Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung

Schriftliche Abiturprüfung

Mathematik

Hinweise und Beispiele zu den
zentralen schriftlichen Prüfungsaufgaben

Impressum

Herausgeber:
Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung
Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung
Felix-Dahn-Straße 3, 20357 Hamburg

Referat:	Mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Unterricht
Referatsleitung:	Dr. Britta Creutzburg-Ahnfeldt
Fachreferent Mathematik:	Dr. Andreas Busse

Veröffentlicht auf: www.li.hamburg.de/publikationen/abiturpruefung

Hamburg 2013

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Liebe Kolleginnen und Kollegen, liebe Schülerinnen und Schüler,

in der vorliegenden Handreichung finden Sie Beispielaufgaben zum schriftlichen Abitur im Fach Mathematik.

Ab dem Abitur 2014 besteht die schriftliche Prüfung in Mathematik aus zwei verschiedenen Aufgabenformaten. Die Aufgaben des ersten Formats werden ohne Hilfsmittel gelöst. Für die Bearbeitung dieses hilfsmittelfreien Teils, in dem über alle Sachgebiete hinweg kleinere Aufgaben gestellt werden, dürfen weder eine Formelsammlung noch elektronische Geräte (Taschenrechner, CAS-Rechner) verwendet werden. Zu diesem Aufgabenformat gibt es gesonderte Handreichungen.

In dieser Handreichung werden Aufgaben des anderen Aufgabenformats vorgestellt, wie es schon aus den vergangenen Jahren bekannt ist. Bei den hier vorgestellten Aufgaben werden die Sachgebiete Lineare Algebra/Analytische Geometrie sowie Stochastik berücksichtigt. Dabei wird sich auf Aufgaben beschränkt, zu deren Lösung kein Computeralgebrasystem (CAS) nötig ist. Aufgaben aus dem Sachgebiet Analysis, die ebenfalls im Abitur zu bearbeiten sind, werden in dieser Handreichung nicht präsentiert.

Der gemeinsame Kern aller hier vorliegenden Aufgaben liegt in der mathematischen Modellierung von Austauschvorgängen und von stochastischen Prozessen mithilfe von Matrizen. Dabei werden manchmal eher Aspekte der Linearen Algebra, manchmal stärker Aspekte der Stochastik berücksichtigt. Da Aufgaben zu diesem Themenbereich in der Vergangenheit nur vereinzelt in Prüfungen und Handreichungen auftraten, wurden sie in dieser Broschüre auch im Aufgabentext etwas ausführlicher dargestellt. Dadurch erscheinen die Aufgaben und die Erwartungshorizonte auf den ersten Blick umfangreicher, als sie es sind.

Jede der drei hier vorgestellten Aufgaben tritt in zwei Fassungen auf: eine Version für das erhöhte Anforderungsniveau und eine Version für das grundlegende Anforderungsniveau. Die beiden Fassungen haben jeweils einen gemeinsamen Sachkontext sowie gemeinsame Teilaufgaben, unterscheiden sich aber auch in gewissen Aufgabenteilen. Die für beide Niveaus gleichen Teilaufgaben werden in der Regel unterschiedlich bewertet, Details dazu finden sich in den jeweiligen Erwartungshorizonten.

In den Erwartungshorizonten wurde zur Unterstützung der sich mit dieser Broschüre vorbereitenden Abiturientinnen und Abiturienten besonderer Wert auf eine ausführliche Darstellung der Lösungen gelegt.

Ab dem Abitur 2014 sind in der schriftlichen Prüfung im Fach Mathematik insgesamt 120 Bewertungseinheiten zu erreichen: jeweils 50 Bewertungseinheiten für die beiden zu bearbeitenden komplexen Aufgaben sowie 20 Bewertungseinheiten für den hilfsmittelfreien Teil. Durch die Einführung des hilfsmittelfreien Teils steht für die Bearbeitung der zwei komplexen Aufgaben weniger Zeit zur Verfügung, deshalb sind diese Aufgaben kürzer als in den vergangenen Jahren.

Ab dem Abitur 2014 wird eine etwas geänderte Operatorenliste verwendet, die auch bereits in den Abiturrichtlinien veröffentlicht wurde. Diese Liste ist im vorderen Teil dieses Heftes zu finden. Neu ist der Operator „Erläutern", andere Operatoren wurden etwas präzisiert und bezüglich der Anforderungsbereiche angepasst.

In der Hoffnung, dass die vorliegende Handreichung hilfreich für Sie ist, wünschen wir Ihnen eine erfolgreiche Vorbereitung auf das Abitur!

Der Kollegin Xenia Rendtel und dem Kollegen Manfred Bergunde, die wesentliche Teile dieser Handreichung erstellt haben, möchten wir sehr herzlich für die geleistete Arbeit danken.

Dr. Andreas Busse
Fachreferent Mathematik

Dr. Britta Creutzburg-Ahnfeldt
Leiterin des MINT-Referats

1 Regelungen für die schriftliche Abiturprüfung

Die **Fachlehrerin**, der **Fachlehrer** erhält **fünf** Aufgaben:

- Aufgabe I (hilfsmittelfreier Teil)
- Aufgaben II.1 und II.2 (Schwerpunkt Analysis)
- Aufgabe III (Schwerpunkt Lineare Algebra oder Schwerpunkt Analytische Geometrie)
- Aufgabe IV (Schwerpunkt Stochastik)

Die **Abiturientin**, der **Abiturient**

- erhält diese fünf Aufgaben,
- ist verpflichtet, die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben vor Bearbeitungsbeginn zu überprüfen (Anzahl der Blätter, Anlagen usw.),
- wählt aus den Aufgaben II.1 und II.2 sowie aus den Aufgaben III und IV **jeweils genau eine** Aufgabe aus,
- bearbeitet zunächst die Aufgabe I,
- erhält bei Abgabe der bearbeiteten Aufgabe I Taschenrechner (bzw. CAS-Rechner in CAS-Kursen) und Formelsammlung und beginnt mit der Bearbeitung der beiden ausgewählten Aufgaben,
- vermerkt auf der Reinschrift, welche Aufgabe sie/er bearbeitet hat.

Bearbeitungszeit: grundlegendes Niveau 240 Minuten; erhöhtes Niveau 300 Minuten

Aufgabe I ist in maximal 45 Minuten zu bearbeiten. Für die Bearbeitung der Aufgaben II und III bzw. II und IV steht die verbleibende Restarbeitszeit zur Verfügung. Eine Einlese- und Auswahlzeit von (maximal) 30 Minuten wird der Arbeitszeit vorgeschaltet. In dieser Zeit darf noch nicht mit der Bearbeitung der Aufgaben begonnen werden.

Hilfsmittel: Taschenrechner (nicht programmierbar, nicht grafikfähig), Formelsammlung, Rechtschreiblexikon

In Kursen mit Einsatz von Computer-Algebra-Systemen: CAS-Rechner, Formelsammlung, Rechtschreiblexikon

Grundlage der schriftlichen Abiturprüfung ist der Rahmenplan in der jeweils gültigen Fassung sowie die jeweiligen Schwerpunktsetzungen in den *Regelungen für die zentralen schriftlichen Prüfungsaufgaben* für das jeweilige Jahr.

2 Anforderungsbereiche

Die Anforderungen in der Abiturprüfung unterscheiden sich nach der Art, der Komplexität und dem Grad der Selbstständigkeit der geforderten Leistung; sie verlangen unterschiedliche Arbeitsweisen. Zur Erhöhung der Transparenz und Vergleichbarkeit lassen sich drei Anforderungsbereiche beschreiben, ohne dass in der Praxis der Aufgabenstellung die drei Anforderungsbereiche immer scharf voneinander getrennt werden können. Daher ergeben sich bei der Zuordnung der Teilaufgaben zu Anforderungsbereichen Überschneidungen.

Die zentralen Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung ermöglichen Leistungen in den folgenden drei Anforderungsbereichen mit einem Schwerpunkt im Anforderungsbereich II:

Anforderungsbereich I

Der Anforderungsbereich I umfasst

- die Verfügbarkeit von Daten, Fakten, Regeln, Formeln, mathematischen Sätzen usw. aus einem abgegrenzten Gebiet im gelernten Zusammenhang,
- die Beschreibung und Verwendung gelernter und geübter Arbeitstechniken und Verfahrensweisen in einem begrenzten Gebiet und in einem wiederholenden Zusammenhang.

Dazu kann u. a. gehören:

- Bereitstellen von Definitionen, Sätzen und einfachen Beweisen
- Beschreiben eines einfachen Sachverhalts, eines bekannten Verfahrens oder eines standardisierten Lösungsweges
- Anfertigen von Skizzen auf eine aus dem Unterricht bekannte Weise; Skizzieren der Graphen von Grundfunktionen
- Ausführen von geübten Algorithmen wie z. B. Ableiten und Integrieren in einfachen Fällen, Lösen von einfachen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen nach eingeübten Verfahren
- Verwenden des Rechners als Werkzeug z. B. zum Zeichnen eines geeigneten Ausschnitts des Graphen einer Funktion, beim Lösen von Gleichungssystemen, beim Berechnen von Ableitungen und von Integralen
- Bestimmen der Extremwerte einer Funktion in Fällen, in denen das eingeübte Verfahren unmittelbar zum Ziel führt
- Feststellen der Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden oder Ebenen mit Hilfe eines durch Übung vertrauten Verfahrens
- Bestimmen von Geraden- und Ebenengleichungen bei Vorgabe einfacher und gewohnter Bedingungen
- Darstellen statistischer Daten und Ermitteln statistischer Kenngrößen in einfachen Fällen
- Bestimmen und Berechnen von Wahrscheinlichkeiten in einfachen, vom Unterricht her vertrauten Zusammenhängen

Anforderungsbereich II

Der Anforderungsbereich II umfasst

- selbstständiges Auswählen, Anordnen, Verarbeiten und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Übung bekannten Zusammenhang,
- selbstständiges Übertragen des Gelernten auf vergleichbare neue Situationen, wobei es entweder um veränderte Fragestellungen oder um veränderte Sachzusammenhänge oder um abgewandelte Verfahrensweisen gehen kann.

Dazu kann u. a. gehören:

- Veranschaulichen und Beschreiben von Zusammenhängen bei bekannten Sachverhalten mit Hilfe von Bildern, Texten und Symbolen
- Dokumentieren eines Lösungsweges in sachgerechter mathematischer Form
- Verfassen eines mathematischen Kurzaufsatzes in bekannten Zusammenhängen
- Ausführen von Beweisen, deren Beweisstruktur aus dem Unterricht bekannt ist
- Anwenden von zentralen Begriffen in Beispielen, die in ihrer Struktur einfach sind
- Interpretieren charakteristischer Eigenschaften einer Funktion anhand ihres Graphen
- Übersetzen eines Schaubildes in einen Funktionsterm oder eines Funktionsterms in eine Skizze
- Anpassen von Funktionen an vorgegebene Bedingungen in einfachen Fällen
- Durchführen vollständiger Fallunterscheidungen in überschaubaren Situationen
- gezieltes Verwenden des Rechners bei der Lösung komplexerer Probleme
- Übersetzen einer Ausgangssituation in ein geeignetes bekanntes mathematisches Modell (z. B. Koordinatensystem, Funktionsterm, Gleichungssystem, Wahrscheinlichkeitsverteilung),
- sachgerechtes und begründetes Argumentieren bei der Darstellung eines Modellansatzes oder bei der Auswahl eines Lösungsweges
- verständiges Anwenden der Beziehung zwischen Änderungsrate und Gesamtänderung in bekannten Situationen
- analytisches Beschreiben von geometrischen Objekten, wobei die sie bestimmenden Parameter erst aus anderen Bedingungen erschlossen werden müssen
- Vergleichen und Bewerten verschiedener Lösungsansätze in einem bekannten Zusammenhang
- Analysieren und Modellieren stochastischer Prozesse in aus dem Unterricht bekannter Weise
- Durchführen eines aus dem Unterricht bekannten Verfahrens der beurteilenden Statistik
- Beschaffen, Strukturieren, Auswählen und Auswerten von Informationen zu einer überschaubaren Problemstellung in einer im Unterricht vorbereiteten Vorgehensweise
- Präsentieren von Arbeitsergebnissen in übersichtlicher, gut strukturierter Form

Anforderungsbereich III

Der Anforderungsbereich III umfasst

- planmäßiges und kreatives Bearbeiten komplexerer Problemstellungen mit dem Ziel, selbstständig zu Lösungen, Deutungen, Wertungen und Folgerungen zu gelangen
- bewusstes und selbstständiges Auswählen und Anpassen geeigneter gelernter Methoden und Verfahren in neuartigen Situationen

Dazu kann u. a. gehören:

- kreatives Übersetzen einer komplexeren Ausgangssituation in ein geeignetes mathematisches Modell, ohne dass dies in vergleichbaren Zusammenhängen geübt wurde
- planvolles, begründetes Nutzen und Bewerten von Informationen bei komplexeren oder offeneren Problemstellungen
- Auffinden eines Lösungsansatzes für Probleme, bei denen Kenntnisse aus verschiedenen Teilgebieten der Mathematik verbunden werden müssen, ohne dass dies in vergleichbaren Zusammenhängen geübt wurde
- Überprüfen und Bewerten der Vorgehensweise sowie Interpretieren und Beurteilen der Ergebnisse z. B. bei einer Modellierung oder beim Umgang mit Informationen
- Anwenden zentraler Begriffe und Vorgehensweisen in komplexeren Zusammenhängen
- Verallgemeinern eines Sachverhalts, der nur von Beispielen her bekannt ist
- Ausführen eines Beweises, zu dem eigenständige Beweisgedanken erforderlich sind

3 Liste der Operatoren

Mehr noch als bei dezentralen Aufgaben, die immer im Kontext gemeinsamer Erfahrungen der Lehrkräfte und Schülerinnen und Schülern mit vorherigen Klausuren stehen, müssen zentrale Prüfungsaufgaben für die Abiturientinnen und Abiturienten eindeutig hinsichtlich des Arbeitsauftrages und der erwarteten Leistung formuliert sein. Die in den zentralen schriftlichen Abituraufgaben verwendeten Operatoren (Arbeitsaufträge) werden in der folgenden Tabelle definiert und inhaltlich gefüllt. Entsprechende Formulierungen in den Klausuren der Studienstufe sind ein wichtiger Teil der Vorbereitung der Schülerinnen und Schüler auf das Abitur.

Neben Definitionen und Beispielen enthält die Tabelle auch Zuordnungen zu den Anforderungsbereichen **I**, **II** und **III**, wobei die konkrete Zuordnung auch vom Kontext der Aufgabenstellung abhängen kann und eine scharfe Trennung der Anforderungsbereiche nicht immer möglich ist.

