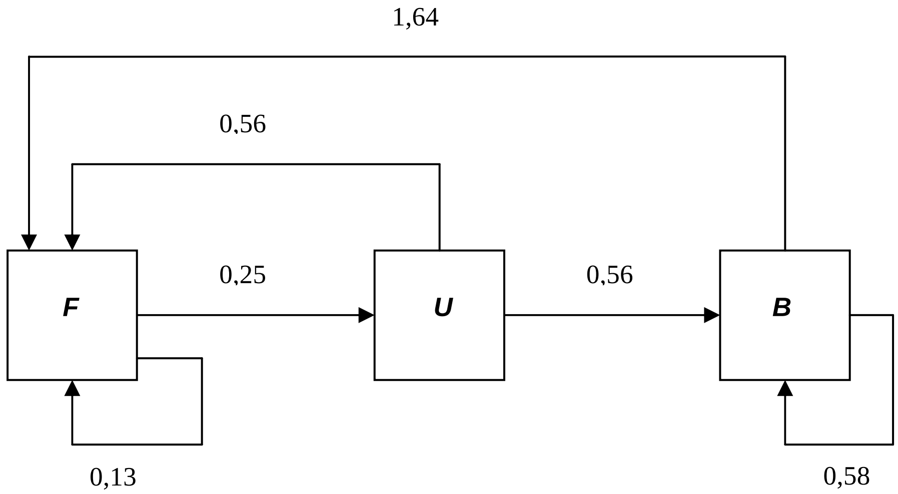
Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	$$L = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,02 & 0,5 & 0,2 \\ 0,99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,8 \end{pmatrix}$$ v_i beschreibt den Anteil der Fläche, die Pflanzen aus Klasse i bedecken, der verbrennt und daher das Wachstum junger Pflanzen begünstigt, also nach 10 Jahren zur Klasse 1 gerechnet wird. Daher stehen diese Zahlen in der 1. Zeile der Matrix, aus der ja die Fläche zu Klasse 1 nach 10 Jahren berechnet wird. n_i beschreibt den Anteil der Fläche, die Pflanzen aus Klasse i bedecken, der nicht verbrennt und daher nach 10 Jahren zur Klasse $i + 1$ gehört ($i < 4$) bzw. in Klasse 4 verbleibt. Daher stehen n_i für $i = 1$, 2 und 3 in Zeile $i + 1$, mit der die Fläche von Klasse $i + 1$ berechnet wird. In Zeile 4 kommt noch n_4 hinzu, da dieser Anteil von Pflanzen in Klasse 4 verbleibt.	10	10	
b)	Jede Klasse wird unterteilt in zwei Anteile: der verbrennende Anteil und der nicht verbrennende Anteil. Beide machen 100 % aus, also 1.		5	
c)	Sei $X_0 = (302 \mid 284 \mid 314 \mid 1100)^T$. Dann ist die Population nach 10 Jahren $X_1 = L \cdot X_0$. $$X_1 = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,02 & 0,5 & 0,2 \\ 0,99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 302 \\ 284 \\ 314 \\ 1100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 386 \\ 299 \\ 278 \\ 1037 \end{pmatrix}$$	15		
d)	Langfristig streben in diesem Modell die Flächengrößen jeweils gegen feste Werte: Die Gesamtfläche bleibt nach Vorgaben der Aufgabe unverändert 2000 km², und da die Zeilen der Matrix jeweils gleiche Elemente enthalten, ergeben sich jeweils immer dieselben Anteile an der Gesamtfläche: Anteile der Klassen 1 und 2: $0,185 \cdot 2000\ \text{km}^2 = 370\ \text{km}^2$. Anteil der Klasse 3: $0,18 \cdot 2000\ \text{km}^2 = 360\ \text{km}^2$. Anteil der Klasse 4: $0,45 \cdot 2000\ \text{km}^2 = 900\ \text{km}^2$.		10	10
e)	*Es gibt verschiedene Möglichkeiten, z.B.* $X_{i+1} = f(X_i) = L \cdot X_i$ und D_f = Menge aller Vektoren mit 4 Komponenten = Zielmenge.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$g(t) = L^t \cdot X_0$ (für konstante Anfangspopulation X_0 mit $D_f = \mathbb{N}$, Zielmenge wie oben. *Die 2. Darstellung eignet sich eher für Langzeitprognosen*: Population nach 50 Jahren: $g(5) = L^5 \cdot X_0$. 1. Darstellung: $X_5 = f(X_4) = f(f(X_3)) = f(f(f(X_2))) = f(f(f(f(X_0))))$ *oder ab hier verbalisiert.*			15
f)	$M = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}02 & 0{,}02 & 0{,}07 \\ 0 & 0{,}98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}98 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}93 \end{pmatrix}$ Die Prozentanteile für das Abbrennen stehen in Zeile 1, $m_{11} = 1$, da Klasse 1 nicht abgebrannt wird, also unverändert bleibt. In den restlichen Zeilen steht der entsprechende Anteil, der nicht abgebrannt wird, in der Diagonalen, die zugehörige Klasse verkleinert sich entsprechend. $M \cdot (L \cdot X_i)$ beschreibt den kompletten Vorgang: $X_{i+1} = L \cdot X_i$ liefert die Flächenmaße durch spontane Brände, $X_{\text{neu}} = M \cdot X_{i+1}$ schließlich die sich durch gewolltes Abbrennen daraus ergebenden Flächen: $M \cdot (L \cdot X_i)$. *Die Reihenfolge ergibt sich aus dem Aufgabentext.*		25	
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 2 Schwarzwild

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)		5	5	
b)	Die Matrix *B* beschreibt die in a) beschriebene Entwicklung. In der ersten Zeile finden sich die Geburtenraten für die einzelnen Altersstufen. In der zweiten Zeile steht die Überlebensrate der Frischlinge, in der dritten Zeile stehen die Überlebensraten der Bachen. Mögliche Argumente gegen *A* und *C* sind: Matrix *A* ist nicht geeignet, da danach nur die Frischlinge Nachwuchs bekommen. Laut Matrix *C* würden Frischlinge im nächsten Jahr sofort zu reifen Bachen.		20	
c)	Gute Lebensbedingungen führen zu höheren Fortpflanzungs- und Überlebensraten. Alle von Null verschiedenen Elemente von *P* sind größer als die entsprechenden von *Q*. Also liegen *P* gute, *Q* gemäßigte Lebensbedingungen zugrunde.		10	
d)	$\begin{pmatrix} 0{,}59 & 1{,}76 & 2{,}29 \\ 0{,}52 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}60 & 0{,}71 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 23 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 114{,}81 \\ 31{,}2 \\ 25{,}87 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 115 \\ 31 \\ 26 \end{pmatrix}.$ Nach einem Jahr besteht die Population aus 115 Frischlingen, 31 Überläuferbachen und 26 reifen Bachen. $\begin{pmatrix} 0{,}59 & 1{,}76 & 2{,}29 \\ 0{,}52 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}60 & 0{,}71 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 115 \\ 31 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 181{,}95 \\ 59{,}8 \\ 37{,}06 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 182 \\ 60 \\ 37 \end{pmatrix}.$ Nach zwei Jahren ist die Population auf 182 Frischlinge, 60 Überläuferbachen und 37 reife Bachen angewachsen. *Runden Prüflinge die Werte immer ab oder rechnen sie mit den ungerundeten Werten weiter, so ist die volle Punktzahl zu geben.* *Werden die Ergebnisse in den Antwortsätzen nicht gerundet, so führt dies zu einem Abzug von einem Punkt.*	10		

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>$\begin{pmatrix} 0,59 & 1,76 & 2,29 \\ 0,52 & 0 & 0 \\ 0 & 0,60 & 0,71 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,59 & 1,76 & 2,29 \\ 0,52 & 0 & 0 \\ 0 & 0,60 & 0,71 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,26 & 2,41 & 2,98 \\ 0,31 & 0,92 & 1,19 \\ 0,31 & 0,43 & 0,50 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1,26 & 2,41 & 2,98 \\ 0,31 & 0,92 & 1,19 \\ 0,31 & 0,43 & 0,50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 23 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 181,69 \\ 59,99 \\ 36,99 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 182 \\ 60 \\ 37 \end{pmatrix}$

Man erhält also dieselben Werte wie in d).</td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>P^2 beschreibt den Übergang einer Population auf das übernächste Jahr.
Nullen stehen in einer Populationsmatrix nur dort, wo es keinen Übergang von einer Altersklasse in eine andere gibt. Dies ist bei P^2 nirgends der Fall. Denn:

Die erste Zeile der Matrix beschreibt die Geburtenraten, mit denen die Anzahl der Frischlinge im übernächsten Jahr berechnet werden. Dies ist die „Enkelgeneration“ der Ausgangspopulation, alle drei Altersstufen F, U und B gehören zur „Großmüttergeneration“.

Mit der zweiten Zeile berechnet man die Anzahl der Überläuferbachen im übernächsten Jahr, die um ein Jahr gealterten „Kinder“ der Ausgangspopulation.

Mit der dritten Zeile wird die Anzahl der alten Bachen bestimmt. Nach zwei Jahren sind auch ehemaligen Frischlinge zu reifen Bachen herangewachsen, ebenso die Überläuferbachen.</td><td></td><td></td><td>15</td></tr>
<tr><td>g)</td><td>$\begin{pmatrix} 61 & 122 & 152 \\ 19 & 39 & 49 \\ 13 & 25 & 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 23 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9050 \\ 2870 \\ 1899 \end{pmatrix}$

Die Population würde nach diesem Modell also in der Tat auf mehr als 13 500 Tiere anwachsen.</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>h)</td><td>Gesucht sind ganzzahlige x, F, U und B, sodass

$\begin{pmatrix} 0,59 & 1,76 & 2,29 \\ 0,52 & 0 & 0 \\ 0 & 0,60 & 0,71 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ U \\ B \end{pmatrix}$ mit $F + U + B = 100$.

Hieraus ergibt sich das Gleichungssystem

$0,59x + 17,6 + 22,9 = F$ (I)
$0,52x + \quad = U$ (II)
$6 + 7,1 = B$ (III)

Aus (III) folgt: $B = 13$ und damit $F + U = 87$

(I) + (II) : $1,11x + 40,5 = F + U$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Insgesamt ergibt sich $1{,}11x = 46{,}5$ und daraus $x \approx 41{,}89$. Die gesuchte Population besteht also aus 42 Frischlingen, 10 Überläuferbachen und 10 reifen Bachen.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 3 Kosten-Preis-Kalkulation

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ Es gilt $A \cdot B = C$. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 28 \\ 18 & 22 \\ 70 & 50 \\ 36 & 16 \end{pmatrix} = C$.	15		
b)	$C \cdot \vec{x}_E = \vec{x}_R \;\; mit \;\; \vec{x}_E = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 32 & 28 \\ 18 & 22 \\ 70 & 50 \\ 36 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1480 \\ 1020 \\ 2900 \\ 1200 \end{pmatrix}$ Bei der Abwicklung des Kundenauftrages werden folgende Rohstoffmengen benötigt: 1 480 ME von R_1, 1 020 ME von R_2, 2 900 ME von R_3 und 1 200 ME von R_4. $B \cdot \vec{x}_E = \vec{x}_Z \;\; mit \;\; \vec{x}_E = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 260 \\ 120 \\ 160 \end{pmatrix}$ Bei der Abwicklung des Kundenauftrages werden folgende Mengen an Zwischenprodukten benötigt: 260 ME von Z_1, 120 ME von Z_2 und 160 ME von Z_3.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

$K = K_R + K_Z + K_E + 0{,}2(K_R + K_Z + K_E) = 1{,}2(K_R + K_Z + K_E)$

$\vec{k}_R \cdot \vec{x}_R = K_R \quad mit \quad \vec{k}_R = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1480 \\ 1020 \\ 2900 \\ 1200 \end{pmatrix} = 19520$

Für den Auftrag betragen die Materialkosten der Rohstoffe 19 520 €.

$\vec{k}_Z \cdot \vec{x}_Z = K_Z \quad mit \quad \vec{k}_Z = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 50 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 40 & 20 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 260 \\ 120 \\ 160 \end{pmatrix} = 20800$

Für den Auftrag betragen die Herstellkosten der Zwischenprodukte 20 800 €.

$\vec{k}_E \cdot \vec{x}_E = K_E \quad mit \quad \vec{k}_E = \begin{pmatrix} 250 & 100 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 250 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} = 8000$

Für den Auftrag betragen die Herstellkosten der Endprodukte 8 000 €.

K = 1,2(19520 + 20800 + 8000) = 57 984

Die Gesamtkosten K des Kundenauftrages betragen 57 984 €.

$p_{\text{Min}} = \dfrac{K}{20+30} = \dfrac{57984}{50} = 1159{,}68$

Der zugehörige Mindestverkaufspreis für beide Endprodukte muss auf volle Euro gerundet 1.160 € betragen.

</td><td>15</td><td>35</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Die Absatzmenge von E_1 sei gleich x_{E_1}, dann gilt gemäß des vorgegebenen Mengenverhältnisses von 1:3, dass die Absatzmenge von E_2 gleich $3\,x_{E_1}$ betragen muss.

$C \cdot \vec{x}_E = \vec{x}_R \quad mit \quad \vec{x}_E = \begin{pmatrix} x_{E_1} \\ 3x_{E_1} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 32 & 28 \\ 18 & 22 \\ 70 & 50 \\ 36 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{E_1} \\ 3x_{E_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 116x_{E_1} \\ 84x_{E_1} \\ 220x_{E_1} \\ 84x_{E_1} \end{pmatrix}$

Die Rohstoffvorräte entsprechen dem angegebenen Vektor $\vec{x}_R$

Nach der vorherigen Rechnung muss gelten: $84x_{E_1} = 20160$.

$\Rightarrow x_{E_1} = 240 \ \wedge \ 3x_{E_1} = 720$

Unter der Beibehaltung des Mengenverhältnisses von 1:3 können maximal 240 ME von E_1 und 720 ME von E_2 produziert werden.

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
Wenn ein bestimmter Lagervorrat an Rohstoffen zur unverzüglichen Erfüllung von Kundenaufträgen bereitgehalten werden soll, so erfordert dies zunächst Kapital in Höhe der Beschaffungskosten der Vorräte.

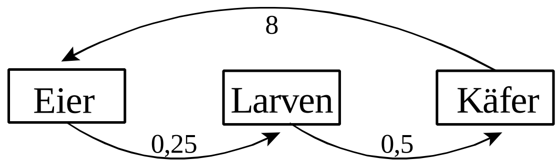
Die Finanzierung der Lagervorräte kann entweder aus eigenen Mitteln oder durch Kredite (Fremdmittel) erfolgen. In beiden Fällen ist das Kapital in den Vorräten gebunden und für andere Zwecke nicht verfügbar. Zum Kapitalbedarf für die Vorräte kommen noch Folgekosten der Finanzierung hinzu:

– bei der Eigenfinanzierung entgehen dem Unternehmen Erträge aus der Nutzung anderweitiger Investitionsmöglichkeiten,
– bei der Fremdfinanzierung fallen Zinsaufwendungen für die Kredite auf die Lagerhaltung an.
</td><td></td><td>15</td><td>20</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>30</td><td>50</td><td>20</td></tr>
</table>

Aufgabe 4 Käferpopulation

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
Graph:



Populationsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 320 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Die Population besteht also aus 320 Eiern, 10 Larven und 20 Käfern nach einem Monat.
</td><td>20</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 320 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 80 \\ 5 \end{pmatrix}$$, nach 2 Monaten 160 Eier, 80 Larven, 5 Käfer;

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 160 \\ 80 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix}$$, nach 3 Monaten ist wieder der Anfangsbestand erreicht.

Die Anzahl der Käfer ist stets kleiner als 60, daher reicht das kleine Terrarium.
</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8z \\ 0,25x \\ 0,5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Gleichung I in II eingesetzt ergibt $2z = y$. Damit sind x und y Vielfache von z und der Lösungsvektor lautet (8 | 2 | 1). Damit bleibt z.B. die Anfangspopulation von 80 Eiern, 20 Larven und 10 Käfern unverändert. Andere Beispiele ergeben sich für andere Werte von z.		15	
d)	$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0,125 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0,125 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Hier zeigt sich auf andere Weise das Ergebnis von b), nämlich dass nach drei Monaten die Anfangspopulation wieder erreicht ist, weil gilt: $P^3 \cdot X_0 = X_0 = P^2 \cdot (P \cdot X_0) = P^2 \cdot X_1 = P \cdot (P \cdot X_1) = P \cdot X_2 = X_3$. Dabei ist X_0 der Anfangsbestand, X_1 der Bestand nach 1 Monat, X_2 nach 2 und X_3 nach 3 Monaten.		10	10
e)	$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \\ cb & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \\ cb & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Die Bedingung lautet $a \cdot b \cdot c = 1$, was bei obiger Matrix P erfüllt ist. Da $M^3 = \textit{Einheitsmatrix } E$ folgt $M^4 = M^3 \cdot M = E \cdot M = M$. Die Potenzen dieser Matrizen der Form M können also nur drei verschiedene Werte annehmen, die zyklisch auftreten: $M = M^4 = M^7 = \ldots \qquad M^2 = M^5 = M^8 = \ldots \qquad M^3 = M^6 = M^9 = \ldots = E$		10	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 5 Kastanien-Miniermotte

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$. $\text{Larven}_{\text{neu}} = 20 \cdot \text{Falter}_{\text{alt}}$. Jeder Falter legt Eier, aus denen sich im Durchschnitt 20 Larven entwickeln. $SP_{\text{neu}} = 0{,}4 \cdot L_{\text{alt}}$: 40 % der Larven werden zu SP. $WP_{\text{neu}} = 0{,}2 \cdot L_{\text{alt}}$: 20 % der Larven werden zu WP. $F_{\text{neu}} = 0{,}5 \cdot WP_{\text{alt}}$: 50 % der Winter-Puppen werden zu F.	10		
b)	Es ist $\vec{v}_1 = P \cdot \vec{v}_0$ die erste Entwicklungsphase der Junigeneration. Die zweite Entwicklungsphase ist $\vec{v}_2 = P \cdot \vec{v}_1$ und somit die dritte Entwicklungsphase der Junigeneration $\vec{v}_3 = P \cdot \vec{v}_2$. Es ergibt sich: $\vec{v}_1 = P \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_2 = P \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_3 = P \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0{,}4 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 400 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}$ Somit gibt es $400 + 200 = 600$ Puppen.	10		

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
c)	Es ist $P^3 = P\cdot P^2$ $= P\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&20\\0{,}4&0&0&0\\0{,}2&0&0&0\\0&0&0{,}5&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&20\\0{,}4&0&0&0\\0{,}2&0&0&0\\0&0&0{,}5&0\end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix}0&0&0&20\\0{,}4&0&0&0\\0{,}2&0&0&0\\0&0&0{,}5&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&10&0\\0&0&0&8\\0&0&0&4\\0{,}1&0&0&0\end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&0&4&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ Man rechnet weiter $\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&0&4&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\100\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\400\\200\\0\end{pmatrix}$ und erhält das gleiche Ergebnis wie in b).		15	
d)	– Die Zahl 15 stellt die Eier dar, die die Falter legen und aus denen sich Larven entwickeln. – Aus $0{,}6 = 60\%$ der Larven entstehen Winter-Puppen. – Aus der Zahl 1 ergibt sich, dass die Winter-Puppen vollständig in ihrem Zustand verbleiben. – Aus $0{,}7 = 70\%$ der Sommer-Puppen enstehen Falter.		10	
e)	Es ist $\vec{w}_1 = Q\cdot\vec{v}_3$ die erste Entwicklungsstufe der Augustgeneration. Damit ist die zweite Entwicklungsstufe $\vec{w}_2 = Q\cdot\vec{w}_1$ und die dritte Entwicklungsstufe der Augustgeneration $\vec{w}_3 = Q\cdot\vec{w}_2$. Die Rechnungen hierzu: $\vec{w}_1 = Q\cdot\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}0&0&0&15\\0&0&0&0\\0{,}6&0&1&0\\0&0{,}7&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\400\\200\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\200\\280\end{pmatrix}$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	$\vec{w}_2 = Q \cdot \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \\ 280 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4200 \\ 0 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{w}_3 = Q \cdot \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4200 \\ 0 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2720 \\ 0 \end{pmatrix}$ Am Ende vom August gibt es 2720 Winter-Puppen.	10		
f)	Es wird der Anfangsvektor mit der Matrix P multipliziert und dann jeweils das Ergebnis nacheinander zweimal mit P und dann dreimal mit Q multipliziert: $w_3 = Q \cdot \left(Q \cdot \left(Q \cdot \left(P \cdot \left(P \cdot \left(P \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \right) \right) \right) = Q \cdot \left(Q \cdot \left(Q \cdot v_3 \right) \right)$ Es gilt das Assoziativgesetz der Matrizenmultiplikation: $w_3 = \left(Q^3 \cdot P^3 \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(Q^3 \right) \cdot v_3 .$ Deshalb muss man die Matrix $R = Q^3 \cdot P^3$ bestimmen, um direkt die Entwicklung im Juni und August zu ermitteln. Es ist $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 6,3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,2 & 0 & 27,2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Somit kann man $\vec{w}_3$ direkt berechnen: $$\vec{w}_3 = R \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}2 & 0 & 27{,}2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2720 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Es bestätigt sich damit das Ergebnis aus e).		15	
g)	Man kann neu rechnen oder aber auch direkt argumentieren, dass jede Anfangsanzahl an Winter-Puppen sich nach Ablauf der beiden Monate Juni und August mit dem Faktor 27,2 vermehrt hat. Um den Kehrwert dieses Faktors muss also die Verbrennaktion die Winter-Puppen vermindern, also mit dem Faktor $\frac{1}{27{,}2} \approx 0{,}037$, das bedeutet eine Verminderung um 96,3 %. Wenn man unterstellt, dass die Winter-Puppen sich homogen im Laub verteilen, müssten also ca. 96,3 % des Herbstlaubs verbrannt werden, *um die Zahl der Winter-Larven wenigstens konstant (bei ca. 100) zu halten.* *Eine Verbrennung von 97 % vermindert die Zahl der Winterlarven auf (gerundet) 80. Auch diese Antwort kann man gelten lassen.*		10	
h)	Es sei *f* der – durch Tötung der Jungfalter – verursachte Verminderungsfaktor, den man als variabel betrachten kann. Dann kann man sich vorstellen, dass jeweils die Anzahl der entstehenden Falter um den Faktor *f* reduziert wird. Für die Entstehung der Falter sind die beiden Faktoren 0,5 in *P* bzw. 0,7 in Q „verantwortlich“ ,diese müssen also durch $f \cdot 0{,}5$ bzw. $f \cdot 0{,}7$ ersetzt werden. Jetzt kann man die Rechnung z.B. von f) unter Mitführung der Variablen *f* durchführen und dann *f* so bestimmen, dass der Wert in der dritten Zeile und dritten Spalte in der Gesamtmatrix $Q_f{}^3 \cdot P_f{}^3$ Eins wird. Dazu muss die entsprechende Gleichung gelöst werden. $(1-f)\cdot 100$ ist dann der gesuchte Mindestprozentsatz.			20
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

Aufgabe 6 Fruchtsäfte

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

$C = A\cdot B$ und $C = \begin{pmatrix}26&31&7\\60&64&10\\16&6&12\\32&33&9\end{pmatrix}$

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix}1&3&0\\0&6&2\\a_{31}&0&a_{33}\\1&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&4\\8&10&1\\6&2&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}26&31&7\\60&64&10\\2a_{31}+6a_{33}&a_{31}+2a_{33}&4a_{31}+2a_{33}\\32&33&9\end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}2a_{31} + 6a_{33} &= 16\\ a_{31} + 2a_{33} &= 6\\ 4a_{31} + 2a_{33} &= 12\end{aligned}$$

Durch Auflösen von 2 Gleichungen und Einsetzen in die 3. Gleichung erhält man: $a_{31} = 2$ und $a_{33} = 2$.

$C\cdot\vec{x}_E = \vec{x}_R$ *mit* $\vec{x}_E = \begin{pmatrix}150\\200\\250\end{pmatrix}$ bedeutet $\begin{pmatrix}26&31&7\\60&64&10\\16&6&12\\32&33&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}150\\200\\250\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11850\\24300\\6600\\13650\end{pmatrix}$

Zur Herstellung von 150 ME von E_1, 200 ME von E_2 und 250 ME von E_3 werden folgende Rohstoffvorräte benötigt: 11850 ME von R_1, 24300 ME von R_2, 6600 ME von R_3 und 13650 ME von R_4.

</td><td>10</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

$B\cdot\vec{x}_E = \vec{x}_Z$ mit $\vec{x}_Z = \begin{pmatrix}75\\z_2\\100\end{pmatrix}$ und $\vec{x}_E = \begin{pmatrix}e_1\\e_2\\12\end{pmatrix}$

$$B\cdot\vec{x}_E = \begin{pmatrix}2&1&4\\8&10&1\\6&2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2e_1+e_2+48\\8e_1+10e_2+12\\6e_1+2e_2+24\end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}2e_1 + e_2 + 48 &= 75 & & I & 2e_1 + e_2 &= 27\\ 8e_1 + 10e_2 + 12 &= z_2 & \text{oder} \quad & II & 8e_1 + 10e_2 - z_2 &= -12\\ 6e_1 + 2e_2 + 24 &= 100 & & III & 6e_1 + 2e_2 &= 76\end{aligned}$$

Aus *I* folgt: $e_2 = 27 - 2e_1$. Eingesetzt in *III* ergibt sich:

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung,
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
$6e_1 + 2(27 - 2e_1) = 76$
$6e_1 + 54 - 4e_1 = 76$
$+54 = 76$.
$2e_1 = 22$
$e_1 = 11$

Dieses Ergebnis in III eingesetzt ergibt $e_2 = 5$.
Einsetze in Gleichung II liefert $z_2 = 150$.

Möglich ist auch die formale Lösung des LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 27 \\ 8 & 10 & -1 & -12 \\ 6 & 2 & 0 & 76 \end{array}\right) \xrightarrow[-III+3\cdot I]{-II+4\cdot I} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & -6 & 1 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[II+6\cdot III]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & 1 & 150 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right)$$
Hieraus lässt sich ablesen: $e_2 = 5 \wedge z_2 = 150$, eingesetzt in I folgt $e_1 = 11$

Die genannten Zwischenproduktbestände lassen sich bei der Produktion aller Endprodukte vollständig verarbeiten. Das Werk A muss dazu 150 ME von Z_2 liefern und es können zu den bestellten 12 ME von E_3, 11 ME von E_1 und 5 ME von E_2 hergestellt werden.
</td><td>10</td><td>15</td><td>5</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>
Wenn ein bestimmter Lagervorrat an Zwischenprodukten zur Gewährleistung eines reibungslosen Produktionsablaufes in Werk B bereitgehalten werden soll, so erfordert dies zunächst Kapital in Höhe der Herstellkosten der Vorräte.

Die Finanzierung der Lagervorräte kann entweder aus eigenen Mitteln oder durch Kredite (Fremdmittel) erfolgen. In beiden Fällen ist das Kapital in den Vorräten gebunden und für andere Zwecke nicht verfügbar. Zum Kapitalbedarf für die Vorräte kommen noch Folgekosten der Finanzierung hinzu:

- bei der Eigenfinanzierung entgehen dem Unternehmen Erträge aus der Nutzung anderweitiger Investitionsmöglichkeiten,

- bei der Fremdfinanzierung fallen Zinsaufwendungen für die Kredite auf die Lagerhaltung an.

