Schriften der Wissenschaftlichen Hochschule Lahr

Nr. 10

Risikotheoretische Aspekte bei der Solvabilitätsregulierung von Versicherungsunternehmen

Robert D. Molinari und Tristan Nguyen

WHL

Wissenschaftliche Hochschule Lahr

Risikotheoretische Aspekte bei der Solvabilitätsregulierung von Versicherungsunternehmen

Robert D. Molinari und Tristan Nguyen

Schriften der Wissenschaftlichen Hochschule Lahr

Herausgeber: Prof. Dr. Thomas Egner
Prof. Dr. Stephan Kaiser
Prof. Dr. Tristan Nguyen
Prof. Dr. Martin Reckenfelderbäumer
Prof. Dr. Günther Seeber

Nr. 10 Lahr, 28. Januar 2009

ISBN: 978-3-86692-015-6

WHL Wissenschaftliche Hochschule Lahr
Hohbergweg 15-17
77933 Lahr
info@whl-lahr.de
www.whl-lahr.de

Risikotheoretische Aspekte bei der Solvabilitätsregulierung von Versicherungsunternehmen

Robert D. Molinari und Prof. Dr. Tristan Nguyen

Inhaltsverzeichnis

INHALTSVERZEICHNIS **1**

ABSTRACT **2**

1 RISIKEN IM VERSICHERUNGSUNTERNEHMEN **3**

1.1 VERSICHERUNGSTECHNISCHE RISIKEN 4
1.2 KREDITRISIKEN 9
1.3 RISIKEN AUS DER WERTÄNDERUNG VON KAPITALANLAGEN 12
1.4 ASSET-LIABILITY-MISMATCH RISIKO 14
1.5 OPERATIONALE RISIKEN 16
1.6 BEURTEILUNG DER ZWECKMÄßIGKEIT EINER UNTERGLIEDERUNG 19

2 RISIKOMESSUNG IM VERSICHERUNGSUNTERNEHMEN **21**

2.1 RISIKOMODELLE 21
2.1.1 Allgemeines zu Risikomodellen *22*
2.1.2 Risikomaße Typus I *26*
2.1.3 Risikomaße Typus II *31*
2.2 BEURTEILUNG 38
2.2.1 Beurteilung der Risikomaße *38*
2.2.2 Beurteilung der Anwendung von Risikomodellen *39*

3 QUANTIFIZIERUNG VON ABHÄNGIGKEITSSTRUKTUREN **42**

3.1 SPEZIELLE ABHÄNGIGKEITSMAßE 42
3.1.1 Linearer Korrelationskoeffizient nach Pearson *42*
3.1.2 Spearman's Rangkorrelation und Kendall's τ *45*
3.1.3 Maß für die Abhängigkeit in den Verteilungsenden *46*
3.2 ERMITTLUNG VON ABHÄNGIGKEITEN ZWISCHEN RISIKEN MITTELS MULTIVARIATER VERTEILUNGEN 47
3.2.1 Multivariate Verteilungen *47*
3.2.2 Copulae *49*
3.2.3 Ermittlung von Copulae und multivariaten Verteilungen *58*
3.3 BEURTEILUNG 60
3.3.1 Wünschenswerte Eigenschaften für Abhängigkeitsmaße *60*
3.3.2 Beurteilung der vorgestellten Konzepte zur Beschreibung von Abhängigkeiten zwischen Risiken *62*

LITERATURVERZEICHNIS **65**

Abstract

Derzeit werden im Rahmen von Solvency II neue Vorschriften bezüglich der Eigenkapitalanforderungen für Versicherungsunternehmen entwickelt, die ab dem Jahr 2012 in Kraft treten sollen. Nach dem neuen Solvabilitätssystem ist es wichtig, dass die Kapitalanforderung die Risikolage des Versicherungsunternehmens möglichst genau und korrekt widerspiegelt. Somit ist die möglichst präzise Messung und Erfassung des Risikos, dem ein Versicherer ausgesetzt ist, notwendig.