Operatoren	AB	Definitionen	Beispiele
angeben, nennen	**I**	Ohne nähere Erläuterungen und Begründungen, ohne Lösungsweg aufzuzeigen.	Geben Sie drei Punkte an, die in der Ebene liegen. Nennen Sie drei weitere Beispiele zu ...
anwenden	**I – II**	Einen bekannten Sachverhalt oder eine Handlungsanweisung, Formel, Vorschrift auf Elemente ihres jeweiligen Definitionsbereichs anwenden.	Wenden Sie das in Matrix L gegebene Populationsmodell auch auf den Bestand B an. Wenden Sie die Funktionsgleichung auch auf die gegebenen Zahlen an.
begründen	**II–III**	Einen angegebenen Sachverhalt auf Gesetzmäßigkeiten bzw. kausale Zusammenhänge zurückführen. Hierbei sind Regeln und mathematische Beziehungen zu nutzen.	Begründen Sie, dass die Funktion nicht mehr als drei Wendestellen aufweisen kann. Begründen Sie die Zurückweisung der Hypothese.
berechnen	**I**	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen.	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses.
beschreiben	**I–II**	Sachverhalt oder Verfahren in Textform unter Verwendung der Fachsprache in vollständigen Sätzen darstellen (hier sind auch Einschränkungen möglich: „Beschreiben Sie in Stichworten“).	Beschreiben Sie den Bereich möglicher Ergebnisse. Beschreiben Sie, wie Sie dieses Problem lösen wollen, und führen Sie danach Ihre Lösung durch.
bestätigen	**I–II**	Eine Aussage oder einen Sachverhalt durch Anwendung einfacher Mittel (rechnerischer wie argumentativer) sichern. Der Anspruch liegt deswegen unterhalb von „Zeigen“ oder „Beweisen“.	Bestätigen Sie, dass die gegebene Funktion eine Stammfunktion zur Ursprungsfunktion ist. Bestätigen Sie die Parallelität der beiden Ebenen. Bestätigen Sie, dass in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit unter 0,1 liegt.

Operatoren	AB	Definitionen	Beispiele
bestimmen, ermitteln	**II–III**	Einen Lösungsweg darstellen und das Ergebnis formulieren (die Wahl der Mittel kann unter Umständen eingeschränkt sein).	Ermitteln Sie graphisch den Schnittpunkt. Bestimmen Sie aus diesen Werten die Koordinaten der beiden Punkte.
beurteilen	**II-III**	Zu einem Sachverhalt oder zu einem Ergebnis ein selbstständiges mathematisch und/oder sachkontextual begründetes Urteil fällen.	Beurteilen Sie, welche der beiden vorgeschlagenen Funktionen die Situation angemessener modelliert. Beurteilen Sie das Resultat Ihrer Modellrechnung vor dem Hintergrunde der geforderten Kosteneffizienz. Beurteilen Sie die Aussage: „Jede ganzrationale Funktion dritten Grades hat mindestens ein lokales Maximum.“
beweisen, widerlegen	**III**	Beweisführung im mathematischen Sinne unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischer Schlüsse und Äquivalenzumformungen, ggf. unter Verwendung von Gegenbeispielen.	Beweisen Sie, dass die Gerade auf sich selbst abgebildet wird.
entscheiden	**II**	Bei Alternativen sich begründet und eindeutig auf eine Möglichkeit festlegen.	Entscheiden Sie, für welchen der beiden Beobachter der Aufschlagpunkt näher ist. Entscheiden Sie, welche der Ihnen bekannten Verteilungen auf die Problemstellung passt.
ergänzen, vervollständigen, eintragen	**I**	Tabellen, Ausdrücke, grafische Darstellungen oder Aussagen nach bereits vorliegenden Kriterien, Formeln oder Mustern füllen.	Ergänzen Sie die Tabelle der Funktionswerte. Vervollständigen Sie die Zeichnung mit den in der Aufgabenstellung gegebenen Punkten. Tragen Sie den Winkel α in Ihrer Skizze ein.
erläutern	**II-III**	Einen mathematischen Sachverhalt nachvollziehbar und verständlich näher erklären und durch Beispiele veranschaulichen; Einschränkungen wie z.B. „Erläutern Sie im gegebenen Sachkontext…“ sind möglich.	Erläutern Sie den Begriff „exponentielles Wachstum“.
erstellen	**I**	Einen Sachverhalt in übersichtlicher, meist fachlich üblicher oder vorgegebener Form darstellen.	Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Funktion.
herleiten	**II-III**	Die Entstehung oder Entwicklung eines gegebenen oder beschriebenen Sachverhalts oder einer Gleichung aus anderen oder aus allgemeinen Sachverhalten darstellen.	Leiten Sie die gegebene Formel für die Stammfunktion her.

Operatoren	AB	Definitionen	Beispiele
interpretieren	**II–III**	Mathematische Objekte oder Ergebnisse aus einer bestimmten Perspektive deuten.	Interpretieren Sie die Lösung des Gleichungssystems geometrisch. Interpretieren Sie die Bedeutung der Variable *s* vor dem Hintergrund des Sachkontextes.
skizzieren	**I–II**	Die wesentlichen Eigenschaften eines Objektes grafisch darstellen (auch Freihandskizze möglich).	Skizzieren Sie die gegenseitige Lage der drei Körper.
untersuchen	**II-III**	Sachverhalte nach bestimmten, fachlich üblichen bzw. sinnvollen Kriterien erkunden und darstellen.	Untersuchen Sie die Funktion … Untersuchen Sie, ob die Verbindungskurve ohne Knick in die Gerade einmündet.
vergleichen	**II–III**	Nach vorgegebenen oder selbst gewählten Gesichtspunkten Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede ermitteln und darstellen.	Vergleichen Sie die beiden Vorschläge … nach der von den Kurven eingeschlossenen Fläche.
zeichnen, grafisch darstellen	**I–II**	Eine hinreichend exakte grafische Darstellung anfertigen.	Zeichnen Sie den Graphen der Funktion. Stellen Sie die Punkte und Geraden im Koordinatensystem mit den gegebenen Achsen dar.
zeigen, nachweisen	**II–III**	Eine Aussage, einen Sachverhalt nach gültigen Schlussregeln, Berechnungen, Herleitungen oder logischen Begründungen bestätigen.	Zeigen Sie, dass das betrachtete Viereck ein Drachenviereck ist.
zuordnen	**I–II**	Ohne tiefer gehende Erläuterung eine Verbindung zwischen zwei Listen herstellen.	Ordnen Sie die Graphen den gegebenen Gleichungen zu.

4 Bewertung

Die Festlegung der Schwelle zur Note „ausreichend“ (5 Punkte) und die Vergabe der weiteren Noten sind Setzungen, die in besonderem Maße der pädagogischen Erfahrung und Verantwortung der Beurteilenden unterliegen.
Die **Note „ausreichend“** (5 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden sind. Dazu müssen auch Leistungen im Anforderungsbereich II erbracht werden und mindestens eine Teilaufgabe, die Anforderungen im Bereich II aufweist, vollständig und weitgehend richtig bearbeitet werden.

Die **Note „gut“** (11 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden sind. Dabei muss die Prüfungsleistung in ihrer Gliederung, in der Gedankenführung, in der Anwendung fachmethodischer Verfahren sowie in der fachsprachlichen Artikulation den Anforderungen voll entsprechen. Ein mit „gut“ beurteiltes Prüfungsergebnis setzt voraus, dass neben Leistungen in den Anforderungsbereichen I und II auch Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht werden.

Im Übrigen gilt bei der Festlegung von Notenpunkten die folgende Tabelle.

Bewertungseinheiten	erbrachte Leistung	Notenpunkte
≥ 114	≥ 95 %	15
≥ 108	≥ 90 %	14
≥ 102	≥ 85 %	13
≥ 96	≥ 80 %	12
≥ 90	≥ 75 %	11
≥ 84	≥ 70 %	10
≥ 78	≥ 65 %	9
≥ 72	≥ 60 %	8
≥ 66	≥ 55 %	7
≥ 60	≥ 50 %	6
≥ 54	≥ 45 %	5
≥ 48	≥ 40 %	4
≥ 39[1]	≥ 33 %	3
≥ 31	≥ 26 %	2
≥ 22	≥ 19 %	1
< 22	< 19 %	0

Bei erheblichen Mängeln in der sprachlichen Richtigkeit sind bei der Bewertung der schriftlichen Prüfungsleistung je nach Schwere und Häufigkeit der Verstöße bis zu zwei Notenpunkte abzuziehen. Dazu gehören auch Mängel in der Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen sowie falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text.

5 Aufgaben

Die folgenden Aufgaben sind Beispiele für zentral gestellte schriftliche Abiturprüfungsaufgaben im Fach Mathematik. Außer der Aufgabenstellung enthalten die Beispiele den Erwartungshorizont mit Bezug zu den drei Anforderungsbereichen sowie mit Bewertungshinweisen (in *kursiver* Schrift).

[1] Die zu erreichenden Bewertungseinheiten für erbrachte Leistungen von weniger als 40% wurden auf die nächstkleinere ganze Zahl abgerundet.

5.1 Grundlegendes Anforderungsniveau

Lineare Algebra/Analytische Geometrie 1

Studentinnen und Studenten (grundlegendes Anforderungsniveau)

Professor Heise kennt aus Langzeitbeobachtungen die Studentinnen und Studenten des ersten Semesters besser, als sie ahnen:

- 60% derer, die in einer Vorlesung aktiv mitarbeiten, arbeiten auch in der nächsten Vorlesung aktiv mit.
- 40% derer, die an einer Vorlesung nur passiv teilnehmen, nehmen auch an der nächsten Vorlesung nur passiv teil.
- 30% derer, die nicht in eine Vorlesung kommen, kommen auch in die nächste Vorlesung nicht.

Für jede Vorlesung beschreibt Professor Heise die jeweilige Verteilung seiner Studentinnen und Studenten auf die Gruppen „Aktive", „Passive" und „Fehlende" durch einen Vektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_P \\ x_F \end{pmatrix}$, wobei x_A für die Anzahl der aktiven, x_P für die Anzahl der passiven und x_F für die Anzahl der fehlenden Studentinnen und Studenten steht.

Die Entwicklung dieses Vektors von einem Zeitpunkt i einer Vorlesung ($i \in \mathbb{N}$) zum Zeitpunkt $i + 1$ (nächste Vorlesung) modelliert er durch die Gleichung $\vec{s}_{i+1} = M \cdot \vec{s}_i$.

Aufgrund längerer Beobachtungen hat Professor Heise die folgende Übergangsmatrix aufgestellt:

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

a) Ergänzen Sie den Übergangsgraphen zur Matrix M in der Anlage. (5P)

In einer Vorlesung zählt Professor Heise, dass von den insgesamt 400 Studentinnen und Studenten nur drei Viertel gekommen sind und dass ein Zehntel der Anwesenden aktiv mitarbeitet.

b) Berechnen Sie die Anzahl der Aktiven und Passiven, die Professor Heise auf Grund seiner Zählung in der nächsten Vorlesung zu erwarten hat. (7P)

c)
- Zeigen Sie, dass es keinen realistischen Verteilungsvektor $\vec{s}_r$ der Studentinnen und Studenten geben kann, der sich nach dem vorliegenden Modell von einer Vorlesung zur nächsten exakt reproduzieren würde.
- Ermitteln Sie einen Verteilungsvektor $\vec{s}_r^{\,*}$, der sich nach dem vorliegenden Modell von einer Vorlesung zur nächsten *näherungsweise* reproduzieren würde. (13P)

Die Potenzen M^n nähern sich für große n der Matrix G an:

$$G \approx \begin{pmatrix} 0,457 & 0,457 & 0,457 \\ 0,371 & 0,371 & 0,371 \\ 0,171 & 0,171 & 0,171 \end{pmatrix}$$

d) Begründen Sie im Sachkontext, warum sowohl bei der Matrix M als auch bei der Matrix G die Spaltensummen exakt gleich 1 sein *müssten*. (5P)

e) Bestimmen Sie den Verteilungsvektor $\vec{g}$, den Professor Heise in seinen Vorlesungen langfristig näherungsweise zu erwarten hat.

Hinweis: Die Gesamtanzahl der betrachteten Studentinnen und Studenten beträgt 400. (8P)

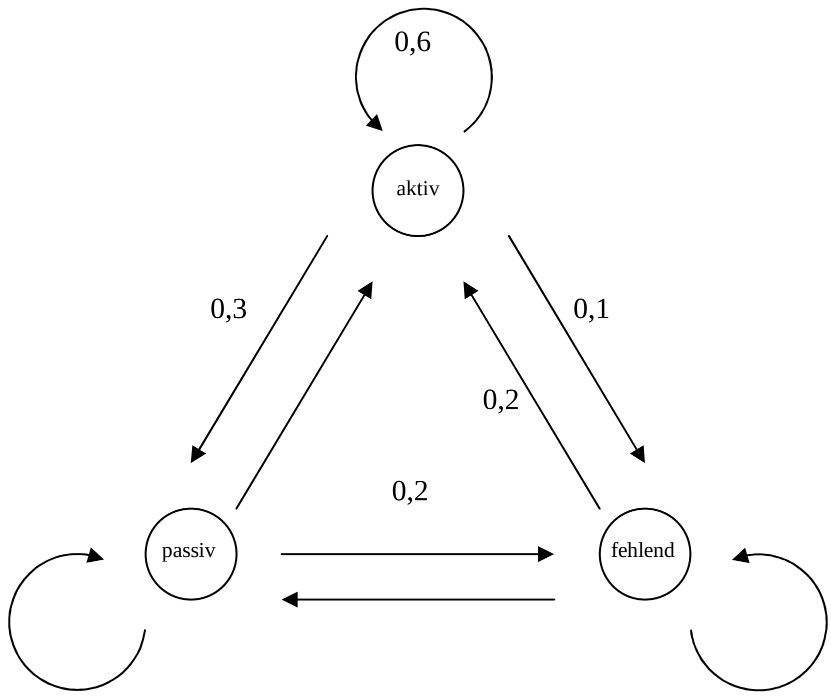
Eines Tages stellt Professor Heise in seiner Vorlesung den folgenden Verteilungsvektor der Studentinnen und Studenten fest:

$$\vec{s}_{n+1} = \begin{pmatrix} 152 \\ 164 \\ 84 \end{pmatrix}$$

In der vorangegangenen Vorlesung hatte Professor Heise seine Studentinnen und Studenten nicht gezählt. Mit Hilfe seiner Modellierung möchte er ausrechnen, wie der Verteilungsvektor der vorigen Vorlesung gewesen sein mag.

f)
- Zeigen Sie, dass jeder Vektor der Form $\vec{s}_n = \begin{pmatrix} t-40 \\ 440-2t \\ t \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\vec{s}_{n+1} = M \cdot \vec{s}_n$ erfüllt.
- Ermitteln Sie alle Werte von *t*, die im Sachkontext der Aufgabe sinnvoll sind. (12P)

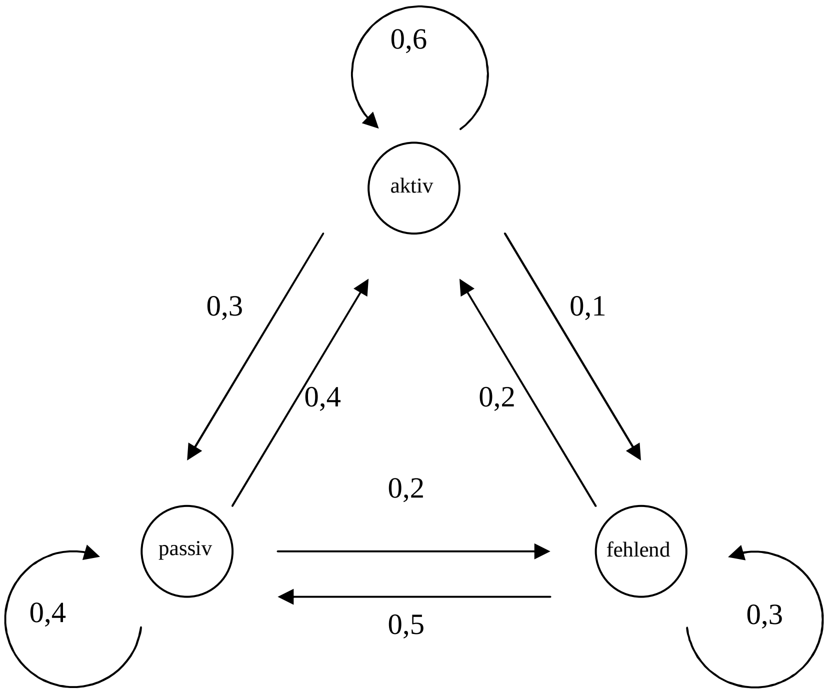
Anlage zur Aufgabe "Studentinnen und Studenten" (grundlegendes Anforderungsniveau)



Erwartungshorizont

Studentinnen und Studenten (grundlegendes Anforderungsniveau)

Im Erwartungshorizont kursiv gedruckte Sätze sind Anmerkungen für die korrigierende Lehrkraft, diese Abschnitte sind kein Bestandteil der erwarteten Lösung.