Jede andere (eventuell kürzere) Darstellung mit obigen Aspekten wird als richtig bewertet.
</td><td></td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>
<u>Bestimmung des Minimums von K:</u>

$K'(t) = 3t^2 + 24t - 144$ und
$K''(t) = 6t + 24$

$K'(t) = 0$ = 0 bedeutet

$3t^2 + 24t - 144 = 0$ bzw.
$t^2 + 8t - 48 = 0$
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$t_{1/2} = -4 \pm \sqrt{16+48} \Rightarrow t_1 = 4$ und $t_2 = -12$. t_2 liegt nicht in $]0;9]$, also wird nur noch t_1 betrachtet. t_1 ist mögliche Extremstelle und aus $K''(4) = 48 > 0$ folgt, dass die Gesamtkosten K für $t_1 = 4$ minimal werden. <u>Wann ist das neue Verfahren kostengünstiger?</u> *Der Nachweis kann z. B. über die Lösung einer Ungleichung oder mithilfe einer geeigneten Wertetabelle erfolgen.* <u>Ungleichung</u> $K(t) < 5000$ $t^3 + 12t^2 - 144t + 5000 < 5000$ $t^3 + 12t^2 - 144t < 0$ $t \cdot (t^2 + 12t - 144) < 0$ $t^2 + 12t - 144 = 0$ hat die Lösungen $t_1 \approx 7,42$ und $t_2 \approx -19,42$. Aus $t(t-7,42)(t+19,42) < 0$ folgt $0 < t < 7,42$. Da t ganzzahlig aus]0,9] gewählt werden muss, kommen also 1, 2, 3, 4, 5, 6 oder 7 in Frage. *<u>Oder</u>* Wertetabelle: <table><tr><th>*t*</th><th>*K(t)*</th></tr><tr><td>1</td><td>4869</td></tr><tr><td>2</td><td>4768</td></tr><tr><td>3</td><td>4703</td></tr><tr><td>4</td><td>4680</td></tr><tr><td>5</td><td>4705</td></tr></table><table><tr><th>*t*</th><th>*K(t)*</th></tr><tr><td>6</td><td>4784</td></tr><tr><td>7</td><td>4923</td></tr><tr><td>8</td><td>5128</td></tr><tr><td>9</td><td>5405</td></tr></table> Als ganzzahlige Werte für t kommen demnach nur 1, 2, 3, 4, 5, 6, oder 7 in Frage. Die neue Kostensituation ist in Abhängigkeit von t als positiv zu bewerten, weil durch die Umstellung der Produktion auf die neue Technologie die Bandbreite für eine Kostenminderung ($0 < t < 7,42$) erheblich größer ist als für eine Kostenerhöhung ($7,42 < t \leq 9$).		25	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 7 GPS

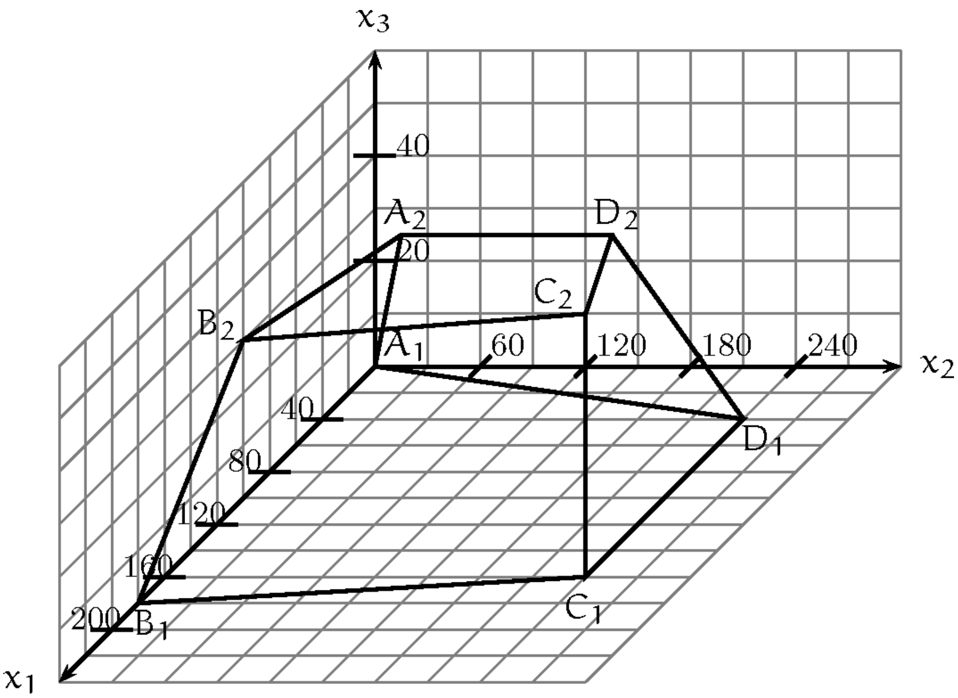
Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Aus den als bekannt vorausgesetzten Informationen geht hervor, dass sich die Person gleichzeitig auf der Oberfläche von drei Kugeln befinden muss: • der Erdkugel • der Kugel um Sat_1 mit dem Radius d_1 und • der Kugel um Sat_2 mit dem Radius d_2. Wenn die Daten realistisch sind, dann müssen sich die Erdoberfläche und jede der beiden anderen Kugeloberflächen jeweils in einem Kreis schneiden, den man berechnen kann. Die beiden Schnittkreise schneiden sich dann in zwei Punkten, die man dann auch berechnen kann und die in der Regel weit voneinander entfernt liegen, so dass man aus der grob ungefähren Kenntnis des Standortes der Person einen von beiden ausschließen kann.		25	
b)	Es sei $P(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$ ein variabler Punkt. Die Kugelgleichung lautet dann: $\left(\vec{p}-\overrightarrow{sat_1}\right)^2 = d_1^2$, also $\left(x_1-2\right)^2+\left(x_2-2\right)^2+\left(x_3-3\right)^2=3{,}2^2$. Für die Erdoberfläche gilt: $P^2=1$, also $x_1^2+x_2^2+x_3^3=1$. Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt: $4x_1+4x_2+6x_3-17=-\frac{231}{25}$. Durch Multiplikation der Gleichung mit 25 erhält man das genannte Ergebnis: $100x_1+100x_2+150x_3=194$. Es handelt sich um eine Ebenengleichung. Alle gemeinsamen Punkte auf den beiden Kugeloberflächen müssen diese Gleichung erfüllen (Umkehrung gilt nicht!), also muss es sich um die Ebene des Schnittkreises handeln.	20		
c)	Wenn man das unterbestimmte lineare Gleichungssystem $100x_1+100x_2+150x_3=194$ $600x_1+400x_2+400x_3=711$ äquivalent umformt (Gauß-Algorithmus) erhält man z.B. $x_2=\frac{581}{400}-\frac{5}{2}x_1 \qquad x_3=\frac{13}{40}+x_1$ Daraus erhält man folgende Parameterform der Schnittgeraden der beiden Schnittkreisebenen: $g:\ \vec{p}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{581}{400}\\ \frac{13}{40}\end{pmatrix}+x\cdot\begin{pmatrix}1\\ -2{,}5\\ 1\end{pmatrix}$.		20	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
d)	Der Standort der Person muss sowohl auf dieser Geraden, als auch auf der Erdoberfläche liegen. Das führt auf folgende quadratische Gleichung: $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{581}{400} \\ \frac{13}{40} \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)^2 = 1.$ *Die Gleichung oder ein anderer zutreffender Ansatz kann auch verbal beschrieben werden.*			10
e)	Mit der Umrechnung $(\beta\,;\lambda) \to (\cos(\beta)\cdot\cos(\lambda) \mid \cos(\beta)\cdot\sin(\lambda) \mid \sin(\beta))$ berechnen wir die Koordinaten von Hamburg $H = (\cos 53{,}5°\cdot\cos 10° \mid \cos 53{,}5°\cdot\sin 10° \mid \sin 53{,}5°) \approx (0{,}58579 \mid 0{,}10329 \mid 0{,}80386)$ und der Position *Pos* $Pos = (\cos 57{,}3°\cdot\cos 17{,}5° \mid \cos 57{,}3°\cdot\sin 17{,}5° \mid \sin 57{,}3°) \approx (0{,}51524 \mid 0{,}16245 \mid 0{,}84151).$ Sowohl *H* als auch *Pos* liegen auf der Erdoberfläche, haben also in dem gewählten Maßstab den Betrag 1. Mit Hilfe des Skalarproduktes berechnet man den sphärischen Winkel: $\sphericalangle H\,O\,Pos \approx \cos^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0{,}58579 \\ 0{,}10329 \\ 0{,}80386 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}51524 \\ 0{,}16245 \\ 0{,}84151 \end{pmatrix}\right) \approx \cos^{-1}(0{,}99506) \approx 5{,}7°.$ Für die zugehörige Bogenlänge auf der Erdoberfläche gilt dann: $b \approx \frac{5{,}7}{360}\cdot 40\,000 \approx 633.$ Die kürzeste Weglänge auf der Erdoberfläche von Hamburg zur Position der Person beträgt etwa 633 km.		15	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 8 Ausstellungshalle

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Zeichnung:

</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Die Strecken $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{C_1D_1}$ liegen parallel zueinander.

Begründung: Die zweite und dritte Komponente von A_1 und B_1 sind ebenso identisch wie die zweite und dritte Komponente von C_1 und D_1.

Oder: $\overrightarrow{A_1B_1} = \begin{pmatrix} 180 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{C_1D_1} = \begin{pmatrix} -120 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Also ist das Viereck ein Trapez für dessen Flächeninhalt die Trapezformel gilt:

$A = \frac{(\overline{A_1B_1} + \overline{C_1D_1}) \cdot h}{2} = \frac{(180 + 120) \cdot 240}{2} = 36\,000$,

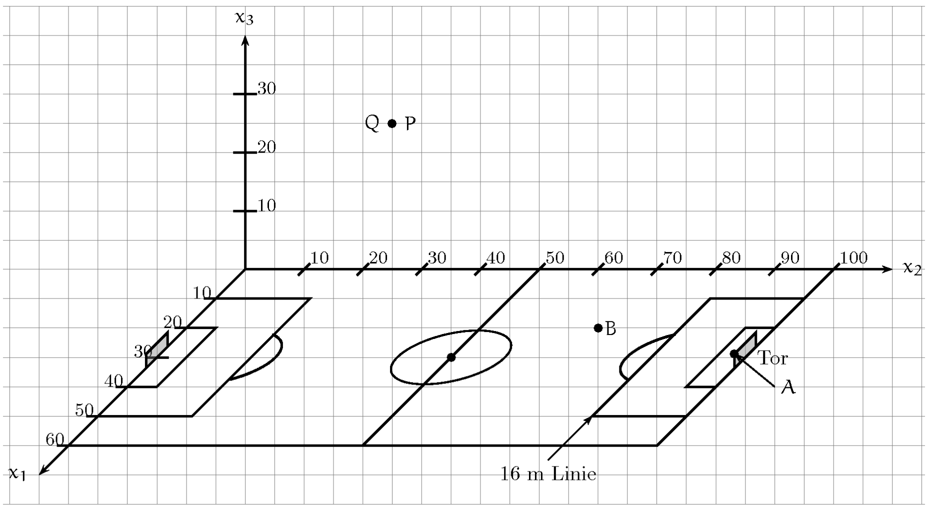
Der Flächeninhalt ist also 36 000 m² groß.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
c)	Ermittlung des Schnittpunkts zweier Geraden mit der jeweiligen Vektorgleichung $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}$. Es ergeben sich die Richtungsvektoren $\overrightarrow{B_2 A_2} = \begin{pmatrix} -80 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{C_2 D_2} = \begin{pmatrix} -60 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}$ und somit $g_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 140 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -80 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie $g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 120 \\ 210 \\ 40 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -60 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$. Der Schnittpunkt ergibt sich durch das Gleichsetzen und die Lösung des entstehenden Gleichungssystems: $g_1 = g_2$: ergibt I) $140 - 80r = 120 - 60s$ II) $30 + 30r = 210 - 30s \Rightarrow r = 6 - s$; einsetzen in I) $s = \frac{23}{7} \approx 3{,}285$. Nach Einsetzen in g_1 oder g_2 erhält man: $S \approx \begin{pmatrix} -77{,}1 \\ 111{,}4 \\ 40 \end{pmatrix}$.		20	
d)	$cos(\alpha) = \frac{\left(\overrightarrow{B_2 A_2}\right) \cdot \left(\overrightarrow{C_2 D_2}\right)}{\left\|\overrightarrow{B_2 A_2}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{C_2 D_2}\right\|} = \frac{\begin{pmatrix} -80 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{7300} \cdot \sqrt{4500}} \approx \frac{3900}{5732} \approx 0{,}68 \Rightarrow \alpha \approx 47{,}1°.$	5		

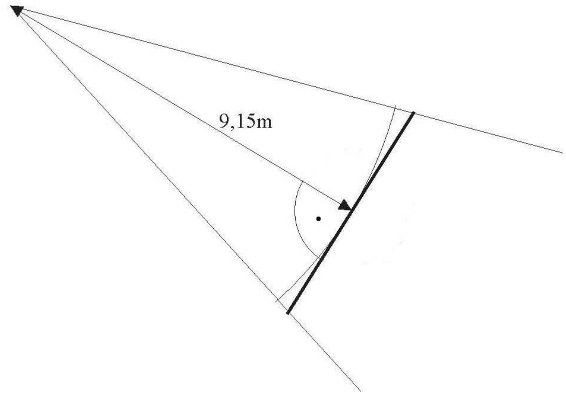
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
e)	Die Mitte der Gebäudekante ist im Punkt $M\ (30\|30\|20)$. Länge des Stützpfeilers: $\sqrt{(36\frac{2}{3}-30)^2+(36\frac{2}{3}-30)^2+20^2}\approx 22{,}1$. Das Skalarprodukt der Richtungen der Kante und des Pfeilers $\begin{pmatrix}60\\60\\40\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\frac{2}{3}\\6\frac{2}{3}\\-20\end{pmatrix}=0$ zeigt, dass die Richtungen senkrecht zueinander sind.	10	5	
f)	Lösung für die Bestimmung von *k*: Die Kante $\overline{B_2C_2}$ liegt genau dann in der Treppenebene, wenn beide Punkte in dieser Ebene liegen. Mit $B_2\in E$ gilt: $18\cdot 140+2\cdot 30+k\cdot 40=3660\Rightarrow k=27$. Prüfen mit C_2: $18\cdot 120+2\cdot 210+27\cdot 40=3660$. Also liegt auch C_2 in der Ebene und somit die ganze Kante. Mit k = 27 ist die Forderung erfüllt.		10	5
g)	Der Neigungswinkel lässt sich als Winkel zwischen Normalenvektoren der Treppenebene und des Bodens berechnen. Der Normalenvektor der Treppenebene kann aus Aufgabenteil f entnommen werden, der Normalenvektor des Bodens ist klar. $\cos\alpha=\dfrac{\begin{pmatrix}18\\2\\27\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{18^2+2^2+27^2}}\approx\dfrac{27}{32{,}5}\approx 0{,}83\Rightarrow\alpha\approx 33{,}9°.$ Somit hat die Treppe als Freitreppe einen unzulässig großen Neigungswinkel.			15
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

Aufgabe 9 Fußball

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Koordinaten von *A*: Es gilt $x_2 = 100$ und $x_3 = 2{,}4$ und weiter $x_1 = 30 + \frac{7{,}3}{2} = 33{,}65$, also $A(33{,}65 \mid 100 \mid 2{,}4)$.	10		
b)	 Das Einzeichnen ergibt, dass *P* und *Q* die gleiche Lage auf dem Papier haben. Ein möglicher dritter Punkt kann bestimmt werden, indem zuerst eine frei gewählte Länge in x_3-Richtung im Koordinatensystem abgetragen wird, z.B. $x_3 = 40$, und anschließend passend die Lage des Punktes in der x_1-x_2-Ebene bestimmt wird: (30 | 40 | 40). Das Verfahren zur Bestimmung sollte entweder beschrieben werden oder aus der Zeichnung im Koordinatensystem erkennbar sein. Auch die freie Wahl der x_1-Koordinate (oder x_2-Koordinate) ist möglich.	5	10	
c)	Die Torlinie zwischen den Pfosten besteht im Prinzip aus unendlich vielen Punkten. Zur Abstandsbestimmung des Freistoßpunktes *F*(20 | 75 | 0) mit dieser Torlinie können unterschiedliche Punkte gewählt werden. Zwei Möglichkeiten sind: 1. Die **kürzeste Entfernung** zum vom Spieler aus linken Pfosten (Koordinaten (26,35 | 100 | 0)). $s_1 = \sqrt{(26{,}35-20)^2+(100-75)^2+(0-0)^2} \approx 25{,}79\ (m)$. 2. Der **Abstand zur Tormitte** (Koordinaten (30 | 100 | 0)): $s_2 = \sqrt{(30-20)^2+(100-75)^2+(0-0)^2} \approx 26{,}93\ (m)$.	10	5	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
d)	Der Ballmittelpunkt ist 11 cm über dem Freistoßpunkt, denn der Radius ist zu beachten: $G(20 \mid 75 \mid 0{,}11)$. Für den Punkt W im Torwinkel ist der Punkt A aus Aufgabenteil a) Ausgangspunkt, doch der Ballmittelpunkt (Radius $r = 0{,}11$ m) ist zu beachten! Mit $x_1 = 30 + 7{,}3 : 2 - 0{,}11$ und $x_3 = 2{,}4 - 0{,}11$ ergibt sich $W(33{,}54 \mid 100 \mid 2{,}29)$. Aus den zwei Punkten G und W ergibt sich dann die Geradengleichung: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 75 \\ 0{,}11 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 33{,}54 - 20 \\ 100 - 75 \\ 2{,}29 - 0{,}11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 75 \\ 0{,}11 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 13{,}54 \\ 25 \\ 2{,}18 \end{pmatrix}$.		5	10
e)	Am gesuchten Punkt der 16-m-Linie ist die x_2-Koordinate des Ballmittelpunktes 84, mit der Geradengleichung aus d) ergibt sich die einfache Gleichung $\begin{pmatrix} 20 \\ 75 \\ 0{,}11 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 13{,}54 \\ 25 \\ 2{,}18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 84 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow r = \frac{9}{25} = 0{,}36$ Eingesetzt in die Geradengleichung ergibt sich eine Höhe des Ballmittelpunktes $x_3 = 0{,}11 + 0{,}36 \cdot 2{,}18 = 0{,}8948$. Der Ballmittelpunkt passiert die 16-m-Linie etwa in einer Höhe von 89 cm.		15	
f)	Die zwei Richtungsvektoren von $F(20 \mid 75 \mid 0)$ zu den Torpfosten $(26{,}35 \mid 100 \mid 0)$ bzw. $(33{,}65 \mid 100 \mid 0)$ müssen bestimmt werden. Damit ist der Winkel zu berechnen gemäß: $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} 6{,}35 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13{,}65 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 6{,}35 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 13{,}65 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} \approx \dfrac{711{,}7}{734{,}7} \approx 0{,}969$. Damit gilt: $\alpha \approx 14{,}4°$.	5	10	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>g)</td><td>Eine Skizze könnte wie folgt aussehen:


Nach der Regel vom Mindestabstand dürften die Abwehrspieler auf einem Kreisbogen stehen, der den Torwinkel abdeckt. Da die Mauer jedoch gerade ist, verläuft sie tangential zu diesem Kreisbogen, wenn die Länge minimal sein soll. Der Berührpunkt der Mauer mit dem Bogen ist dann die Mitte der Mauer (unmittelbar aus der Anschauung einsichtig, ein Nachweis hierfür wird nicht verlangt).

Für die halbe Länge $\frac{l}{2}$ dieser Mauer gilt:

$$\tan 8° = \frac{\frac{l}{2}}{9{,}15}$$
$$l = \tan 8° \cdot 18{,}3$$
$$l = 2{,}571...$$

Die Länge der Mauer beträgt ca. 2,60 m.</td><td></td><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>30</td><td>50</td><td>20</td></tr>
</table>

Aufgabe 10 Louvre Pyramide

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	*S* liegt in x_3-Richtung 22 m über dem Mittelpunkt $M(17{,}5 \mid 17{,}5 \mid 0)$ der Grundfläche der Pyramide. Darum hat *S* die Koordinaten $(17{,}5 \mid 17{,}5 \mid 22)$. *Zeichnung siehe Anlage.*	10		
b)	Eine Parameterform der Ebene *E* ergibt sich aus der Drei-Punkte-Form: $\boldsymbol{E}: \vec{x} = \overrightarrow{0A} + r \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AS}\ ,\ r,t \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 17{,}5 \\ 17{,}5 \\ 22 \end{pmatrix}\ ,\ r,t \in \mathbb{R}$. Eine Koordinatenform lässt sich mithilfe eines Normalenvektors zur Ebene oder durch Umformen eines Gleichungssystems finden zu: $44x_2 - 35x_3 = 0$.		20	
c)	Um auf a) zurückgreifen zu können, betrachten wir die Seitenfläche *ABS*: Der Winkel, den zwei Ebenen einschließen, entspricht dem Winkel zwischen den zugehörigen Normalenvektoren der Ebenen. Einen Normalenvektor $\vec{n}$ von $\boldsymbol{E}$ entnimmt man der Koordinatendarstellung aus Teil b): $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 44 \\ -35 \end{pmatrix}$. Ein Normalenvektor $\vec{n}_{x_1,x_2}$ zur x_1x_2-Ebene ist z.B. $\vec{n}_{x_1,x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Über die Beziehung $\cos(\alpha) = \frac{\lvert \vec{n} \cdot \vec{n}_{x_1,x_2} \rvert}{\lvert\vec{n}\rvert \cdot \lvert\vec{n}_{x_1,x_2}\rvert}$ erhält man einen Winkel zwischen den Normalenvektoren von 51,50°, der dem Winkel zwischen der Pyramidenfläche *ABS* und dem Fußboden entspricht. <u>Alternative:</u> Man betrachtet das bei *M* rechtwinklige Dreieck SMM_x, wobei *M* der Mittelpunkt der Bodenfläche und M_x der Mittelpunkt der Pyramidenkante $\overline{AB}$ sei. Dieses Dreieck hat die Kathetenlängen 22 m und 17,5 m. Der gesuchte Winkel liegt der Seite $\overline{MS}$ gegenüber. Also $\tan(\alpha) = \frac{22}{17{,}5}$, und damit $\alpha \approx 51{,}5°$.		20	
d)	Die zur Fußbodenseite gehörende Höhe eines jeden der Pyramidendreiecke erhält man mithilfe des Satzes von Pythagoras aus der Höhe der Pyramide und der halben Fußbodenseite: $h_\Delta = \sqrt{22^2 + 17{,}5^2}$ und damit: $A_\Delta = \frac{35 \cdot h_\Delta}{2}\,\mathrm{m}^2 \approx 492\,\mathrm{m}^2$. Acht Flächen sind zu reinigen, also rund 4 000 Quadratmeter.	10	10	

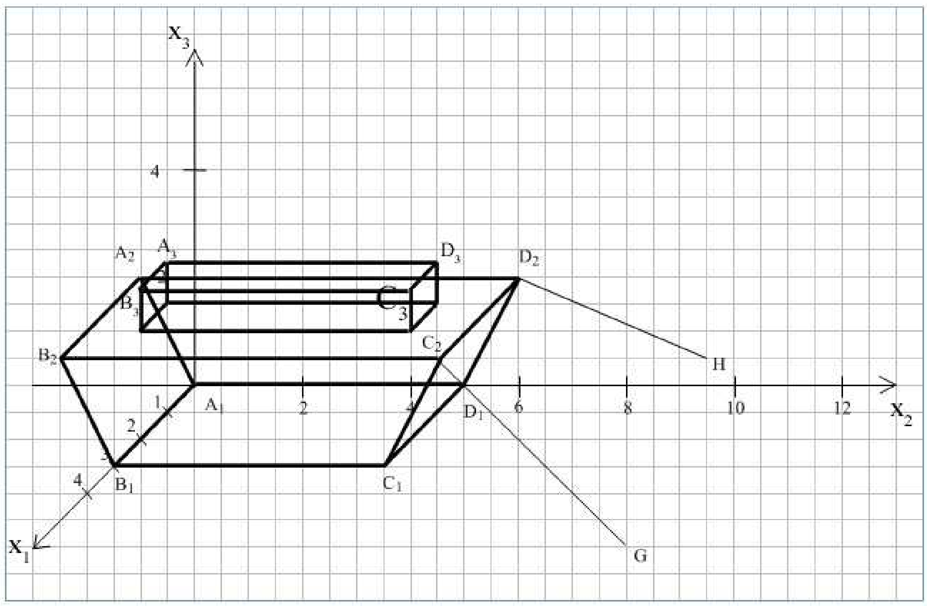
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Die Geradengleichung des „Sonnenstrahls“ durch S lautet: $g_5:\ \vec{x}=\overrightarrow{OS}+t\cdot\vec{r}=\begin{pmatrix}15t+\frac{35}{2}\\ 10t+\frac{35}{2}\\ -10t+22\end{pmatrix}$. Auf dem Fußboden ist die x_3-Komponente Null. Also gilt für den Schattenpunkt P der Pyramidenspitze: $t=\frac{11}{5}$ und damit hat P die Koordinaten: $(\,50{,}5 \mid 39{,}5 \mid 0\,)$.		10	
f)	Der Schwerpunkt M_1 des Dreiecks ABS hat den Ortsvektor $\overrightarrow{0M}_1=\frac{\overrightarrow{0A}+\overrightarrow{0B}+\overrightarrow{0S}}{3}$ und damit hat M_1 die Koordinaten: $\left(\frac{35}{2}\mid\frac{35}{6}\mid\frac{22}{3}\right)$ *Wenn diese Schwerpunktformel nicht bekannt ist, kann man auch rechnen:* $\overrightarrow{0M}_1=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{0S}+\overrightarrow{0B}}{2}\right)$, da A im Koordinatenursprung liegt. Damit hat M_1 die Koordinaten: $\left(\frac{35}{2}\mid\frac{35}{6}\mid\frac{22}{3}\right)$. *Falls gar keine Kenntnisse über den Schwerpunkt von Dreiecken vorhanden sind, kann man der Formelsammlung entnehmen, dass dieser der Schnittpunkt von zwei (aller drei) Seitenhalbierenden ist. Auch auf diesem Wege kann (notfalls) der Schwerpunkt M_1 ermittelt werden.* Der Scheinwerfer liegt auf einer Geraden mit der Gleichung: $g:\ \vec{x}=\overrightarrow{OM_1}+t\cdot\vec{n}=\overrightarrow{OM_1}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\44\\-35\end{pmatrix}$ (vgl. Teil c)) Um den gesuchten Scheinwerferpunkt M_S zu ermitteln, ist t so zu bestimmen, dass die zweite Komponente –7 wird. Also $44\cdot t+\frac{35}{6}=-7$. Man erhält: $t=-\frac{7}{24}\approx-0{,}29$ und damit die Koordinaten für den Ort M_S der Lichtquelle: $\left(\frac{35}{2}\mid-7\mid\frac{421}{24}\right)\approx(17{,}5\mid-7\mid17{,}5)$. Die notwendige Höhe der Lichtquelle beträgt also 17,5 m.			20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 11 Abenteuerspielplatz

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

Die Koordinaten lassen sich direkt den Angaben in der Aufgabenstellung entnehmen: $A_3(1|0|2{,}75)$, $B_3(2|0|2{,}75)$, $C_3(2|5|2{,}75)$, $D_3(1|5|2{,}75)$.



Das Einzeichnen der Kletterstangen ist nicht Bestandteil der Aufgabenstellung und deshalb zum Erreichen der vollen Punktzahl nicht notwendig.

</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Die Länge der Stange zwischen G und C_2 entspricht der Länge des Vektors $\overrightarrow{GC_2}$, Entsprechendes gilt für die Länge der Stange zwischen H und D_2.

$|\overrightarrow{GC_2}| = \sqrt{(3-6)^2+(6-11)^2+(2-0)^2} = \sqrt{38} \approx 6{,}16$.

Die Länge der Stange zwischen G und C_2 beträgt ungefähr 6,20 m.

$|\overrightarrow{HD_2}| = \sqrt{(0-(-3))^2+(6-8)^2+(2-(-1))^2} = \sqrt{22} \approx 4{,}70$.

Die Länge der Stange zwischen H und D_2 beträgt ungefähr 4,70 m.

</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Um zu zeigen, dass der Wunsch der Eltern nicht erfüllt werden kann, ist zu zeigen, dass die vier Punkte C_2, D_2, G und H <u>nicht</u> in einer Ebene liegen.

Um dies zu überprüfen, stellt man die Gleichung einer Ebene auf, in der drei der gegebenen Punkte liegen, und überprüft, ob der vierte Punkt ebenfalls auf dieser Ebene liegt. Dies sei hier exemplarisch für die Ebene, die durch die Punkte C_2, D_2 und G aufgespannt wird, gezeigt.

Eine Gleichung der Ebene lautet:
$E: \vec{x} = \overrightarrow{OC_2} + r \cdot \overrightarrow{C_2D_2} + s \cdot \overrightarrow{C_2G}$, $r, s \in \mathbb{R}$.

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

$$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix},\ r,s\in\mathbb{R}$$

Nun ist noch zu zeigen, dass *H* nicht auf dieser Ebene liegt:

$$\begin{pmatrix}-3\\8\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix},\ r,s\in\mathbb{R}$$

führt zu einem leicht lösbaren Gleichungssystem, in dem es ausreicht, die beiden letzten Zeilen zu untersuchen:

$$\begin{matrix}(II) & 8=6+5s \\ (III) & -1=2-2s\end{matrix}\quad\rightarrow\quad\begin{matrix}(II) & s=0,4 \\ (III) & s=1,5\end{matrix}$$

Dies führt zu einem Widerspruch, der Punkt *H* liegt also nicht in der Ebene *E*. Es ist somit nicht möglich, eine ebene Holzwand zwischen den beiden Stangen anzubringen.

Alternativ kann auch gezeigt werden, dass die Gerade durch G und C_2 und die Gerade durch H und D_2 windschief sind.

</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

Der Flächeninhalt des Dreiecks GHC_2 ist zu bestimmen. Eine Möglichkeit ist die Verwendung der Formel $A_\Delta=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\gamma$, wobei γ der von *a* und *b* eingeschlossene Winkel ist.

Es sei *a* die Länge der Strecke $\overline{GH}$, also $a=|GH|$, und $b=|GC_2|$. Dann gilt

$$|GH|=\sqrt{(-3-6)^2+(8-11)^2+(-1-0))^2}=\sqrt{91}.$$

Die Länge $|GC_2|$ ist in Aufgabe b) mit $\sqrt{38}$ ermittelt worden.

Zu bestimmen ist noch die Größe des eingeschlossenen Winkels $\gamma=|\sphericalangle HGC_2|$:

$$\cos\gamma=\frac{\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{GC_2}}{|\overrightarrow{GH}|\cdot|\overrightarrow{GC_2}|}=\frac{\begin{pmatrix}-9\\-3\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-5\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{91}\cdot\sqrt{38}}=\frac{40}{\sqrt{91}\cdot\sqrt{38}}=0,680...$$

$$\gamma=47,139...$$

Mit Hilfe dieser Angaben lässt sich nun die Fläche des Dreiecks GHC_2 bestimmen:

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$A_{\triangle GHC_2} = \frac{1}{2} \cdot \lvert GH \rvert \cdot \lvert GC_2 \rvert \cdot \sin \lvert \sphericalangle HGC_2 \rvert$ $= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{91} \cdot \sqrt{38} \cdot \sin 47{,}139°$ $\approx 21{,}55...$ Zusammen mit dem (bekannten) Flächeninhalt des zweiten Dreiecks werden ca. 21,6 m^2 + 5,4 m^2 = 27 m^2 Material benötigt. *Es gibt noch weitere Möglichkeiten, den Flächeninhalt näherungsweise zu bestimmen, die ebenfalls zur vollen Punktzahl führen können.*		10	
e)	• Um nachzuweisen, dass die beiden Geraden sich nicht schneiden, muss man zunächst eine Gleichung der Geraden *h* durch die Punkte *P* und *Q* aufstellen: $h: \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + s \cdot \overrightarrow{QP} \;,\; s \in \mathbb{R}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; s \in \mathbb{R}$. Nun setzt man die Gleichungen der beiden Geraden gleich und erhält ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Variablen: $3s = 1{,}5$ $6{,}5r = 2{,}75$ $3r = 0$ Die beiden letzten Zeilen dieses Gleichungssystems widersprechen sich. Die zweite Zeile ergibt $r = -\frac{11}{26}$, die dritte hingegen $r = 0$. Die Geraden haben also keinen gemeinsamen Punkt. • Um zu zeigen, dass der zweite Tunnel im Boden der Kommandobrücke endet, ist einerseits der Schnittpunkt der Geraden *g* mit der Ebene, die durch das Deck beschrieben wird, zu berechnen. Zum anderen muss überprüft werden, ob dieser Schnittpunkt innerhalb des vorgegebenen Rechtecks der Kommandobrücke liegt. Die Deckebene ist parallel zur x_1x_2-Ebene und liegt bei $x_3 = 2$. Die Ebenengleichung lässt sich beispielsweise folgendermaßen darstellen: $E_{Deck}: \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Durch Gleichsetzen mit der Gleichung der Geraden *g* erhält man folgendes Gleichungssystem:		10	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
$x_1 = 1{,}5$
$x_2 = 5{,}25 - 6{,}5r$
$2 = 0{,}5 + 3r$

Aus der ersten Zeilen folgt direkt $x_1 = 1{,}5$. Mit Hilfe der dritten Zeile erhält man $r = 0{,}5$. Eingesetzt in die zweite Zeile ergibt sich $x_2 = 5{,}25 - 0{,}5 \cdot 6{,}5$, also $x_2 = 2$.

$S(1{,}5 \mid 2 \mid 2)$ ist somit der Schnittpunkt der Geraden mit der „Deck“-Ebene. Da dieser Punkt in x_3-Richtung auf der Höhe der Ebene liegt, in x_1-Richtung genau in der Mitte des Piratenschiffes und in x_2-Richtung 3 m vom linken Rand des Decks entfernt liegt, endet der Tunnel innerhalb der Kommandobrücke.

• Der Neigungswinkel des zweiten Tunnels gegenüber der Schiffsbodenebene lässt sich mit Hilfe des Tangens berechnen. Dies ist möglich, da die x_1-Koordinate des Richtungsvektors Null ist.
$\tan\alpha = \frac{3}{6{,}5} \quad \rightarrow \quad \alpha \approx 24{,}8°$.
Da die zulässige Steigung maximal 30° betragen soll und 24,8° < 30° ist, ist die 30°-Bedingung erfüllt.

Eine Lösung mit Hilfe des Normalenvektors ist auch möglich und zum Erreichen der vollen Punktzahl ausreichend.
</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>
Um den maximalen Durchmesser zu ermitteln, muss man den Abstand zwischen den beiden Geraden g und h ermitteln. Der Röhrendurchmesser inklusive der doppelten Dicke des Materials, aus dem die Röhren hergestellt sind, darf diesen Wert nicht überschreiten.

Unter der Annahme zweier gleich dicker Röhren ist der maximale Radius r_{max} die Hälfte des minimalen Abstandes d_{min},, also $r_{max} = 0{,}5 \cdot d_{min}$.