Deshalb soll in diesem Aufsatz zunächst dieses Risiko beschrieben, charakterisiert und systematisiert werden. Anschließend werden Methoden zur Erfassung und Quantifizierung des Risikos erläutert und gewürdigt. Bei der Aggregation von Einzelrisiken sind jedoch auch deren Abhängigkeitsstrukturen zu berücksichtigen, damit die Gesamtrisikolage präzise dargestellt werden kann. Hierzu stehen verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung, die zunächst dargestellt und im weiteren Verlauf beurteilt werden.

Es hat sich herausgestellt, dass zur Beschreibung der Abhängigkeitsstrukturen zwischen einzelnen Risiken in einem Versicherungsunternehmen *Copulae* angewendet werden sollten, da Kennzahlen Abhängigkeitsstrukturen nicht vollumfänglich wiedergeben können, somit weit weniger Informationen liefern und es schließlich zu einer Unterschätzung des tatsächlich vorhandenen Risikos in einem Versicherungsunternehmen kommen kann. Gerade bei der internen Modellierung der Risikolage eines Versicherers ist die Anwendung von Copulae besonders geeignet.

1 Risiken im Versicherungsunternehmen

Zur Bemessung der Eigenkapitalmenge, die notwendig ist, um eine bestimmte Mindestfortführungswahrscheinlichkeit eines Versicherungsunternehmens zu garantieren, müssen die Risiken in diesem Unternehmen zunächst adäquat erfasst werden können.[1] Auf die Risiken, denen ein Versicherer ausgesetzt ist, und die Möglichkeiten ihrer Erfassung soll deshalb ausführlich im Folgenden eingegangen werden.

Für Solvabilitätszwecke ist die Betrachtung der Gesamtrisikolage eines Versicherers entscheidend. Diese ergibt sich allerdings aus Risiken verschiedener Arten. Bevor Konzepte zur Messung der Risiken vorgestellt werden, sollen deshalb im Folgenden zunächst diese verschiedenen Risikoarten einzeln erläutert werden. Dabei handelt es sich um (vgl. auch Abbildung 1):[2]

1. Versicherungstechnische Risiken
2. Kreditrisiken
3. Risiken aus der Wertänderung von Kapitalanlagen
4. das Asset-Liability-Mismatch Risiko
5. Operationale Risiken

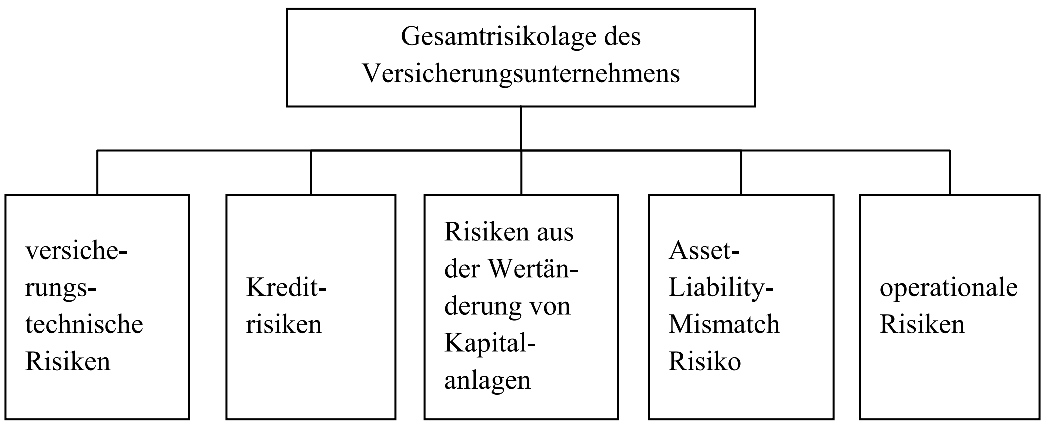

Abbildung 1: Aufspaltung der Gesamtrisikolage eines Versicherungsunternehmens

1 Vgl. *Hartung, T.* (2007), S. 62.
2 Vgl. *Bittermann, L./Lutz, A.* (2003), S. 391 sowie *Nguyen, T.* (2008), S. 438 und auch *International Actuarial Association (Hrsg.)* (2004), S. 26, wobei hier allerdings das Asset-Liability-Mismatch Risiko unter das Risiko aus der Wertänderung von Kapitalanlagen gefasst wird.