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)		5		
b)	Es sind 300 Studentinnen und Studenten gekommen, von denen 30 aktiv mitarbeiten. Somit ist der aktuelle Verteilungsvektor $\vec{s}_0 = \begin{pmatrix} 30 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix}$. Für die nächste Vorlesung ist dann der Verteilungsvektor $\vec{s}_1 = M \cdot \vec{s}_0$ zu erwarten: $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 146 \\ 167 \\ 87 \end{pmatrix}$ Es sind 146 Aktive und 167 Passive zu erwarten.	7		

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>

- Zu untersuchen ist die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ x_P \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_P \\ x_F \end{pmatrix}$$

Mögliche Auflösungsschritte sind:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0,4 & 0,4 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & -0,6 & 0,5 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & -0,7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 3 \\ |\cdot 4\ |+\mathrm{I} \\ |\cdot 12\ |+\mathrm{I} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1,2 & 1,2 & 0,6 & 0 \\ 0 & -1,2 & 2,6 & 0 \\ 0 & 3,6 & -7,8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot 3 \\ |+\mathrm{II} \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1,2 & 1,2 & 0,6 & 0 \\ 0 & -3,6 & 7,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 5 \\ |\cdot 5 \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & -18 & 39 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Mit dem Ansatz $x_F = t$ wird $x_P = \frac{13}{6}t$ und $x_A = \frac{8}{3}t$.

Die Bedingung $x_A + x_P + x_F = 400$ führt auf $\frac{35}{6}t = 400$ bzw. $t = \frac{480}{7}$, sodass der Lösungsvektor sich nicht ausschließlich aus natürlichen Zahlen zusammensetzt.

Daher kann es keinen Verteilungsvektor geben, der sich exakt reproduziert.

- Nach obiger Rechnung gilt:

$x_A = \frac{8}{3} \cdot \frac{480}{7} = \frac{1280}{7} \approx 183$, $x_P = \frac{13}{6} \cdot \frac{480}{7} = \frac{1040}{7} \approx 149$, $x_F = \frac{480}{7} \approx 69$

Dies ist allerdings rundungsbedingt in der Summe um 1 zu viel.
Ein annähernd sich selbst reproduzierender Vektor ist dann also z. B.

$$\vec{s}_r^{\,*} = \begin{pmatrix} 183 \\ 149 \\ 68 \end{pmatrix}$$

Andere naheliegende Vektoren können angegeben werden, indem eine der anderen gerundeten Komponenten um 1 vermindert wird.

</td><td></td><td>13</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)	In einer Spalte der Matrix M oder der Matrix G stehen die Anteile aus einer Gruppe, die sich auf die drei Gruppen neu verteilen, bei M im Abstand einer Vorlesung, bei G auf lange Sicht. Da jede Gruppe vollständig umverteilt wird, muss die Summe der Anteile gleich 1 sein. *Abweichungen ergeben sich aus Rundungen.*		5	
e)	$\vec{s} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_P \\ x_F \end{pmatrix}$ sei ein beliebiger Verteilungsvektor der Anfangsverteilung. Dann gilt: $\begin{aligned} \vec{g} &= G \cdot \vec{s} \\ &\approx \begin{pmatrix} 0,457 & 0,457 & 0,457 \\ 0,371 & 0,371 & 0,371 \\ 0,171 & 0,171 & 0,171 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ x_P \\ x_F \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,457 \cdot (x_A + x_P + x_F) \\ 0,371 \cdot (x_A + x_P + x_F) \\ 0,171 \cdot (x_A + x_P + x_F) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,457 \cdot 400 \\ 0,371 \cdot 400 \\ 0,171 \cdot 400 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 182,8 \\ 148,4 \\ 68,4 \end{pmatrix} \end{aligned}$ Dies gilt unabhängig von $\vec{s}$, weil $x_A + x_P + x_F = 400$. Langfristig hat er näherungsweise 183 Aktive, 148 Passive 68 Fehlende zu erwarten. *Andere Rundungen – etwa grundsätzliche Abrundungen aus sachkontextualen Gründen oder Rundungen, die die Gesamtanzahl von 400 Personen berücksichtigen – sind zu akzeptieren.*		8	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
f)	• Einsetzen ergibt: $$M\cdot\vec{s}_n=\begin{pmatrix}0,6&0,4&0,2\\0,3&0,4&0,5\\0,1&0,2&0,3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t-40\\440-2t\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,6\cdot(t-40)+0,4\cdot(440-2t)+0,2\cdot t\\0,3\cdot(t-40)+0,4\cdot(440-2t)+0,5\cdot t\\0,1\cdot(t-40)+0,2\cdot(440-2t)+0,3\cdot t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,6t-24+176-0,8t+0,2t\\0,3t-12+176-0,8t+0,5t\\0,1t-4+88-0,4t+0,3t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}152\\164\\84\end{pmatrix}$$ • Die Vektoreinträge müssen natürliche Zahlen sein, weil es sich um Anzahlen handelt. Aus dem gleichen Grund muss wegen der ersten Vektorkomponente gelten: $$t-40\geq 0 \Leftrightarrow t\geq 40$$ Analog ergib sich für die zweite Vektorkomponente $$440-2t\geq 0 \Leftrightarrow 440\geq 2t \Leftrightarrow t\leq 220$$ Alle natürlichen Zahlen, für die gilt, $$40\leq t\leq 220$$ können im Sachkontext der Aufgabe sinnvoll sein.			12
	Insgesamt 50 BWE	12	26	12

Lineare Algebra/Analytische Geometrie 2

Ferien-Club (grundlegendes Anforderungsniveau)

Ein Ferien-Club bietet seinen Mitgliedern regelmäßig drei günstige Sommer-Urlaubsangebote: Ferien-Paket A, Ferien-Paket B und Ferien-Paket C. Insgesamt hat der Club dauerhaft 380 Mitglieder.

Nach den bisherigen Erfahrungen wechseln die Mitglieder von Sommer zu Sommer wie folgt:

- Von den Nutzern des Ferien-Pakets A bleiben 30% bei A, während 20% zu B und 40% zu C wechseln und 10% kein Paket nutzen.
- Von den Nutzern des Ferien-Pakets B bleiben 30% bei B, während 30% zu A und 20% zu C wechseln und 20% kein Paket nutzen.
- Von den Nutzern des Ferien-Pakets C bleiben 20% bei C, während 40% zu A und 30% zu B wechseln und 10% kein Paket nutzen.
- Von denen, die kein Paket nutzen, wechseln 30% zu A, 50% zu B und 20% zu C.

Die Verteilung der Nutzer eines Sommerangebots nach Abschluss aller Buchungen werde durch einen Verteilungsvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_N \end{pmatrix}$ beschrieben, wobei x_A für die Anzahl der Nutzer des Pakets A steht, x_B für die Anzahl der Nutzer des Pakets B, x_C für die Anzahl der Nutzer des Pakets C und x_N für die Anzahl derjenigen Clubmitglieder, die kein Ferien-Paket nutzen.

Die unten stehende Übergangsmatrix M beschreibt im Rahmen des Modellzusammenhangs $\vec{n}_{i+1} = M \cdot \vec{n}_i$ den Übergang von der Verteilung zum Zeitpunkt i ($i \in \mathbb{N}$) zur Verteilung zum Zeitpunkt $i + 1$ im nächsten Jahr.

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Anzahlen x_A, x_B, x_C und x_N sind in Rechenergebnissen jeweils sinnvoll gerundet anzugeben.

a) Bestätigen Sie für die Einträge in der Hauptdiagonalen der Matrix M, dass sie den eingangs aufgezählten Erfahrungen entsprechen. (5P)

b) Ergänzen Sie in den rechteckigen Feldern des Übergangsgraphen in der Anlage die fehlenden Anteilsangaben. (5P)

Die Nutzerverteilung *dieses* Sommers sei durch den Vektor $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 126 \\ 108 \\ 96 \\ 50 \end{pmatrix}$ gegeben.

c) • Berechnen Sie den zu erwartenden Verteilungsvektor $\vec{n}_2$ des *nächsten* Sommers.

• Bestimmen Sie den Vektor $\vec{n}_0$, der nach dem Modell die Verteilung im *vorigen* Sommer wiedergibt. (15P)

Es gilt: $M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}34 & 0{,}32 & 0{,}32 & 0{,}32 \\ 0{,}29 & 0{,}31 & m & 0{,}27 \\ 0{,}26 & 0{,}26 & 0{,}28 & 0{,}26 \\ 0{,}11 & 0{,}11 & 0{,}12 & 0{,}15 \end{pmatrix}$

d) • Ermitteln Sie das Element *m* in der Matrix M^2.

• Erläutern Sie kurz allgemein, d. h. unabhängig von den konkreten Werten in der Matrix *M*, die praktische Bedeutung von Matrixpotenzen im Rahmen des hier behandelten Umverteilungsmodells. (8P)

Kurz vor den Ferien haben alle 380 Clubmitglieder ihre Entscheidung getroffen, ob sie ein Paket wählen und wenn ja, welches. Die Clubleitung versucht nun, alle, die kein Paket gebucht haben, umzustimmen und zu einer Buchung von Ferien-Paket C zu gewinnen. Deshalb veröffentlicht sie in der Clubzeitung ein Sonderangebot: Ferien-Paket C für Kurzentschlossene mit einem Rabattsatz von 20%.

e) • Geben Sie eine Matrix *A* an, deren Multiplikation mit einem Verteilungsvektor die Wanderung aller Nicht-Nutzer zu *C*-Nutzern modelliert.

• Es gelte $Q = A \cdot M$ und $R = M \cdot A$

Ermitteln Sie, welche der beiden folgenden Modellgleichungen den angestrebten Buchungsprozess am ehesten beschreibt:

(I) $\vec{n}_{i+1} = Q \cdot \vec{n}_i$ oder (II) $\vec{n}_{i+1} = R \cdot \vec{n}_i$ (8P)

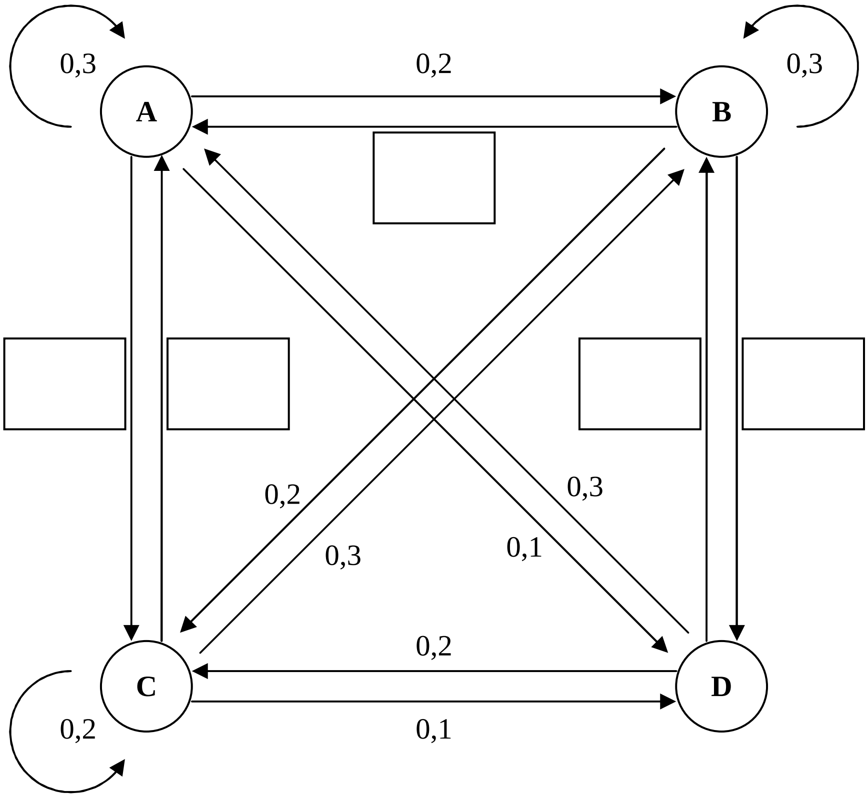
Eine Club-Managerin stellt sich ein geändertes Wechselverhalten vor, das zu der folgenden Übergangsmatrix *P* führen würde:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

f) • Interpretieren Sie die Übergangsmatrix *P* im Sachkontext der Aufgabe.