Der maximale Durchmesser der Röhren ist dann doppelt so groß, entspricht also dem minimalen Abstand.
</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>g)</td><td>
Die Querschnitte der zylindrischen Tunnel sind Kreisflächen. Die Tunnel müssten senkrecht zu den „Austrittsflächen“ des Schiffes verlaufen, dann wären die Austrittsöffnungen“ der Tunnel kreisförmig. Dies gilt aber nicht für beide Tunnel. Wegen des in Teilaufgabe e) berechneten Neigungswinkels von g_2 gegen die Schiffsbodenebene, also auch Ebene der Kommandobrücke, liegt bei dieser Austrittsöffnung eine elliptische Form vor. Mit den bestellten kreisförmigen Holzdeckeln wird man nicht alle Öffnungen der Tunnel verschließen können.
</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

Aufgabe 12 Elementarzelle

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Elementarzelle kann man sich in vier Einheitswürfel unterteilt denken. Die Raumdiagonale eines Einheitswürfels hat die Länge $d=\sqrt{3}$. Da der Berührungspunkt der äußeren Kugel und der Zentralkugel auf dieser Diagonalen liegt, müssen sich die beiden Radien r und r_a zu $\sqrt{3}$ ergänzen. Wenn die äußeren Kugeln sich (auf der Oberfläche der Elementarzelle) berühren, haben sie den größtmöglichen Radius von $r_a=1$. Wenn die Zentralkugel bis zur Oberfläche der Elementarzelle reicht, hat ihr Radius den größtmöglichen Wert von $r=1$. Damit gilt: $\sqrt{3}-1\le r\le 1$.	15		
b)	Die acht Kugelanteile der äußeren Kugeln, die in der Elementarzelle liegen, bilden zusammen eine Kugel mit dem Radius r_a. Damit ergibt sich die Volumenfunktion V zu $V(r)=\frac{4}{3}\pi\cdot(r_a{}^3+r^3)=\frac{4}{3}\pi\cdot((\sqrt{3}-r)^3+r^3)$. Ausmultipliziert ergibt sich $V(r)=4\sqrt{3}\cdot\pi\cdot\left(r^2-\sqrt{3}r+1\right)$. *(Die Volumenfunktion ist also eine einfache quadratische Funktion von r!)* Nicht von den Kugeln eingenommen wird damit $V_{Rest}(r)=8-4\sqrt{3}\cdot\pi\cdot\left(r^2-\sqrt{3}r+1\right)$. Da der Graph dieser Funktion eine nach unten geöffnete Parabel ist, muss die einzige Nullstelle der Ableitung (oder: der Scheitelpunkt der Parabel) eine Maximalstelle der Funktion sein. Mit $V'_{Rest}(r)=-4\sqrt{3}\cdot\pi\cdot\left(2r-\sqrt{3}\right)$ ergibt sich: Das Restvolumen ist bei $r=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}8660$ maximal und hat einen Wert von $V_{Rest}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=8-\pi\cdot\sqrt{3}\approx 2{,}5586$.		35	
c)	Die acht Kugelanteile der äußeren Kugeln, die in der Elementarzelle liegen, bilden zusammen eine Kugel mit dem Radius r_a. Damit ergibt sich die Oberflächenfunktion A zu $A(r)=4\pi\cdot(r_a{}^2+r^2)$ $=4\pi\cdot\left((\sqrt{3}-r)^2+r^2\right)$ $=8\pi\cdot(r^2-\sqrt{3}\cdot r+1{,}5)$. Auch ohne abzuleiten kann sofort gesehen werden, dass der Graph von A eine nach oben geöffnete Parabel und deswegen der Scheitelpunkt von A das einzige Minimum der Funktion ist. Es ergibt sich: $r_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}8660$ und damit $A(r_{\min})=6\pi\approx 18{,}8496$.			

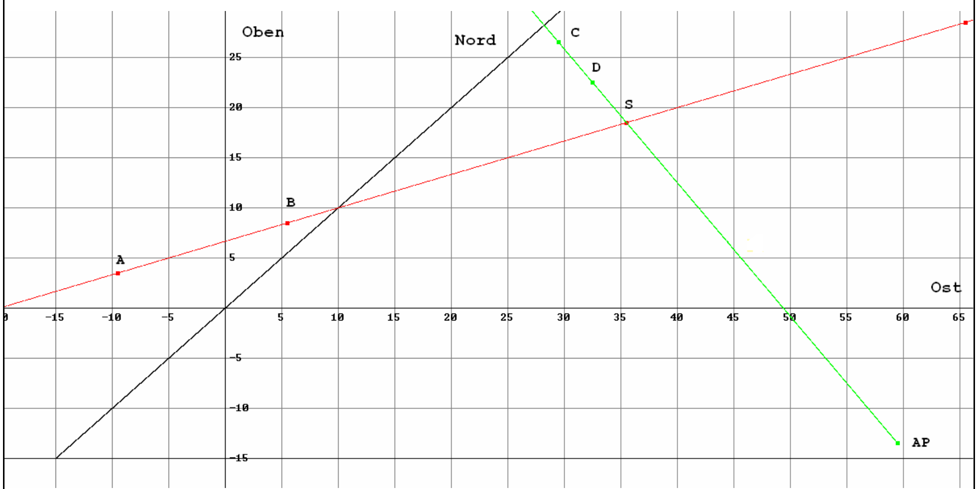
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Dass V und A an derselben Stelle ihr Extrem aufweisen und dass die Extremalstelle genau in der Mitte der Diagonalen liegt, ist dann nicht mehr weiter verwunderlich, wenn man bedenkt, dass bei dieser Anordnung der Kugeln Zentralkugel und Randkugeln austauschbar sind, siehe e).		25	
d)	Da in einer Elementarzelle eine Zentralkugel und von den acht äußeren Kugeln jeweils ein Achtel (nämlich ein Kugeloktant) liegen, liegen in einer Elementarzelle je eine Kugel vom Typ Zentralkugel und eine vom Typ äußere Kugel. *(Daraus ergibt sich auch, dass beim kubisch-raumzentrierten Kristall die Rollen von Zentralkugel und von Außenkugel austauschbar sind – eine Verschiebung der Elementarzelle um eine halbe Kantenlänge kehrt die Rollen um. Damit ist natürlich auch die Symmetrie der Funktionen V und A bezüglich r verständlich.)* Da $0,43 > \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} \approx 0,4227$, liegt das Verhältnis von 43:57 (noch) im Definitionsbereich von r, die „Atomkugeln“ können sich also tatsächlich berühren. Das Restvolumen ergibt sich zu 2,2387 oder zu etwa 87,5 % des maximalen Restvolumens. Die Oberfläche ergibt sich zu 19,219, sie liegt damit etwa 2 % über der minimalen Oberfläche.		10	15
	Insgesamt 100 BWE	15	70	15

Aufgabe 13 Flugbahnen

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<u>Allgemeine Bemerkung zur Lösung dieser Aufgabe:</u> Diese Aufgabe lässt sich in vielen Teilen mit sehr anschaulichen – auf Grundvorstellungen basierenden – Argumenten lösen, natürlich auch mit den üblichen Standardmethoden. Im Hinblick auf einen Kompetenz-bezogenen Mathematikunterricht sollten möglichst viele Grundvorstellungen und Argumentationswege entwickelt werden. Die hier vorgestellten Lösungsteile versuchen – wo immer es geht – inhaltlich zu argumentieren, statt formal zu rechnen.			
a)	Wir rechnen zunächst für jede Flugbahn einen Richtungsvektor als Differenzvektor aus: $\vec{u} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \vec{D} - \vec{C} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Das erste Flugzeug fliegt also nach Nordosten (die x_1- und die x_2-Komponente sind beide positiv und dem Betrag nach gleich) und das zweite Flugzeug fliegt nach Südosten (die x_1-Komponente ist positiv und die x_2-Komponente ist negativ und beide sind dem Betrag nach gleich). Das erste Flugzeug hält die Höhe (die x_3-Komponente ist null) und das zweite Flugzeug befindet sich im Sinkflug (die x_3-Komponente ist negativ).	10		

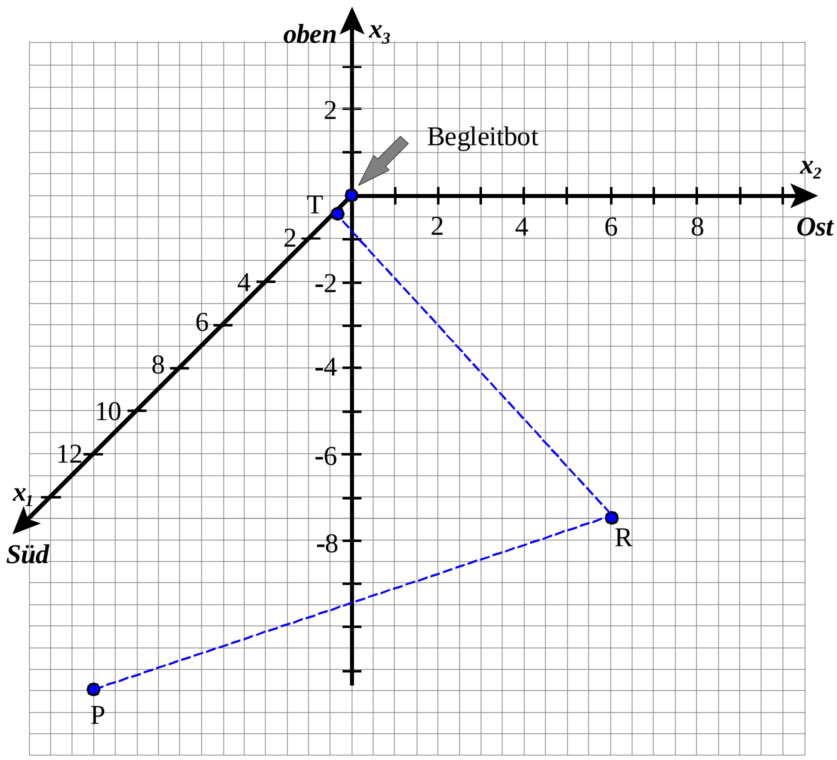
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
b)	Dem Richtungsvektor $\vec{v}$ kann man ansehen, dass das zweite Flugzeug in einer Minute um einen Kilometer sinkt. Die Ausgangshöhe war 10 km, also braucht das Flugzeug ab 8 Uhr 2,5 Minuten, um auf 7500 m zu sinken. $\vec{c}+2{,}5\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}13\\33\\10\end{pmatrix}+2{,}5\cdot\begin{pmatrix}6\\-6\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28\\18\\7{,}5\end{pmatrix}$. Um 8:02:30 Uhr war das Flugzeug in 7 500 m Höhe am Ort *Q* mit den Koordinaten *Q* (28 | 18 | 7,5). Die Zeitangaben sind deshalb korrekt, weil $t < 4$ und wir uns also innerhalb der ersten vier Minuten nach 8:00 Uhr befinden.	10		
c)	Die Argumentation verläuft völlig analog zu b): wir bestimmen den Punkt *AP*, bei dem die x_3-Komponente Null ist, das muss bei $t = 10$ der Fall sein (Hier sollte man *t* nur als Parameter betrachten, da das Flugzeug sicherlich vor dem Aufsetzen seine Geschwindigkeit verringert hatte.). $\vec{c}+10\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}13\\33\\10\end{pmatrix}+10\cdot\begin{pmatrix}6\\-6\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}73\\-27\\0\end{pmatrix}$ Also hat *AP* die Koordinaten (73 | –27 | 0).	10		
d)	Das zweite Flugzeug sinkt anfangs – ausgehend von einer Höhe von 10 km – in einer Minute um einen Kilometer. Das erste Flugzeug hält die Höhe von 8 km. Also ist das zweite Flugzeug bei $t = 2$ auf die Flughöhe von 8 km gesunken. $\vec{c}+2\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}13\\33\\10\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}6\\-6\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\21\\8\end{pmatrix}$. Dann befindet es sich also im Punkt *S* mit den Koordinaten (25 | 21 | 8). Nur dieser Punkt *S* könnte ein Schnittpunkt der Flugbahnen sein. Es ist deshalb nur zu prüfen, ob dieser Punkt auf der Flugbahn des ersten Flugzeuges liegt. Das erste Flugzeug legt, wie schon festgestellt wurde, in x_1- und x_2-Richtung je 10 km pro Minute zurück, genauer: es vergrößert ausgehend von *A* (–5 | –9 | 8) den x_1-Wert und den x_2-Wert jeweils um 10 pro *t*-Einheit. Man erkennt, dass man um zum Punkt *S* zu kommen, den x_1-Wert und den x_2-Wert jeweils um 30 vergrößern muss, also wird der Punkt *S* für $t = 3$ erreicht. Somit schneiden sich die Flugbahnen. <u>Bemerkung:</u> *Wenn man hier formal rechnet, also den möglichen Schnittpunkt von zwei Geraden über ein lineares Gleichungssystem untersucht, dann müssen für die Parameter der beiden Geraden natürlich zwei verschiedene Variable angesetzt werden. Die Diskussion darüber kann fruchtbar sein.*		20	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Für $t = 2$ auf der zweiten Flugbahn, bzw. für $t = 3$ auf der ersten Flugbahn erhält man den Schnittpunkt *S*. Beide Werte liegen in dem Vier-Minuten-Intervall, geben also auch die Zeitpunkte an, zu denen sich die Flugzeuge am Ort *S* befanden. Die beiden Flugzeuge passierten diese Stelle also in einem zeitlichen Abstand von einer Minute. Bei der üblichen Geschwindigkeit von Flugzeugen (vgl. f) war jedes der beiden Flugzeug mehrere Kilometer von *S* entfernt, als das andere Flugzeug den kritischen Punkt *S* passierte, insofern bestand keine Kollisionsgefahr Ein Fluglotse sieht das vermutlich anders und würde zwei Flugzeuge nicht im Minutenabstand an die gleiche Stelle „lotsen“. *<u>Bemerkung:</u> Streng genommen müsste man auch noch hinzufügen, dass der Winkel zwischen den Flugbahnen nicht extrem spitz (oder gar Null) ist.*		10	
f)	Das erste Flugzeug fliegt in einer Minute von *A* ($t = 0$) nach *B* ($t = 1$). Ebenso fliegt das zweite Flugzeug in einer Minute von *C* ($t = 0$) nach *D* ($t = 1$). Darum berechnen wir einerseits den Abstand von *A* nach *B* und andererseits den Abstand von *C* nach *D*: $Abst(A,B) = \sqrt{\left(\vec{b}-\vec{a}\right)^2} = \sqrt{\left(\vec{u}\right)^2} = \sqrt{200} \approx 14{,}14$, $Abst(C,D) = \sqrt{\left(\vec{d}-\vec{c}\right)^2} = \sqrt{\left(\vec{v}\right)^2} = \sqrt{73} \approx 8{,}54$. Das erste Flugzeug fliegt also zur betrachteten Uhrzeit mit einer Geschwindigkeit von 14,14 km/min ≈ 849 km/h, das zweite Flugzeug fliegt zur betrachteten Uhrzeit mit einer Geschwindigkeit von 8,54 km/min ≈ 513 km/h.		10	
g)		10		
h)	Statt des Abstandes eines beliebigen Punktes P_t auf der ersten Flugbahn mit dem Parameterwert t zum Flugsender minimieren wir dessen Quadrat: $(105 - 10t)^2 + (109 - 10t)^2 + 64 = 200\,t^2 - 4280\,t + 22970$ Diese quadratische Funktion hat ihr Minimum / ihre Scheitelstelle bei $t = 10{,}7$ und dort den Wert 72. Der minimale Abstand zum Flugsender betrug also $\sqrt{72}$ km ≈ 8,485 km.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Weiter gilt: $\vec{a}+10{,}7\cdot\vec{u}=\begin{pmatrix}102\\98\\8\end{pmatrix}$. Das Flugzeug befand sich im Punkt $P(102 \mid 98 \mid 8)$ dem Flugsender am nächsten. Um den Zeitpunkt bestimmen zu können, müsste man wissen, ob und ggf. wie das Flugzeug seine Geschwindigkeit verändert hatte. Wenn es seit 8:00 Uhr die Geschwindigkeit nicht verändert hätte, dann wäre das Flugzeug dem Flugsender um 8:10:42 Uhr am nächsten gewesen. <u>*Bemerkung:*</u> *Ein zweiter Weg führt über die Bestimmung der Länge des Lotes vom Flugsender auf die Flugbahn: Dann muss die Gleichung* $\left(\vec{a}+t\cdot\vec{u}-\overrightarrow{FS}\right)\cdot\vec{u}=0$ *gelöst werden, und man erhält ebenfalls* $t = 10{,}7$. *Der berechnete minimal Abstand von* 8,485 km *lässt übrigens darauf schließen, dass das Flugzeug fast genau vertikal über den Flugsender geflogen ist, wahrscheinlich navigierte der Pilot so, dass er auf seiner Route der Reihe nach Flugsender abflog.*			20
	Insgesamt 100 BWE	40	40	20

Aufgabe 14 U-Boot

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)		5		

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>b)</td><td>Richtung Nordost heißt hier, dass die Gerade den Richtungsvektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$
hat. Mit dem Stützvektor $\vec{p}=\begin{pmatrix}1200\\0\\-540\end{pmatrix}$ ergibt sich für g:
$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1200\\0\\-540\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad r\in\mathbb{R}.$</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Für den horizontalen Drehwinkel wird die x_3-Komponente des Richtungsvektors Null gesetzt. Damit erhält man den neuen Richtungsvektor $\vec{w}_e=\begin{pmatrix}-8\\-13\\0\end{pmatrix}$.
Mithilfe der Formel für das Skalarprodukt ergibt sich als Drehwinkel in der Ebene:
$\cos\alpha=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}_e}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}_e|}\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{8-13}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{233}}\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{-5}{\sqrt{466}}\Rightarrow\alpha\approx 103{,}4^\circ.$
<u>Bemerkung:</u> Es empfiehlt sich hier immer noch eine kleine Handskizze zu machen, um nicht durch Vorzeichenfehler versehentlich den Komplementärwinkel zu 180° zu „erwischen“.
Als Steigungswinkel verstehen wir den Winkel zwischen der Geraden mit dem Vektor $\vec{w}$ als Richtungsvektor und der zur x_1x_2-Ebene parallelen Ebene, in der g liegt. Zur Berechnung benötigen wir nur den Richtungsvektor $\vec{w}$ und einen Normalenvektor der Ebene, z. B. $\vec{n}=(0\,|\,0\,|\,1)^t$, und setzen beide in die entsprechende Formel zur Schnittwinkelberechnung ein:
$\sin\beta=\frac{|\vec{w}\cdot\vec{n}|}{|\vec{w}|\cdot|\vec{n}|}\ \Leftrightarrow\ \sin\beta=\frac{|9|}{\left|\sqrt{314}\right|\cdot|1|}\ \Rightarrow\ \beta\approx 30{,}5^\circ.$
<u>Alternativ</u> kann man mit ebener Trigonometrie auch einfach direkt rechnen:
$\sin\beta=\frac{9}{|\vec{w}|}$ oder $\tan\beta=\frac{9}{\sqrt{8^2+13^2}}=\frac{9}{\sqrt{233}}$
T ist der Schnittpunkt einer Geraden h und der x_1x_2-Ebene, wobei h die neue Fahrtroute beschreibt. Es gilt: $h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}400\\800\\-540\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-8\\-13\\9\end{pmatrix};\ s\in\mathbb{R}.$
Gesucht ist s, sodass die x_3-Komponente Null wird.
Aus $-540+s\cdot 9=0$ folgt s = 60. Dieser Wert von s wird in die Gleichung von h eingesetzt und es ergibt sich: $\begin{pmatrix}400\\800\\-540\end{pmatrix}+60\cdot\begin{pmatrix}-8\\-13\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-80\\20\\0\end{pmatrix}$, also hat T die Koordinaten (–80 | 20 | 0).</td><td>10</td><td>20</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
d)	Der Abstand eines Punktes auf der Geraden *h* zum Ursprung *O*(0 | 0 | 0) ergibt sich aus: $d(s)=\left\|\begin{pmatrix}400\\800\\-540\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-8\\-13\\9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\|$ $=\sqrt{(400-8s)^2+(800-13s)^2+(-540+9s)^2}$ $=\sqrt{314s^2-36920s+1091600}$ Der Wurzelausdruck ist extremal, wenn der Radikand extremal ist. Also: $f(s)=314\cdot s^2-36\,920\cdot r+1\,091\,600$ und $f'(s)=628\cdot s-36\,920$. Die notwendige Bedingung für Extrempunkte ist: $f'(s)=0$. Lösen der linearen Gleichung $628\cdot s-36920=0$ führt zu $s\approx 58{,}79$. Da der Graph von *f* eine nach oben geöffnete Parabel ist, liegt bei $s\approx 58{,}79$ ein Tiefpunkt. Für *S* folgt daher: $\begin{pmatrix}400\\800\\-540\end{pmatrix}+58{,}790\cdot\begin{pmatrix}-8\\-13\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-70{,}32\\35{,}73\\-10{,}89\end{pmatrix}.$ Von allen Punkten der Geraden *h* hat der Punkt *S*(–70,32 | 35,73 | –10,89) den geringsten Abstand zum Ursprung. *Hinweis: Die x_3-Komponente ist negativ, also ist S tatsächlich ein Punkt der Fahrtstrecke von dem U-Boot.*		20	
e)	Der SONAR-Bereich lässt sich vereinfacht als Kugel *K* auffassen, mit dem Ursprung als Mittelpunkt. Am Punkt *P* tritt das U-Boot in den SONAR-Bereich ein, also hat das SONAR eine Reichweite von $r=\sqrt{1200^2+540^2}\approx 1316$ m. Das entspricht dem Abstand von *P* zum Ursprung. Der Sonarbereich lässt sich als Kugel *K* mit dem Radius *r* vorstellen. Es gilt: $K:\ \vec{x}^2\le r^2=1\,731\,600$. Gesucht sind die Schnittpunkte von *K* mit *g*, also wird der Term von *g* in *K* eingesetzt und nach *s* aufgelöst. $\left(\begin{pmatrix}1200\\0\\-540\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)^2=r^2=1731600$ $(1200-s)^2+s^2+(-540)^2=1731600$ $2\cdot s^2-2400\cdot s+1731600=1731600$ $2s^2-2400s=0$ $s(2-2400)=0.$ Als Lösung erhält man *s = 0* oder *s* = 1200. *s = 0* gehört zum Punkt *P* und *s* = 1200 gehört zum Austrittspunkt *Q*, mit $\vec{q}=\begin{pmatrix}1200\\0\\-540\end{pmatrix}+1200\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1200\\-540\end{pmatrix}.$ Also hat der Austrittspunkt *Q* die Koordinaten (0 | 1200 | –540).			

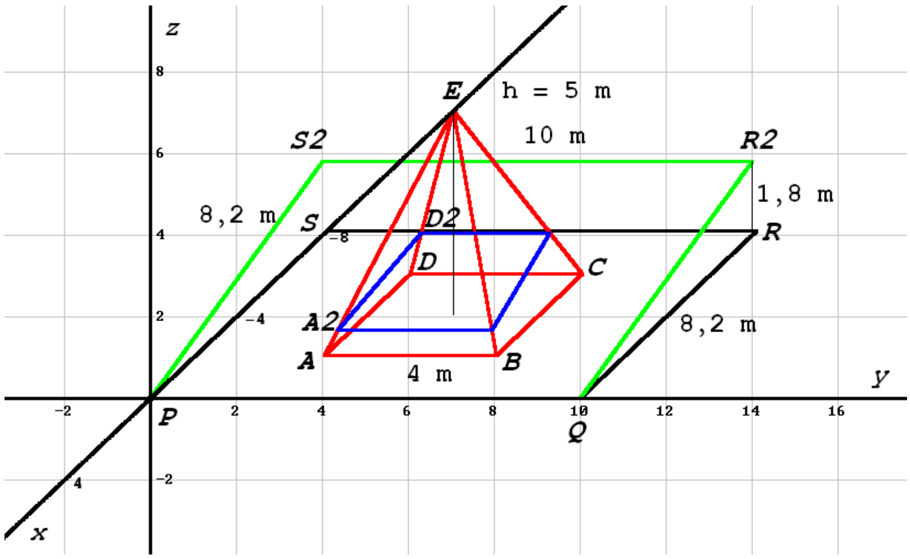
<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Zur Berechnung der Zeitdauer benötigt man die gefahrene Strecke s, denn mit der Geschwindigkeitsangabe v lässt sich die Zeitdauer t ermitteln. Das U-Boot fährt die Strecke
$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1200\\1200\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1200)^2 + 1200^2} = 1200\cdot\sqrt{2} \approx 1\,697$.
Dann gilt: $v = 10\text{ kn} = \frac{10\cdot 1852\text{ m}}{1\text{ h}} = 18{,}52\frac{\text{km}}{\text{h}} = 18\,520\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und schließlich
$t = \frac{s}{v} = \frac{1697}{18520} = 0{,}09163$ Stunden bzw. ca. 5 Minuten und 30 Sekunden.
Das U-Boot befindet sich rund 5,5 min im SONAR-Bereich.</td><td></td><td>20</td><td>10</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Misst man die Zeit t_1, die das Signal braucht, um wieder zurückzukommen, kann man die Entfernung s eines Objekts nach der Gleichung $v = \frac{s}{t}$ mit $v = 1{,}4\frac{\text{km}}{\text{s}}$ berechnen: $s = v\cdot\frac{1}{2}t_1$.
Misst man jede Sekunde ein Ortungssignal, so erhält man jede Sekunde eine Entfernung. Aus der Entfernungsdifferenz und der Zeitdifferenz lässt sich eine Durchschnittsgeschwindigkeit berechnen. Man erhält mit dieser Methode aber lediglich den Geschwindigkeitsanteil, der sich auf die Signalquelle zu bewegt bzw. von ihr weg bewegt und nicht die tatsächliche Geschwindigkeit des U-Bootes.</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

Aufgabe 15 Theaterbühne

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>$\sin(\alpha) = \frac{1{,}8}{8{,}2}$, also $\alpha \approx 12{,}68°$.
Der Neigungswinkel des schrägen Bühnenboden zur Fußbodenebene beträgt ca. 13°.</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>b)</td><td>



Mit der skizzierten Lage des Koordinatensystems und den skizzierten Punktbezeichnungen gilt:

Boden: $P(0|0|0)$ $Q(0|10|0)$ $R(-8,2|10|0)$ $S(-8,2|0|0)$

Bühnenboden (schräg):
Der x_1-Wert der Punkte R_2 und S_2 muss zunächst mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden: $|x_1| = \sqrt{8,2^2 - 1,8^2} = 8$. Damit erhalten wir weitere Koordinaten.

Schräger Bühnenboden:

$P(0|0|0)$, $Q(0|10|0)$, $R_2(-8|10|1,8)$, $S_2(-8|0|1,8)$.

Pyramidenpunkte:

$A(-2,1|3|0)$, $B(-2,1|7|0)$, $C(-6,1|7|0)$, $D(-6,1|3|0)$, $E(-4,1|5|5)$.

</td><td>20</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Die x_2-Achse liegt in der Ebene, in der der schräge Bühnenboden liegt, insofern kann man es sich leicht machen und einfach die Gleichung der Spurgeraden in der x_1-x_3-Ebene angeben: $x_3 = -\frac{1,8}{8}x_1$ bzw. $9 \cdot x_1 + 40 \cdot x_3 = 0$

Eine Gleichung der Ebene, in der der schräge Bühnenboden liegt, lautet:
$9 \cdot x_1 + 40 \cdot x_3 = 0$.

Man kann auch zuerst die Ebene in Parameterform angeben: z.B.
$\vec{x} = s \cdot \vec{q} + t \cdot \vec{s_2}$.
Dann erhält man anschließend die Koordinatengleichungen:

$x_1 = -8 \cdot t$, $x_2 = 10 \cdot s$, $x_3 = 1,8 \cdot t$, woraus man ebenfalls die obige Ebenengleichung erhält.