• Untersuchen Sie das langfristige Verhalten eines durch *P* modellierten Umverteilungsprozesses. (9P)

Anlage zur Aufgabe „Ferien-Club“ (grundlegendes Anforderungsniveau)



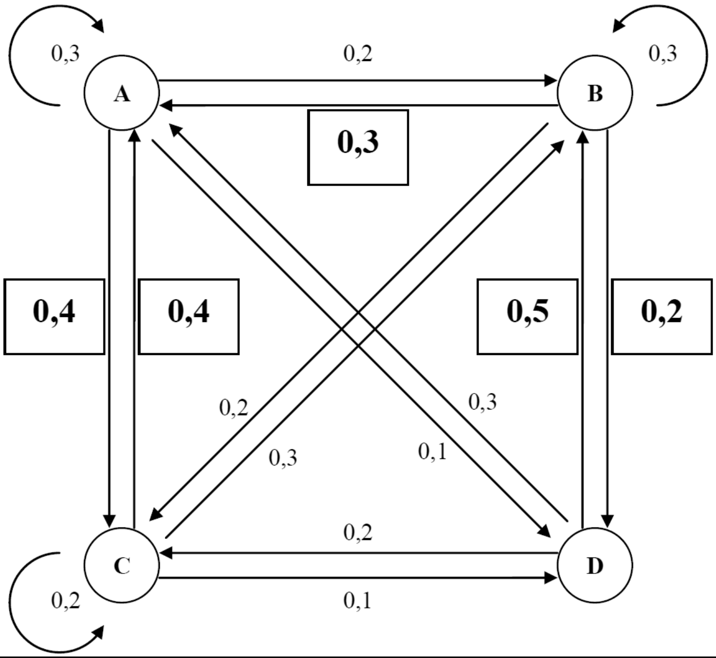
Erwartungshorizont

Ferienclub (grundlegendes Anforderungsniveau)

Im Erwartungshorizont kursiv gedruckte Sätze sind Anmerkungen für die korrigierende Lehrkraft, diese Abschnitte sind kein Bestandteil der erwarteten Lösung.

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	$m_{11} = 0,3$ bedeutet, dass 30% der aktuellen Anzahl der Nutzer von A im nächsten Zeitschritt zur Anzahl der Nutzer von A beiträgt. Das passt zum Text, nach dem 30% der Nutzer von A dort bleiben. $m_{22} = 0,3$ bedeutet, dass 30% der aktuellen Anzahl der Nutzer von B im nächsten Zeitschritt zur Anzahl der Nutzer von B beiträgt. Das passt zum Text, nach dem 30% der Nutzer von B dort bleiben. $m_{33} = 0,2$ bedeutet, dass 20% der aktuellen Anzahl der Nutzer von C im nächsten Zeitschritt zur Anzahl der Nutzer von C beiträgt. Das passt zum Text, nach dem 20% der Nutzer von C dort bleiben. $m_{44} = 0$ bedeutet, dass die aktuelle Anzahl der Nichtnutzer keine Rolle für die Anzahl der Nichtnutzer im nächsten Zeitschritt spielt. Das passt zu der im Aufgabentext erwähnten Erfahrung, dass sich die Nichtnutzer im nächsten Zeitschritt vollständig (30% + 50% + 20% = 100%) auf die drei Pakete verteilen. *Interpretationen der Modellmatrix wie "30% der Nutzer von A bleiben Nutzer von A" wären genau genommen nicht korrekt, da das Modell keine Aussagen darüber macht, ob es sich im nächsten Jahr um* <u>dieselben</u> Personen *handelt. Das Modell operiert ausschließlich auf der Ebene der* <u>*Anzahlen*</u>*, nicht auf der Ebene der* <u>Individuen</u>*. Eine Interpretation wie die genannte würde also das Modell überinterpretieren. Diese Differenzierung wird vom Prüfling aber* nicht *erwartet; Interpretationen, die sich auf Personen statt auf Anzahlen beziehen und ansonsten korrekt sind, werden akzeptiert.*		5	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>b)</td><td>



</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

- $$\vec{n}_2 = M \cdot \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 126 \\ 108 \\ 96 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123,6 \\ 111,4 \\ 101,2 \\ 43,8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 124 \\ 111 \\ 101 \\ 44 \end{pmatrix}$$

  Andere Rundungen (etwa grundsätzliches Abrunden aus sachkontextualen Gründen) sind ebenfalls möglich.

- Mit dem Ansatz $M \cdot \vec{n}_0 = \vec{n}_1$ ergibt sich

  $$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 126 \\ 108 \\ 96 \\ 50 \end{pmatrix}$$

  und damit die erweiterte Koeffizientenmatrix

  $$\left(\begin{array}{cccc|c} 0,3 & 0,3 & 0,4 & 0,3 & 126 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,5 & 108 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 96 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0 & 50 \end{array}\right)$$

  mit den möglichen Umformungen

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	$\left(\begin{array}{cccc\|c} 0,3 & 0,3 & 0,4 & 0,3 & 126 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,5 & 108 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 96 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0 & 50 \end{array}\right) \begin{array}{l\|l} \cdot(-40) & \\ \cdot 60 & +\mathrm{I} \\ \cdot 30 & +\mathrm{I} \\ \cdot 120 & +\mathrm{I} \end{array}$ $\left(\begin{array}{cccc\|c} -12 & -12 & -16 & -12 & -5040 \\ 0 & 6 & 2 & 18 & 1440 \\ 0 & -6 & -10 & -6 & -2160 \\ 0 & 12 & -4 & -12 & 960 \end{array}\right) \begin{array}{l\|l} & \\ & \\ & +\mathrm{II} \\ \cdot(-0,5) & +\mathrm{II} \end{array}$ $\left(\begin{array}{cccc\|c} -12 & -12 & -16 & -12 & -5040 \\ 0 & 6 & 2 & 18 & 1440 \\ 0 & 0 & -8 & 12 & -720 \\ 0 & 0 & 4 & 24 & 960 \end{array}\right) \begin{array}{l\|l} & \\ & \\ & \\ \cdot 2 & +\mathrm{III} \end{array}$ $\left(\begin{array}{cccc\|c} -12 & -12 & -16 & -12 & -5040 \\ 0 & 6 & 2 & 18 & 1440 \\ 0 & 0 & -8 & 12 & -720 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 1200 \end{array}\right)$ Rückwärtseinsetzen ergibt: $60x_N = 1200 \Leftrightarrow x_N = 20$ $-8x_C + 12\cdot 20 = -720 \Leftrightarrow x_C = 120$ $6x_B + 2\cdot 120 + 18\cdot 20 = 1440 \Leftrightarrow x_B = 140$ $-12x_A - 12\cdot 140 - 16\cdot 120 - 12\cdot 20 = -5040 \Leftrightarrow x_A = 100$ Ergebnis: $\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 140 \\ 120 \\ 20 \end{pmatrix}$	5	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)	• $m = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,3 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix} = 0,28$ *Alternativ lässt sich m auch wie folgt ermitteln: Da die Matrix M^2 einen vollständigen Umverteilungsprozess unter der konstanten Anzahl von Mitgliedern für zwei Jahre beschreibt, muss jede Spaltensumme von M^2 gleich 1 sein. Es gilt dann also:* $m = 1 - 0{,}32 - 0{,}28 - 0{,}12 = 0{,}28$. • Mithilfe von Matrixpotenzen kann man mehrere Zeitschritte durch <u>einen</u> Berechnungsschritt Matrix mal Vektor abkürzen. Für einen Zweierschritt gilt beispielsweise: $\vec{n}_3 = M^2 \cdot \vec{n}_1$ *Für eine Bewertung als vollständig korrekt ist gemäß dem Operator "Erläutern" eine Erklärung <u>und</u> ein Beispiel notwendig.* *Falls der Prüfling sich auf eine andere sinnvolle (und korrekte) als die angegebene praktische Bedeutung bezieht, kann dies auch als korrekt gewertet werden.*		8	
e)	• $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ • Da $Q = A \cdot M$ gilt, wird zunächst *M* und dann *A* auf den Verteilungsvektor vom Vorjahr angewendet. Es wird also zunächst die übliche Fluktuation und dann die Umentscheidung modelliert. Bei $R = M \cdot A$ ist die Reihenfolge umgekehrt. Da eine mögliche Umentscheidung jedoch erst *nach* der eigentlichen Buchung stattfindet, ist die Gleichung $\vec{n}_{i+1} = Q \cdot \vec{n}_i$ die angemessenere.	3	2	3

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	• Es ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C \\ x_A \\ x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ Das bedeutet, dass die Anteile zwischen den Paketpräferenzen *A*, *B* und *C* mit jedem Zeitschritt zyklisch vertauscht werden, während der Anteil der Nicht-Nutzer konstant bleibt. • Aus der oben dargelegten verbalen Interpretation wird deutlich, dass sich die Verteilungen nach jeweils drei Jahren wiederholen. *Es ist auch möglich, damit zu argumentieren, dass* P^3 *eine Einheitsmatrix ist.* *Da es sich um eine Aufgabe mit Anforderungen auf grundlegendem Niveau handelt, wird vom Prüfling nicht erwartet zu erkennen, dass bestimmte Startvektoren <u>nicht</u> zu einem periodischen, sondern zu einem konstanten Verhalten führen.*			9
	Insgesamt 50 BWE	13	25	12

Stochastik

Münzwürfe (grundlegendes Anforderungsniveau)

Paula und Lisa spielen ein Spiel mit Münzwürfen: Jeder „Spielzug“ besteht darin, dass zunächst Paula und dann Lisa zwei Münzen wirft. Jede Münze hat eine Seite mit *Zahl* und eine Seite mit *Kopf*. Als Spielregel vereinbaren Paula und Lisa zunächst: Wer zweimal *Zahl* wirft, erhält einen Punkt, wer nicht zweimal *Zahl* wirft, erhält keinen Punkt.

Paula und Lisa spielen ein Spiel mit 80 Spielzügen und notieren für jeden Spielzug die vergebenen Punkte. Im Rückblick auf ihr Spiel finden sie, dass es ungewöhnlich verlaufen sei.

- Paula sagt zu Lisa: „Vielleicht stimmt etwas mit deinen Münzen nicht. Ich finde, dass du auffallend wenige Punkte bekommen hast.“
- Lisa sagt zu Paula: „Das finde ich auch. Aber was ich noch merkwürdiger finde, ist Folgendes: Meine Münzen scheinen von deinen beeinflusst worden zu sein; häufig habe ich nur dann zweimal *Zahl* geworfen, wenn du auch zweimal *Zahl* geworfen hast, und wenn du nicht zweimal *Zahl* geworfen hast, habe ich meistens auch nicht zweimal *Zahl* geworfen.“

Aufgrund ihrer Notizen fertigen Paula und Lisa die nachfolgende Vierfeldertafel mit ihren Punktzahlen an. Darin bedeutet Paula* das Ereignis, dass Paula in einem Spielzug einen Punkt erhalten und Paula^0, dass Paula keinen Punkt erhalten hat; entsprechend werden die Ereignisse für Lisa abgekürzt.

	Lisa*	Lisa^0	Summe
Paula*	8	12	20
Paula^0	2	58	60
Summe	10	70	80

a) Paulas Äußerung soll genauer untersucht werden:

- Bestätigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Spielerin mit *fairen* Münzen in einem Spielzug einen Punkt bekommt, ist 25 %.
- Berechnen Sie das Intervall um den Erwartungswert der Punktzahl bei 80 Spielzügen, in dem bei Benutzung fairer Münzen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % die Punktzahl einer Spielerin liegt und beurteilen Sie Paulas Äußerung vor dem Hintergrund Ihres Ergebnisses. (9P)

b) Lisa Äußerung soll genauer untersucht werden:

- Erläutern Sie den Begriff der *stochastischen Unabhängigkeit* zweier Ereignisse *A* und *B*.
- Geben Sie ein formales Kriterium für die stochastische Unabhängigkeit der Ereignisse *A* und *B* an.
- Verwenden Sie die aus der obigen Tabelle abgeleiteten relativen Häufigkeiten als Schätzwerte für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten und untersuchen Sie, ob die Ereignisse Paula^0 und Lisa^0 stochastisch unabhängig sind. (12P)

Paula und Lisa beschließen, nur noch mit den Münzen von Paula weiterzuspielen, von denen angenommen werden soll, dass sie *fair* sind. Paula und Lisa ändern ihre Spielregel: Nicht wer zweimal *Zahl* wirft, sondern wer *häufiger Zahl* als die andere wirft, *gewinnt und beendet* das Spiel. Wenn beide gleich oft *Zahl* werfen, endet der Spielzug unentschieden und das Spiel geht mit dem nächsten Spielzug weiter.

Der jeweilige Spielstand werde aus der Sicht von Paula benannt mit den Zuständen *Gewinn* (**G**), *Verlust* (**V**) oder *Unentschieden* (**U**). Zur Kennzeichnung, nach welchem Spielzug der Spielstand eingetreten ist, werde die Anzahl der durchgeführten Spielzüge als Index an den Zustandsbuchstaben angehängt; z. B. steht der Zustand $\mathbf{V}_3$ für den Spielverlauf $\mathbf{U} \to \mathbf{U} \to \mathbf{V}$.
Paula und Lisa spielen ihr Spiel mehrfach durch und zählen, wer wie viele Spiele gewonnen hat. Dabei verabreden sie zunächst, ihre Spiele spätestens nach drei Spielzügen zu beenden und Spiele, in denen nach dem dritten Spielzug noch keine Entscheidung gefallen ist, nicht mitzuzählen.

c) Betrachtet werde ein Baumdiagramm für die ersten drei Spielzüge (siehe Anlage 1).

- Begründen Sie die eingetragenen Wahrscheinlichkeiten für Spiele, die mit **G** oder **U** enden.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\mathbf{G}_{\leq 3})$ für einen Gewinn innerhalb der ersten drei Spielzüge. (12P)

Paula und Lisa vereinbaren neu, die Beschränkung auf drei Spielzüge fallen zu lassen. Im Folgenden werden also Spiele mit beliebig vielen Spielzügen zugelassen.

Aus Symmetriegründen ist anzunehmen, dass die Wahrscheinlichkeit $P(\mathbf{G}_\mathrm{A})$, dass Paula *irgendwann* gewinnt, gleich 0,5 ist. Wenn man sich das Baumdiagramm (siehe Anlage 1) unendlich fortgesetzt denkt, müsste sich nach den Pfadregeln ebenfalls die Wahrscheinlichkeit $P(\mathbf{G}_\mathrm{A})$ berechnen lassen. Dabei kann eine Formel für unendliche Summen vorteilhaft angewendet werden:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } |x| < 1.$$

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\mathbf{G}_\mathrm{A})$ mithilfe der Formel. (7P)

Aufgrund eigener schlechter Erfahrungen – siehe Vortext und die Aufgabenteile a) und b) – mit Münzen, die möglicherweise *nicht-fair* sind, führen Paula und Lisa ein kleines Forschungsprojekt an ihrer Schule durch: Ihre Mitschülerinnen und Mitschüler sollen mithilfe von Münzwurfexperimenten untersuchen, ob eine ihnen vorgelegte Münze *fair* oder *nicht-fair* ist. Dazu verwenden Paula und Lisa *faire* Münzen sowie *nicht-faire* Spezialanfertigungen, die sich äußerlich nicht von *fairen* Münzen unterscheiden, die aber häufiger auf *Zahl* als auf die andere Seite fallen. Sie erhielten die folgenden Ergebnisse:

- In 18 % der Fälle, in denen der Versuchsperson eine *nicht-faire* Münze vorgelegt wurde, hat sie diese korrekt als *nicht-fair* bezeichnet.
- 48 % aller Versuchspersonen gaben an, dass die ihnen vorgelegte Münze *fair* ist.
- In 11 % der Fälle, in denen der Versuchsperson eine *faire* Münze vorgelegt wurde, hat sie diese korrekt als *fair* bezeichnet.

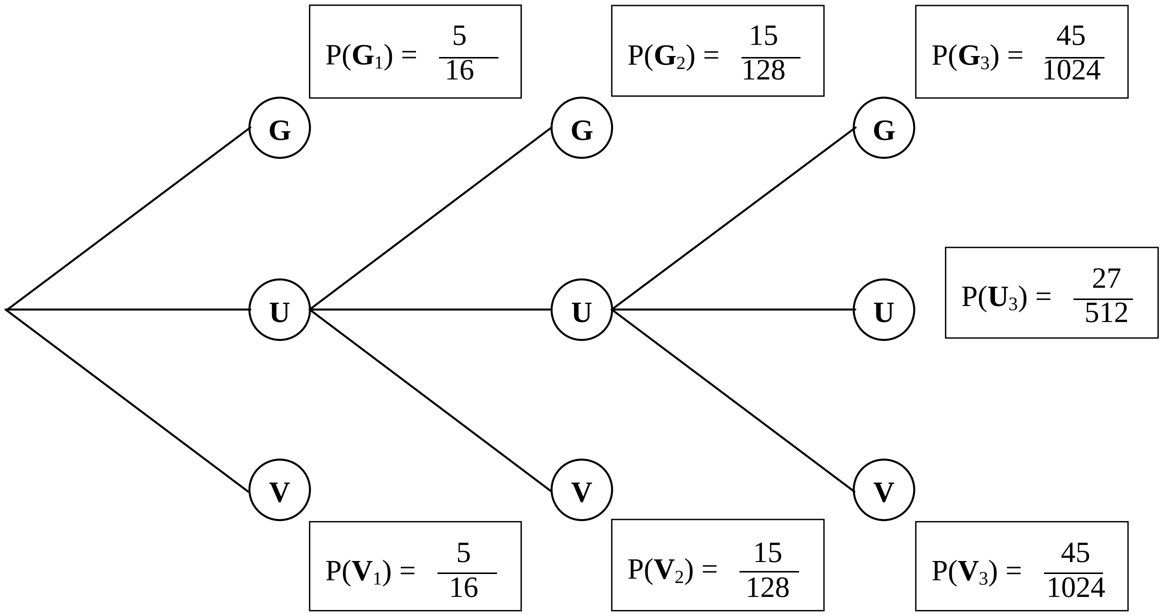
e) Betrachten Sie die genannten relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten und ermitteln Sie mithilfe der schon teilweise ausgefüllten Vierfeldertafel in Anlage 2 die Wahrscheinlichkeiten zu den folgenden drei Ereignissen.

A: Eine zufällig ausgewählte Versuchsperson gab an, dass die Münze *nicht-fair* ist.

B: Eine zufällig ausgewählte Versuchsperson bekam eine *nicht-faire* Münze vorgelegt.

C: Die Münze ist *fair*, wenn eine zufällig ausgewählte Versuchsperson sie als *fair* bezeichnete. (10P)

Anlage 1 zur Aufgabe "Münzwurf" (grundlegendes Anforderungsniveau)



Anlage 2 zur Aufgabe "Münzwurf" (grundlegendes Anforderungsniveau)

	Die vorgelegte Münze wird von der Versuchsperson als **fair bezeichnet**.	Die vorgelegte Münze wird von der Versuchsperson als **nicht-fair bezeichnet**.	
Die vorgelegte Münze **ist fair**.			$1-x$
Die vorgelegte Münze **ist nicht-fair**.		$0{,}18x$	x
	0,48		1

Erwartungshorizont

Münzwürfe (grundlegendes Anforderungsniveau)

Im Erwartungshorizont kursiv gedruckte Sätze sind Anmerkungen für die korrigierende Lehrkraft, diese Abschnitte sind kein Bestandteil der erwarteten Lösung.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	• Die Wahrscheinlichkeit für *Zahl* ist 0,5. Die Wahrscheinlichkeit für einen Punktgewinn – also für *zweimal* Zahl – ist demnach $0,5 \cdot 0,5 = 0,25 = 25\ \%$. • X: Anzahl der Würfe einer Spielerin, bei denen zweimal *Zahl* erscheint. $n = 80$ $p = 0,25$ (siehe erster Spiegelpunkt) $\mu = n \cdot p = 20$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{80 \cdot 0,25 \cdot 0,75} = \sqrt{15} \approx 3,873$. Da $\sigma > 3$ ist, ist die Laplacebedingung erfüllt und man kann σ-Regeln anwenden: $\left[20 - 1,96 \cdot \sqrt{15};\ 20 + 1,96 \cdot \sqrt{15}\right] \approx [12,4;\ 27,6]$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von knapp 95 % liegt die Punktzahl im Intervall $[13;\ 27]$. Das Ergebnis von 10 Punkten, das Lisa erzielt hat, ist bei Benutzung fairer Münzen zwar grundsätzlich möglich, aber wenig wahrscheinlich.	5	4	
b)	• Zwei Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, wenn die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A nicht vom Eintreten oder Nichteintreten des Ereignisses B abhängt. Beispiel: Zwei Züge bei einem Urnenversuch *mit* Zurücklegen sind stochastisch unabhängig. *Für eine Bewertung als vollständig korrekt ist gemäß dem Operator "Erläutern" eine Erklärung und ein Beispiel notwendig.* • $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ *Alternativen*: $P_A(B) = P(B)$ *oder* $P(B \mid A) = P(B)$ • $P(\text{Paula}^0) = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}$ und $P(\text{Lisa}^0) = \frac{70}{80} = \frac{7}{8}$ und $P(\text{Paula}^0 \cap \text{Lisa}^0) = \frac{58}{80} = \frac{29}{40}$ Es gilt: $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} = \frac{21}{32} \neq \frac{29}{40}$ Die beiden Ereignisse sind also nicht stochastisch unabhängig. *Alternativ lässt sich überprüfen, ob* $P_{\text{Paula}^0}(\text{Lisa}^0) \overset{?}{=} P(\text{Lisa}^0)$ (*bzw.* $P(\text{Lisa}^0 \mid \text{Paula}^0) \overset{?}{=} P(\text{Lisa}^0)$) *oder* $P_{\text{Lisa}^0}(\text{Paula}^0) \overset{?}{=} P(\text{Paula}^0)$ (*bzw.* $P(\text{Paula}^0 \mid \text{Lisa}^0) \overset{?}{=} P(\text{Paula}^0)$) *Ersteres führt zu* $\frac{29}{30} \overset{!}{\neq} \frac{7}{8}$, *Letzteres zu* $\frac{29}{35} \overset{!}{\neq} \frac{3}{4}$.	4	8	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">**Lösungsskizze**</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>

• Im Folgenden steht Z dafür, dass *Zahl* geworfen wurde und W, dass *nicht Zahl* geworfen wurde. Weil $P(\mathrm{Z}) = P(\mathrm{W}) = \frac{1}{2}$, gilt $P(\mathrm{ZZ}) = P(\mathrm{WW}) = \frac{1}{4}$ und $P(\mathrm{ZW\ oder\ WZ}) = \frac{1}{2}$.

Ein Gewinn für Paula entsteht in einem Spielzug,

o wenn Paula ZZ wirft und Lisa nicht ZZ,
mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$ oder

o wenn Paula ZW oder WZ wirft und Lisa das Ergebnis WW wirft,
mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

Insgesamt entsteht in einem Spielzug ein Gewinn für Paula mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16}$.

Ein Unentschieden entsteht in einem Spielzug,

o wenn Paula und Lisa beide ZZ werfen,
mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$,

o wenn Paula und Lisa beide ZW oder WZ werfen,
mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ oder

o wenn Paula und Lisa beide WW werfen,
mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

Insgesamt entsteht in einem Spielzug ein Unentschieden mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$.

Mit diesen Wahrscheinlichkeiten für jeden einzelnen Spielzug ergibt sich

$P(\mathbf{G}_1) = \frac{5}{16}$; $P(\mathbf{G}_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{16} = \frac{15}{128}$; $P(\mathbf{G}_3) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{16} = \frac{45}{1024}$.

Eine Folge von drei Unentschieden hat die Wahrscheinlichkeit

$$P(\mathbf{U}_3) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{27}{512}$$
• $P(\mathbf{G}_{\leq 3}) = P(\mathbf{G}_1) + P(\mathbf{G}_2) + P(\mathbf{G}_3) = \frac{5}{16} + \frac{15}{128} + \frac{45}{1024} = \frac{485}{1024}$

</td><td>3</td><td>9</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	$P(\mathbf{G}_A) = P(\mathbf{G}_1) + P(\mathbf{G}_2) + P(\mathbf{G}_3) + P(\mathbf{G}_4) + ...$ $= \frac{5}{16} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{16} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \cdot \frac{5}{16} + \left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \frac{5}{16} + ...$ $= \frac{5}{16} \cdot \left(1 + \frac{3}{8} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^3 + ...\right)$ $= \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{8}}$ $= \frac{5}{16} \cdot \frac{8}{5}$ $= \frac{1}{2}$			7

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

e)

	Die vorgelegte Münze wird von der Versuchsperson als **fair bezeichnet**.	Die vorgelegte Münze wird von der Versuchsperson als **nicht-fair bezeichnet**.	
Die vorgelegte Münze **ist fair**.	$0{,}11\cdot(1-x)$	$0{,}89\cdot(1-x)$	$1-x$
Die vorgelegte Münze **ist nicht-fair**.	$0{,}82x$	$0{,}18x$	x
	$0{,}48$	$0{,}52$	1

Aus dem Ansatz $0{,}11\cdot(1-x)+0{,}82x=0{,}48$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0{,}11-0{,}11x+0{,}82x &= 0{,}48 \\ 0{,}71x &= 0{,}37 \\ x &= \tfrac{37}{71} \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$P(A)=1-0{,}48=0{,}52$

$P(B)=x=\tfrac{37}{71}\approx 0{,}521$

$P(C)=\dfrac{0{,}11\cdot(1-x)}{0{,}48}=\dfrac{0{,}11\cdot(1-\tfrac{37}{71})}{0{,}48}=\dfrac{187}{1704}\approx 0{,}110$

Der Ansatz $0{,}89\cdot(1-x)+0{,}18x=0{,}52$ *führt ebenfalls zu* $x=\tfrac{37}{71}$.

Eine andere Art der Vervollständigung der Vierfeldertafel kann ebenfalls zum Erfolg führen.

		I	II	III
e)			5	5
	Insgesamt 50 BWE	12	26	12

5.2 Erhöhtes Anforderungsniveau

Lineare Algebra/Analytische Geometrie 1

Studentinnen und Studenten (erhöhtes Anforderungsniveau)

Professor Heise führt über die 400 Studentinnen und Studenten des ersten Semesters eine Statistik. In jeder Vorlesung notiert er die Anzahl der Aktiven und die Anzahl der Passiven. (Die jeweilige Anzahl der Fehlenden ergibt sich daraus.)

Professor Heise beschreibt die jeweilige Verteilung seiner Studentinnen und Studenten auf die drei Gruppen durch einen Verteilungsvektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_P \\ x_F \end{pmatrix}$, wobei x_A für die Anzahl der aktiven, x_P für die Anzahl der passiven und x_F für die Anzahl der fehlenden Studentinnen und Studenten steht.

Nach Auswertung der Zählungen in mehreren Vorlesungen modelliert Professor Heise die Entwicklung der Verteilungsvektoren durch eine Übergangsmatrix M mit

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

sodass der Übergang von der Verteilung zum Zeitpunkt i einer Vorlesung ($i \in \mathbb{N}$) zur Verteilung zum Zeitpunkt $i + 1$ (nächste Vorlesung) durch die Gleichung $\vec{s}_{i+1} = M \cdot \vec{s}_i$ näherungsweise beschrieben werden kann.

a) Ergänzen Sie den Übergangsgraphen zur Matrix M in der Anlage. (5P)

In einer Vorlesung zählt Professor Heise, dass von den insgesamt 400 Studentinnen und Studenten nur drei Viertel gekommen sind und dass ein Zehntel der Anwesenden aktiv mitarbeitet.

b) Berechnen Sie die Anzahl der Aktiven und Passiven, die Professor Heise auf Grund seiner Zählung und seines Modells in der nächsten Vorlesung zu erwarten hat. (5P)

c)
- Zeigen Sie, dass es keinen realistischen Verteilungsvektor $\vec{s}_r$ der Studentinnen und Studenten geben kann, der sich nach dem vorliegenden Modell von einer Vorlesung zur nächsten exakt reproduzieren würde.
- Geben Sie einen Verteilungsvektor $\vec{s}_r^{\,*}$ an, der sich nach dem vorliegenden Modell von einer Vorlesung zur nächsten *näherungsweise* reproduzieren würde. (10P)

Die Potenzen M^n nähern sich für große n der Matrix G an. Präziser ausgedrückt: Die Matrix G ist die Grenzmatrix der Folge der Matrixpotenzen. Man schreibt auch: $\lim_{n\to\infty} M^n = G$

Es gilt:

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & g_1 & g_1 \\ g_2 & g_2 & g_2 \\ g_3 & g_3 & g_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}457 & 0{,}457 & 0{,}457 \\ 0{,}371 & 0{,}371 & 0{,}371 \\ 0{,}171 & 0{,}171 & 0{,}171 \end{pmatrix}$$

d) Begründen Sie im Sachkontext, warum sowohl bei der Matrix M als auch bei der Matrix G die Spaltensummen exakt gleich 1 sein *müssten*. (4P)

e) Zeigen Sie:

- Unabhängig von der Anfangsverteilung führt das Umverteilungsmodell langfristig stets auf dieselbe Grenzverteilung.

  Hinweis: Die Gesamtanzahl der betrachteten Studentinnen und Studenten beträgt 400.