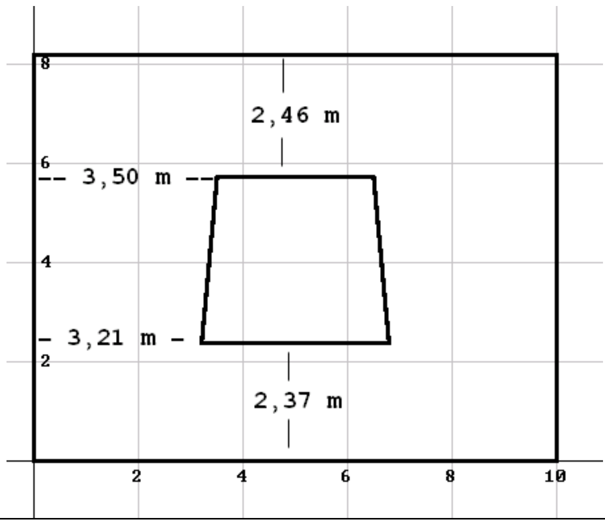
</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Wir berechnen die Koordinaten der Punkte A_2 und D_2 als Schnittpunkte der entsprechenden Pyramidenkanten mit der in c) berechneten Bühnenebene. Die anderen beiden Punkte B_2 und C_2 (in der Skizze nicht bezeichnet) kann man dann mit Symmetriebetrachtungen leicht bestimmen. Die Gerade durch A und E lautet in Parameterform: $\vec{x}=\vec{a}+t\cdot(\vec{e}-\vec{a})$, also: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2{,}1\\3\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\5\end{pmatrix}$. Damit erhalten wir die Koordinatengleichungen: $x_1=-2\cdot t-2{,}1 \qquad x_2=2\cdot t+3 \qquad x_3=5\cdot t$ Diese setzen wir ein in die Ebenengleichung aus c) $9\cdot(-2\cdot t-2{,}1)+40\cdot 5\cdot t=0$, also $182\cdot t=18{,}9$ und damit ergibt sich für den für den Punkt A_2 der Parameterwert $t=\frac{27}{260}$. Das ergibt folgende Koordinaten für A_2 : $A_2\left(\frac{-30}{13}\,\middle\vert\,\frac{417}{130}\,\middle\vert\,\frac{27}{52}\right)$ näherungsweise: $A_2(-2{,}31\vert 3{,}21\vert 0{,}52)$. Aus Symmetriegründen erhält man: $B_2\left(\frac{-30}{13}\,\middle\vert\,10-\frac{417}{130}\,\middle\vert\,\frac{27}{52}\right)$, also $B_2\left(\frac{-30}{13}\,\middle\vert\,\frac{883}{130}\,\middle\vert\,\frac{27}{52}\right)$, näherungsweise $B_2(-2{,}31\vert 6{,}79\vert 0{,}52)$. Zur Bestimmung des Punktes D_2 verfahren wir genau so: Die Gerade durch D und E lautet in Parameterform: $\vec{x}=\vec{d}+t\cdot(\vec{e}-\vec{d})$, also: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6{,}1\\3\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix}$. Damit erhalten wir die Koordinatengleichungen: $x_1=2\cdot t-6{,}1 \qquad x_2=2\cdot t+3 \qquad x_3=5\cdot t$ Diese setzen wir ein in die Ebenengleichung aus c) : $9\cdot(2\cdot t-6{,}1)+40\cdot 5\cdot t=0$. Damit ergibt sich für den für den Punkt D_2 der Parameterwert $t=\frac{549}{2180}\approx 0{,}252$ und man erhält folgende Koordinaten für den Punkt D_2: $D_2\left(\frac{-610}{109}\,\middle\vert\,\frac{3819}{1090}\,\middle\vert\,\frac{549}{436}\right)$, näherungsweise: $D_2(-5{,}60\vert 3{,}50\vert 1{,}26)$. Aus Symmetriegründen erhält man:			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>$C_2\left(\frac{-610}{109}\,\middle|\,10-\frac{3819}{1090}\,\middle|\,\frac{549}{436}\right)$, also $C_2\left(\frac{-610}{109}\,\middle|\,\frac{7081}{1090}\,\middle|\,\frac{549}{436}\right)$,
näherungsweise: $C_2(-5{,}60|6{,}50|1{,}26)$.</td><td></td><td>30</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Den Bühnenbauer interessieren die Abstände der vier Eckpunkte des auszusägenden Vierecks von den Außenseiten des rechteckigen Bühnenbodens. Die im dreidimensionalen Raum unter d) berechneten Koordinaten dieser Eckpunkte sind so noch nicht ausreichend: Die y-Werte sind zwar schon die Abstände von der linken Seite, aber die Abstände von der vorderen bzw. hinteren Seite des Bühnenbodens müssen noch entweder über die Abstandformel oder direkt mit dem Satz des Pythagoras aus den x_1- und x_3-Werten der in d) bestimmten Punkte berechnet werden:

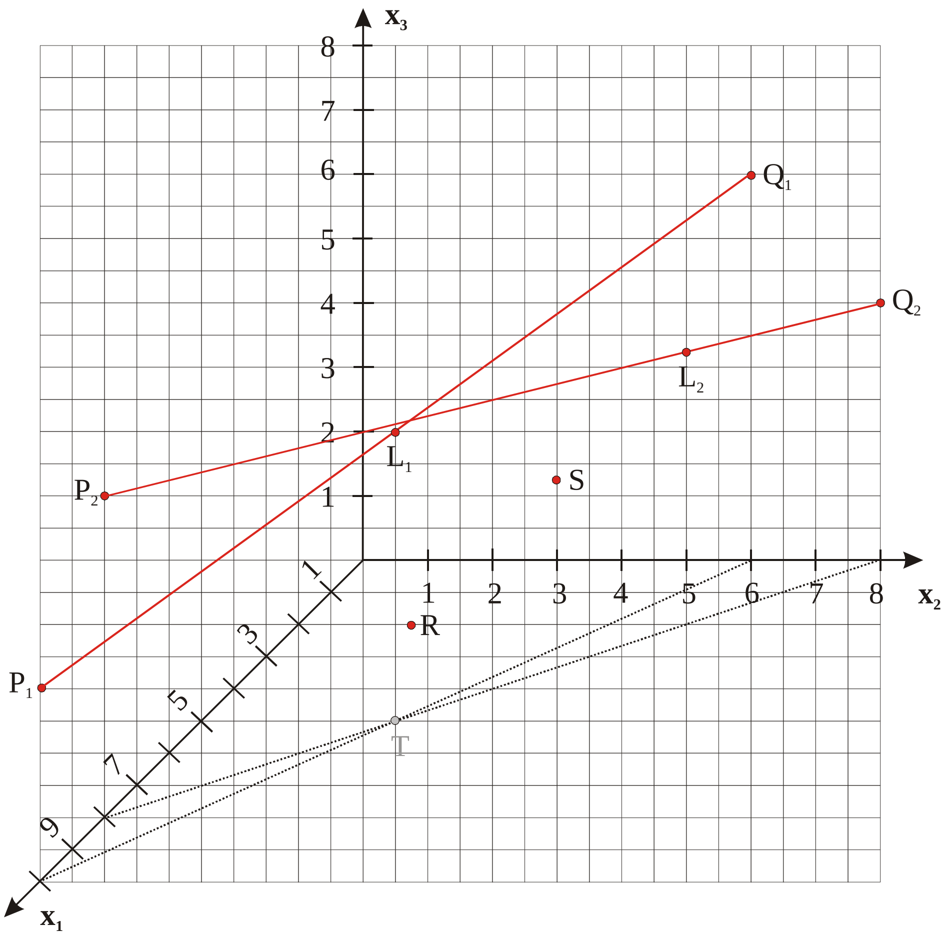
Abstand von A_2 zur unteren Seite $=\sqrt{\left(\frac{30}{13}\right)^2+\left(\frac{27}{52}\right)^2}=\frac{123}{52}\approx 2{,}37$

Abstand von D_2 zur oberen Seite $=8{,}2-\sqrt{\left(\frac{610}{109}\right)^2+\left(\frac{549}{436}\right)^2}=\frac{5371}{2180}\approx 2{,}46$

Für die anderen beiden Punkte ergeben sich die zugehörigen Abstände aus der Symmetrie der Anordnung.

</td><td></td><td></td><td>20</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>30</td><td>50</td><td>20</td></tr>
</table>

Aufgabe 16 Lichtkunst

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	 Die Gleichungen der Geraden in Zwei-Punkte-Form lauten z.B.: $g_1: \ \vec{x} = \vec{p}_1 + s \cdot (\vec{q}_1 - \vec{p}_1) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$ und $g_2: \ \vec{x} = \vec{p}_2 + t \cdot (\vec{q}_2 - \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$ *Dabei sollen* $s \in [0;1]$ *und* $t \in [0;1]$ *auch als richtig gelten.*	10	5	
b)	Gleichsetzen der Parameterdarstellungen von g_1 und g_2 ergibt: $\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 8t - 10s = -2 \\ -8t + 6s = 0 \\ t + 3s = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} s = \frac{1}{2} \\ t = \frac{3}{8} \\ \frac{15}{8} \neq 2 \end{array} \right.$ Die Geraden schneiden sich also nicht.		20	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>
Der Ortsvektor von L_1 genügt der Parameterdarstellung von g_1 für $s=\frac{1}{2}$.

Der Ortsvektor von L_2 genügt der Parameterdarstellung von g_2 für $t=\frac{3}{4}$.

Der Abstand d der beiden Lampen voneinander beträgt:

$d=\left|\vec{l}_1-\vec{l}_2\right|=\sqrt{3^2+(-3)^2+0,25^2}=\sqrt{18,0625}=4,25$, also 4,25 m.
</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>
Berechnet werden die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden h_i von S und L_i, i = 1,2, mit der x_1,x_2-Ebene.

$$h_1: \vec{x}=\vec{s}+r(\vec{l}_1-\vec{s})=\begin{pmatrix}2\\4\\2,25\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\-1\\2,25\end{pmatrix} \quad , \quad r\in\mathbb{R}.$$

$$h_1\cap E_{1,2}: \quad \begin{pmatrix}2\\4\\2,25\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\-1\\2,25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}r_1=-1\\r_2=5\\r=-1.\end{cases}$$

Da die x_1-Koordinate des Schnittpunktes negativ ist, liegt er nicht auf dem Raumboden. Die Lampe L_1 darf somit nicht eingeschaltet werden.

$$h_2: \quad \vec{x}=\vec{s}+r\cdot(\vec{l}_2-\vec{s})=\begin{pmatrix}2\\4\\2,25\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}, \quad r\in\mathbb{R}.$$

$$h_2\cap E_{1,2}: \quad \begin{pmatrix}2\\4\\2,25\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}r_1=2\\r_2=1,75\\r=-1,125\end{cases}.$$

Die Lampe L_2 darf eingeschaltet werden, weil der Schattenpunkt R(2 | 1,75 | 0) auf dem Raumfußboden liegt, da seine ersten beiden Koordinaten größer als Null sind.
</td><td></td><td>20</td><td>5</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>
Die vertikale Projektion der beiden Schienen auf die x_1-x_2-Ebene wird betrachtet, da die neuen Lampen in die (negative) x_3-Richtung hängen. Am Schnittpunkt T der Projektionsgeraden müssen die Höhen (x_3-Koordinaten) der Schienen ausgerechnet werden.

Für die Projektionsgerade von g_1 gilt: $pg_1: \ \vec{x}=\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-10\\6\\0\end{pmatrix}, \quad s\in\mathbb{R}.$

Daraus folgt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}10-10s&=x_1\\0+6s&=x_2\ .\end{aligned}$$
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

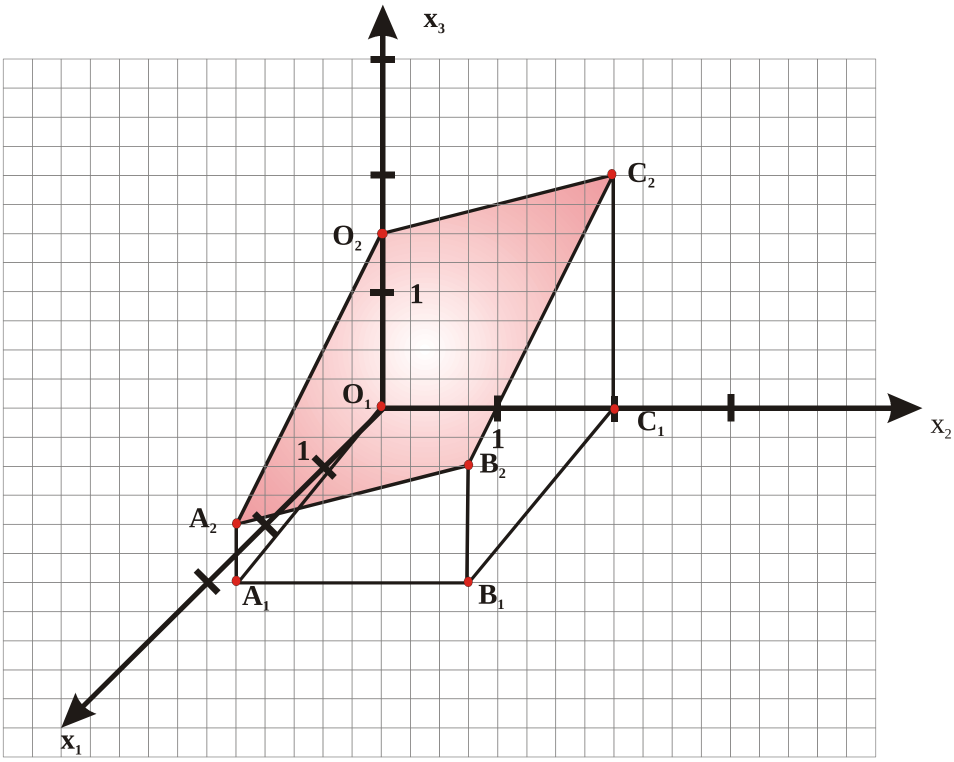
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Durch Umformen erhält man $pg_1:\ x_1 = 10 - \frac{5}{3}x_2$. Entsprechend gilt: $pg_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, woraus das Gleichungssystem $8 - 8t = x_1$ $0 + 8t = x_2$ folgt. Durch Umformen erhält man $pg_2:\ x_1 = 8 - x_2$. Durch Gleichsetzen der Projektionsterme erhält man: $10 - \frac{5}{3}x_2 = 8 - x_2$, also $x_2 = 3$. Dieser Wert wird in einen Term eingesetzt und man erhält $x_1 = 5$. Damit ist $T(\,5 \mid 3 \mid 0)$ der Schnittpunkt der beiden Projektionsgeraden. Die Bestimmung der Höhen H_1 und H_2 von g_1 und g_2 über diesem Bodenpunkt ergibt: $g_1:\ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow s = \frac{1}{2} \wedge H_1 = 4{,}5$ und $g_2:\ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t = \frac{3}{8} \wedge H_2 = 4{,}625$, d.h. die Höhendifferenz über dem Punkt T beträgt nur $H_2 - H_1 = 0{,}125$ m, so dass eine Lampe, die 0,2 m tief von der Schiene 2 hängt, die Schiene 1 dort berühren würde. Es ist also nicht möglich, die neuen Lampen in der beschriebenen Weise anzubringen.		5	15
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 17 Konzerthalle

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

a)



Bestimmung der Ebene E durch O_2, A_2 und C_2:

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 0{,}25 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix};\ r,s \in \mathbb{R}$$

Prüfung, ob B_2 in E liegt:
Ansatz:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 0{,}25 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2{,}25 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} 3r &= 3 \\ 0{,}25r + 2s &= 2{,}25 \\ -r + 0{,}5s &= -0{,}5 \end{aligned}$$

Aus $3r = 3$ folgt: $r = 1$. In Gleichung (3) eingesetzt ergibt sich: $s = 1$.

Probe in Gleichung (2): 2,25 = 2,25.

Also liegt B_2 in E.

Es kann auch ohne Rechnung erkannt werden, dass B_2 für $r = s = 1$ in E liegt.

	I	II	III
a)	20	5	

b) <u>Berechnung der Seitenlängen:</u>

$$\left|\overrightarrow{O_2A_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 0{,}25 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{10{,}0625} \qquad \left|\overrightarrow{B_2C_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ -0{,}25 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{10{,}0625}$$

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
		I	II	III
	$\left\|\overrightarrow{A_2B_2}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0,5 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{4,25}$ $\left\|\overrightarrow{C_2O_2}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -0,5 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{4,25}$ Die Dachfläche hat die Form eines Parallelogramms. <u>Nachweis, dass einer der Winkel ein rechter Winkel ist:</u> Es gilt: $\overrightarrow{O_2A_2} \cdot \overrightarrow{O_2C_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0,25 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0,5 \end{pmatrix} = 0.$ Die Dachfläche hat die Form eines Rechtecks. <u>Berechnung des Flächenmaßes der Dachfläche:</u> $F(D) = \sqrt{10,0625} \cdot \sqrt{4,25} \approx 6,5395\,FE$. Die Dachfläche ist ca. 654 m^2 groß.		35	
c)	Es muss keine Extra-Steuer bezahlt werden, denn die Grundfläche ist kleiner als die Dachfläche, und diese beträgt weniger als 700 m^2. *Es ist auch möglich, den Flächeninhalt der Grundfläche zu berechnen und dann die Frage nach der Grundsteuer zu beantworten. Hier kommen zwei Möglichkeiten in Frage:* 1. Berechnung mit Hilfe elementargeometrischer Überlegungen. Die Grundfläche ist ein Parallelogramm mit der Grundseite g = 2 LE und der Höhe h = 3 LE. 2. Berechnung mit Hilfe der Vektorrechnung und der Formel für den Flächeninhalt eines Parallelogramms. Das Parallelogramm hat einen Flächeninhalt von 6 FE. Das Flächenmaß der Grundfläche beträgt also 600 m^2.		15	
d)	<u>Mögliche Berechnung der Höhe von s_1:</u> Man berechnet den Schnittpunkt S_1 der Diagonalen der Dachfläche oder den Mittelpunkt M einer der Diagonalen. Die x_3-Koordinate dieses Punktes gibt die Höhe von s_1 (in Längeneinheiten) an. <u>Mögliche Berechnung der Höhe von s_2:</u> Man bestimmt den Punkt $R(1 \mid 1,5 \mid r)$, der auf der Dachfläche liegt. Die x_3-Koordinate r gibt die Höhe von s_2 (in Längeneinheiten) an. <u>Berechnung von s_1:</u> $\vec{s_1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{a_2} + \vec{c_2}\right) = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,125 \\ 1,25 \end{pmatrix}$, die x_3-Koordinate ist 1,25. Die Länge des Pfeilers s_1 beträgt also 1,25 LE entsprechend 12,5 m.		5	20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 18 Hafenturm

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

Geradengleichungen für die Kanten:

Die erste Geradengleichung ergibt sich aus den Punkten U_1 und O_1 zu

$$g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-10\\-3\\80\end{pmatrix},\quad \lambda\in\mathbb{R}\ .$$

Die anderen sind *(Berechnung ist auch erlaubt)*:

$$g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-10\\10\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\-10\\80\end{pmatrix},\ \mu\in\mathbb{R},\ g_3:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-10\\-10\\0\end{pmatrix}+\nu\cdot\begin{pmatrix}10\\3\\80\end{pmatrix},\ \nu\in\mathbb{R}\quad \text{und}$$

$$g_4:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}10\\-10\\0\end{pmatrix}+\rho\cdot\begin{pmatrix}-3\\10\\80\end{pmatrix},\quad \rho\in\mathbb{R}$$

Länge einer Kante:

Hier ist der Abstand des Grund- und des Dachpunktes auf einer Geraden zu bestimmen, z.B. $d\left(\overline{U_1O_1}\right)$. Es ergibt sich $d=\sqrt{6509}\approx 80,68$.

</td><td>25</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Bestimmen der Eckpunkte für $h = 40$:

Die Eckpunkte liegen auf den Kanten, der jeweilige Parameter ist so zu wählen, dass x_3 jeweils den Wert 40 aufweist, also ist λ, μ, ν und ρ jeweils 0,5.

Die vier Eckpunkte lauten daher
E_1 (5 | 8,5 | 40), E_2 (–8,5 | 5 | 40), E_3 (–5 | –8,5 | 40), E_4 (8,5 | –5 | 40).

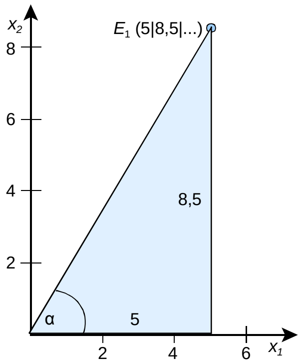
Nachweis Quadrat:
Man kann wie unten stehend argumentieren oder eben rechnen:

$$\overrightarrow{E_1E_2}\cdot\overrightarrow{E_1E_4}=\begin{pmatrix}-13,5\\-3,5\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3,5\\-13,5\\0\end{pmatrix}=0\Rightarrow\overrightarrow{E_1E_2}\perp\overrightarrow{E_1E_4}\quad\text{und}$$

$$\overrightarrow{E_3E_4}\cdot\overrightarrow{E_1E_4}=\begin{pmatrix}13,5\\3,5\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3,5\\-13,5\\0\end{pmatrix}=0\Rightarrow\overrightarrow{E_3E_4}\perp\overrightarrow{E_1E_4}$$

und die drei Geschosskanten sind ersichtlich gleich lang.
Also ist das Viereck $E_1E_2E_3E_4$ ein Quadrat

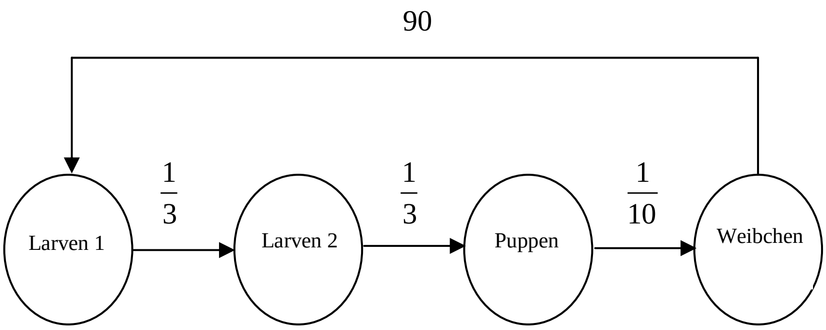
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<u>Allgemeine Argumentation</u>: Aus Symmetriegründen ist klar, dass die Seiten und Winkel dieser Vierecke gleich sein müssen, dann können es aber nur Quadrate sein wegen der Konstanz der Innenwinkel bei n-Ecken. *Hier kann auch gerechnet werden, z.B. um die Symmetrie zu belegen:* Allgemein müssen die Eckpunkte den x_3-Wert h aufweisen, der zugehörige Parameter also jeweils den Wert $\frac{h}{80}$ haben. Die vier Eckpunkte lauten daher: $E_1\left(10-\frac{h}{8} \mid 10-\frac{3h}{80} \mid h\right)$, $E_2\left(-10+\frac{3h}{80} \mid 10-\frac{h}{8} \mid h\right)$, $E_3\left(-10+\frac{h}{8} \mid -10+\frac{3h}{80} \mid h\right)$, $E_4\left(10-\frac{3h}{80} \mid -10+\frac{h}{8} \mid h\right)$ *Man kann zur Überprüfung der Rechtwinkligkeit natürlich auch hier ein Skalarprodukt ausrechnen, z.B. mit den Vektoren* $\overrightarrow{E_1E_2}$ *und* $\overrightarrow{E_1E_4}$: $\overrightarrow{E_1E_2}\cdot\overrightarrow{E_1E_4} = \begin{pmatrix} \frac{13h-1600}{80} \\ -\frac{7h}{80} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{7h}{80} \\ \frac{13h-1600}{80} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$		20	10
c)	Da hier Geschosse betrachtet werden, spielt die x_3-Koordinate keine Rolle – der Drehwinkel kann in der x_1-x_2-Ebene betrachtet werden. Die Verbindungslinie von U_1 zum Ursprung schließt mit der x_1-Achse einen Winkel von 45° ein.  Für h = 40 betrachten wir die Verbindungslinie von E_1 zum Zentrum des Geschosses. Diese schließt mit der x_1-Achse den Winkel α ein, der sich bestimmen lässt durch $\alpha = \arctan\left(\frac{8{,}5}{5}\right) \approx 59{,}53°$. Das mittlere Geschoss ist also um 14,53° gegenüber dem Grundgeschoss gedreht.		25	
d)	Diese Aussage ist nicht richtig, wie aus c) folgt: Nehmen wir dazu der Einfachheit halber an, das Gebäude hätte nur zwei Geschosse, und ein drittes Geschoss würde noch oben draufgesetzt. Die Bodenflächen des untersten und des ersten Geschosses sind dann nach d) um 14,5° gegeneinander gedreht. Die Bodenflächen des ersten und des zweiten Geschosses sind aber gegeneinander um 30,5° (= 45° –14,5°), denn das unterste und das oberste Geschoss sind um 45° gegeneinander gedreht).		10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

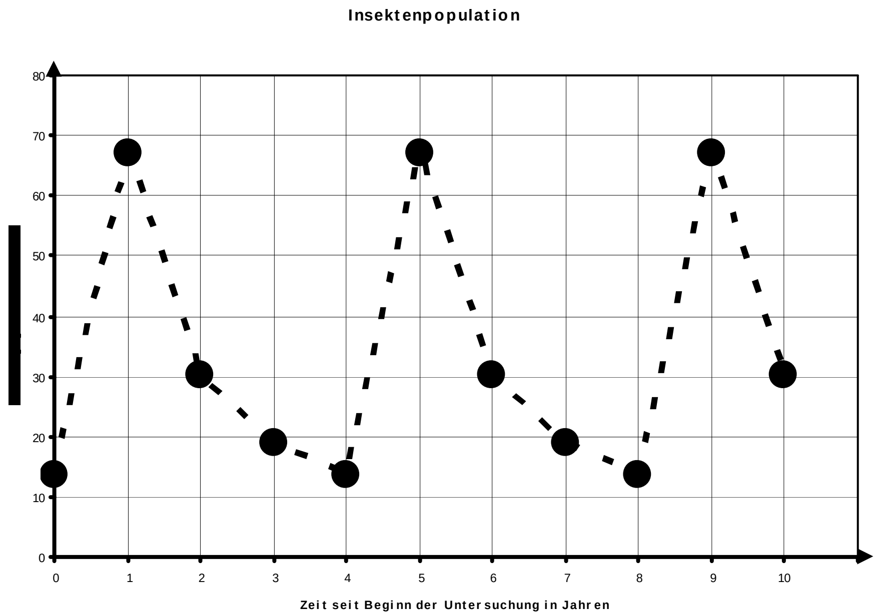
2.2 Kurs auf erhöhtem Niveau

Aufgabe 1 Insektenpopulation

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	 Biologische Bedeutung der Koeffizienten: $a_{14} = 90$ ist die Vermehrungsrate $a_{21} = \frac{1}{3}$ ist die Überlebensrate der Larven im 1. Jahr (Larven 1) $a_{32} = \frac{1}{3}$ ist die Überlebensrate der Larven im 2. Jahr (Larven 2) $a_{43} = \frac{1}{10}$ ist die Überlebensrate der verpuppten Larven im 3. Jahr (Puppen)	10	5	
b)	Bestimmung von $\vec{p}_1$: $\vec{p}_1 = A \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9000 \\ 3000 \\ 900 \\ 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63000 \\ 3000 \\ 1000 \\ 90 \end{pmatrix}.$ Darstellung des Populationsvektors $\vec{p}_4$ (Population nach 4 Jahren): $\vec{p}_4 = A^4 \cdot \vec{p}_0$.	5	5	
c)	Skizze zur Gesamtpopulation *(Verbindung der Punkte nicht notwendig, sie erhöht aber den optischen Eindruck.)* Nach vier Jahren ist der Populationsvektor identisch mit jenem zu Beginn der Untersuchung und ebenso die Gesamtpopulation. Da die Berechnung der Populationsvektoren nach dem Schema $\vec{p}_{n+1} = A \cdot \vec{p}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ abläuft, wiederholt sich alle 4 Jahre der Populationsverlauf. Die Gesamtpopulation P_{10} nach 10 Jahren ist also gleich der Gesamtpopulation nach 2 Jahren P_2.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III



Folgerung für $\vec{p}_{25}$:

$\vec{p}_{24} = \vec{p}_0$, da 4 ein Teiler von 24 ist. $\Rightarrow$ $\vec{p}_{25} = \vec{p}_1$.

Bestimmen von $\vec{p}_{-1}$:

Nimmt man an, dass das verwendete Populationsmodell schon vor dem Untersuchungsbeginn gültig war, kann von dem zyklischen Vorgang auch in der Vergangenheit (ausgedrückt durch negative Indizes) ausgegangen werden. Damit ist $\vec{p}_{-1}$ der Populationsvektor vor $\vec{p}_0 = \vec{p}_4$, d. h. $\vec{p}_{-1} = \vec{p}_3$.

Natürlich kann $\vec{p}_{-1}$ auch durch Lösung eines LGS bestimmt werden.

Bewertung: I: 5, II: 15

d) **Eigenschaft der Matrix A:**

Die Matrix A^4 ist identisch mit der Einheitsmatrix E, denn es muss gelten $A^4 \cdot \vec{p}_0 = \vec{p}_4 = \vec{p}_0 (= E \cdot \vec{p}_0)$.

Eigenschaft der Startpopulation:

Die Aufgabenstellung führt zum folgenden LGS: $A \cdot \vec{p}_x = \vec{p}_x$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 90x_4 \\ \frac{1}{3}x_1 \\ \frac{1}{3}x_2 \\ \frac{1}{10}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Hieraus ergibt sich die mehrdeutige Lösung: $x_1 = 90x_4,\ x_2 = 30x_4,\ x_3 = 10x_4,\ x_4 \in \mathbb{N}^*$. Die Bedingung ist immer dann erfüllt, wenn die Komponenten des Populationsvektors im Verhältnis 90:30:10:1 stehen. Also lautet eine mögliche Lösung: $\vec{p}_x = \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$.		10	5
e)	Berechnung von P^2, P^3 und P^4: $P^2 = P \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \\ b \cdot c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c \cdot d & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $P^3 = P^2 \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \\ b \cdot c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c \cdot d & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \cdot c \cdot d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \cdot b \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \cdot c \\ b \cdot c \cdot d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Da die Diagonalelemente sowohl bei P^2 als bei P^3 jeweils Null sind, ist eine Einheitsmatrix in beiden Fällen nicht erreichbar. $P^4 = P^2 \cdot P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \\ b \cdot c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c \cdot d & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \\ b \cdot c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c \cdot d & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $P^4 = \begin{pmatrix} a \cdot b \cdot c \cdot d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a \cdot b \cdot c \cdot d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \cdot b \cdot c \cdot d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot b \cdot c \cdot d \end{pmatrix}$ Also: $P^4 = E$, wenn gilt: $a \cdot b \cdot c \cdot d = 1$.		15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>f)</td><td>
Neue Populationsmatrix:

$$A_{Neu}=\begin{pmatrix}0&0&0&45\\ \frac{1}{3}&0&0&0\\ 0&\frac{1}{3}&0&0\\ 0&0&\frac{1}{10}&0\end{pmatrix}$$

Interpretation:

Die Veränderung der Trocken- und Regenzeiten führt dazu, dass sich die Insektenpopulation in einem Zyklus von jeweils vier Jahren halbieren wird. Bleibt das Modell gültig, wird die Population langfristig aussterben.
</td><td></td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>g)</td><td>

$$A_{Neu2}=\begin{pmatrix}0&0&0&45\\ \frac{1}{4}&0&0&0\\ \frac{1}{12}&\frac{1}{3}&0&0\\ 0&0&\frac{1}{10}&0\end{pmatrix},$$

denn $\frac{1}{12}$ der Larven 1 geht in die Gruppe „Puppen“ über, $\frac{1}{4}$ der Larven 1 wie bisher in die Gruppe Larven 2.

Ermittlung von $\vec{p}_{(a_0)-1}$ aus einer beliebigen Anfangspopulation $\vec{p}_{a_0}$ führt zu dem Ansatz $\vec{p}_{a_0}=A_{Neu2}\cdot\vec{p}_{(a_0)-1}$:

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&45\\ \frac{1}{4}&0&0&0\\ \frac{1}{12}&\frac{1}{3}&0&0\\ 0&0&\frac{1}{10}&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}45x_4\\ \frac{1}{4}x_1\\ \frac{1}{12}x_1+\frac{1}{3}x_2\\ \frac{1}{10}x_3\end{pmatrix}.$$

Als Lösung ergibt sich: $x_1=4a_2,\ x_2=3a_3-a_2,\ x_3=10a_4,\ x_4=\frac{1}{45}a_1$

mit $a_1,a_2,a_3,a_4>0\ \wedge\ x_1,x_2,x_3,x_4>0$.
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Aus $x_2 = 3a_3 - a_2$ ist unmittelbar zu erkennen, dass für die Fälle $a_2 > 3a_3$ die Nichtnegativitätsbedingung für die Anzahl der zweijährigen Larven nicht mehr gegeben ist. Also lässt sich für alle Populationsvektoren, in denen die Anzahl der zweijährigen Larven mehr als dreimal so hoch ist wie die der Puppen, keine Vorjahrespopulation ermitteln. Außerdem muss x_4 ganzzahlig, a_1 (die Anzahl der Larven 1 des Populationsvektors) also ein Vielfaches von 45 sein. Die hier vorliegende Frage der Lösbarkeit des zugehörigen Gleichungssystems kann auch mit anderen Verfahren geklärt werden.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 2 Einkommensgruppen

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Aus der prozentualen Verteilung ergibt sich die Anzahl der Familien in den drei Einkommensgruppen als Bestandsvektor $\vec{p}_0$: $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix}$	5		
b)	In der ersten Spalte von *P* steht die Zuordnung der Kinder der Einkommensgruppe *h* in der nächsten Generation: 55 % von ihnen bleiben in Gruppe *h*, 40 % wechseln in Gruppe *m*, 5 % wechseln in Gruppe *n*. In der zweiten Spalte von *P* steht die Zuordnung der Kinder der Einkommensgruppe *m* in der nächsten Generation: 10 % von ihnen wechseln in Gruppe *h*, 70 % bleiben in Gruppe *m*, 20 % wechseln in Gruppe *n*. In der dritten Spalte von *P* steht die Zuordnung der Kinder der Einkommensgruppe *n* in der nächsten Generation: 5 % von ihnen wechseln in Gruppe *h*, 15 % wechseln in Gruppe *m*, 80 % bleiben in Gruppe *n*. Die Übergangsmatrix *P* enthält die angegebenen Prozentsätze: $\vec{p}_1 = P \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 546 \\ 2121 \\ 1533 \end{pmatrix}$.	10	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
c)	Möglicher Ansatz: $P \cdot \vec{p}_{-1} = \vec{p}_0$ bzw. $\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 8 & 14 & 3 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix}$ Multiplikation mit 20 ergibt das folgende Lineare Gleichungssystem: $\left(\begin{array}{ccc\|c} 11 & 2 & 1 & 8400 \\ 8 & 14 & 3 & 50400 \\ 1 & 4 & 16 & 25200 \end{array}\right) \xrightarrow[-III+16\cdot I]{II-3\cdot I} \left(\begin{array}{ccc\|c} 11 & 2 & 1 & 8400 \\ -25 & 8 & 0 & 25200 \\ 175 & 28 & 0 & 109200 \end{array}\right) \xrightarrow[III+7\cdot II]{}$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 11 & 2 & 1 & 8400 \\ -25 & 8 & 0 & 25200 \\ 0 & 84 & 0 & 285600 \end{array}\right)$ x_1, x_2 eingesetzt $\Rightarrow x_3 = 720$ x_2 eingesetzt liefert $x_1 = 80$ Division durch $84 \Rightarrow x_2 = 3400$ Damit gilt für die Einkommensverteilung der Elterngeneration der ersten Gruppe, vorausgesetzt das obige Modell trifft auch hier noch zu: $\vec{p}_{-1} = (80\|3400\|720)$ *Ein zweiter Lösungsweg ist über die Inverse der Populationsmatrix möglich.*		20	
d)	Die Übergangsfaktoren der Familien aus der Einkommensgruppe h müssen gegenüber der vorherigen Matrix halbiert werden; die Übergangsfaktoren der Familien aus der Einkommensgruppe n müssen gegenüber der vorherigen Matrix mit $\frac{3}{2}$ multipliziert werden. Also wird die erste Spalte der ursprünglichen Übergangsmatrix durch zwei geteilt und die dritte Spalte mit $\frac{3}{2}$ multipliziert. $P_{Mod} = \begin{pmatrix} \frac{11}{40} & \frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & \frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}.$		10	5
e)	$\vec{p}_{Mod1} = P_{Mod} \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} \frac{11}{40} & \frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & \frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 462 \\ 2131{,}5 \\ 2026{,}5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 462 \\ 2132 \\ 2027 \end{pmatrix}.$ *Da in der Realität keine Bruchteile von Familien vorkommen, muss hier im Kontext der Aufgabenstellung gerundet werden. Dabei ist auch konsequentes*	10	5	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Abrunden sinnvoll. Da bei dem ursprünglichen Modell aus jedem Elternpaar wieder ein Kinderpaar, aus jedem Kinderpaar wieder ein Elternpaar entsteht usw., bleibt in diesem Modell die Gesamtzahl der Familien von Generation zu Generation konstant. Dagegen steigt die Gesamtzahl der Familien in dem modifizierten Modell von Generation zu Generation an, weil die Anzahl der Kinder in der größeren Gruppe n der Familien mit niedrigem Einkommen von zwei auf drei gestiegen ist, während die Anzahl der Kinder in der kleineren Gruppe h der Familien mit hohem Einkommen von zwei auf eins gesunken ist.			
f)	Ermitteln von A^2 und A^3: $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix}$ Also: $A^3 = E$, wenn gilt: $a\cdot b\cdot c = 1$. Die Matrix A^2 ist in diesem Fall gleich der zu A inversen Matrix.		10	5
g)	Für die Entwicklung der Population bedeutet dieses Phänomen, dass sich in einem Zyklus von drei Jahren stets wieder die Ausgangspopulation einstellt.			5
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 3 Vegetation

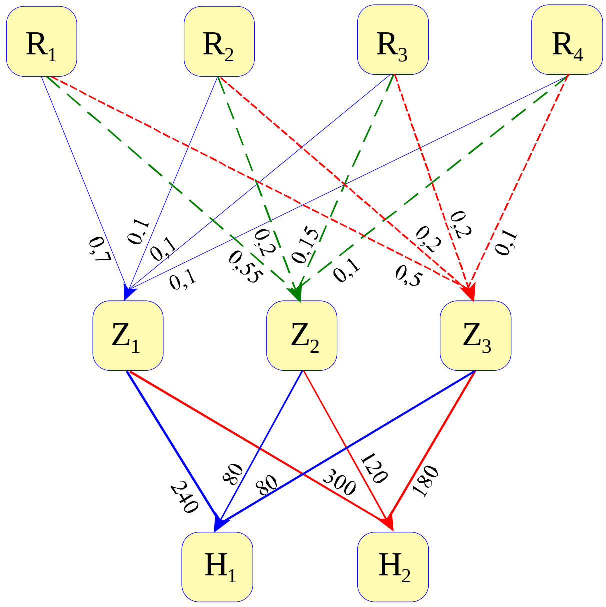
Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Es beschreibt v_i den Anteil an der Fläche, die Pflanzen aus Klasse i bedecken, der verbrennt und daher das Wachstum junger Pflanzen begünstigt, also nach 10 Jahren zur Klasse 1 gerechnet wird. Daher stehen diese Zahlen in der 1. Zeile der Matrix, aus der ja die Fläche von Klasse 1 nach 10 Jahren berechnet wird. Nach der Aufgabenstellung beschreibt n_i den Anteil an der Fläche, die Pflanzen aus der Klasse i bedecken, der nicht verbrennt und daher nach 10 Jahren zur Klasse $i + 1$ gehört ($i < 4$) bzw. in der Klasse 4 verbleibt. Es stehen also n_i für $i = 1$, 2 und 3 in der Zeile $i + 1$, mit der die Fläche von der Klasse $i + 1$ berechnet wird. In der vierten Zeile kommt noch n_4 hinzu, da dieser Anteil in Klasse 4 verbleibt. Jede Klasse wird unterteilt in zwei Anteile: Der verbrennende Anteil und der nicht verbrennende Anteil. Beide zusammen ergeben 100 % = 1.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$M = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ n_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & n_4 \end{pmatrix}$	10	15	
b)	Der nicht verbrannte Anteil von Klasse 1 ergibt den Anteil von Klasse 2: $600 \cdot n_1 = 594$, also $n_1 = 0{,}99$. Analog für die Klasse 2: $400 \cdot n_2 = 392$, also $n_2 = 0{,}98$. Nach der Definition von v_i und n_i gilt $v_i + n_i = 1$, daher ist $v_1 = 0{,}01$ und $v_2 = 0{,}02$.	10	5	
c)	Die Definitionsmenge ist die Menge aller Vektoren mit vier Komponenten, welche die Größe der jeweiligen Klasse zu Beginn der Untersuchung angeben. Die Wertemenge ist die Menge aller Vektoren mit vier Komponenten, welche die Größe der Klasse nach 10 Jahren angeben. Die zugehörigen Werte ergeben sich aus $f: \vec{x} \rightarrow f(\vec{x}) = \mathrm{M} \cdot \vec{x}$. *Die Funktion kann statt mit der Matrix auch gleich mit vier Termen beschrieben werden, die sich als Vektorkomponenten aus der Multiplikation* $\mathrm{M} \cdot \vec{x}$ ergeben.		10	10
d)	Langfristig streben in diesem Modell die Flächengrößen der einzelnen Klassen jeweils gegen feste Werte. Geht man von der angegebenen Gesamtgröße von 2000 km^2 aus, so ergeben sich die folgenden Größen für Klasse 1: $0{,}2216 \cdot 2000 = 443{,}2$, Klasse 2: $0{,}2194 \cdot 2000 = 438{,}8$, Klasse 3: $0{,}2150 \cdot 2000 = 430{,}0$ und Klasse 4: $0{,}3440 \cdot 2000 = 688{,}0$, d.h. 443,2 km^2 des Chaparrals sind mit einer Vegetation bewachsen, die jünger als 10 Jahre alt ist, eine zwischen 10 und 20 Jahre alte Vegetation bedeckt 438,8 km^2, 430,0 km^2 werden von einer 20 bis 30 Jahre alten Vegetation bedeckt und eine Fläche von 688km^2 enthält mehr als 30 Jahre alte Pflanzen.		15	
e)	$N = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}02 & 0{,}03 & 0{,}07 \\ 0 & 0{,}98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}97 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}93 \end{pmatrix}$ Die Prozentanteile für das Abbrennen stehen in der 1. Zeile, wobei $n_{11} = 1$ ist, da von Klasse 1 nicht abgebrannt wird. In den restlichen Zeilen steht der jeweilige Anteil, der nicht abgebrannt wird in der Diagonalen, die zugehörige Klasse verkleinert sich entsprechend. Die Matrix $N \cdot M$ beschreibt den kompletten Vorgang: $\vec{y} = M \cdot \vec{x}$ liefert die Flächenmaße durch spontane Brände, $\vec{z} = N \cdot \vec{y}$ schließlich die sich durch gewolltes Abbrennen ergebenden Flächen. Die Reihenfolge der Matrizen ergibt sich aus dem Aufgabentext.		20	5
	Insgesamt 100 BWE	20	65	15

Aufgabe 4 Industriehallen

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	 $A_{RZ} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,55 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,15 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$ $A_{ZH} = \begin{pmatrix} 240 & 300 \\ 80 & 120 \\ 80 & 180 \end{pmatrix}$ Rohstoffmengen pro Hallentyp: $A_{RH} = A_{RZ} \cdot A_{ZH} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,55 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,15 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 240 & 300 \\ 80 & 120 \\ 80 & 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 252 & 366 \\ 56 & 90 \\ 52 & 84 \\ 40 & 60 \end{pmatrix}$ Für Hallentyp 1 werden 252 Tonnen Kies, für Hallentyp 2 werden 84 Tonnen Stahl benötigt.	20		
b)	Gesamtkosten = Rohstoffkosten + Fertigungskosten der Zwischenprodukte + Montagekosten <u>Rohstoffkosten :</u> $\begin{pmatrix} 27 & 190 & 600 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 252 & 366 \\ 56 & 90 \\ 52 & 84 \\ 40 & 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48764 & 77562 \end{pmatrix}$ Die Rohstoffkosten für Halle 1 betragen 48 764 GE, die Rohstoffkosten für Halle 2 betragen 77 562 GE.			

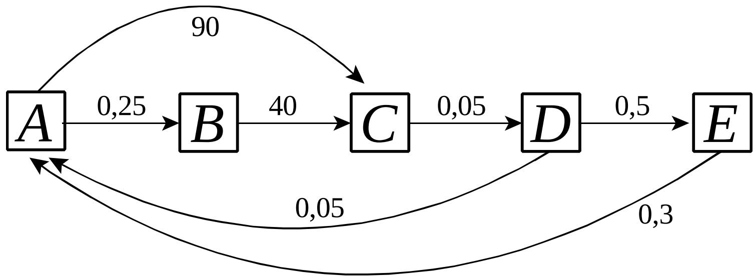
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Fertigungskosten der Zwischenprodukte: $\begin{pmatrix}80 & 100 & 120\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}240 & 300\\ 80 & 120\\ 80 & 180\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36800 & 57600\end{pmatrix}$ Die Fertigungskosten der Zwischenprodukte betragen 36 800 GE für Halle 1 und 57 600 GE für Halle 2. Gesamtkosten für Halle 1: 48 764 GE + 36 800 GE + 40 000 GE = 125 564 GE. Gesamtkosten für Halle 2: 77 562 GE + 57 600 GE + 48 000 GE = 183 162 GE.		25	
c)	Die Rohstoffe R_1 bis R_3 können restlos aufgebraucht werden, wenn folgendes Gleichungssystem lösbar ist: $\begin{pmatrix}0,7 & 0,55 & 0,5\\ 0,1 & 0,2 & 0,2\\ 0,1 & 0,15 & 0,2\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}1712\\ 424\\ 384\end{pmatrix}$ Lösen des LGS ergibt: $x_1 = 1360$, $x_2 = 800$, $x_3 = 640$. Es können also 1 360 Tonnen Z_1, 800 Tonnen Z_2 und 640 Tonnen Z_3 hergestellt werden. Für diese insgesamt 2800 Tonnen Zwischenprodukte werden insgesamt $2800\cdot 0{,}1 = 280$ Tonnen Wasser gebraucht		30	
d)	Von Typ 1 können wegen der Wandplatten (Z_1) maximal 5 Hallen montiert werden. Von Typ 2 können wegen der Träger (Z_3) maximal 3 Hallen montiert werden. Mehr als 5 Hallen insgesamt können wegen der Wandplatten (Z_1) nicht montiert werden.		5	10
e)	Der Mitarbeiter hat nicht Recht. Das Gleichungssystem ist zwar in jedem Fall lösbar, aber die Vorräte können nur dann aufgebraucht werden, wenn der Lösungsvektor keine negative Komponente enthält. Auch die Angabe eines Gegenbeispiels ist eine richtige Lösung.			10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 5 Libellenentwicklung

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

Mit den Bezeichnungen aus der Aufgabenstellung ergibt sich folgender Graph und folgende Populationsmatrix *P* des Lebenszyklus:



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0{,}05 & 0{,}3 \\ 0{,}25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 90 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}.$$

</td><td>5</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Die Startpopulation wird durch den Vektor $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \\ 6000 \\ 200 \\ 80 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Die Anzahlen der ersten Generation berechnen sich durch: $\vec{v}_1 = P \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 34 \\ 6{,}25 \\ 2450 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix}$,

also zu 34 jungen Libellen, 6 alten Libellen, 2450 Eiern, 300 Junglarven und 100 Altlarven.

Die Anzahlen der zweiten Generation berechnen sich durch:

$\vec{v}_2 = P \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 45 \\ 8{,}5 \\ 3300 \\ 122{,}5 \\ 150 \end{pmatrix}$, also zu 45 jungen Libellen, 8 alten Libellen, 3300 Eiern, 122 Junglarven und 150 Altlarven.

Den Populationsvektor $\vec{v}_i$ der i-ten Generation erhält man allgemein durch: $\vec{v}_i = P^i \cdot \vec{v}_0$. Dabei kann aber nur das Endergebnis gerundet werden. So ergeben sich bei der Berechnung der 2. Generation mithilfe von P^2 3310 Eier.

</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
c)	Für eine sich selbst reproduzierende Population $\vec{v}$ gilt: $P\cdot\vec{v}=\vec{v}\Leftrightarrow(P-E)\cdot\vec{v}=\vec{0}$. Das Lösen des LGS ergibt: $\vec{v}=r'\cdot\begin{pmatrix}0{,}4\\0{,}1\\40\\2\\1\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\400\\20\\10\end{pmatrix}\quad,\quad r\in\mathbb{R}$. Um „ganze“ Tiere zu erhalten, muss auf $r\in\mathbb{N}^*$ eingeschränkt werden. Das Populationsmodel beschreibt die Funktion *f* mit $f(\vec{v}_i)=P\cdot\vec{v}_i$. Die sich selbst reproduzierenden Populationen sind Fixpunkte von *f*, genauer die Menge aller Fixpunkte von *f*, da obiger Ansatz äquivalent zu $f(\vec{v})=\vec{v}$ ist.		20	5
d)	Gesucht ist der Vektor $\vec{x}$ mit $P\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}11\\5\\2000\\40\\20\end{pmatrix}$. Lösen des LGS ergibt: $\vec{x}=\begin{pmatrix}20\\5\\800\\40\\30\end{pmatrix}$.		10	
e)	Die Matrix *H* lässt die ersten drei Komponenten des Populationsvektors unverändert und halbiert die letzten beiden Komponenten. $H=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, denn $H\cdot\begin{pmatrix}A\\B\\C\\D\\E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\\B\\C\\\frac{1}{2}D\\\frac{1}{2}E\end{pmatrix}$.		10	
f)	Stellt $\vec{v}_{E\_normal}=P^{10}\cdot\vec{v}_A$ die Endpopulation nach 10 Jahren im vorliegenden Modell dar, so ergibt sich $\vec{v}_E=H\cdot\vec{v}_{E\_normal}$. Dabei werden lediglich die Anzahlen der Jung- und Altlarven halbiert. Es gilt $P\,H\neq H\,P$, denn die erste Zeile der Matrix *H P* entspricht jener von *P*, die erste Zeile von *P H* lautet aber (0 | 0 | 0 | 0,025 | 0,15). Das Endergebnis hängt daher davon ab, wann mit *H* multipliziert wird, bzw. verändert der Zeitpunkt des besonderen Umwelteinflusses das Ergebnis.		5	15
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 6 Geckos

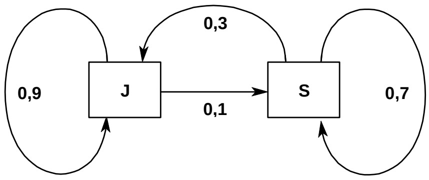
Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

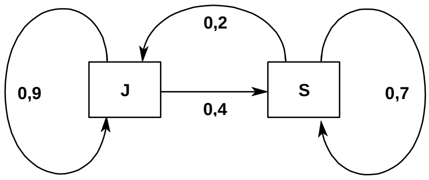
a) Korrekte Zuordnung:

Region / Gebiet: | Matrix: | Graph:

A $\quad L=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}3\\ 0{,}1 & 0{,}7\end{pmatrix}$



B $\quad K=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}2\\ 0{,}4 & 0{,}7\end{pmatrix}$



Begründung:

Das erste Matrixelement der ersten Zeile ergibt sich aus der Addition des Anteils der Jungtiere, die im nächsten Zeitschritt (Jahr) in der Klasse der Jungtiere verbleiben, und des Anteils der Geburtenrate der Jungtiere.
Wie man feststellt, bekommen nicht in jeder Region die Jungtiere Nachfahren.
Das zweite Element der ersten Zeile gibt die Geburtenrate der Alttiere an.

Das erste Matrixelement der zweiten Zeile enthält die Übertrittsrate von den Jungtieren zu den Alttieren; das zweite Element gibt die Verbleiberate / Überlebensrate der Alttiere an.

Hinweis: Für die Begründung ist die volle Punktzahl auch zu geben, wenn ein Prüfling die Zuordnung nur anhand eines in beiden Matrizen unterschiedlichen Elementes begründet.

I	II	III
10	5	

b) Berechnung der Populationsvektoren:

$\vec{p}_{t+1}=K\cdot\vec{p}_t \quad$ bzw. $\quad \vec{p}_{t+1}=L\cdot\vec{p}_t \quad$ mit $\quad t\in\mathbb{N}$.

Für Gebiet A:

$$\vec{p}_1=L\cdot\vec{p}_0=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}3\\ 0{,}1 & 0{,}7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1000\\ 2000\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1500\\ 1500\end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_2=L\cdot\vec{p}_1=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}3\\ 0{,}1 & 0{,}7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1500\\ 1500\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1800\\ 1200\end{pmatrix}$$

Für Gebiet B ergibt die analoge Rechnung:

$$\vec{p}_1=\begin{pmatrix}1300\\ 1800\end{pmatrix} \text{ und } \vec{p}_2=\begin{pmatrix}1530\\ 1780\end{pmatrix}.$$

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung
Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td></td><td>

Berechnung der Populationen nach 20 Jahren:

$$\vec{p}_{20} = K^{20} \cdot \vec{p}_0 = K^{10} \cdot K^{10} \cdot \vec{p}_0 = \left(K^{10}\right)^2 \cdot \vec{p}_0 \quad \text{bzw.} \quad \vec{p}_{20} = L^{20} \cdot \vec{p}_0 .$$

<u>Für Gebiet A:</u>

$$\vec{p}_{10} = L^{10} \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}752 & 0{,}745 \\ 0{,}248 & 0{,}255 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 2000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2242 \\ 758 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_{20} = L^{10} \cdot \vec{p}_{10} = \begin{pmatrix} 2251 \\ 749 \end{pmatrix}$$

Für Gebiet B ergibt die analoge Rechnung $\vec{p}_{10} = \begin{pmatrix} 3457 \\ 3459 \end{pmatrix}$ und $\vec{p}_{20} = \begin{pmatrix} 8966 \\ 8969 \end{pmatrix}$.

</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

<table>
<tr><th>Zeit in Jahren</th><th>Anzahl der Geckos im Gebiet A</th><th>Anzahl der Geckos im Gebiet B</th><th>Anzahl der Geckos im Gebiet C</th></tr>
<tr><td>0</td><td>3000</td><td>3000</td><td>6000</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3000</td><td>3100</td><td>5000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3000</td><td>3310</td><td>4220</td></tr>
<tr><td>10</td><td>3000</td><td>6916</td><td>1199</td></tr>
<tr><td>20</td><td>3000</td><td>17935</td><td>254</td></tr>
</table>

Die Gesamtzahl der Geckos im Gebiet der Region A bleibt konstant bei 3000.
Die Gesamtzahl der Geckos im Gebiet der Region B scheint exponentiell zu wachsen.
Die Gesamtzahl der Geckos im Gebiet der Region C scheint exponentiell zu fallen. Die Geckos werden aussterben.

Funktionsgleichungen:

Gebiet A: $f(t) = 3000 \cdot 1^t = 3000$

Gebiet B: $f(t) = 3000 \cdot 1{,}0935^t$

Gebiet C: $f(t) = 6000 \cdot 0{,}8538^t$

Zur Ermittlung des Zeitpunktes gleicher Geckozahlen in B und C werden die Funktionsterme gleichgesetzt:

$$3000 \cdot 1{,}0935^t = 6000 \cdot 0{,}8538^t$$

$$t = \frac{\log 2}{\log 1{,}0935 - \log 0{,}8538}$$

$$t = 2{,}801...$$

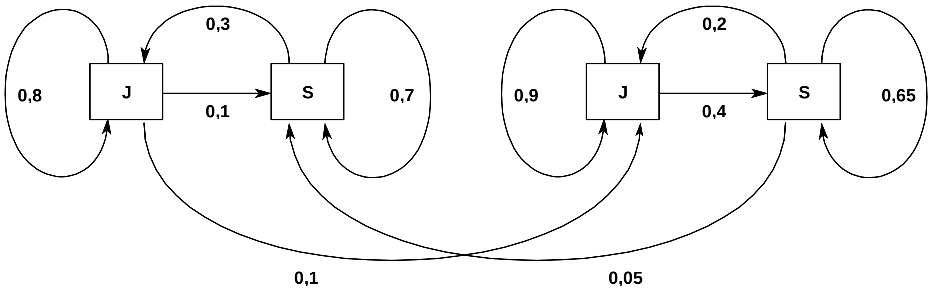
Im Laufe des dritten Jahres nach Beobachtungsbeginn werden die Zahlen übereinstimmen.

</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>

<u>Modifizierter Graph:</u>

<u>Region A</u> <u>Region B</u>



<u>Modifizierte Matrix:</u>

$$P = \begin{pmatrix} L_{\mathrm{mod}} & K_{neu} \\ L_{neu} & K_{\mathrm{mod}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & 0{,}65 \end{pmatrix}$$

Die Matrix P besteht aus den modifizierten Matrizen L_{mod} und K_{mod} und den Matrizen K_{neu} und L_{neu}. Diese beiden modifizierten Matrizen unterscheiden sich von L und K jeweils in genau einem Matrixelement.
Die Matrix L_{neu} enthält den Anteil der übersiedelnden Jungtiere; K_{neu} enthält den Anteil der auswandernden Alttiere.

</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

<u>Bestätigung:</u>

$$L = T \cdot D \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}25 & 0{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

Somit ist die Beziehung bestätigt worden.

<u>Potenzen der Matrix *L*:</u>

Potenzen der Matrix L lassen sich besonders leicht berechnen, da man lediglich D^n bilden und dann die Multiplikation von links mit T und von rechts mit der Inversen von T durchführen muss.

Die Potenz einer Diagonalmatrix erhält man durch Potenzieren der Diagonalelemente.

<u>Begründung:</u>

Es gilt: $L^n = T \cdot D^n \cdot T^{-1}$. Etwas ausführlicher:

$$L^n = \left(T \cdot D \cdot T^{-1}\right)^n = T \cdot D \cdot T^{-1} \cdot T \cdot D \cdot T^{-1} \cdot \ldots \cdot T \cdot D \cdot T^{-1} =$$
$$= T \cdot D \cdot (T^{-1} \cdot T) \cdot D \cdot (T^{-1} \cdot \ldots \cdot T) \cdot D \cdot T^{-1} = T \cdot D \cdot E \cdot D \cdot E \cdot \ldots \cdot E \cdot D \cdot T^{-1}$$
$$= T \cdot D \cdot D \cdot \ldots \cdot D \cdot T^{-1} = T \cdot D^n \cdot T^{-1}.$$

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Vorteil: Es lassen sich schnell die für die Untersuchung der Langzeitentwicklung der Geckos so wichtigen Potenzen der Populationsmatrizen bilden. Für die Berechnung reicht ein einfacher Taschenrechner mit den Grundrechenarten vollkommen aus. Für n = 10: $L^{10} = T \cdot D^{10} \cdot T^{-1}$ $= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6^{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}25 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} -0{,}6^{10} & 3 \\ 0{,}6^{10} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}25 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ $\approx \begin{pmatrix} 0{,}752 & 0{,}745 \\ 0{,}248 & 0{,}255 \end{pmatrix}.$	5	10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Aufgabe 7 Kosten und Gewinne

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	$A_{RZ} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & g \end{pmatrix}$ $\quad A_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A_{RE} = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 0 \\ 2 & 11 & 1 \\ 0 & 12 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ Berechnung der Werte $a, b, \dots g$ in A_{RZ} : Wegen $A_{RZ} \cdot A_{ZE} = A_{RE}$ gilt			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$A_{RZ} \cdot A_{ZE} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 2a+b & 4b & 0 \\ c & 4c+3d & d \\ 0 & 3e & e \\ g & 3f & f+2g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 0 \\ 2 & 11 & 1 \\ 0 & 12 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = A_{RE}$			

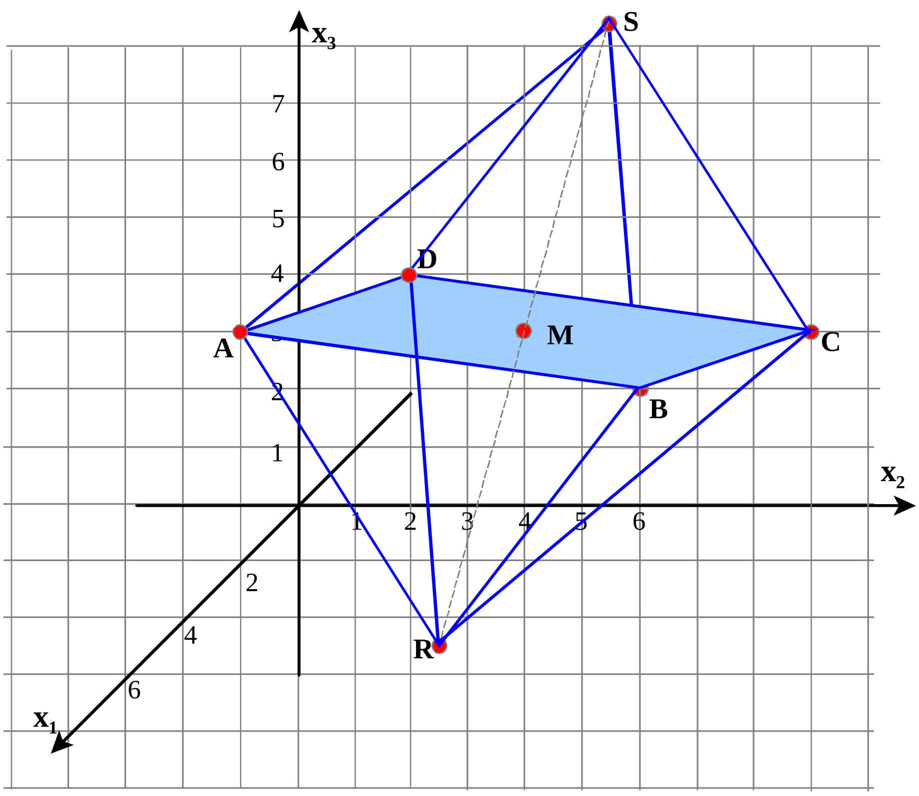
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Durch elementweisen Vergleich erhält man die Gleichungen: $\begin{array}{lll} 2a+b=5 & 4b=12 & \\ c=2 & 4c+3d=11 & d=1 \\ & 3e=12 & e=4 \\ g=2 & 3f=3 & f+2g=5 \end{array}$ Für die fehlenden Werte der Rohstoffmatrix erhalten wir: $a=1$, $b=3$, $c=2$, $d=1$, $e=4$, $f=1$, $g=2$.	15		
b)	Sei $\overrightarrow{v_R}$ der Vorratsvektor an Rohstoffen. Aus der Bedingung $A_{RE}\cdot\overrightarrow{x_E}=\overrightarrow{v_R}$ ergibt sich das LGS $\left(\begin{array}{ccc\|c} 5 & 12 & 0 & 1000-\mathrm{r} \\ 2 & 11 & 1 & 720 \\ 0 & 12 & 4 & 960 \\ 2 & 3 & 5 & 1000-\mathrm{r} \end{array}\right)$ Dieses LGS ist eindeutig lösbar für $x_1=80$, $x_2=40$, $x_3=120$ und $r=120$. Es bleiben demnach von R_1 und R_4 jeweils 120 ME übrig.		10	
c)	Die Gesamtkosten (*GK*) für den Auftrag bestehen aus den Rohstoffkosten (*RK*), den Fertigungskosten für die Zwischenprodukte (*ZK*), den Fertigungskosten für das Endprodukt (*EK*) und den Fixkosten (*FK*). Es gilt: $RK = 200\cdot(5\cdot 1+2\cdot 3+0\cdot 4+2\cdot 2)=3\,000$ $ZK = 200\cdot(2\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 3+1\cdot 4)=1\,400$ $EK = 200\cdot 2=400$, $FK=400$ Die Gesamtkosten betragen demnach 5 200 GE.		20	
d)	Die Rohstoffkosten betragen in GE: $\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}200\cdot 5+100\cdot 12+300\cdot 0 \\ 200\cdot 2+100\cdot 11+300\cdot 1 \\ 200\cdot 0+100\cdot 12+300\cdot 4 \\ 200\cdot 2+100\cdot 3+300\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2200 \\ 1800 \\ 2400 \\ 2200\end{pmatrix}=21600$ Die Fertigungskosten für die Zwischenprodukte betragen in GE: $\begin{pmatrix}2-x & 2-x & 4-x & 5-x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}200\cdot 2+100\cdot 0+300\cdot 0 \\ 200\cdot 1+100\cdot 4+300\cdot 0 \\ 200\cdot 0+100\cdot 3+300\cdot 1 \\ 200\cdot 1+100\cdot 0+300\cdot 2\end{pmatrix}=$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$\begin{pmatrix}2-x & 2-x & 4-x & 5-x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}400\\600\\600\\800\end{pmatrix} = 8400 - 2400x$ Die Fertigungskosten für die Endprodukte betragen in GE: $200\cdot(3-x) + 100\cdot(4-x) + 300\cdot(5-x) = 2500 - 600x$. Die Fixkosten betragen 1000 GE. Damit ergibt sich für die Gesamtkosten: $GK = (33500 - 3000x)$ GE. Aus $33500 - 3000x = 32000$ ergibt sich $x = 0{,}5$. Die Gesamtkosten betragen für $x = 0{,}5$ genau 32000 GE.		20	10
e)	Die Gesamtkosten K für einen Auftrag von $2t$ ME von E_1, $1t$ ME von E_2 und $3t$ ME von E_3 betragen: $K(t) = 2t\cdot(29 - 0{,}5\ln(2t)) + t\cdot(130 - 2\ln(t)) + 3t\cdot(54 - 1{,}5\ln(3t)) + 4000$ $= 58t - t\ln(2t) + 130t - 2t\ln(t) + 162t - 4{,}5t\ln(3t) + 4000$ $= 58t - t\ln 2 - t\ln(t) + 130t - 2t\ln(t) + 162t - 4{,}5t\ln 3 - 4{,}5t\ln(t) + 4000$ $= 350t - t\ln 2 - 4{,}5t\ln 3 - 7{,}5t\ln(t) + 4000$. Analog erhält man für den Gesamterlös E: $E(t) = 2t\cdot(42 - 2\ln(2t)) + t\cdot(145 - 4\ln(t)) + 3t\cdot(65 - 3\ln(3t))$ $E(t) = 424t - 4t\ln 2 - 9t\ln 3 - 17t\ln(t)$. Der Gesamtgewinn $G = E - K$ beträgt demnach in Abhängigkeit von t: $G(t) = 74t - 3t\ln 2 - 4{,}5t\ln 3 - 9{,}5t\ln(t) - 4000 \approx 66{,}9768t - 9{,}5t\ln(t) - 4000$. Nun gilt: $G'(t) = 74 - 3\ln 2 - 4{,}5\ln 3 - 9{,}5\ln(t) - 9{,}5 = 64{,}5 - 3\ln 2 - 4{,}5\ln 3 - 9{,}5\ln(t)$ $G''(t) = -9{,}5t^{-1}$ maximaler Gewinn: $G'(t): 64{,}5 - 3\ln 2 - 4{,}5\ln 3 - 9{,}5\ln(t) = 0$ $\ln(t) = \frac{64{,}5 - 3\ln 2 - 4{,}5\ln 3}{9{,}5}$ $t = e^{\frac{64{,}5-3\ln 2-4{,}5\ln 3}{9{,}5}} \approx 424{,}19$ $G''(424{,}19) = -9{,}5\cdot 424{,}19^{-1} < 0$ und $G'(424{,}19) \approx 0$ Also ist der Gewinn für $t = 424{,}19$ maximal. Er beträgt etwa 29,84 GE.		10	15
	Insgesamt 100 BWE	15	60	25