- Der Vektor der Grenzverteilung ist ein Eigenvektor von M mit dem Eigenwert 1. (11P)

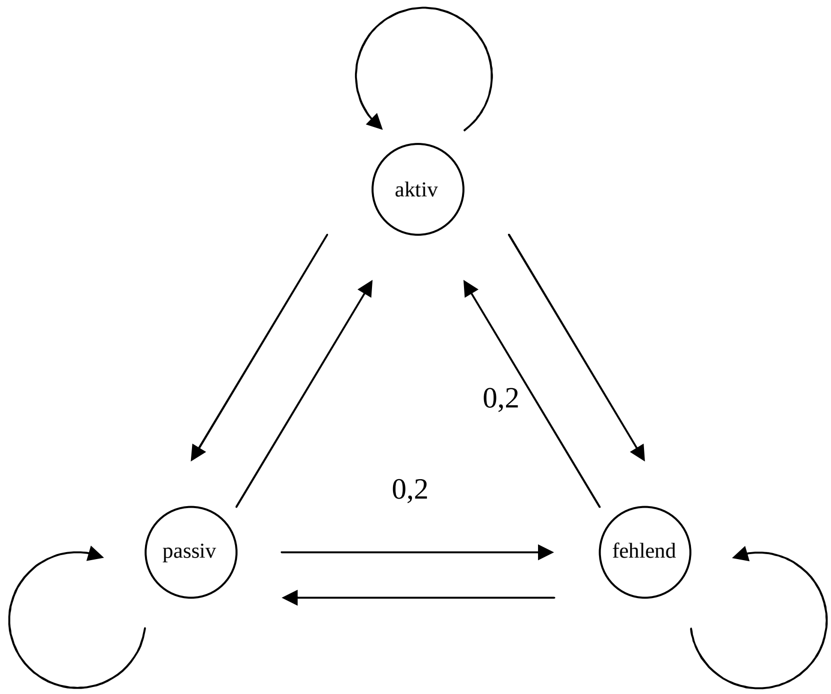
Professor Heise wünscht sich, so auf seine Studentinnen und Studenten einwirken zu können, dass eine andere Übergangsmatrix $\widetilde{M}$ die Entwicklung der Verteilungsvektoren modellieren würde.
Für die Matrix $\widetilde{M}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{M}^n = \widetilde{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

f)
- Bestimmen Sie die erste Spalte von $\widetilde{M}$.
- Interpretieren Sie im Sachkontext, welche langfristige Entwicklung Professor Heise sich wünscht. (10P)

g) Beurteilen Sie, ob aus der eingangs angegebenen Übergangsmatrix M die folgende Interpretation abgeleitet werden kann: „Wenn in einer Vorlesung 100 Studentinnen bzw. Studenten aktiv waren, werden in der nächsten Vorlesung 60 von diesen Studentinnen bzw. Studenten ebenfalls aktiv sein.“ (5P)

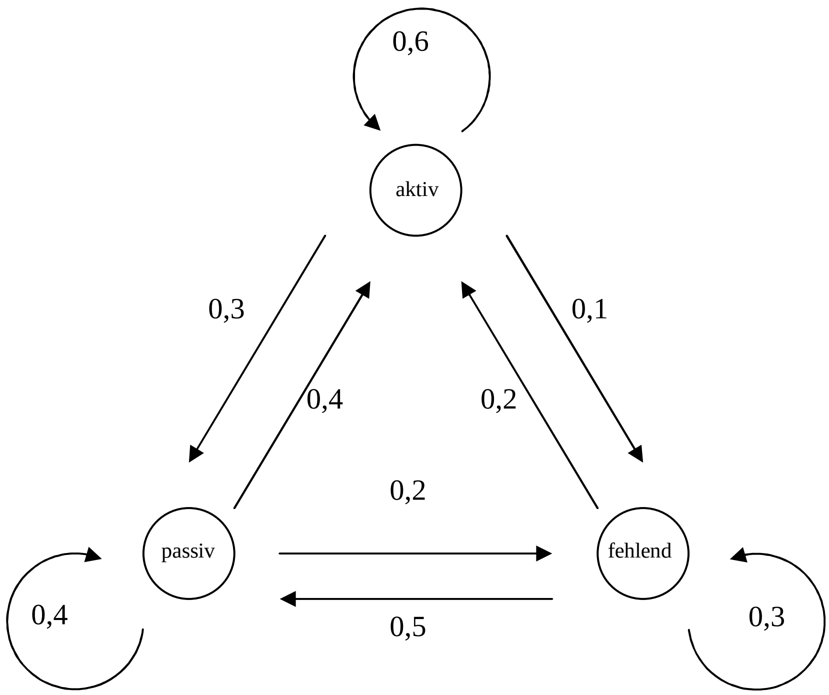
Anlage zur Aufgabe "Studentinnen und Studenten" (erhöhtes Anforderungsniveau)



Erwartungshorizont

Studentinnen und Studenten (erhöhtes Anforderungsniveau)

Im Erwartungshorizont kursiv Gedruckte Sätze sind Anmerkungen für die korrigierende Lehrkraft, diese Abschnitte sind kein Bestandteil der erwarteten Lösung.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	 	5		
b)	Es sind 300 Studentinnen und Studenten gekommen, von denen 30 aktiv mitarbeiten. Somit ist der aktuelle Verteilungsvektor $\vec{s}_0 = \begin{pmatrix} 30 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix}$. Für die nächste Vorlesung ist dann der Verteilungsvektor $\vec{s}_1 = M \cdot \vec{s}_0$ zu erwarten: $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 146 \\ 167 \\ 87 \end{pmatrix}$ Es sind 146 Aktive und 167 Passive zu erwarten.	5		

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

c)

- Zu untersuchen ist die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ x_P \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_P \\ x_F \end{pmatrix}$$

Mögliche Auflösungsschritte sind:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0,4 & 0,4 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & -0,6 & 0,5 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & -0,7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 3 \\ |\cdot 4 \; |+\mathrm{I} \\ |\cdot 12 \; |+\mathrm{I} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1,2 & 1,2 & 0,6 & 0 \\ 0 & -1,2 & 2,6 & 0 \\ 0 & 3,6 & -7,8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot 3 \\ |+\mathrm{II} \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1,2 & 1,2 & 0,6 & 0 \\ 0 & -3,6 & 7,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 5 \\ |\cdot 5 \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & -18 & 39 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Mit dem Ansatz $x_F = t$ wird $x_P = \frac{13}{6}t$ und $x_A = \frac{8}{3}t$.

Die Bedingung $x_A + x_P + x_F = 400$ führt auf $\frac{35}{6}t = 400$ bzw. $t = \frac{480}{7}$, sodass der Lösungsvektor sich nicht ausschließlich aus natürlichen Zahlen zusammensetzt.

Daher kann es keinen Verteilungsvektor geben, der sich exakt reproduziert.

- Ein annähernd sich selbst reproduzierender Vektor ist der folgende:

$$\vec{s}_r^{\,*} = \begin{pmatrix} 183 \\ 149 \\ 68 \end{pmatrix}$$

Nach obiger Rechnung gilt:

$x_A = \frac{8}{3} \cdot \frac{480}{7} = \frac{1280}{7} \approx 183$, $x_P = \frac{13}{6} \cdot \frac{480}{7} = \frac{1040}{7} \approx 149$, $x_F = \frac{480}{7} \approx 69$

Dies ist allerdings rundungsbedingt in der Summe um 1 zu viel.
Andere naheliegende Vektoren können angegeben werden, indem eine der anderen gerundeten Komponenten um 1 vermindert wird.

	I	II	III
Bewertung c)	2	8	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>In einer Spalte der Matrix M oder der Matrix G stehen die Anteile aus einer Gruppe, die sich auf die drei Gruppen neu verteilen, bei M im Abstand einer Vorlesung, bei G auf lange Sicht.

Da jede Gruppe vollständig umverteilt wird, muss die Summe der Anteile gleich 1 sein.

Abweichungen ergeben sich aus Rundungen.</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>• $\vec{s} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_P \\ x_F \end{pmatrix}$ sei ein beliebiger Verteilungsvektor der Anfangsverteilung.

Dann ist die Grenzverteilung zu berechnen als

$G \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} g_1 & g_1 & g_1 \\ g_2 & g_2 & g_2 \\ g_3 & g_3 & g_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ x_P \\ x_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \cdot (x_A + x_P + x_F) \\ g_2 \cdot (x_A + x_P + x_F) \\ g_3 \cdot (x_A + x_P + x_F) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400g_1 \\ 400g_2 \\ 400g_3 \end{pmatrix} = \vec{g}$

unabhängig von $\vec{s}$, weil $x_A + x_P + x_F = 400$.

Eine Argumentation mit den Näherungswerten für die Matrixelemente führt zu einem Punktabzug.

• Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} M^n = G$, damit gilt $M \cdot G = G$.
Dann ist $M \cdot \vec{g} = M \cdot \left(G \cdot \vec{s}\right) = \left(M \cdot G\right) \cdot \vec{s} = G \cdot \vec{s} = \vec{g} = 1 \cdot \vec{g}$,

d. h. der Vektor der Grenzverteilung $\vec{g}$ ist Eigenvektor von M zum Eigenwert 1.</td><td></td><td>4</td><td>7</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	• Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{M}^{n}=\widetilde{G}$, also gilt $\widetilde{M}\cdot\widetilde{G}=\widetilde{G}$ Mit $\widetilde{M}=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$ und $\widetilde{G}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich Dann ist $\widetilde{M}\cdot\widetilde{G}=\widetilde{G}$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} m_{11} & m_{11} & m_{11} \\ m_{21} & m_{21} & m_{21} \\ m_{31} & m_{31} & m_{31} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Es ergibt sich $m_{11}=1$, $m_{21}=0$ und $m_{31}=0$. • Jede Verteilung führt langfristig zu ausschließlich aktiven Studentinnen und Studenten.		10	
g)	Rechnerisch tragen 60% der Anzahl der Aktiven einer Vorlesung zu der Anzahl der Aktiven in der nächsten Vorlesung bei (Eintrag 0,6). Die im Aufgabentext zu beurteilende Interpretation ist aber nicht ganz richtig, da das Modell nur eine Entwicklung von *Anzahlen* beschreibt, ohne sich auf einzelne *Personen* zu beziehen. Die Interpretation liefert zwar eine mögliche Erklärung für das Zustandekommen des Prozentsatzes, aber nicht die einzig mögliche; unter den regelmäßig Aktiven könnte es z. B. auch welche geben, die sich verabreden, abwechselnd in die Vorlesung zu gehen und zu fehlen, weil sie sich außerhalb der Vorlesung treffen und ihr Wissen austauschen. So ein regelmäßiger Tausch würde sich auf die Entwicklung der Anzahlen nicht auswirken, aber der Interpretation widersprechen. *Auch kürzere Beurteilungen sind zu akzeptieren, wenn sie den Kern der Unterscheidung zwischen* Individuen *und* Anzahl der Individuen *treffen.*			5
	Insgesamt 50 BWE	12	26	12

Lineare Algebra/Analytische Geometrie 2

Ferien-Club (erhöhtes Anforderungsniveau)

Ein Ferien-Club bietet seinen Mitgliedern regelmäßig drei günstige Sommer-Urlaubsangebote: Ferien-Paket A, Ferien-Paket B und Ferien-Paket C.

Die Anzahl der Clubmitglieder ändert sich im Laufe der Jahre. Dennoch gibt es ausgiebige Erfahrungen über die Nutzung der Ferien-Pakete, die in dem nachfolgenden Modell zusammengefasst sind:

- Die Verteilung der Nutzer eines Sommerangebots nach Abschluss aller Buchungen werde durch einen Verteilungsvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_N \end{pmatrix}$ beschrieben, wobei x_A für den Anteil[2] derjenigen Clubmitglieder steht, die das Paket *A* nutzen, x_B für den Anteil derjenigen Clubmitglieder, die das Paket *B* nutzen, x_C für den Anteil derjenigen Clubmitglieder, die das Paket *C* nutzen und x_N für den Anteil derjenigen Clubmitglieder, die kein Ferien-Paket nutzen.
- Die unten stehende Übergangsmatrix M beschreibt im Rahmen des Modellzusammenhangs $\vec{n}_{i+1} = M \cdot \vec{n}_i$ den Übergang von der Verteilung zum Zeitpunkt i ($i \in \mathbb{N}$) zur Verteilung zum Zeitpunkt $i + 1$ im nächsten Jahr.

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Anteile x_A, x_B, x_C, x_N sind jeweils als Dezimalzahlen (Genauigkeit: drei Nachkommastellen) anzugeben.

a) Ergänzen Sie in den rechteckigen Feldern des Übergangsgraphen in der Anlage die fehlenden Anteilsangaben. (4P)

Die Nutzerverteilung dieses Sommers sei durch den Verteilungsvektor $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}332 \\ 0{,}284 \\ 0{,}253 \\ 0{,}131 \end{pmatrix}$ gegeben.

b)
- Berechnen Sie den zu erwartenden Verteilungsvektor $\vec{n}_2$ des *nächsten* Sommers.
- Bestimmen Sie den Vektor $\vec{n}_0$, der nach dem Modell die Verteilung im *vorigen* Sommer wiedergibt. (13P)

[2] Ein Anteil *könnte* als Prozentsatz angegeben werden. In dieser Aufgabe werden aber Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 verwendet: Statt 50 % wird 0,5 benutzt und statt 67,3 % wird 0,673 geschrieben.

Es gilt $M^2 = \begin{pmatrix} 0,34 & 0,32 & 0,32 & 0,32 \\ 0,29 & 0,31 & m & 0,27 \\ 0,26 & 0,26 & 0,28 & 0,26 \\ 0,11 & 0,11 & 0,12 & 0,15 \end{pmatrix}$

c) • Ermitteln Sie das Element *m* in der Matrix M^2.

• Erläutern Sie kurz allgemein, d. h. unabhängig von den konkreten Werten in der Matrix *M*, die praktische Bedeutung von Matrixpotenzen im Rahmen des hier behandelten Umverteilungsmodells. (7P)

Kurz vor den Ferien haben alle Clubmitglieder ihre Entscheidung getroffen, ob sie ein Paket wählen und wenn ja, welches. Die Clubleitung versucht nun, alle, die kein Paket gebucht haben, umzustimmen und zu einer Buchung von Ferien-Paket C zu gewinnen. Deshalb veröffentlicht sie in der Clubzeitung ein Sonderangebot: Ferien-Paket C für Kurzentschlossene mit einem Rabattsatz von 20%.

d) • Geben Sie eine Matrix *A* an, deren Multiplikation mit einem Verteilungsvektor die Wanderung aller Nicht-Nutzer zu *C*-Nutzern modelliert.