Aufgabe 8 Oktaeder

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	**Ergänzung zum Quadrat:** $d(A,B) = \sqrt{4^2+5^2+3^2} = \sqrt{50}; d(B,C) = \sqrt{4^2+5^2+3^2} = \sqrt{50} = 5\cdot\sqrt{2}$ $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}4\\-5\\3\end{pmatrix}; \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}; \ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$ Beide Bedingungen sichern die Möglichkeit der Ergänzung zum Quadrat. Der Punkt D errechnet sich dann aus $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$ zu D (6 | 5 | 7). **Vektor senkrecht zur Ebene:** Nachweis der Eigenschaft senkrecht z.B. über Ebene E_1, die aufgespannt wird durch die Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$. Es ist dann zu zeigen $\vec{n}_E \perp \overrightarrow{BA}$ und $\vec{n}_E \perp \overrightarrow{BC}$: $\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-5\\3\end{pmatrix} = -12+0+12 = 0$ und $\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix} = 0$. **Länge des Vektors:** $\lvert\vec{n}_E\rvert = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.	10	10	
b)	**Abstand der Punkte *R* und *S*:** Die Strecke *MS* ist die Höhe *h* der oberen quadratischen Pyramide, also in dem rechtwinkligen Dreieck *CMS* eine Kathete. Die Hypotenuse *CS* hat dieselbe Länge wie alle Kanten, nämlich $5\cdot\sqrt{2}$, und aus d(*A*,*C*) = 10 folgt d(*M*,*C*) = 5. Damit gilt für die Höhe *h*: $h^2 = 2\cdot 25 - 25 = 25$, also *h* = d(*M*,*S*) = 5. *R* liegt aus Symmetriegründen auf der Geraden durch *S* und *M* und es gilt analog d(*M*,*R*) = 5. Daraus folgt insgesamt d(*R*,*S*) = 10. **Koordinaten der Punkte *R* und *S*:** Der Mittelpunkt des Quadrats liegt bei *M*(2 | 5 | 4). Mit dem bekannten Normalenvektor (der Länge 5) und dem ebenfalls bekannten Abstand von 5 der beiden Punkte zur Ebene ergibt sich aus (2 | 5 | 4)+(–3 | 0 | 4) der Punkt *S*(–1 | 5 | 8) und aus (2 | 5 | 4)–(–3 | 0 | 4) der Punkt *R*(5 | 5 | 0).			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	 II	 III
	Skizze  	15	10	
c)	Berührpunkte der Kugel mit den Seitenflächen Regularität hat hier zur Folge, dass alle Seitenflächen des Oktaeders gleichseitige Dreiecke sind. Sie hat auch zur Folge, dass der Mittelpunkt der Inkugel in *M* liegt. Die Pyramide aus je einer Seitenfläche und *M* basiert also auf einem gleichseitigen Dreieck; da die Inkugel die Seitenfläche genau am Fußpunkt der Raumhöhe dieser Pyramide berührt, ist der Berührpunkt der <u>Schwerpunkt</u> S_D des gleichseitigen Dreiecks. *(Hinweis: Es gibt andere Argumentationswege, die die Symmetrie anders ausnutzen und zum gleichen Punkt, aber mit anderen Eigenschaften kommen.* S_D *ist gleichzeitig Höhenschnittpunkt und Inkreismittelpunkt des Dreiecks.)* Bestimmen von *P* und *r* Für die Berechnung von *P* kann man das Wissen über die besondere Lage des Schwerpunkts (bei zwei Dritteln der Höhe, von der Spitze aus) ausnutzen. Dies ergibt den Ansatz $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OR} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{RC} + \overrightarrow{RB}\right)$ und damit $P\left(\frac{5}{3} \mid \frac{20}{3} \mid \frac{5}{3}\right)$. Der Radius r_i der Inkugel ist nun einfach der Abstand von *M* – denn *M* ist aus Symmetriegründen auch Mittelpunkt der Inkugel – und *P* und ergibt sich zu $r_i = \frac{5}{3}\sqrt{3}$.		10	5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)	Jede Ebene enthält Gerade durch *A* und *C*			

Wenn zwei Punkte in einer Ebene liegen, liegt auch die gesamte Gerade durch diese Punkte in der Ebene. Also reicht es zu zeigen, dass die Koordinaten von *A* und *C* die Gleichung der Ebenenschar erfüllen:

Für $A: t\cdot 2+(7t-1)\cdot 4+(4-30t)=0$; für $C: t\cdot 2+(7t-1)\cdot 4+(4-30t)=0$.
Damit ist alles gezeigt.

Intervall des Parameters, sodass Kante *BR* geschnitten wird

Die Strecke $\overline{BR}$ lässt sich darstellen als $\overline{BR}: \vec{x}=\overrightarrow{OB}+\lambda\cdot\overrightarrow{BR}$ mit $\lambda\in[0,1]$

bzw. $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}7\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+7\lambda\\5\\1-\lambda\end{pmatrix}$. Damit ist

$\overline{BR}\cap F_t: t(-2+7\lambda)+(7t-1)(1-\lambda)+4-30t=0$

$\Leftrightarrow -25t+3+\lambda=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{3+\lambda}{25}$.

Mit den bekannten Intervallgrenzen für λ *(und der impliziten Voraussetzung der Stetigkeit der Drehung der Ebenen mit stetiger Variation von λ)* ergibt sich $t\in\left[\dfrac{3}{25},\dfrac{4}{25}\right]$.

Schnittfigur mit ***O***

Seien *T* und *U* die Schnittpunkte von F_t mit $\overline{BR}$ bzw. $\overline{SD}$. Dann ist *ATCU* nicht nur ein Viereck, sondern wegen der Regularität des Oktaeders eine Raute mit Diagonalen, die jeweils eine positive Länge aufweisen. Also haben die Rauten jeweils einen nichtleeren Flächeninhalt.

Schnittfigur mit kleinstem Flächeninhalt

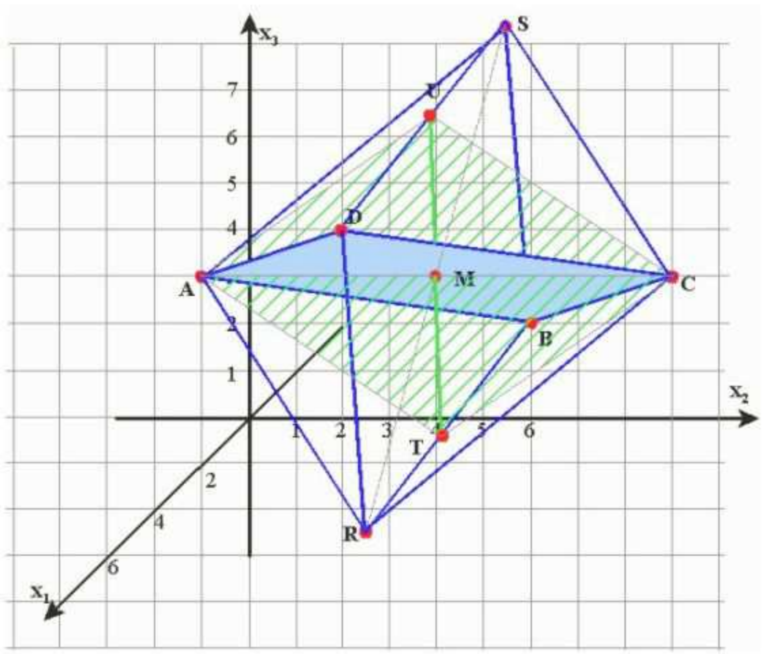
Alle diese Rauten haben die Länge der Diagonalen $\overline{AC}$, die Änderung des Flächeninhalts kann nur aus der Länge der anderen Diagonalen $\overline{TU}$ kommen. Diese ist aus geometrischen Gründen maximal an den Rändern und aus Symmetriegründen minimal, wenn *T* der Mittelpunkt von $\overline{BR}$ ist. Damit ist $T\,(1{,}5\,|\,5\,|\,0{,}5)$.

Den Parameter *t* in F_t für den Punkt *T* ergibt sich z.B. aus der Beziehung
$t=\dfrac{3+\lambda}{25}$; da $\lambda_T=0{,}5$, ist $t_T=\dfrac{7}{50}$.

Die gesuchte Fläche ergibt sich z.B. durch $A=d(AC)\cdot d(MT)$ zu
$A=5\sqrt{50}\approx 35{,}3533$

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

Skizze:



</td><td></td><td>20</td><td>10</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

Koordinaten von S_2 und Abstand zu S:

Möglicher Lösungsweg mit Mitteln der Analytischen Geometrie:

Die Ebenengleichung ergibt sich aus dem Normalenvektor aus a) und einem Punkt der Ebene. Dazu kann man denjenigen Punkt M_1 der Raumdiagonalen $\overline{RS}$ wählen, der 1 LE von S entfernt liegt.

Es ist $g_{MS}: \vec{x} = \overrightarrow{0M} + \lambda \cdot \overrightarrow{MS}$. Aus früheren Teilaufgaben ist bekannt, dass der Abstand von M und S 5 LE ist. Man erhält also M_1, wenn man setzt $\lambda = \frac{4}{5} = 0{,}8$:
$M_1 = (2–2{,}4 \mid 5 \mid 4+3{,}2) = (–0{,}4 \mid 5 \mid 7{,}2)$.

Die Ebenengleichung lautet vorläufig $–3x_1 + 4x_3 = c$. Die Koordinaten von M_1 eingesetzt ergibt $1{,}2 + 28{,}8 = 30 = c$ und damit $E_2: -3x_1 + 4x_3 - 30 = 0$.

Die Gerade durch B und S hat die Gleichung $g_{BS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$.

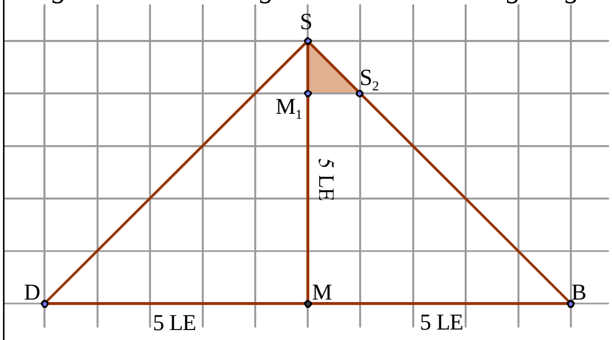
Eingesetzt in die Ebenengleichung: $6–3\mu+4+28\mu–30 = 25\mu–20 = 0$. Daraus folgt $\mu = 0{,}8$. Eingesetzt in g_{BS} erhält man $S_2 = (–1{,}2 \mid 5 \mid 6{,}6)$.

Für den Abstand gilt: $\left|\overline{S_2S}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1{,}2 \\ 5 \\ 6{,}6 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0 \\ 1{,}4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0{,}04 + 1{,}96} = \sqrt{2}$.

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

Möglicher elementargeometrischer Lösungsweg:



Aus dem Dreieck $S\,S_2\,M_1$ kann man ablesen $\left|\overline{S_2 S}\right| = \sqrt{2}$.

Um die Koordinaten von S_2 zu erhalten, setzt man wie oben in die Geradengleichung $\mu = 0{,}8$ ein, denn $\left|\overline{BS}\right| = \sqrt{50} = 5 \cdot \sqrt{2}$.

Viereck S_1, S_2, S_3, S_4 ist Quadrat

Das liegt an der Regelmäßigkeit des Oktaeders, sodass die Quadratform von *ABCD* erhalten bleibt.

Änderung der Dreiecksform

Jeder Eckpunkt des gleichseitigen Dreiecks wird bei der Entfernung der Spitzen des Oktaeders ersetzt durch zwei neue Eckpunkte, deren Verbindungslinie in der Schnittebene liegt. Es wird also ein Sechseck *(mit symmetrisch angeordneten Ecken)*

</td><td></td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

Aufgabe 9 Quadrille

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

Die in a) vorgegebene Alternative wird als Ersatzlösung bezeichnet und im Folgenden bei Abweichungen erwähnt.

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

Wir wählen die *x*-*y*-Ebene als Erdgeschossebene, dann kann man für die Eckpunkte des Erdgeschossbodens z. B. folgende Punkte wählen:

$A_0(10\,|-10\,|\,0)$, $B_0(10\,|10\,|\,0)$, $C_0(-10\,|\,10\,|\,0)$, $D_0(-10\,|-10\,|\,0)$.

Als Eckpunkte des Daches kann man wählen:

$A_1(-5\,|-5\,|\,120)$, $B_1(5\,|-5\,|\,120)$, $C_1(5\,|\,5\,|\,120)$, $D_1(-5\,|\,5\,|\,120)$.

Dabei wurden die von oben nach unten verlaufenden Hauskanten jeweils durch zwei Punkte mit dem gleichen Buchstaben als Bezeichner gekennzeichnet.

</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

– Es genügt, eine der vier gleich langen Kantenlängen zu berechnen:

$$\left|\overline{A_0A_1}\right| = \sqrt{(-5-10)^2 + (-5+10)^2 + (120-0)^2}$$
$$= \sqrt{225+25+14400} = \sqrt{14650} = 121{,}037...$$

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Jede von oben nach unten verlaufende Hochhauskante ist etwa 121 m lang. – Die vier von oben nach unten verlaufenden Kanten haben die Parameterformen: $\overrightarrow{a_\lambda} = \overrightarrow{a_0} + \lambda \cdot \left(\overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{a_0}\right)$ mit $0 \le \lambda \le 1$, $\overrightarrow{b_\lambda} = \overrightarrow{b_0} + \lambda \cdot \left(\overrightarrow{b_1} - \overrightarrow{b_0}\right)$ mit $0 \le \lambda \le 1$, $\overrightarrow{c_\lambda} = \overrightarrow{c_0} + \lambda \cdot \left(\overrightarrow{c_1} - \overrightarrow{c_0}\right)$ mit $0 \le \lambda \le 1$, $\overrightarrow{d_\lambda} = \overrightarrow{d_0} + \lambda \cdot \left(\overrightarrow{d_1} - \overrightarrow{d_0}\right)$ mit $0 \le \lambda \le 1$. Betrachtet man beispielsweise die Kante $\overline{A_0A_1}$, so erhält man diese in Koordinatenform: $(-15\lambda + 10 \mid 5\lambda - 10 \mid 120\lambda)$. In der Höhe h ist die z-Komponente gleich h und damit $\lambda = \frac{h}{120}$. Einsetzen ergibt: $\left(10 - \frac{h}{8} \mid -10 + \frac{h}{24} \mid h\right)$, was zu zeigen ist. Da die Bodenfläche des 11. Stockwerkes bei $h = 40$ liegt, erhält man auf der Kante $\overline{A_0A_1}$ den Punkt $\left(5 \mid -\frac{25}{3} \mid 40\right)$ bzw. $(5 \mid -8{,}\overline{3} \mid 40)$. Auf die gleiche Weise oder durch Ausnutzen der Symmetrie erhält man die Koordinaten aller vier Fußbodeneckpunkte des 11. Stockwerks: $A_{\frac{1}{3}}(5 \mid -8{,}\overline{3} \mid 40)$, $B_{\frac{1}{3}}(8{,}\overline{3} \mid 5 \mid 40)$, $C_{\frac{1}{3}}(-5 \mid 8{,}\overline{3} \mid 40)$, $D_{\frac{1}{3}}(-8{,}\overline{3} \mid -5 \mid 40)$. *Ersatzlösung:* $A_{\frac{1}{3}}(8{,}\overline{3} \mid 5 \mid 40)$, $B_{\frac{1}{3}}(-5 \mid 8{,}\overline{3} \mid 40)$, $C_{\frac{1}{3}}(-8{,}\overline{3} \mid -5 \mid 40)$, $D_{\frac{1}{3}}(5 \mid -8{,}\overline{3} \mid 40)$. <u>Bemerkung:</u> *Diese Werte können entweder durch Einsetzen in alle vier Parameterdarstellungen oder durch Einsetzen in nur eine der vier Parameterdarstellungen und Ausnutzen der Symmetrie gewonnen werden.*	10	5	
c)	– Da waagerechte Geschossböden betrachtet werden, spielt die z-Koordinate keine Rolle – der Drehwinkel kann in der x-y-Ebene betrachtet werden (vgl. die in der Aufgabenstellung gegebene Skizze). Die Verbindungslinie von z. B. A_0 zum Ursprung schließt mit der y-Achse einen Winkel von 45° ein. Der eingezeichnete Punkt A_λ hat die Form: $\left(10 - \frac{h}{8} \mid -10 + \frac{h}{24} \mid h\right)$. Der Fußboden des 16. Stockwerkes liegt auf halber Höhe bei $h = 60$, die ent-			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	sprechende Ecke A_λ hat also die Koordinaten $(2{,}5\,|\,-7{,}5\,|\,60)$, liegt also – wie in der Skizze – im 4. Quadranten. Für den Winkel α, den der zugehörige Ortsvektor mit der *x*-Achse bildet, gilt also $\tan\alpha = 3$, also $\alpha \approx 71{,}6°$. Für den gesuchten Winkel gilt also $W \approx 71{,}6° - 45° = 26{,}6°$. Der Fußbodeneckpunkt im 16. Stockwerk ist also gegenüber dem entsprechenden Eckpunkt im 1. Stockwerk um 26,6° weiter rechts herum um die *z*-Achse gedreht. – Um das Stockwerk zu bestimmen, bei dem die Bodenfläche um *W* = 45° gegenüber der Bodenfläche des Grundgeschosses gedreht ist, kann man z. B. denjenigen Punkt $\left(10-\frac{h}{8}\,|\,-10+\frac{h}{24}\,|\,h\right)$ berechnen, für den der *x*-Wert Null ist, also *h* = 80. Im 21. Stockwerk ist der Fußboden gegenüber dem Erdgeschoss um 45° nach rechts gedreht. <u>*Alternativer Lösungsweg:*</u> Wir betrachten im 16. Stockwerk – also in der Höhe 60 m – die Fußbodenkante, die zwischen der „A-Kante“ und der „B-Kante“ verläuft, also zwischen $\overrightarrow{a_0}+\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_0}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_0}\right)=(2{,}5\,|-7{,}5\,|\,60)$ und $\overrightarrow{b_0}+\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{b_1}-\overrightarrow{b_0}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{b_0}\right)=(7{,}5\,|\,2{,}5\,|\,60)$. *Ersatzlösung:* $(7{,}5\,|2{,}5\,|\,60)$ *bzw.* $(-2{,}5\,|7{,}5\,|\,60)$. Der Differenzvektor $(\,5\,|\,10\,|\,0\,)$ (Ersatzlösung: (–10 | 5 | 0)) ist also ein Richtungsvektor der betrachteten Fußbodenkante. Im 1. Stockwerk (Erdgeschoss) ist $\overrightarrow{b_0}-\overrightarrow{a_0}=(0\,|20\,|\,0)$ (Ersatzlösung: $(-20\,|0\,|\,0)$) ein Richtungsvektor der entsprechenden Fußbodenkante. Diese beiden Richtungsvektoren bilden einen Winkel von $\arccos\left(\frac{(\,5\,|\,10\,|\,0)\cdot(\,0\,|\,20\,|\,0)}{|(\,5\,|\,10\,|\,0)|\cdot|(\,0\,|\,20\,|\,0)|}\right)\approx 26{,}6°$. *Ersatzlösung:* $\arccos\left(\frac{(\,-10\,|\,5\,|\,0)\cdot(-20\,|\,0\,|\,0)}{|(\,-10\,|\,5\,|\,0)|\cdot|(-20\,|\,0\,|\,0)|}\right)\approx 26{,}6°$.		20	
d)	Der Flächeninhalt *F*(*h*) einer Bodenfläche als Funktion von *h* ist das Quadrat des Abstandes von zwei zugehörigen benachbarten Bodenecken. Solche zwei Ecken haben z. B. die Koordinaten $a_0+\frac{h}{120}\cdot\left(\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_0}\right)=\left(10-\frac{h}{8}\;\;|\,-10+\frac{h}{24}\;\;|\,h\right)$ und $\overrightarrow{b_0}+\frac{h}{120}\cdot\left(\overrightarrow{b_1}-\overrightarrow{b_0}\right)=\left(10-\frac{h}{24}\;\;|\;\;10-\frac{h}{8}\;\;|\;\;h\right)$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

Ersatzlösung: $\left(10-\frac{h}{24}\ \middle|\ 10-\frac{h}{8}\ \middle|\ h\right)$ *und* $\left(-10+\frac{h}{8}\ \middle|\ 10-\frac{h}{24}\ \middle|\ h\right)$.

Ein Geschoss hat eine quadratische Grundfläche. Der Betrag des Differenzvektors gibt die Seitenlänge an. Zur Bestimmung des Flächeninhalts muss diese also quadriert werden.

Differenzvektor: $\left(\frac{h}{12}\ \middle|\ -\frac{h}{6}+20\ \middle|\ 0\right)$. Quadrat: $F(h)=\frac{5}{144}\cdot\left(h^2-192h+11520\right)$.

Die quadratische Funktion F hat ihr Minimum bei $h = 96$, also hat das 25. Stockwerk in der Höhe von 96 m die minimale Bodenfläche.

<u>*Alternative:*</u> Es genügt, das Quadrat des Abstandes von $\left(10-\frac{h}{8}\ \middle|\ -10+\frac{h}{24}\ \middle|\ h\right)$ von der z-Achse zu betrachten (halbe Diagonale im entsprechenden Bodenquadrat) und (wenn man will, zu verdoppeln), denn

$2F(h)=\left(10-\frac{h}{8}\right)^2+\left(-10+\frac{h}{24}\right)^2$.

So erhält man auch den Term für $F(h)$ bzw. $\frac{F(h)}{2}$.

</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

Aus d) hat man die Flächenfunktion $F(h)=\frac{5}{144}\left(h^2-192h+11520\right)$ und somit gilt für die Miete:

$$mi(h)=\frac{5}{144}\left(h^2-192h+11520\right)\cdot 10\cdot\left(1+\frac{h}{116}\right)$$
$$=\frac{50}{144}\left(\frac{1}{16}h^3-\frac{19}{29}h^2-\frac{2688}{29}h+11520\right).$$

Die Ableitung dieser Funktion ist $mi'(h)=\frac{50}{16704}\left(3h^2-152h-10752\right)$.

Das einzige innere Extremum dieser Funktion liegt bei $h_E=\frac{1}{3}\cdot\left(4\sqrt{2377}+76\right)$ $\approx 90{,}34$, und es handelt sich um ein Minimum. Das diesem Wert nächste Geschoss – das 24. – liegt bei h = 92 m.

(Die zugehörige Miete beträgt 1444,44 €, im 23. Geschoss bei einer Höhe von 88 m beträgt die Miete 1445,98 €.)

Die höchste Miete kann dann nur ein Randwert sein, d. h. für das 1. Stockwerk (Grundgeschoss, Bodenebene in h = 0 m) oder das 30. Stockwerk (Bodenebene h = 116). Einsetzen ergibt die Werte 4 000 € und 1 878 €. Also ist die Miete im Grundgeschoss am höchsten.

</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>

– Man zeigt, dass die beiden von den Hauskanten $\overline{A_0A_1}$ und $\overline{B_0B_1}$ gebildeten Geraden keinen Punkt gemeinsam haben (parallel sind sie offensichtlich nicht).
Zu lösen wäre: $\vec{a_0}+\lambda\cdot\left(\vec{a_1}-\vec{a_0}\right)=\vec{b_0}+\mu\cdot\left(\vec{b_1}-\vec{b_0}\right)$ mit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$,

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 10-15\lambda &= 10-5\mu \\ -10+5\lambda &= 10-15\mu \\ 120\lambda &= 120\mu\,. \end{aligned} \qquad \textit{Ersatzlösung:}\quad \begin{aligned} 10-5\lambda &= -10+15\mu \\ 10-15\lambda &= 10-5\mu \\ 120\lambda &= 120\mu \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ergibt $\lambda=\mu$ und die erste Gleichung zeigt dann sofort, dass das Gleichungssystem nicht lösbar ist.

Die beiden Geraden (Kanten) sind also windschief.

<u>*Alternative Lösung:*</u> Die Windschiefe ist auch dadurch einzusehen, dass anderenfalls aus Symmetriegründen je zwei benachbarte Kanten einen gemeinsamen Punkt hätten und dass alle diese vier Punkte in gleicher Höhe sein müssten. Dann fielen diese vier Punkte aber in einem Punkt auf der *z*-Achse zusammen, in einer Spitze also, und der Turm wäre ein(e) gewöhnliche(r) quadratische(r) Pyramide(-nstumpf). Das widerspricht aber der Lage der oberen vier Eckpunkte.

Auch die in d) erkannte Existenz einer minimalen Bodenfläche könnte hier als Begründung herangeführt werden.

– Die Bestimmung der Punkte *P* und *Q* kann entweder über Orthogonalitätsbetrachtungen oder über die Minimierung der Abstandsfunktion (mit zwei Variablen, also über partielle Ableitungen) erfolgen. Hier wird der erste Weg dargestellt:

$\overrightarrow{PQ}$ muss (z. B.) orthogonal zu $\overrightarrow{A_1A_0}$ und orthogonal zu $\overrightarrow{B_1B_0}$ sein:

$$\left(\left(\vec{b_0}+\mu\left(\vec{b_1}-\vec{b_0}\right)\right)-\left(\vec{a_0}+\lambda\cdot\left(\vec{a_1}-\vec{a_0}\right)\right)\right)\cdot\left(\vec{a_1}-\vec{a_0}\right)=0$$

$$\left(\left(\vec{b_0}+\mu\left(\vec{b_1}-\vec{b_0}\right)\right)-\left(\vec{a_0}+\lambda\cdot\left(\vec{a_1}-\vec{a_0}\right)\right)\right)\cdot\left(\vec{b_1}-\vec{b_0}\right)=0 \quad , \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}\,.$$

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} 293\lambda-288\mu &= 2 \\ 288\lambda-293\mu &= -6 \quad , \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

mit den Lösungen

$\lambda=\dfrac{2314}{2905}=0,7965...$ und $\mu=\dfrac{2334}{2905}=0,803...$ und den zugehörigen Punkten

$P\left(-\dfrac{1132}{581}\,|\,-\dfrac{3496}{581}\,|\,\dfrac{55536}{581}\right)\approx(-1,948365\ |\ -6,017212\,|\,95,586919)$ und

$Q\left(\dfrac{3476}{581}\,|\,-\dfrac{1192}{581}\,|\,\dfrac{56016}{581}\right)\approx(5,982788\,|\,-2,051635\,|\,96,413081)$.

Ersatzlösung:

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

$P\left(\frac{3496}{581}\,\middle|\,-\frac{1132}{581}\,\middle|\,\frac{55536}{581}\right) \approx (6{,}017212\,|\,-1{,}948365\,|\,95{,}586919)$ und

$Q\left(\frac{1192}{581}\,\middle|\,\frac{3476}{581}\,\middle|\,\frac{56016}{581}\right) \approx (2{,}051635\,|\,5{,}982788\,|\,96{,}413081)$.

Die Punkte liegen knapp unterhalb bzw. oberhalb der minimalen Bodenfläche.

- Der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PQ}$ hat die Koordinaten
  $\frac{1}{2}\cdot\left(\vec{p}+\vec{q}\right) = \left(\frac{1172}{581}\,\middle|\,-\frac{2344}{581}\,\middle|\,96\right) \approx (2{,}017212\,|\,-4{,}034423\,|\,96)$,
  liegt also exakt auf der Höhe der minimalen Bodenfläche.
- Wenn dieser Punkt auf der Seitenfläche läge, müsste er auf der entsprechenden Fußbodenkante liegen, also auf der Strecke $\overline{A_{\frac{96}{120}}B_{\frac{96}{120}}}$.
  Es gilt: $A_{\frac{96}{120}}(-2\,|\,-6\,|\,96)$ und $B_{\frac{96}{120}}(6\,|\,-2\,|\,96)$.

- Ersatzlösung: $A_{\frac{96}{120}}(6\,|\,-2\,|\,96)$ und $B_{\frac{96}{120}}(2\,|\,6\,|\,96)$.

Es müsste also gelten:

$$\vec{m} = \overrightarrow{a_{\frac{96}{120}}} + \lambda\cdot\left(\overrightarrow{b_{\frac{96}{120}}} - \overrightarrow{a_{\frac{96}{120}}}\right), \text{ also } \begin{pmatrix} \frac{1172}{581} \\ -\frac{2344}{581} \\ 96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 96 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\left(\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 96 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 96 \end{pmatrix}\right).$$

Dies führt auf die beiden Gleichungen

$$8\lambda - 2 = \frac{1172}{581} \quad \text{und} \quad 4\lambda - 6 = -\frac{2344}{581},$$

die offensichtlich nicht gleichzeitig erfüllt werden können.

Der Punkt M liegt also nicht auf der entsprechenden Seitenfläche. Wäre die Seitenfläche eben, dann müsste der Punkt M auf ihr liegen. Dies ist aber nicht der Fall.

Dass die Seitenflächen nicht eben sind, folgt auch aus der Windschiefe der jeweils zugehörigen zwei von oben nach unten verlaufenden Kanten. Denn diese liegen ja in der Seitenfläche und könnten nicht windschief sein, wenn die Seitenfläche eben wäre.

		I	II	III
			5	20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 10 GPS

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Aus den als bekannt vorausgesetzten Informationen geht hervor, dass sich die Person gleichzeitig auf der Oberfläche von drei Kugeln befinden muss: • der Erdkugel • der Kugel um Sat_1 mit dem Radius d_1 und • der Kugel um Sat_2 mit dem Radius d_2. Wenn die Daten realistisch sind, dann müssen sich die Erdoberfläche und jede der beiden anderen Kugeloberflächen jeweils in einem Kreis schneiden, den man berechnen kann. Die beiden Schnittkreise schneiden sich dann in zwei Punkten, die man berechnen kann und die in der Regel weit voneinander entfernt liegen, so dass man aus der grob ungefähren Kenntnis des Standortes der Person einen von beiden ausschließen kann.		20	
b)	Es sei $P(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$ ein variabler Punkt. Die Kugelgleichung lautet dann: $\left(\vec{p}-\vec{s}_1\right)^2 = d_1^2$, also $\left(x_1-2\right)^2+\left(x_2-2\right)^2+\left(x_3-3\right)^2 = 3{,}2^2$. Für die Erdoberfläche gilt: $P^2 = 1$, also $x_1^2+x_2^2+x_3^3=1$. Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt: $4x_1+4x_2+6x_3-17=-\frac{231}{25}$. Durch Multiplikation der Gleichung mit 25 erhält man das genannte Ergebnis: $100x_1+100x_2+150x_3=194$. Es handelt sich um eine Ebenengleichung. Alle gemeinsamen Punkte auf den beiden Kugeloberflächen müssen diese Gleichung erfüllen (Umkehrung gilt nicht!), also muss es sich um die Ebene des Schnittkreises handeln.	10		
c)	Wenn man das unterbestimmte lineare Gleichungssystem $100x_1+100x_2+150x_3=194$ $600x_1+400x_2+400x_3=711$ äquivalent umformt (Gauß-Algorithmus) erhält man z.B. $x_2=\frac{581}{400}-\frac{5}{2}x_1$ $\qquad x_3=\frac{13}{40}+x_1$ Daraus erhält man folgende Parameterform der Schnittgeraden der beiden Schnittkreisebenen:		20	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	$g:\ \vec{p}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{581}{400}\\ \frac{13}{40}\end{pmatrix}+x\cdot\begin{pmatrix}1\\ -2{,}5\\ 1\end{pmatrix}.$			
d)	Der Standort der Person muss sowohl auf dieser Geraden, als auch auf der Erdoberfläche liegen. Das führt auf folgende quadratische Gleichung: $\left(\begin{pmatrix}0\\ \frac{581}{400}\\ \frac{13}{40}\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}1\\ -\frac{5}{2}\\ 1\end{pmatrix}\right)^2=1$, also $\frac{33}{4}x^2-\frac{529}{80}x+\frac{194461}{160000}=0$ mit den Lösungen: $x_1=\frac{529}{1320}+\frac{\sqrt{144703}}{3300}$, $x_2=\frac{529}{1320}-\frac{\sqrt{144703}}{3300}$ bzw. $x_1\approx 0{,}51603$, $x_2\approx 0{,}28549$. Mit den Gleichungen aus c) oder der Parameterdarstellung der Geraden erhält man folgende mögliche Positionen der Person: $\mathrm{Pos}_1=\left(\frac{529}{1320}+\frac{\sqrt{144703}}{3300}\ \middle\vert\ \frac{1487}{3300}-\frac{\sqrt{144703}}{1320}\ \middle\vert\ \frac{479}{660}+\frac{\sqrt{144703}}{3300}\right)$ $\mathrm{Pos}_2=\left(\frac{529}{1320}-\frac{\sqrt{144703}}{3300}\ \middle\vert\ \frac{1487}{3300}+\frac{\sqrt{144703}}{1320}\ \middle\vert\ \frac{479}{660}-\frac{\sqrt{144703}}{3300}\right)$ bzw. $\mathrm{Pos}_1\approx(0{,}51603\mid 0{,}73879\mid 0{,}84103)$ $\mathrm{Pos}_2\approx(0{,}28549\mid 0{,}16243\mid 0{,}61049)$ *Anmerkung: Hier wurde bis jetzt exakt gerechnet, es ist auch zulässig, in einer früheren Phase zu Darstellungen als Dezimalbruch mit Taschenrechnergenauigkeit überzugehen.*	10	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
e)	Die Umrechnung von geographischen Koordinaten auf der Erdoberfläche in kartesische Koordinaten erfolgt bekanntermaßen wie folgt: $(\beta;\lambda) \to (\cos\beta\cdot\cos\lambda \mid \cos\beta\cdot\sin\lambda \mid \sin\beta)$ (Beachte: $R = 1$) Diese Rechnung muss hier umgekehrt werden: $ß = \operatorname{Arcsin}(z)$ $\lambda = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{y}{\cos\beta}\right)$ Also: $(\beta_1;\lambda_1) \approx (57{,}3°;17{,}5°)$ $(\beta_2;\lambda 2) \approx (37{,}6°;68{,}9°)$. Es kommt nur die erste Position in Frage, diese liegt deutlich nordöstlich von Hamburg. $\frac{(57{,}3°-53{,}5°)}{360°}\cdot 40\,000 \approx 422$, $\frac{(17{,}5°-10°)}{360°}\cdot\cos 53{,}5°\cdot 40\,000 \approx 450$. Also ca. 422 km nördlich von Hamburg und von dort aus ca. 450 km östlich. *(Das ist in der schwedischen Ostsee zwischen Öland und Gotland !).*			10

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	Mit der Umrechnung $(\beta\,;\lambda) \to (\cos(\beta)\cdot\cos(\lambda)\,\vert\,\cos(\beta)\cdot\sin(\lambda)\,\vert\,\sin(\beta))$ berechnen wir die Koordinaten von Hamburg: $H := \left(\cos 53{,}5^\circ \cdot \cos 10^\circ \vert \cos 53{,}5^\circ \cdot \sin 10^\circ \vert \sin 53{,}5^\circ\right)$ $\approx \left(0{,}58579 \mid 0{,}10329 \mid 0{,}80386\right)$ Sowohl H als auch Pos_1 liegen auf der Erdoberfläche, haben also in dem gewählten Maßstab den Betrag 1. Mit Hilfe des Skalarproduktes berechnet man den sphärischen Winkel: $\sphericalangle H\,O\,Pos_1 = ArcCos(< H\,;Pos_1 >) \approx 5{,}66^\circ$. Für die zugehörige Bogenlänge auf der Erdoberfläche gilt dann: $b \approx \frac{5{,}66}{360} \cdot 40\,000 \approx 629$. Die kürzeste Weglänge auf der Erdoberfläche von Hamburg zur Position der Person beträgt etwa 629 km.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 11 Flughafen

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Innerhalb der 1. Sekunde nach dem Abheben legt das Flugzeug eine Flugstrecke von $s = \sqrt{30^2 + 48^2 + 36^2}$ $s = 67{,}082...$ Metern zurück. Die Startgeschwindigkeit beträgt somit etwa 241,5 km/h. Für den Winkel β zwischen dem Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \\ 36 \end{pmatrix}$ der Flugbahn und dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, normal zur Bodenebene, gilt: $\cos\beta = \frac{\left\vert \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \\ 36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\vert}{\sqrt{30^2 + 48^2 + 36^2}} = \frac{36}{30 \cdot \sqrt{5}} = 0{,}5366$ $\beta = 57{,}54...^\circ$ Der Steigungswinkel α beträgt etwa $90^\circ - \beta = 32{,}5^\circ$.	10	5	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Für den Lotvektor $\overrightarrow{TS}$ vom Tower zu einem Punkt der Startflugbahn gilt:

$$\overrightarrow{TS} = \left(\begin{pmatrix} -200 \\ -400 \\ 0 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \\ 36 \end{pmatrix}\right) - \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{TS} = \begin{pmatrix} -200 \\ -500 \\ -30 \end{pmatrix} + t_s \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

Der Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \\ 36 \end{pmatrix}$ der Flugbahngeraden und der Lotvektor $\overrightarrow{TS}$

stehen senkrecht aufeinander, ihr Skalarprodukt ist also Null:

$$\begin{pmatrix} -200 + t_s \cdot 30 \\ -500 + t_s \cdot 48 \\ -30 + t_s \cdot 36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \\ 36 \end{pmatrix} = 0$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} -6000 + 900 \cdot t_s - 24000 + 2304 \cdot t_s - 1080 + 1296 \cdot t_s &= 0 \\ 60 \cdot (75 \cdot t_s - 518) &= 0 \\ t_s &= \frac{518}{75}. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für den Lotvektor $\overrightarrow{ST}$:

$$\overrightarrow{ST} = \begin{pmatrix} -200 \\ -500 \\ -30 \end{pmatrix} + \frac{518}{75} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \\ 36 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 180 \\ -4212 \\ 5466 \end{pmatrix}.$$

Die Länge des Lotvektors $\overrightarrow{ST}$ beträgt

$$\frac{1}{25}\sqrt{180^2 + 4212^2 + 5466^2} \approx 276{,}12 .$$

Die gesuchte Entfernung beträgt ungefähr 276 m.

Alternative:

Man kann auch den Betrag des Verbindungsvektors $\overrightarrow{ST}$ als quadratische Funktion von t minimieren.

</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Das Flugzeug startet in $S(-200|-400|0)$ und ist eine Sekunde später in einem mit A bezeichneten Flugbahnpunkt $(-170|-352|36)$. A' sei der Schatten von A auf der x_1-x_2-Ebene. Gesucht ist $\left|\overrightarrow{SA'}\right|$.

Ein Sonnenstrahl durch A erfüllt die Geradengleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -170 \\ -352 \\ 36 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Ansatz $x_3 = 0 = 36 - 30\mu$ folgt $\mu = 1{,}2$.
Einsetzen von $\mu = 1{,}2$ in die Geradengleichung liefert $A'(-182|-328|0)$.

Somit ist $\overrightarrow{SA'} = \begin{pmatrix} 18 \\ 72 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\left|\overrightarrow{SA'}\right| = \sqrt{18^2 + 72^2} \approx 74{,}2$.

Die Schattengeschwindigkeit beträgt etwa 267 km/h.

Die Schattengeschwindigkeit ist in diesem Fall höher. Eine höhere Geschwindigkeit entsteht, wenn die Projektionsstrecke länger als die entsprechende Flugstrecke ist. Der Unterschied ist bei gleich bleibender Flugbahn abhängig von der Richtung der Sonneneinstrahlung.

Fliegt man genau gegen die Sonne, so wäre der Schatten auf der x_1-x_2-Ebene als fester Punkt zu sehen, so dass keine Bewegung des Schattens zu verzeichnen wäre.

</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

Die Regenfront ist eine parallele Ebene zur x_3-Achse bzw. senkrecht zur x_1-x_2-Ebene, weil der Normalenvektor dieser Ebene senkrecht auf der x_3-Achse steht.

Zur Berechnung des Zeitpunktes, zu dem das Flugzeug die Regenfront erreicht, wird der Term der Flugbahngeraden eingesetzt in die Ebenengleichung:

$$4x_1 + 3x_2 = 12000 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 12000.$$

Somit folgt:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -200 \\ -400 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \\ 36 \end{pmatrix} \right) = 12000$$

$$\begin{aligned} -800 + 120 \cdot t_1 - 1200 + 144 \cdot t_1 &= 12000 \\ 264 \cdot t_1 &= 14000 \\ t_1 &= 53{,}030\ldots \approx 53{,}03 \end{aligned}$$

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
Das Flugzeug taucht nach etwa 53 s in die Regenfront ein.

Die zugehörige Flughöhe errechnet sich als x_3-Komponente der Flugbahngeraden für $t_1 = 53{,}03$: $53{,}03 \cdot 36 \approx 1909$.

Das Flugzeug gerät in etwa 1 900 m Höhe in die Regenfront.
</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>
Zum vorüber fliegenden Flugzeug gehört die Geradengleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3000 \\ -8000 \\ 6000 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 150 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Radarüberwachung führt zur Kugelgleichung:

$$\left(\left(\begin{pmatrix} 3000 \\ -8000 \\ 6000 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 150 \\ 0 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 30 \end{pmatrix} \right)^2 = 15000^2$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} 3000^2 + (-8100 + 150 \cdot t)^2 + 5970^2 &= 15000^2 \\ 22\,500 \cdot t^2 - 2\,430\,000 \cdot t &= 114\,749\,100 \\ t^2 - 108 \cdot t - 5\,099{,}96 &= 0 \\ t_{1,2} &= 54 \pm \sqrt{2916 + 5099{,}96} \\ t_1 &= 143{,}531... \\ t_2 &= -35{,}531... \end{aligned}$$

Näherungswerte der quadratischen Gleichung sind 143,5 und –35,5.
Die Radarüberwachung dauert insgesamt etwa 179 sec oder etwa 3 Minuten.

Zu einem Zeitpunkt t_2 (nach dem Abheben von der Startbahn) befindet sich das startende Flugzeug in einer mit A bezeichneten Position und das vorüber fliegende Flugzeug zur gleichen Zeit t_2 in einer mit B bezeichneten Position mit

$$\vec{x}_A = \begin{pmatrix} -200 \\ -400 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \\ 36 \end{pmatrix} \text{ beziehungsweise } \vec{x}_B = \begin{pmatrix} 3000 \\ -8000 \\ 6000 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 150 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist derjenige Wert t_2, für den die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$ minimal wird.

Mit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{x_B} - \overrightarrow{x_A} = \begin{pmatrix} 3200 \\ -7600 \\ 6000 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ 102 \\ -36 \end{pmatrix}$ gilt:
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(3200-30t_2)^2+(-7600+102t_2)^2+(6000-36t_2)^2}\ .$$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = f(t_2)$ hat an derselben Stelle ein Extremum wie $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{f(t_2)}$.

Gesucht ist also das Extremum von

$$f(t_2) = (3200-30t_2)^2+(-7600+102t_2)^2+(6000-36t_2)^2$$

$$f'(t_2) = -60(3200-30t_2)+204(-7600+102t_2)-72(6000-36t_2)$$
$$f'(t_2) = -2174400+25200t_2$$

Nullsetzen der Ableitung liefert $t_2 \approx 86{,}3$.

Da der Graph *f* eine nach oben geöffnete Parabel ist, ist klar, dass an dieser Stelle ein Minimum existiert.

Die Flugzeuge sind sich nach ungefähr 86 Sekunden am nächsten.

Zu diesem Zeitpunkt t_2 wird die Entfernung der Flugzeuge durch den Vektor

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{x_B} - \overrightarrow{x_A}$$

beschrieben.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3200 \\ -7600 \\ 6000 \end{pmatrix} + 86{,}3 \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ 102 \\ -36 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 611 \\ 1202{,}6 \\ 2893{,}2 \end{pmatrix}$$

Seine Länge ist zu berechnen über

$$\sqrt{611^2+1202{,}6^2+2893{,}2^2} = \sqrt{10190174} \approx 3192{,}2\ .$$

Die Flugzeuge sind ca. 3,2 km voneinander entfernt, damit besteht keine Gefahr einer Beinahekollision.

Dieser Vektor $\overrightarrow{AB}$ steht auf keinem der beiden Richtungsvektoren der Flugbahnen senkrecht, weil ohne weitere Rechnung zu erkennen ist, dass die entsprechenden Skalarprodukte nicht null werden.
Hiermit sind die Entfernung der Flugzeuge und der Abstand der Flugbahnen **nicht** identisch.

Alternative Lösung:
Der Abstand der windschiefen Geraden der Flugbahnen wird direkt berechnet.
Dieser Abstand beträgt 1382,8 m.

		I	II	III
			15	10

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Die unbekannte Position des Flugzeuges sei mit $X\left(x_1 \mid x_2 \mid 6000\right)$ bezeichnet. Dann gelten die drei Gleichungen: $\left(X-T\right)^2 = 8405^2$; $\left(X-T_2\right)^2 = 9254^2$; $\left(X-T_3\right)^2 = 9415^2$. Ausmultiplizieren ergibt: $x_1^2 + x_2^2 \qquad - 200x_2 = 34\,993\,125$ (I) $x_1^2 + x_2^2 + 4000x_1 + 20\,000x_2 = -54\,004\,384$ (II) $x_1^2 + x_2^2 - 10\,000x_1 + 24\,000x_2 = -115\,998\,675$ (III) Man subtrahiert (II) – (I) und (III) – (II) und erhält (die Gleichungen von zwei Schnittkreisebenen): $4000x_1 + 20\,200x_2 = -88\,997\,509$ $-14\,000x_1 + 4000x_2 = -61\,994\,291$ Das lineare Gleichungssystem hat die Lösung: $x_1 \approx 3000$ und $x_2 \approx -5000$. Das Flugzeug ist also auf dem Nordkurs geblieben und ist gegenüber der Position aus e) 3 km in gleicher Höhe weitergeflogen.			10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Aufgabe 12 Hafenturm

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Die erste Geradengleichung ergibt sich aus den Punkten U_1 und O_1 zu $g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-10\\-3\\80\end{pmatrix},\quad \lambda\in\mathbb{R}$. Die anderen sind: $g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-10\\10\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\-10\\80\end{pmatrix},\ \mu\in\mathbb{R},\ g_3:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-10\\-10\\0\end{pmatrix}+\nu\cdot\begin{pmatrix}10\\3\\80\end{pmatrix},\ \nu\in\mathbb{R}$ und $g_4:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}10\\-10\\0\end{pmatrix}+\rho\cdot\begin{pmatrix}-3\\10\\80\end{pmatrix},\quad \rho\in\mathbb{R}$	10		
b)	Hier ist der Abstand des Grund- und des Dachpunktes auf einer Geraden zu bestimmen, z.B. $d\left(\overline{U_1O_1}\right)$. Es ergibt sich $d=\sqrt{6509}\approx 80{,}68$.	10		
c)	Die Eckpunkte, die auf den Kanten also auf den Geraden g_i liegen, müssen den x_3-Wert h aufweisen, also muss der zugehörige Parameter jeweils den Wert $\frac{h}{80}$ haben. Die vier Eckpunkte lauten daher: $E_1\left(10-\frac{h}{8}\ \mid\ 10-\frac{3h}{80}\ \mid\ h\right),\quad E_2\left(-10+\frac{3h}{80}\mid 10-\frac{h}{8}\ \mid\ h\right),$ $E_3\left(-10+\frac{h}{8}\mid -10+\frac{3h}{80}\ \mid h\right),\quad E_4\left(10-\frac{3h}{80}\mid -10+\frac{h}{8}\ \mid h\right)$ Aus Symmetriegründen ist klar, dass die Seiten und Winkel dieser Vierecke gleich sein müssen, dann können es aber nur Quadrate sein wegen der Konstanz der Innenwinkel bei *n*-Ecken. Man kann zur Überprüfung der Rechtwinkligkeit natürlich auch einmal ein Skalarprodukt ausrechnen, z.B. mit den Vektoren $\overrightarrow{E_1E_2}$ *und* $\overrightarrow{E_1E_4}$: $\overrightarrow{E_1E_2}\cdot\overrightarrow{E_1E_4}=\begin{pmatrix}\frac{13h-1600}{80}\\-\frac{7h}{80}\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{7h}{80}\\\frac{13h-1600}{80}\\0\end{pmatrix}=0$		15	
d)	Da hier Geschosse betrachtet werden, spielt die x_3-Koordinate keine Rolle – der Drehwinkel kann in der x_1-x_2-Ebene betrachtet werden. Die Verbindungslinie von U_1 zum Ursprung schließt mit der x_1-Achse einen Winkel von 45° ein. Für $h = 40$ betrachten wir die Verbindungslinie von E_1 zum Zentrum des Geschosses. Diese schließt mit der x_1-Achse den Winkel α ein, der sich bestimmen		15	

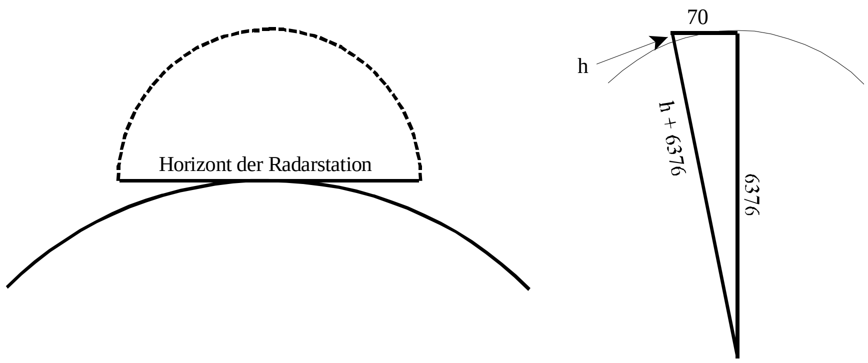
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	lässt durch $\alpha = \arctan\left(\frac{8{,}5}{5}\right) \approx 59{,}53°$. Das mittlere Geschoss ist also um 14,53° gegenüber dem Grundgeschoss gedreht.			
e)	Diese Aussage ist nicht richtig, wie aus d) folgt: Nehmen wir dazu der Einfachheit halber an, das Gebäude hätte nur zwei Geschosse, und ein drittes Geschoss würde noch oben draufgesetzt. Die Bodenflächen des untersten und des ersten Geschosses sind dann nach d) um 14,5° gegeneinander gedreht. Die Bodenflächen des ersten und des zweiten Geschosses sind aber gegeneinander um 30,5° (45°-14,5°, denn das unterste und das zweite Geschoss sind um 45° gegeneinander gedreht).		10	
f)	Wir zeigen, dass die Geraden g_1 und g_2 keinen Punkt gemeinsam haben: Zu lösen ist also das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-10\\-3\\80\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\10\\0\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}3\\-10\\80\end{pmatrix}$ für λ und μ. Die letzte Zeile ergibt λ = μ, und es zeigt sich leicht, dass das LGS keine Lösung aufweist. Dieses Resultat ist noch schneller einzusehen, wenn man sich klar macht, dass anderenfalls aus Symmetriegründen dann je zwei benachbarte Kanten einen gemeinsamen Punkt hätten und dass alle diese vier Punkte in gleicher Höhe sein müssten. Dann fielen diese vier Punkte aber in einem Punkt auf der x_3-Achse zusammen, in einer Spitze also und der Turm wäre eine gewöhnliche quadratische Pyramide. Das widerspricht aber der Lage der oberen vier Eckpunkte.		10	
g)	Da benachbarte Gebäudekanten windschief aber nicht parallel sind, müssen z.B. horizontale Verbindungsstrecken (Fußbodenseiten) sich in ihrer Länge in jeder Höhe unterscheiden und irgendwo minimal sein. Beim Weiterbauen müssten die Fußbodenquadrate irgendwann wieder größer werden.			10
h)	Die Aussage aus g) wird hier quantitativ genauer untersucht. Wir schließen an das Ergebnis von c) an und berechnen die Fläche des Quadrates E_1, E_2, E_3, E_4. Für diese Fläche $A(h)$ gilt: $A(h) = (\overrightarrow{E_1E_2})^2 = \frac{109h^2 - 20\,800h + 1\,280\,000}{3\,200}$. Das ist ein quadratische Funktion, die ihr Minimum bei $h_{Min} = \frac{10\,400}{109} \approx 95{,}4$ hat. Also ist im 25. Geschoss (Bodenhöhe 96 m) die minimale Bodenfläche zu erwarten. $A(96) = 89{,}92$. Das 25. Geschoss hätte die kleinste Bodenfläche von 89,9 Quadratmeter und die Miete betrüge dort 1798,40 €. Das Erdgeschoss hat übrigens 400 m² und das höchste Geschoss hätte 104,3 m².		10	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 13 Flugbahnen

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
Richtung von F_1 (über Grund): $\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$, zwischen NO und N;
Richtung von F_2 (über Grund): $\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$, zwischen SO und O.
Der Abhebepunkt liegt in $P\,(-10{,}5 \mid -14 \mid 0)$ als Schnittpunkt der Geraden g mit der x_1-x_2-Ebene,
das Zentrum der Stadt in $Z\,(0 \mid 0 \mid 0)$, denn $s = 0{,}5$ liefert $x_3 = 6$.
Abstand $\left|\overline{PZ}\right| = \left|Z-P\right| = \sqrt{10{,}5^2+14^2} = 17{,}5$ (km).
Steigungswinkel für F_1: $\tan\varphi = \frac{6}{17{,}5} \Rightarrow \varphi \approx 18{,}9°$
</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
<u>Flugzeug 1 verschwindet in Wolkendecke:</u>
Aus $37 = |s| \cdot \sqrt{21^2+28^2+12^2} = |s| \cdot 37$ folgt im Kontext der Aufgabenstellung $s = 1$; das Flugzeug taucht also in 12 km Höhe in die Wolken ein.
<u>Flugzeuge 1 und 2 kollidieren nicht:</u>
F_2 bewegt sich parallel zur Erdoberfläche in der Ebene mit $x_3 = 12$.
F_1 durchstößt diese Ebene im Punkt $T\,(10{,}5 \mid 14 \mid 12)$.
T liegt nicht auf der Flugbahn von F_2, denn $-7{,}2 + 4t = 10{,}5$ liefert $t_0 = 4{,}425$, aber $-9{,}6 + t_0(-3) \neq 14$.
<u>Abstand:</u>
F_1 befindet sich genau über F_2 , wenn die x_1- und x_2-Koordinaten der Flugbahn übereinstimmen, also
$\begin{matrix} I & -10{,}5+21\cdot s = -7{,}2+4\cdot t \\ II & -14+28\cdot s \;= -9{,}6-3\cdot t \end{matrix} \xrightarrow{3\cdot I+4\cdot II} -87{,}5+175\cdot s = -60$, woraus folgt
$175\cdot s \;=\; 27{,}5 \Rightarrow s = \frac{11}{70}$. Eingesetzt z.B. in II folgt $t = 0$.
Damit erhält man als Orte der Flugzeuge die Punkte $H_1\,(-7{,}2 \mid -9{,}6 \mid \approx 1{,}9)$ bzw. $H_2\,(-7{,}2 \mid -9{,}6 \mid 12)$. Die Flugzeuge befinden sich somit ca. 10,1 km übereinander.
$\left|H_2H_2\right|$ ist nicht der Abstand der Flugbahnen, da $\overrightarrow{H_1H_2}$ nicht senkrecht auf der Flugbahn von F_1 steht:
$\overrightarrow{H_1H_2} = \begin{pmatrix}-7{,}2\\-9{,}6\\12\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-7{,}2\\-9{,}6\\\frac{66}{35}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{354}{35}\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}21\\28\\12\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{354}{35}\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
</td><td></td><td>30</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
c)	Schnittpunkte der Flugbahn mit der Kugel um R mit dem Radius 85 km: In die Kugelgleichung $(x_1+10,2)^2+(x_2+13,6)^2+x_3{}^2=85^2$ werden die Koordinaten der Flugbahn von F_2 eingesetzt, also $(-7,2+4t+10,2)^2+(-9,6-3t+13,6)^2+12^2=85^2 \Rightarrow$ $(4t+3)^2+(-3t+4)^2=7081 \Rightarrow$ $16t^2+24t+9+9t^2-24t+16=7081 \Leftrightarrow 25t^2=7056$ bzw. $t^2=282,24$ Lösung: $t=\pm 16{,}8$. Damit ist $S_1\,(-7{,}2-16{,}8\cdot 4 \mid -9{,}6-16{,}8\cdot(-3) \mid 12)$ und $S_2\,(-7{,}2+16{,}8\cdot 4 \mid -9{,}6+16{,}8\cdot(-3) \mid 12)$. F_2 fliegt zwischen den Punkten $S_1\,(-74{,}4 \mid 40{,}8 \mid 12)$ und $S_2\,(60 \mid -60 \mid 12)$ im Überwachungsbereich; seine Flugstrecke dazwischen beträgt 168 km, denn $\lvert S_2-S_1\rvert=\left\lvert\begin{pmatrix}60\\-60\\12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-74,4\\40,8\\12\end{pmatrix}\right\rvert=\left\lvert\begin{pmatrix}134,4\\100,8\\0\end{pmatrix}\right\rvert=\sqrt{134,4^2+100,8^2}=\sqrt{28224}=168$.		15	15
d)	Gerade g_1 durch die beiden Punkt G_1 und G_2 $g_1: \vec{x}=\vec{v}+r\cdot\vec{u}=\begin{pmatrix}84\\-3\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}72\\96\\0\end{pmatrix}$. Abstand der Geraden g_1 von R: Ein Normalenvektor zu g_1 ist $\begin{pmatrix}-96\\72\\0\end{pmatrix}$ und $\left\lvert\begin{pmatrix}-96\\72\\0\end{pmatrix}\right\rvert=120.$ $\frac{1}{120}\left\lvert\left(\begin{pmatrix}-10,2\\-13,6\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}84\\-3\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}-96\\72\\0\end{pmatrix}\right\rvert=\frac{1}{120}\left\lvert\begin{pmatrix}-94,2\\-10,6\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-96\\72\\0\end{pmatrix}\right\rvert=$ $\frac{1}{120}\lvert 9043,2-763,2\rvert=\frac{8280}{120}=69$ Ein im Nachbarland landendes Flugzeug kann hiernach noch 16 km hinter der Grenze vom Radar erfasst werden. Die berechnete Lösung berücksichtigt die Erdkrümmung nicht. Theoretisch erreicht der Radarstrahl den Erdboden schon in geringer Entfernung von der Station nicht mehr, so dass tieffliegende Objekte vom Strahl nicht getroffen werden.		10	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Skizze:  Die gesuchte Höhe *h* ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras : $(h+6\,376)^2 = 6376^2 + 70^2 = 40\,658\,276 \Rightarrow$ $h+6\,376 = \sqrt{40\,658\,276} \approx 6\,376{,}3842$ Damit ist die Höhe *h* etwa 384 m. Die maximale Flughöhe, bis zu der ein Flugobjekt in 70 km Entfernung von der Radarstation unentdeckt bliebe, beträgt etwa 381 m.	5	5	
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 14 Kugel und Ebene

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<u>1. Lösungsvorschlag:</u> Die Kugel schneidet die Ebene in mehr als einem Punkt, wenn der Abstand des Mittelpunktes von der Ebene kleiner als der Radius der Kugel ist. Dieser Abstand lässt sich mit Hilfe eines Normalenvektors der Ebene bestimmen: Der Schnittpunkt einer Geraden längs dieses Vektors durch *M* mit der Ebene wäre zugleich der gesuchte Punkt *S*, falls $\lvert\overrightarrow{MS}\rvert < r$. $(1 \mid 1 \mid 1)^T$ ist offenbar ein Normalenvektor von *E*. $\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \nu\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc\|c}1 & -2 & -1 & 3\\-1 & 1 & -1 & 2\\0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{ccc\|c}1 & -2 & -1 & 3\\-1 & 1 & -1 & 2\\0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right) \xrightarrow[II+I]{} \left(\begin{array}{ccc\|c}1 & -2 & -1 & 3\\0 & -1 & -2 & 5\\0 & 1 & -1 & 2\end{array}\right) \xrightarrow[III+II]{} \left(\begin{array}{ccc\|c}1 & -2 & -1 & 3\\0 & -1 & -2 & 5\\0 & 0 & -3 & 7\end{array}\right)$ und damit $\sigma = -\frac{7}{3}$. Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $\left(\frac{5}{3} \mid \frac{5}{3} \mid \frac{2}{3}\right)$.			