• Es gelte $Q = A \cdot M$ und $R = M \cdot A$

Entscheiden Sie, welche der beiden folgenden Modellgleichungen den angestrebten Buchungsprozess am ehesten beschreibt:

(I) $\vec{n}_{i+1} = Q \cdot \vec{n}_i$ oder (II) $\vec{n}_{i+1} = R \cdot \vec{n}_i$ (6P)

Ein Verteilungsvektor heißt *realistisch*, wenn alle seine Komponenten nicht-negativ sind und ihre Summe den Wert 1 hat. Sei $\vec{e}$ ein realistischer Verteilungsvektor, der zugleich ein Eigenvektor der Matrix M ist.

e) • Begründen Sie, dass für den zum Eigenvektor $\vec{e}$ gehörenden Eigenwert λ_e gilt: $\lambda_e = 1$

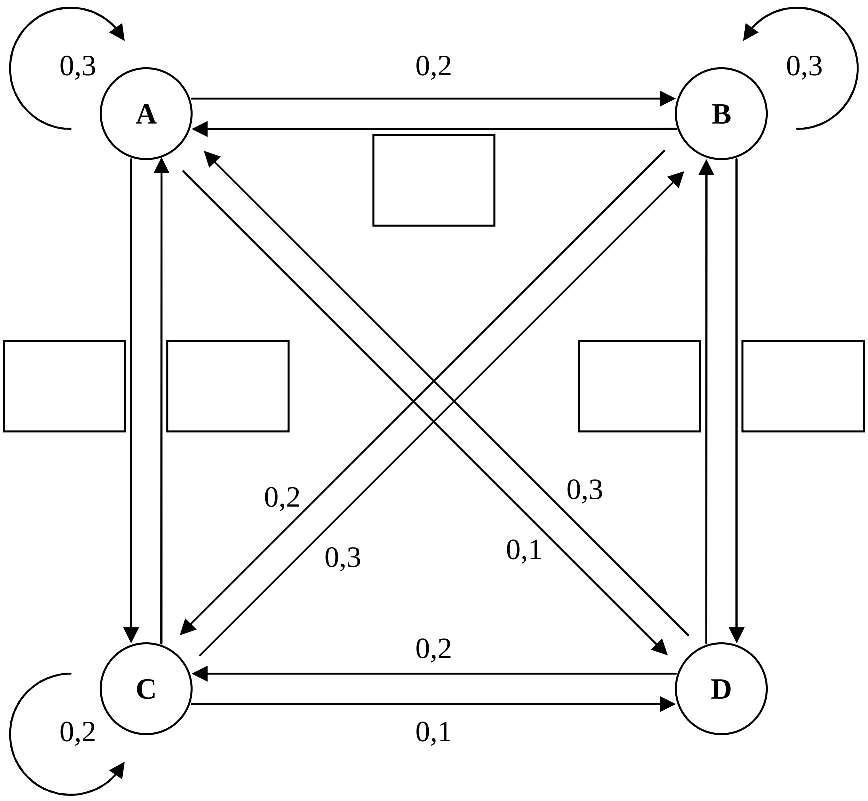
• Beschreiben Sie die Weiterentwicklung der Verteilungsvektoren im Modell für den Fall, dass die *aktuelle* Verteilung durch den Vektor $\vec{e}$ gegeben ist. (8P)

Im Rahmen der langfristigen Geschäftsplanung werden verschiedene Wechselverhaltensweisen der Mitglieder diskutiert. Zwei Verhaltensweisen wurden dabei genauer betrachtet, zu diesen Verhaltensweise gehören die beiden Matrizen *P* und *T*:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 & 1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

f) Untersuchen Sie jeweils das langfristige Verhalten eines durch *P* und eines durch *T* modellierten Umverteilungsprozesses. (12P)

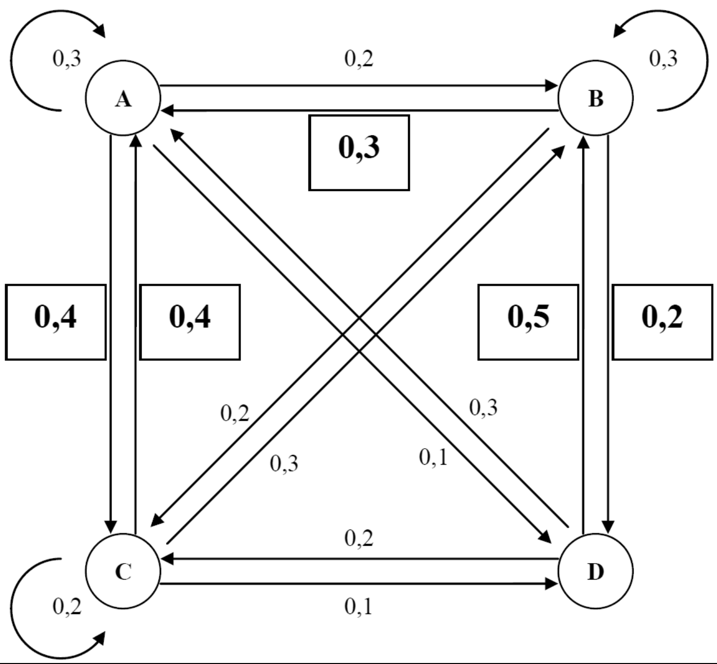
Anlage zur Aufgabe „Ferien-Club“ (erhöhtes Anforderungsniveau)



Erwartungshorizont

Ferienclub (erhöhtes Anforderungsniveau)

Im Erwartungshorizont kursiv gedruckte Sätze sind Anmerkungen für die korrigierende Lehrkraft, diese Abschnitte sind kein Bestandteil der erwarteten Lösung.

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)		4		
b)	• $\vec{n}_2 = M \cdot \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,332 \\ 0,284 \\ 0,253 \\ 0,131 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3253 \\ 0,2930 \\ 0,2664 \\ 0,1153 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,325 \\ 0,293 \\ 0,266 \\ 0,115 \end{pmatrix}$ • Mit dem Ansatz $M \cdot \vec{n}_0 = \vec{n}_1$ ergibt sich das LGS $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,332 \\ 0,284 \\ 0,253 \\ 0,131 \end{pmatrix}$ und damit die erweiterte Koeffizientenmatrix $\left(\begin{array}{cccc\|c} 0,3 & 0,3 & 0,4 & 0,3 & 0,332 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,284 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,253 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,131 \end{array}\right)$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

mit den möglichen Umformungen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0,3 & 0,3 & 0,4 & 0,3 & 0,332 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,284 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,253 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,131 \end{array}\right) \begin{array}{l|l} |\cdot(-40) & \\ |\cdot 60 & +\mathrm{I} \\ |\cdot 30 & +\mathrm{I} \\ |\cdot 120 & +\mathrm{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -12 & -12 & -16 & -12 & -13,28 \\ 0 & 6 & 2 & 18 & 3,76 \\ 0 & -6 & -10 & -6 & -5,69 \\ 0 & 12 & -4 & -12 & 2,44 \end{array}\right) \begin{array}{l|l} & \\ & \\ & +\mathrm{II} \\ |\cdot(-0,5) & +\mathrm{II} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -12 & -12 & -16 & -12 & -13,28 \\ 0 & 6 & 2 & 18 & 3,76 \\ 0 & 0 & -8 & 12 & -1,93 \\ 0 & 0 & 4 & 24 & 2,54 \end{array}\right) \begin{array}{l|l} & \\ & \\ & \\ |\cdot 2 & +\mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -12 & -12 & -16 & -12 & -13,28 \\ 0 & 6 & 2 & 18 & 3,76 \\ 0 & 0 & -8 & 12 & -1,93 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 3,15 \end{array}\right)$$

Rückwärtseinsetzen ergibt:

$$60x_N = 3,15 \Leftrightarrow x_N = 0,0525$$
$$-8x_C + 12\cdot 0,0525 = -1,93 \Leftrightarrow x_C = 0,32$$
$$6x_B + 2\cdot 0,32 + 18\cdot 0,0525 = 3,76 \Leftrightarrow x_B = 0,3625$$
$$-12x_A - 12\cdot 0,3625 - 16\cdot 0,32 - 12\cdot 0,0525 = -13,28 \Leftrightarrow x_A = 0,265$$

Ergebnis: $\vec{n}_0 \approx \begin{pmatrix} 0,265 \\ 0,363 \\ 0,320 \\ 0,053 \end{pmatrix}$

		I	II	III
		4	9	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>• $m = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,3 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix} = 0,28$

Alternativ lässt sich m auch wie folgt ermitteln: Da die Matrix M^2 einen vollständigen Umverteilungsprozess unter der konstanten Anzahl von Mitgliedern für zwei Jahre beschreibt, muss jede Spaltensumme von M^2 gleich 1 sein. Es gilt dann also:
$m = 1 - 0,32 - 0,28 - 0,12 = 0,28$.

• Mithilfe von Matrixpotenzen kann man mehrere Zeitschritte durch <u>einen</u> Berechnungsschritt Matrix mal Vektor abkürzen.
Für einen Zweierschritt gilt beispielsweise: $\vec{n}_3 = M^2 \cdot \vec{n}_1$

Für eine Bewertung als vollständig korrekt ist gemäß dem Operator "Erläutern" eine Erklärung <u>und</u> ein Beispiel notwendig.

Falls der Prüfling sich auf eine andere sinnvolle (und korrekte) als die angegebene praktische Bedeutung bezieht, kann dies auch als korrekt gewertet werden.</td><td></td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>• $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

• Da $Q = A \cdot M$ gilt, wird zunächst M und dann A auf den Verteilungsvektor vom Vorjahr angewendet. Es wird also zunächst die übliche Fluktuation und dann die Umentscheidung modelliert.
Bei $R = M \cdot A$ ist die Reihenfolge umgekehrt. Da eine mögliche Umentscheidung jedoch erst nach der eigentlichen Buchung stattfindet, ist die Gleichung $\vec{n}_{i+1} = Q \cdot \vec{n}_i$ die angemessenere.</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	• (1) In der Matrix M sind alle Matrixeinträge nicht-negativ und jede Spaltensumme hat den Wert 1. (2) Für alle realistischen Verteilungsvektoren $\vec{v}_i$ gilt, dass auch ihr Nachfolger $\vec{v}_{i+1} = M \cdot \vec{v}_i$ realistisch ist. Grund: Die Komponenten des Nachfolgers sind wegen (1) nicht-negativ und ihre Summe hat den Wert 1, weil durch jeden Verteilungsvektor alle Optionen und alle Clubmitglieder berücksichtigt werden. (3) Für jeden Eigenvektor $\vec{e}$ zum Eigenwert λ_e gilt: $\lambda_e \cdot \vec{e} = M \cdot \vec{e}$ (4) Wenn der Eigenvektor $\vec{e}$ ein realistischer Verteilungsvektor ist, muss wegen (2) auch der Nachfolger $\lambda_e \cdot \vec{e}$ ein realistischer Verteilungsvektor sein. (5) Insbesondere muss die Spaltensumme von $\lambda_e \cdot \vec{e}$ den Wert 1 haben. Dies ist nur möglich, wenn $\lambda_e = 1$. • Nach jedem Zeitschritt erhält man wieder denselben Vektor $\vec{e}$. *Die Bewertung für die Antwort zum ersten Spiegelpunkt richtet sich nach Präzision und Vollständigkeit der Argumentation.*	2	2	4

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>f)</td><td>

• Matrix P:

Es ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C \\ x_A \\ x_B \\ x_N \end{pmatrix}$

Das bedeutet, dass die Anteile zwischen den Paketpräferenzen A, B und C mit jedem Zeitschritt zyklisch vertauscht werden, während der Anteil der Nicht-Nutzer konstant bleibt. Da nach drei Schritten wieder der Ausgangszustand erreicht ist, handelt es sich im Allgemeinen um einen periodischen Prozess mit der Periodenlänge 3. Dabei gibt es die folgende Ausnahme:

Startvektoren der Form $\begin{pmatrix} \frac{1-\mu}{3} \\ \frac{1-\mu}{3} \\ \frac{1-\mu}{3} \\ \mu \end{pmatrix}$ mit $\mu \in [0;\, 1]$ reproduzieren sich mit jedem Zeitschritt.

• Matrix T:

Der Anteil der Personen, die Paket C bevorzugen,erhöht sich mit jedem Zeitschritt zuungunsten der Anteile der anderen Präferenzen, weil

o der vorherige Anteil bestehen bleibt (wegen $t_{33} = 1$),

o feste Anteile der Anteile der anderen Präferenzen hinzukommen (wegen $t_{31},\ t_{32},\ t_{34} > 0$) und

o keine Anteile des Anteils der Personen, die Paket C bevorzugen, abgegeben werden (wegen $t_{13} = t_{23} = t_{43} = 0$) .

Ein Sonderfall liegt beim Startvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dieser Vektor reproduziert sich in jedem Zeitschritt.

</td><td></td><td>4</td><td>8</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 50 BWE</td><td>12</td><td>26</td><td>12</td></tr>
</table>

Stochastik

Münzwürfe (erhöhtes Anforderungsniveau)

Paula und Lisa spielen ein Spiel mit Münzwürfen: Jeder „Spielzug" besteht darin, dass zunächst Paula und dann Lisa zwei Münzen wirft. Jede Münze hat eine Seite mit *Zahl* und eine Seite mit *Kopf*. Als Spielregel vereinbaren Paula und Lisa zunächst: Wer zweimal *Zahl* wirft, erhält einen Punkt, wer nicht zweimal *Zahl* wirft, erhält keinen Punkt.

Paula und Lisa spielen ein Spiel mit 80 Spielzügen und notieren für jeden Spielzug die vergebenen Punkte. Im Rückblick auf ihr Spiel finden sie, dass es ungewöhnlich verlaufen sei.

- Paula sagt zu Lisa: „Vielleicht stimmt etwas mit deinen Münzen nicht. Ich finde, dass du auffallend wenige Punkte bekommen hast."
- Lisa sagt zu Paula: „Das finde ich auch. Aber was ich noch merkwürdiger finde, ist Folgendes: Meine Münzen scheinen von deinen beeinflusst worden zu sein; häufig habe ich nur dann zweimal *Zahl* geworfen, wenn du auch zweimal *Zahl* geworfen hast, und wenn du nicht zweimal *Zahl* geworfen hast, habe ich meistens auch nicht zweimal *Zahl* geworfen."

Aufgrund ihrer Notizen fertigen Paula und Lisa die nachfolgende Vierfeldertafel mit ihren Punktzahlen an. Darin bedeutet Paula* das Ereignis, dass Paula in einem Spielzug einen Punkt erhalten und Paula^0, dass Paula keinen Punkt erhalten hat; entsprechend werden die Ereignisse für Lisa abgekürzt.

	Lisa*	Lisa^0	Summe
Paula*	8	12	20
Paula^0	2	58	60
Summe	10	70	80

a) Paulas Äußerung soll genauer untersucht werden:

- Bestätigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Spielerin mit *fairen* Münzen in einem Spielzug einen Punkt bekommt, ist 25 %.
- Berechnen Sie das Intervall um den Erwartungswert der Punktzahl bei 80 Spielzügen, in dem bei Benutzung fairer Münzen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % die Punktzahl einer Spielerin liegt und beurteilen Sie Paulas Äußerung vor dem Hintergrund Ihres Ergebnisses. (7P)

b) Lisa Äußerung soll genauer untersucht werden:

- Erläutern Sie den Begriff der *stochastischen Unabhängigkeit* zweier Ereignisse A und B.
- Geben Sie ein formales Kriterium für die stochastische Unabhängigkeit der Ereignisse A und B an.
- Verwenden Sie die aus der obigen Tabelle abgeleiteten relativen Häufigkeiten als Schätzwerte für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten und untersuchen Sie, ob die Ereignisse Paula^0 und Lisa^0 stochastisch unabhängig sind. (10P)

Paula und Lisa beschließen, nur noch mit den Münzen von Paula weiterzuspielen, von denen angenommen wird, dass sie fair sind. Paula und Lisa ändern ihre Spielregel: In jedem Spielzug gilt diejenige als Gewinnerin des Spielzuges, die häufiger *Zahl* geworfen hat als die andere. Wenn beide gleich oft *Zahl* geworfen haben, gilt der Spielzug als unentschieden. Wer zuerst *zwei aufeinanderfolgende* Spielzüge gewonnen hat, ist Gewinnerin des ganzen Spiels; weitere Münzwürfe ändern daran nichts.

Der jeweilige Spielstand in einem Spiel werde nun durch folgende Zustände – beschrieben aus Paulas Sicht – gekennzeichnet (siehe nächste Seite):

- Im Startzustand **S** benötigen beide Spielerinnen zwei aufeinanderfolgende Gewinnzüge, um das ganze Spiel zu gewinnen. Nach jedem unentschiedenen Spielzug tritt dieser Zustand wieder ein.
- Im Zustand **I** benötigt Paula noch einen Gewinnzug, um das Spiel zu gewinnen, während Lisa hierfür zwei aufeinander folgende Gewinnzüge benötigt.
- Im Zustand **II** benötigt Lisa noch einen Gewinnzug, um das Spiel zu gewinnen, während Paula hierfür zwei aufeinander folgende Gewinnzüge benötigt.
- Im Zustand **G** hat Paula gewonnen (also Lisa verloren), im Zustand **V** hat Paula verloren (also Lisa gewonnen).

$$\vec{v}_n = \begin{pmatrix} p_n(\text{G}) \\ p_n(\text{V}) \\ p_n(\text{I}) \\ p_n(\text{II}) \\ p_n(\text{S}) \end{pmatrix}$$

Aus Paulas Perspektive enthalten die Zustandsvektoren $\vec{v}_n$ als Einträge die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Zustände nach dem n-ten Spielzug (siehe Kasten rechts), wobei $\vec{v}_0$ den Zustand vor dem ersten Spielzug beschreibt.
Für den Übergang vom n-ten zum $(n+1)$-ten Spielzug sind in der Anlage ein Übergangsgraph und eine Übergangsmatrix M dargestellt. Letztere beschreibt den Übergang durch die Gleichung $\vec{v}_{n+1} = M \cdot \vec{v}_n$.

c) • Begründen Sie, warum die Matrixeinträge $m_{11} = 1$, $m_{13} = \frac{5}{16}$ und $m_{53} = \frac{6}{16}$ zur obigen Beschreibung des neuen Spiels passen.

• Begründen Sie, warum für den Vektor $\vec{v}_0$ der letzte Eintrag gleich 1 und die anderen Einträge gleich 0 zu wählen sind. (11P)

Im folgenden Aufgabenteil soll eine Anwendung der Übergangsmatrix M exemplarisch betrachtet werden. Eine Multiplikation des Startvektors $\vec{v}_0$ mit M^2 ergibt $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{25}{256} \\ \frac{25}{256} \\ \frac{55}{256} \\ \frac{55}{256} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$

d) • Berechnen Sie den Vektor $\vec{v}_3$.

• Beschreiben Sie, durch welche Aufeinanderfolgen von Spielzuständen das Spiel sich spätestens nach dem dritten Spielzug im Zustand **G** befinden kann.

• Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die soeben beschriebenen Spielverläufe und zeigen Sie mithilfe dieser Wahrscheinlichkeiten, dass der zuvor errechnete Eintrag $p_3(\mathbf{G})$ korrekt ist. (10P)

Paula und Lisa vereinbaren eine weitere Spielregeländerung: Spielzüge, in denen beide die gleiche Anzahl von Zahlen werfen, werden wiederholt, sodass der Zustand **S** nur zu Beginn des Spiels auftreten kann. Paula und Lisa haben ein Spiel mit diesem neuen Regelwerk begonnen, das Spiel befindet sich gerade im Zustand **I**.

e) • Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Paula aus Zustand **I** heraus das Spiel gewinnt.

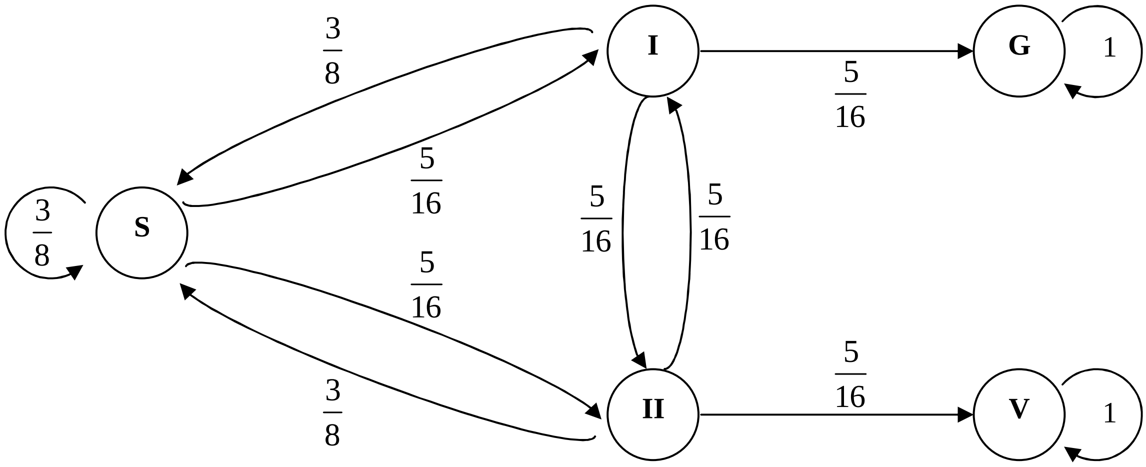
• Begründen Sie, warum man mithilfe der im Hinweis gegebenen Formel (2) den Erwartungswert der Zufallsvariablen N (Anzahl der folgenden Spielzüge bis zum Ende durch **G** oder **V**, wenn Wiederholungen von Spielzügen nicht mitgezählt werden) ermitteln kann und bestimmen Sie diesen. (12P)

Hinweis: *Die folgenden Formeln für unendliche Summen dürfen ohne Beweis verwendet werden.*

(1) $$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x} \quad \textit{für } x \in \mathbb{R} \textit{ und } |x| < 1$$

(2) $$1 \cdot x^1 + 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x^3 + \ldots = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \textit{für } x \in \mathbb{R} \textit{ und } |x| < 1$$

Anlage 1 zur Aufgabe "Münzwürfe" (erhöhtes Anforderungsniveau)



Anlage 2 zur Aufgabe "Münzwürfe" (erhöhtes Anforderungsniveau)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} \\ 0 & 0 & \frac{5}{16} & 0 & \frac{5}{16} \\ 0 & 0 & \frac{6}{16} & \frac{6}{16} & \frac{6}{16} \end{pmatrix}$$

Erwartungshorizont

Münzwürfe (erhöhtes Anforderungsniveau)

Im Erwartungshorizont kursiv gedruckte Sätze sind Anmerkungen für die korrigierende Lehrkraft, diese Abschnitte sind kein Bestandteil der erwarteten Lösung.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	• Die Wahrscheinlichkeit für *Zahl* ist 0,5. Die Wahrscheinlichkeit für einen Punktgewinn – also für *zweimal* Zahl – ist demnach $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25 = 25\ \%$. • X: Anzahl der Würfe einer Spielerin, bei denen zweimal *Zahl* erscheint. $n = 80$ $p = 0{,}25$ (siehe erster Spiegelpunkt) $\mu = n \cdot p = 20$ $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{80 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} = \sqrt{15} \approx 3{,}873$. Da $\sigma > 3$ ist, ist die Laplacebedingung erfüllt und man kann σ-Regeln anwenden: $\left[20 - 1{,}96 \cdot \sqrt{15};\ 20 + 1{,}96 \cdot \sqrt{15}\right] \approx [12{,}4;\ 27{,}6]$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von knapp 95 % liegt die Punktzahl im Intervall $[13;\ 27]$. Das Ergebnis von 10 Punkten, das Lisa erzielt hat, ist bei Benutzung fairer Münzen zwar grundsätzlich möglich, aber wenig wahrscheinlich.	5	2	
b)	• Zwei Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, wenn die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A nicht vom Eintreten oder Nichteintreten des Ereignisses B abhängt. Beispiel: Zwei Züge bei einem Urnenversuch *mit* Zurücklegen sind stochastisch unabhängig. *Für eine Bewertung als vollständig korrekt ist gemäß dem Operator "Erläutern" eine Erklärung <u>und</u> ein Beispiel notwendig.* • $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ *Alternativen*: $P_A(B) = P(B)$ *oder* $P(B \mid A) = P(B)$ • $P(\text{Paula}^0) = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}$ und $P(\text{Lisa}^0) = \frac{70}{80} = \frac{7}{8}$ und $P(\text{Paula}^0 \cap \text{Lisa}^0) = \frac{58}{80} = \frac{29}{40}$ Es gilt: $\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} = \frac{21}{32} \neq \frac{29}{40}$ Die beiden Ereignisse sind also nicht stochastisch unabhängig. *Alternativ lässt sich überprüfen, ob* $P_{\text{Paula}^0}(\text{Lisa}^0) \overset{?}{=} P(\text{Lisa}^0)$ (*bzw.* $P(\text{Lisa}^0 \mid \text{Paula}^0) \overset{?}{=} P(\text{Lisa}^0)$) *oder* $P_{\text{Lisa}^0}(\text{Paula}^0) \overset{?}{=} P(\text{Paula}^0)$ (*bzw.* $P(\text{Paula}^0 \mid \text{Lisa}^0) \overset{?}{=} P(\text{Paula}^0)$) *Ersteres führt zu* $\frac{29}{30} \overset{!}{\neq} \frac{7}{8}$, *Letzteres zu* $\frac{29}{35} \overset{!}{\neq} \frac{3}{4}$.	3	7	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>c)</td><td>

• Der Eintrag $m_{11} = 1$ ergibt sich aus der Bedingung, dass zwei aufeinanderfolgende Gewinnzüge bereits zum Gewinn des *ganzen* Spiels führen, nachfolgende Münzwürfe also nichts mehr daran ändern.

Der Eintrag $m_{13} = \frac{5}{16}$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, aus Zustand **I** in den Zustand **G** zu gelangen. Dieser Übergang kann *entweder* eintreten, wenn Paula zweimal *Zahl* wirft und Lisa nicht zweimal *Zahl* wirft – dies geschieht mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$ – oder Paula einmal *Zahl* wirft und Lisa keinmal *Zahl* wirft – dies geschieht mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. Insgesamt ist die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang von **I** zu **G** also $P(I \to G) = \frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16}$.

Der Eintrag $m_{53} = \frac{6}{16}$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang von Zustand **I** zu Zustand **S**. Dieser Übergang kann eintreten, wenn beide gleich häufig Zahl werfen:

$P(\text{beide werfen zweimal } Zahl) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$P(\text{beide werfen genau einmal } Zahl) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(\text{beide werfen keinmal } Zahl) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

Insgesamt ist die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang von **I** zu **S** also $P(I \to S) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{6}{16}$.

• Der letzte Eintrag von $\vec{v}_0$ muss 1 sein, da sich das Spiel im Startzustand befindet. Die anderen Einträge müssen 0 sein, da die Summe aller Einträge den Wert 1 hat.

</td><td></td><td>11</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>

•

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{16} & \frac{5}{16} \\ 0 & 0 & \frac{5}{16} & 0 & \frac{5}{16} \\ 0 & 0 & \frac{6}{16} & \frac{6}{16} & \frac{6}{16} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{25}{256} \\ \frac{25}{256} \\ \frac{55}{256} \\ \frac{55}{256} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{675}{4096} \\ \frac{675}{4096} \\ \frac{755}{4096} \\ \frac{755}{4096} \\ \frac{309}{1024} \end{pmatrix}$$

Es gibt drei Spielverläufe, die spätestens nach dem dritten Zug in den Zustand **G** führen:

- vom Startzustand **S** zum Zustand **I** und von dort zum Zustand **G (S → I → G)**,
- vom Startzustand **S** zum Zustand **II**, von dort zum Zustand **I** und dann zum Zustand **G** (**S → II → I → G**),
- nach dem ersten Zug verbleibt man im Startzustand **S**, geht dann zum Zustand **I** und von dort zum Zustand **G** (**S → S → I → G**).

Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind:

- $P(\mathbf{S} \to \mathbf{I} \to \mathbf{G}) = \left(\frac{5}{16}\right)^2 = \frac{25}{256}$
- $P(\mathbf{S} \to \mathbf{II} \to \mathbf{I} \to \mathbf{G}) = \left(\frac{5}{16}\right)^3 = \frac{125}{4096}$
- $P(\mathbf{S} \to \mathbf{S} \to \mathbf{I} \to \mathbf{G}) = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{5}{16}\right)^2 = \frac{75}{2048}$

Die Summe dieser drei Wahrscheinlichkeiten ist $\frac{675}{4096}$, was dem zuvor berechneten Wert für $p_3(G)$ entspricht.

</td><td>4</td><td>6</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>

- Paula kann direkt oder nach beliebig häufigen Wechseln zu Zustand **II** und zurück zu Zustand **I** durch einen anschließenden Gewinnzug das Spiel gewinnen.
Da jetzt die unentschiedenen Spielzüge fortfallen, ist in jedem Spielzug die Wahrscheinlichkeit für einen Spielzuggewinn wie auch für einen Spielzugverlust gleich 0,5.

$$\begin{aligned} P(\text{Paula gewinnt}) &= \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^8\cdot\frac{1}{2}+\ldots \\ &= \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^1\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\frac{1}{2}+\ldots \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(1+\left(\frac{1}{4}\right)^1+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4+\ldots\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Diese Aufgabe lässt sich auch mithilfe einer Mittelwertsregel bearbeiten.

- Ein Spielende kann aus beiden Zuständen **I** und **II** direkt erfolgen, durch Übergang zu **G** bzw. **V**. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind für alle Zustandsübergänge gleich 0,5.
Es kann also bereits mit *einem* Spielzug ein Ende eintreten, und zwar mit der Wahrscheinlichkeit 0,5. Mit jedem zusätzlichen Spielzug halbiert sich die Wahrscheinlichkeit für den entsprechenden Spielverlauf und erhöht sich die Anzahl der Spielzüge um 1. Eine Multiplikation der jeweiligen Anzahl von Spielzügen eines Spielverlaufs mit der Wahrscheinlichkeit für diesen Spielverlauf ergibt jeweils genau einen Summanden der Formel (2) , wenn man $x = 0,5$ in die Formel einsetzt:

$$1\cdot 0,5^1 + 2\cdot 0,5^2 + 3\cdot 0,5^3 + \ldots = \frac{0,5}{(1-0,5)^2} = 2$$

Der Erwartungswert für die verbleibende Anzahl der Züge ist also 2.

Bestimmt der Prüfling den Erwartungswert ohne Begründung des Bezuges zur Formel (2), z. B. durch die Anwendung einer Mittelwertsregel, sind Teilpunkte zu geben.

</td><td></td><td></td><td>12</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 50 BWE</td><td>12</td><td>26</td><td>12</td></tr>
</table>