	Lösungsskizze	I	II	III
	Der Abstand diese Punktes von M ist $\left\|\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\\frac{5}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}\right\|=\frac{7}{3}\cdot\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|=\frac{7}{3}\cdot\sqrt{3}\approx 4<7$. Die Behauptung ist somit gezeigt und S bereits berechnet: $S\left(\frac{5}{3}\mid\frac{5}{3}\mid\frac{2}{3}\right)$. Der Radius r_s des Schnittkreises ergibt sich aus dem berechneten Abstand und dem Kugelradius mit Hilfe des Satzes von Pythagoras $r_s^{\ 2}=7^2-\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow r_s\approx 5{,}7LE$ <u>2. Lösungsvorschlag:</u> *(Abweichungen vom 1. Vorschlag)* Aus der Abstandsformel folgt $\left\|\left(\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\|\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|=\frac{7}{\sqrt{3}}<7$, wobei A (1 | 2 | 1) ein Punkt der Ebene ist und der Normalenvektor hier normiert ist. E und K haben also mehr als einen Punkt gemeinsam. Der Mittelpunkt S liegt auf einer Geraden durch M mit dem Richtungsvektor $(1\mid 1\mid 1)^T$ d.h. $(4+s)+(4+s)+(3+s)=4\Rightarrow s=-\frac{7}{3}$, und eingesetzt in die Geradengleichung ergibt sich $\vec{s}=\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix}-\frac{7}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow S\left(\frac{5}{3}\mid\frac{5}{3}\mid\frac{2}{3}\right)$	10	25	10
b)	Die Spiegelung der Kugel an der Ebene bedeutet im Wesentlichen die Spiegelung ihres Mittelpunktes M. Die Verbindungsstrecke von M zum Bildpunkt M^* schneidet die Spiegelebene senkrecht, verläuft aus Symmetriegründen durch S und hat S als Mittelpunkt. Es gilt also: $\vec{m}^*=\vec{s}-(\vec{m}-\vec{s})=2\vec{s}-\vec{m}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ K^*:\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}\right)^2=49$		15	
c)	Für z gilt : $\left(\begin{pmatrix}6\\1\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix}\right)^2=49\Leftrightarrow 4+9+(z-3)^2=49\Leftrightarrow z=-3\vee z=9$ z = 9 ist der gesuchte positive Wert.	10		
d)	Sei X ein beliebiger Punkt der Tangentialebene. Dann stehen die Vektoren $\overrightarrow{PX}$ und $\overrightarrow{MP}$ senkrecht aufeinander. Mit P (6 | 1 | 9) gilt daher $\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\1\\9\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}6\\1\\9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix}\right)=0\Leftrightarrow\ 2\cdot(x_1-6)-3\cdot(x_2-1)+6\cdot(x_3-9)=0$ und damit lautet die Gleichung der Tangentialebene T: $2x_1-3x_2+6x_3=63$.		5	5

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung, Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Prinzipiell können bei a) und e) gleiche Lösungsstrategien verwendet werden.
Alle zu T parallelen Ebenen haben die Gleichungen: $2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = C, C \in \mathbb{R}$.
Mit der Kugel K gemeinsame Punkte haben diejenigen zu T parallelen Ebenen, die Punkte mit der Strecke $\overline{MP}$ oder mit dem am Punkt M gespiegelten Bild dieser Strecke gemeinsam haben.
Für die Ebene durch P ist C = 63, für die Ebene durch M gilt C = 14. Für die „letzte“ parallele Ebene durch den Spiegelpunkt von P folgt C = 14 – 49 = –35.
Die Ebenen sind also bestimmt durch $2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = C$ mit $C \in [-35; 63]$.

Ist der Radius des Schnittkreises 2, folgt nach Pythagoras für den Abstand a seines Mittelpunktes vom Mittelpunkt der Kugel: $2^2 + a^2 = 49 \Rightarrow |a| = \sqrt{45}$
Mit einem Normaleneinheitsvektor der Ebenen gilt für die Mittelpunkte der beiden Kreise also $\vec{m}_{1/2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \pm \sqrt{45} \cdot \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$,
gerundet: $M_1(5{,}92 \mid 1{,}13 \mid 8{,}75)$ bzw. $M_2(2{,}08 \mid 6{,}87 \mid -2{,}75)$.
Durch Einsetzen der Punkte erhält man die beiden möglichen Ebenengleichungen, von denen nur eine berechnet werden muss:
$2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 60{,}95$ und $2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = -32{,}95$.</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>55</td><td>25</td></tr>
</table>

Aufgabe 15 Eckpyramide

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung, Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>$\boldsymbol{E_0}$: $x_1 - x_3 = 0$
Die Ebene enthält alle Punkte der Form ($a \mid x_2 \mid a$), $a \in \mathbb{R}$. Also enthält die Ebene die x_2-Achse ($a = 0$) und insbesondere auch den Nullpunkt. Ihr Schnitt mit der x_1-x_3-Ebene ist die Gerade $x_1 = x_3$, d. h. die Winkelhalbierende dieser Ebene.</td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Lösung z.B. über die Form von g mit dem allgemeinen Vektor:
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ 1-2k \\ k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$. Eingesetzt in die Koordinatenform von $\boldsymbol{E_a}$ ergibt dies die Gleichung $(a+1) \cdot k + a \cdot (1-2k) + (a-1) \cdot k = a$. Diese Gleichung vereinfacht sich zu der für alle a richtigen Beziehung $a = a$.
Damit liegt g in jeder der Ebenen $\boldsymbol{E_a}$.</td><td>10</td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	<u>Schnittpunkte</u> $S_1\,(x_{S_1}\,\|\,0\,\|\,0)$. Einsetzen in die Koordinatenform von $\boldsymbol{E_a}$ ergibt $S_1\left(\frac{a}{a+1}\|0\|0\right),\ a \neq -1$. Analog ergeben sich $S_2\left(0\|1\|0\right)$ und $S_3\left(0\|0\|\frac{a}{a-1}\right),\ a \neq 1$. Die Ebene $\boldsymbol{E_1}$ hat keinen Schnittpunkt mit der x_3-Achse, denn die x_3-Komponente ist gleich Null und das absolute Glied ungleich Null. Entsprechend schneidet die Ebene $\boldsymbol{E_{-1}}$ die x_1-Achse nicht. (Nach Aufgabenteil a) schneidet die Ebene $\boldsymbol{E}_0$ alle drei Achsen – im Nullpunkt.) <u>Volumen der Eckpyramide:</u> Das Volumen der von den Vektoren $\overrightarrow{OS_1}$, $\overrightarrow{OS_2}$ und $\overrightarrow{OS_3}$ aufgespannten dreiseitigen Pyramide ist $\frac{1}{6}$ des Volumens des von $\overrightarrow{OS_1}$, $\overrightarrow{OS_2}$ und $\overrightarrow{OS_3}$ aufgespannten Spats, denn die Grundfläche der dreiseitigen Pyramide ist halb so groß wie die Grundfläche des Spats und eine Pyramide hat das Volumen „$\frac{1}{3}$ mal Grundfläche mal Höhe“. Der Spat ist ein Quader mit den Seitenlängen $\|\overrightarrow{OS_1}\|$, $\|\overrightarrow{OS_2}\|$ und $\|\overrightarrow{OS_3}\|$, also berechnet sich das Spatvolumen als $\|\overline{OS_1}\|\cdot\|\overline{OS_2}\|\cdot\|\overline{OS_3}\|$. Beide Überlegungen zusammen ergeben die gesuchte Formel. (Hier sind natürlich auch Rechnungen möglich.) Eine andere Argumentation wäre die folgende: Die Eckpyramide hat am Ursprung drei Flächen, die paarweise senkrecht aufeinander stoßen. Damit ist ihr kleinster Umhüllungsquader der Quader mit den drei Kantenlängen x_{S_1}, x_{S_2} und x_{S_3}. Dessen Volumen ist $V_Q = \|x_{S_1}\cdot x_{S_2}\cdot x_{S_3}\|$. Wählt man eine dieser Flächen als rechteckige Umhüllung der Grundfläche der Eckpyramide aus, so hat die Grundfläche der Eckpyramide als rechtwinkliges Dreieck mit den entsprechenden Seitenlängen genau die Hälfte des Inhalts des Rechtecks. Andererseits weist jede Pyramide als Volumen nur ein Drittel des Volumens des sie umhüllenden Prismas auf. Da $x_{S_1} = \left\|\overrightarrow{OS_1}\right\|$ (und entsprechend für die anderen Punkte), ergibt sich das gewünschte Resultat. <u>Bestimmung der *a*-Werte:</u> Für die Eckpyramide der Ebenen $\boldsymbol{E_a}$ gilt (mit Einsetzen): $V_a = \frac{1}{6}\cdot\left\|\frac{a}{a+1}\right\|\cdot\left\|\frac{a}{a-1}\right\|$. Je nachdem, ob a > 1 oder 0 < a < 1 gilt, ergeben sich die beiden Bestimmungsgleichungen für *a*: $1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{a^2}{a^2-1}$ oder $1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{a^2}{1-a^2}$. Daraus ergeben sich die beiden Gleichungen $6a^2-6=a^2$ oder $6-6a^2=a^2$. Diese haben die positiven Lösungen $a_1=\sqrt{\frac{6}{5}} \wedge a_2=\sqrt{\frac{6}{7}}$.	5	25	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
d)	Grundsätzlich gilt: Zwei Ebenen stehen genau dann senkrecht zueinander, wenn ihre Normalenvektoren orthogonal zueinander sind. Es gilt dabei $\overrightarrow{n_m} = \begin{pmatrix} m+1 \\ m \\ m-1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_a} = \begin{pmatrix} a+1 \\ a \\ a-1 \end{pmatrix}$. Die Orthogonalitätsbedingung ergibt die Gleichung $\overrightarrow{n_m} \cdot \overrightarrow{n_a} = 0 \Leftrightarrow (m+1)(a+1) + m \cdot a + (m-1)(a-1) = 0$. Dies führt zu der Bedingung $m \cdot a = -\frac{2}{3}$. Für a = 2 liefert Einsetzen die Lösung $m = -\frac{1}{3}$.		15	
e)	Aus der Tafel folgt für den Abstand: $dis_a = \left\|\left(\vec{0} - \vec{v}_0\right) \cdot \vec{n}_0\right\|$, wobei $\vec{v}_0$ ein beliebiger Punkt der Ebene ist und $\vec{n}_0$ der Normaleneinheitsvektor der Ebene ist. $dis_a = \left\|\vec{v}_0 \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\| = \left\|\frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right\| = \left\|\frac{(0\|1\|0)^T \cdot (a+1\|a\|a-1)^T}{\sqrt{(a+1)^2 + a^2 + (a-1)^2}}\right\|$ $= \left\|\frac{a}{\sqrt{(a+1)^2 + a^2 + (a-1)^2}}\right\|$ $= \left\|\frac{a}{\sqrt{2+3a^2}}\right\|$ Zu lösen sind die beiden Gleichungen $\frac{a}{\sqrt{2+3a^2}} = 0{,}5$ und $\frac{a}{\sqrt{2+3a^2}} = -0{,}5$. Für die erste Gleichung folgt durch Quadrieren: $\frac{a^2}{2+3a^2} = \frac{1}{4}$ und weiter $4a^2 = 2 + 3a^2$ $a^2 = 2,$ also $\mathrm{a} = \sqrt{2}$ oder $\mathrm{a} = -\sqrt{2}$. Durch Einsetzen erhält man, dass nur $a = \sqrt{2}$ Lösung der ersten Gleichung ist. Entsprechend erhält man die Lösung der zweiten Gleichung: $a = -\sqrt{2}$. Die Ebenen $\boldsymbol{E}_{\sqrt{2}}$ und $\boldsymbol{E}_{-\sqrt{2}}$ sind diejenigen, die vom Nullpunkt den Abstand 0,5 haben.		15	
f)	Es gilt $V_a = \left\|\frac{1}{6} \cdot \frac{a}{a+1} \cdot \frac{a}{a-1}\right\| = \left\|\frac{a^2}{6(a^2-1)}\right\|$.			

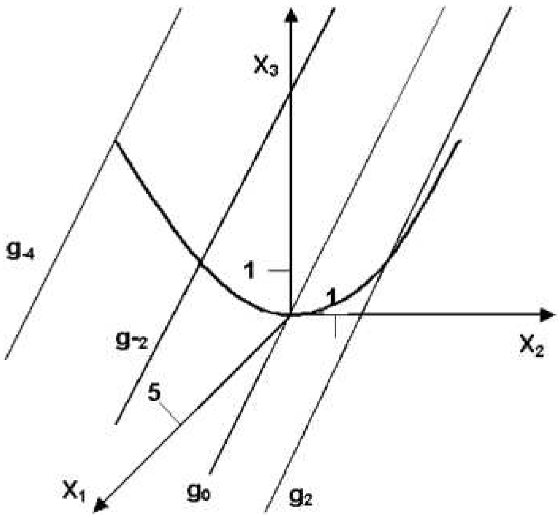
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Für $a>1$ oder $a<-1$ gilt: $V_a=\dfrac{a^2}{6\cdot(a^2-1)}$. Für diesen Bereich gilt also $V_a=V_{-a}$ und man kann sich auf die Betrachtung des Verhaltens der Funktion auf den Bereich $a>1$ beschränken, für das asymptotische Verhalten auf $x\to\infty$. Es ergibt sich $\lim\limits_{a\to\infty}V_a=\lim\limits_{a\to\infty}\left(\dfrac{a^2}{6(a^2-1)}\right)=\dfrac{1}{6}$. Für a = 0 ist ersichtlich das Volumen gleich Null. Da das Volumen aber größer oder gleich Null sein muss, liegt hier ein Minimum vor. Andererseits liegt bei a = 1 eine Polstelle vor. Da das Volumen immer positiv ist, ist gesichert, dass V_a für beide Richtungen der Annäherung an die Polstelle über alle Grenzen wächst. Damit hat V_a kein Maximum.			15
	Insgesamt 100 BWE	20	65	15

Aufgabe 16 Ortskurve der Schnittpunkte

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Man setzt die Koordinaten von Q in $\boldsymbol{E}_t$ ein. Elementare Umformungen liefern t = –4. Zunächst bestimmt man eine Parameterdarstellung der Ebene $\boldsymbol{E}_t$ mit folgender Festlegung: $x_2=\lambda$, $x_3=\mu$, $x_1=\frac{t}{2}\cdot\lambda-2\mu$. Es folgt $E_t:\vec{x}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}\frac{t}{2}\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\lambda,\mu\in IR$ als mögliche Ebenen-Darstellung. Da der 2. Richtungsvektor unabhängig von t ist und alle Ebenen durch den Ursprung verlaufen, folgt für die Schnittgerade s: $\vec{x}=\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\mu\in\mathbb{R}$.	10	5	
b)	Wenn die Ebenen senkrecht zueinander verlaufen sollen, dann muss das Skalarprodukt der Normalenvektoren den Wert 0 ergeben: $\begin{pmatrix}2\\-t\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=-t=0$. Also stehen die Ebenen $\boldsymbol{E}_0$ und $\boldsymbol{H}_0$ senkrecht aufeinander. $\boldsymbol{H}_t$ verläuft parallel zur x_1x_3–Ebene.	10		

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
c)	Da sich das Schnittgebilde von $\boldsymbol{E}_t$ und $\boldsymbol{H}_t$ durch $\lambda = t$ beschreiben lässt, folgt aus der Parameterdarstellung für $\boldsymbol{E}_t$ die Schnittgerade g_t: $$g_t:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot t^2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R}$$ Den Winkel zwischen der Ebene $x_1 = 0$ und der Geraden g_t kann man mittels des Normalenvektors der Ebene und des Richtungsvektors der Geraden bestimmen: $$\sin\alpha = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$ Damit hat der Winkel den Wert $\approx 63{,}4°$.		20	
d)	Die Ebene, die durch die x_2–Achse und die Gerade g_0 festgelegt wird, lässt sich in der folgenden Form darstellen: $$\vec{x} = \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mu, \sigma \in \mathbb{R}.$$ Ein zugehöriger Normalenvektor hat dann die Form $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Wie man sieht, stimmen die Normalenvektoren dieser Ebene und der von $\boldsymbol{E}_0$ bis auf einen Faktor überein. Da beide Ebenen durch den Ursprung verlaufen, sind sie identisch. Um zu überprüfen, ob alle Geraden auf derselben Seite von $\boldsymbol{E}_0$ liegen, bestimmt man zunächst die Ebene $\boldsymbol{E}_0$ in folgender Form: $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x_1 + 2x_3) = 0$, sodass der zugehörige Normalenvektor normiert ist. Anschließend berechnet man den Abstand zwischen der Geraden g_t und der Ebene $\boldsymbol{E}_0$ und erhält den Wert: $\frac{t^2}{2\sqrt{5}}$. Der Wert dieses Bruches ist immer positiv, unabhängig von t. Also liegen alle Geraden auf derselben Seite, mit Ausnahme von $t = 0$. Diese Gerade liegt in der Ebene, wie man anhand eines Vergleichs der Richtungsvektoren erkennen kann.		20	

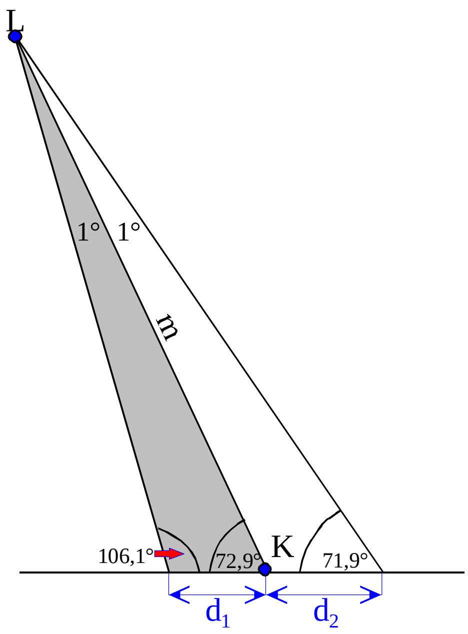
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
e)	Da der Schnittpunkt S_t der Geraden g_t mit der x_2x_3–Ebene in der ersten Koordinate den Wert 0 annehmen muss, folgt für den Parameter: $\mu = \frac{t^4}{4}$. Also hat der Schnittpunkt die Koordinaten S_t (0 | t | $0{,}25t^2$).  Die 2. Koordinate des Schnittpunkts hat den Wert t ($x_2 = t$) und die 3. den Wert $\frac{t^2}{4}$ bzw. $x_3 = \frac{t^2}{4} = \frac{1}{4} \cdot x_2^{\,2}$. Also folgt für die Ortskurve der Schnittpunkte: $x_3 = 0{,}25\, x_2^{\,2}$. Der zugehörige Graph ist eine Parabel. Die Graphen der Scharen verlaufen parallel, denn die Richtungsvektoren stimmen überein, da der Parameter t nur im Ortsvektor auftritt.		10	10
f)	Der entstehende Körper ist ein kegelförmiges Gebilde. Der Radius des Grundkreises beträgt 4 LE, die Körperhöhe ebenfalls, die Mantellinie ist allerdings keine Gerade, sondern ein Parabelbogen. Für das Volumen des Rotationskörpers um die x_2-Achse erhält man: $V = \pi \cdot \int_0^4 \frac{1}{16} x^4 dx$. Berechnet man dieses Integral, so folgt: $V = 12{,}8\,\pi$.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 17 Meteoriteneinschlag

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Der Aufgabenteil fragt zweimal nach dem Schnittpunkt je zweier Geraden im Raum, wobei vorausgesetzt ist, dass diese Schnittpunkte existieren. Zunächst müssen die Beobachter und Richtungen im Koordinatensystem fixiert sein. Laut Aufgabe befindet sich Smith im Ursprung des Koordinatensystems, und die drei Koordinatenrichtungen sind Ost-Nord-Zenith. Dann befindet sich Smith am Punkt S (0 | 0 | 0) und Myers am Punkt M (5 | –3 | 0). Damit ergibt sich für die beiden Geraden zu U $u_S:\ \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1{,}2 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $u_M:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}8 \\ 8 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>und für die beiden Geraden zu L
$$l_S:\ \vec{x}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad l_M:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-3\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\5\\8\end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$
Die Lösung des ersten GLS ergibt $\lambda = \mu = 5$ und damit $U\,(-5 \mid 6 \mid 40)$,
die Lösung des zweiten GLS ergibt $\lambda = 2$ und $\mu = 1$ und damit $L\,(4 \mid 2 \mid 8)$.</td><td></td><td>25</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Mit Hilfe der üblichen Abstandsbestimmung ergibt sich
$d=\sqrt{1121}\,\text{km}\approx 33{,}5\,\text{km}$.</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Die Bahn des Meteoriten ist eine Gerade durch U und L und lässt sich damit durch die Gleichung $b:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\2\\8\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}9\\-4\\-32\end{pmatrix}$ beschreiben. Im Punkt K ist die x_3-Koordinate Null; dies ergibt $t = 0{,}25$ und damit $K\,(6{,}25 \mid 1 \mid 0)$.
Der Winkel lässt sich z.B. mit Hilfe einer Normalen der Erdoberfläche und dem Richtungsvektor der Bahngeraden berechnen.
$$\sin\alpha=\frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\-4\\-32\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1121}}\approx 0{,}956\Rightarrow\alpha\approx 72{,}9^\circ.$$</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Es ergibt sich $d(K,S)\approx 6{,}33\text{ km}$ und $d(K,M)\approx 4{,}19\text{ km}$. Myers ist also näher am Aufschlagpunkt.
Die Richtung für Myers ergibt sich aus dem Vektor $\overrightarrow{MK}=\begin{pmatrix}1{,}25\\4\\0\end{pmatrix}$:
Der Winkel α seines Weges, angegeben Nord $\rightarrow$ Ost, bestimmt sich durch
$\tan\alpha=\frac{1{,}25}{4}$ zu $\alpha\approx 17{,}4^0$.</td><td>10</td><td>15</td><td></td></tr>
</table>

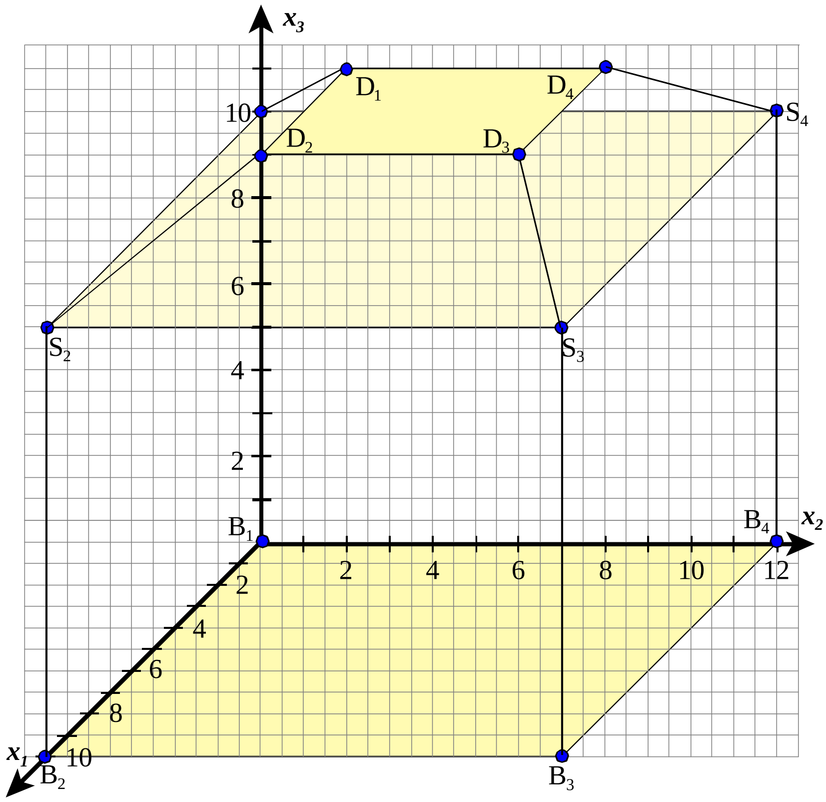
<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung,
Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

Die Strecke m von L bis K ist $\sqrt{(6,25-4)^2+(1-2)^2+(0-8)^2} \approx 8,37\text{ km}$.

Mit dem Sinus-Satz folgt :
$\frac{d_1}{\sin 1°} = \frac{8,37}{\sin 106,1°} \Rightarrow d_1 \approx 152\,\text{m}$ und ebenso $d_2 \approx 154\,\text{m}$.</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>154 m – über den Punkt K hinaus – und 152 m – Aufschlag vor K – sind die extremen Abweichungen von der Flugbahn des Hauptteils. Die Bruchstücke befinden sich in einem Kegel mit der Spitze bei L. Die Fläche, in der die Bruchstücke auftreffen, ist die Schnittfläche dieses Kegels mit der (als eben angenommenen) Erdoberfläche, also eine Ellipse, die einem Kreis sehr ähnlich ist. Der Radius des Kreises ist sicher nicht größer als 154 m, die Fläche also nicht größer als 74 510 m^2.</td><td></td><td></td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

Aufgabe 18 Haus mit Dach

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Der Grat $\overline{S_2D_2}$ hat den Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Die Ebene $\boldsymbol{E_1}$,
auf der der Speicherfußboden liegt, ist parallel zur x_1x_2-Ebene;
ein Normalenvektor ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für den gesuchten Winkel α erhält man aus
$\sin\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$ den Winkelbetrag $\alpha \approx 21{,}80°$.</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Sei $\boldsymbol{E_2}$ die Ebene, auf der die Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$ liegt. Eine Parameterform
der Ebenengleichung von $\boldsymbol{E_2}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $r, s \in \mathbb{R}$
Eine Koordinatenform der Ebenengleichung von $\boldsymbol{E_2}$: $x_1 + 2x_3 = 30$.
Mit Hilfe der Normalenvektoren $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ von $\boldsymbol{E_1}$ und $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ von $\boldsymbol{E_2}$ und der</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Formel $\cos\alpha = \frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{\lvert\vec{n_1}\rvert\cdot\lvert\vec{n_2}\rvert}$ erhält man $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ und somit $\alpha \approx 26{,}57°$.		15	
d)	Die Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$ ist ein Trapez ($S_2S_3 \parallel D_2D_3$). Die Längen der parallelen Seiten: betragen $d(S_2,S_3) = 12$ m bzw. $d(D_{2'},D_3) = 6$ m. Zur Bestimmung der Höhe kann die Gerade g bestimmt werden, die in $\boldsymbol{E_2}$ verläuft, durch D_2 geht und orthogonal zu S_2S_3 ist. Mit Hilfe des Ansatzes g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}6\\3\\12\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}a\\0\\1\end{pmatrix}$ und der Koordinatenform von $\boldsymbol{E_2}$ erhält man für a den Wert –2. Der Schnittpunkt von g und S_2S_3 ist $S(10\|3\|10)$. Die Länge der Strecke $\overline{D_2S}$ beträgt $\sqrt{20}$. Die Höhe des Trapezes beträgt also $\sqrt{20}$ m. Damit ergibt sich für das Flächenmaß A der Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$: $A = 9\cdot\sqrt{20}\ \text{m}^2 \approx 40{,}25\ \text{m}^2$.		15	
e)	Berechnung des Durchstoßpunktes S des Mastes durch die Dachfläche: Ansatz: $\vec{m} = \begin{pmatrix}9\\5\\10\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Dann gilt für den Durchstoßpunkt: $S\,(9\|5\|10+r)$. Mit Hilfe der Koordinatenform von $\boldsymbol{E_2}$ ergibt sich $r = 0{,}5$ und damit $S\,(9\|5\|10{,}5)$. Der Mast ragt also 5,50 m aus dem Dach.		15	
f)	Der Mittelpunkt des Mastes ist $M\,(9\,\|5\,\|\,13)$. Die Gerade g , die durch M geht und orthogonal zur Dachfläche ist, kann durch folgende Parameterform angegeben werden: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}9\\5\\13\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$. Für den Endpunkt E der Stütze gilt demnach $E\,(9+r\,\|\,5\|\,13+2r)$. Mit Hilfe der Koordinatenform von $\boldsymbol{E_2}$ erhält man für $r = -1$ und damit E (8 | 5 | 11). Die Länge der Strecke $\overline{ME}$ beträgt $\sqrt{5}$. Somit ist die Stütze ca. 2,24 m lang.		15	
g)	Der Mittelpunkt des Kreises, auf dem der Torbogen liegt, ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $\overline{K_1K_3}$ und von $\overline{K_1K_2}$. Die Mittelsenkrechte von $\overline{K_1K_3}$ geht durch den Mittelpunkt $M\,(10\|3{,}5\|1)$ von $\overline{K_1K_3}$ und hat $\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ als Richtungsvektor. Geradengleichung: m_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}10\\3{,}5\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Eine Geradengleichung der Mittelsenkrechten von $\overline{K_1K_2}$ ist: m_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}10\\6\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden und damit der Mittelpunkt des Kreises ist $K\,(10 \mid 6 \mid -0{,}25)$. Der Radius r des Kreises ist der Abstand von K zu K_1, also $r = \sqrt{9{,}0625} \approx 3{,}01$. Da sich der Mittelpunkt des Kreises 0,25 m unter dem Erdboden befindet, hat der Torbogen eine Höhe von 2,76 m.			20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 19 Tribüne

Ab dem Abitur 2014 werden für Aufgaben dieser Art 50 statt 100 Punkte vergeben. Alle hier angegebenen Punktzahlen sind daher zu halbieren.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Koordinatengleichung von $\boldsymbol{E_2}$: $-x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 80$. Ein Normalenvektor der x_1x_2-Ebene: $\vec{n_1} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Ein Normalenvektor von $\boldsymbol{E_2}$: $\vec{n_2} = \begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$. Für den Schnittwinkel gilt dann: $\cos\alpha = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{\lvert\vec{n_1}\rvert \cdot \lvert\vec{n_2}\rvert} = \frac{5}{\sqrt{30}}$. $\alpha \approx 24{,}09°$.	15		
b)	Bestimmung von C: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AM} \Rightarrow C\,(32 \mid 16 \mid 16)$, Bestimmung von D: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + 2 \cdot \overrightarrow{BM} \Rightarrow D\,(0 \mid 0 \mid 16)$. Nachweis der Rechteckeigenschaften: Es genügt zu zeigen, dass einer der Winkel ein rechter ist. Es gilt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}32\\16\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-6\\12\\-6\end{pmatrix}$. Das Skalarprodukt der beiden Vektoren beträgt 0; also stehen sie senkrecht aufeinander. Es kann auch gezeigt werden, dass die Diagonalen gleich lang sind.	5	15	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	Abstand von M zu $\boldsymbol{E_1}$: Sei g die Gerade durch M, die senkrecht auf $\boldsymbol{E_1}$ steht. Eine Geradengleichung von g ist: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 19 \\ 2 \\ 19 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$. Durch Einsetzen der Komponenten von $\vec{x}$ in die Gleichung von $\boldsymbol{E_1}$ ergibt sich: $r = -\frac{4}{3}$. Damit hat der Vektor $\overrightarrow{SM}$ den Betrag $\sqrt{80}$. Der Abstand ist demnach geringer als 10 m.		25	
d)	Flächenmaß der überdachten Fläche: Da die Fläche $ABCD$ ein Rechteck ist, ist die senkrecht projizierte Fläche ebenfalls ein Rechteck. A' ist angegeben; B', C', D' unterscheiden sich von den Urbildpunkten lediglich in der x_3-Komponente, die man durch Einsetzen in die Ebenengleichung von $\boldsymbol{E_1}$ erhält. Ergebnis: $B'(38 \mid 4 \mid 1)$, $C'(32 \mid 16 \mid 13)$, $D'(0 \mid 0 \mid 13)$. Das Flächenmaß F des Rechteckes ist das Produkt der Beträge von $\overline{A'B'}$ und $\overline{A'D'}$. $F = 18 \cdot \sqrt{1280} = 643{,}987...$FE. Die überdachte Fläche hat ein Maß von circa 644 m².		20	5
e)	Winkel α zwischen Seil und Dach: $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}}{14 \cdot 6\sqrt{6}} = \dfrac{13 \cdot \sqrt{6}}{42} \approx 0{,}7582$. Daraus folgt: $\alpha \approx 40{,}7°$. Betrag der Kraftkomponente: Es gilt: $\vec{F_G} = \vec{F_S} + \vec{F_D}$ mit $\vec{F_S} = r \cdot \overrightarrow{S_1A}$ und $\vec{F_D} = t \cdot \overrightarrow{AD}$. Es gilt also: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10000 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$. Daraus erhält man $r = t = 1000$. Damit gilt: $\lvert \vec{F_S} \rvert = 14\,000$ N. $\vec{F_S}$ hat einen Betrag von 14 000 N.			15
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20