1.1 Versicherungstechnische Risiken

Zunächst soll das für Versicherungsunternehmen bedeutendste Risiko[3] charakterisiert werden, das alleine in der Versicherungsbranche vorkommt und von dem sonstige Unternehmen nicht betroffen sind. Unter dem versicherungstechnischen Gesamtrisiko versteht man die Möglichkeit, dass die gesamten Kosten, die durch die zu erbringenden Leistungen des Versicherers anfallen, die Summe aus den Prämienerlösen und dem Sicherheitskapital übersteigen.[4] Davon abgegrenzt werden können diverse versicherungstechnische Teilrisiken. Von solchen spricht man zum einen, falls es sich um das entsprechende Risiko für Teile des gesamten versicherten Bestandes handelt oder falls nur Abweichungen des effektiven Schadens vom geschätzten Erwartungswert des Schadens gemeint sind und zum anderen auch, falls nur die Prämienerlöse ohne das vorhandene Sicherheitskapital betrachtet werden.

Um dieses Risiko gut einschätzen zu können und entsprechende Gegenmaßnahmen treffen zu können, sollten dessen Ursachen klar sein.

- Zum einen handelt es sich bei den Ereignissen, die eine Zahlung des Versicherers an den Versicherungsnehmer auslösen, um Ereignisse, bei denen sowohl der Eintrittszeitpunkt als auch evtl. die Höhe der zu entrichtenden Zahlung sowie die Anzahl dieser Ereignisse zufallsabhängig sind. Der Teil des versicherungstechnischen Risikos, der auf dieser Ursache beruht, wird als Schadenrisiko bezeichnet.
- Zum anderen werden die Prämien i. d. R. im Voraus vereinnahmt, also zu einem Zeitpunkt, zu dem die Höhe des kollektiven Jahres-Gesamtschadens noch nicht bekannt ist. Dieser Umstand zusammen mit dem Schadenrisiko konstituiert das versicherungstechnische Risiko.[5] Das bedeutet zugleich, dass bei einer Erhebung der Prämie am Ende der Periode kein versicherungstechnisches Risiko auftritt.

Abbildung 2 zeigt dieses Zustandekommen des versicherungstechnischen Risikos graphisch auf.

---

3 Allerdings ist in der Lebensversicherung z. T. auch das Kapitalanlagerisiko dominierend. Vgl. *Farny, D.* (2006), S. 78 f.

4 Vgl. *Albrecht, P.* (1992), S. 7.

5 Vgl. *Albrecht, P.* (1992), S. 5.

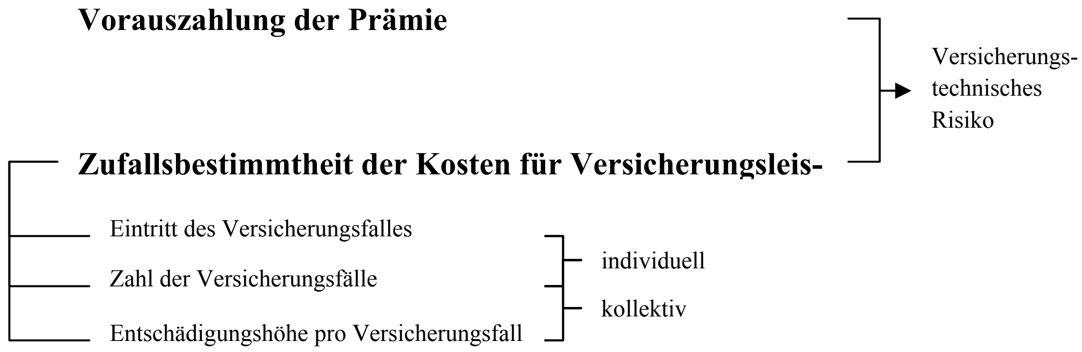

Abbildung 2: Zustandekommen des versicherungstechnischen Risikos

Das versicherungstechnische Risiko kann systematisiert werden in das Zufalls- und das Irrtumsrisiko. In der Literatur findet sich außerdem auch noch die Abgrenzung des sog. Änderungsrisikos.[6] Nachfolgend sollen diese drei Risikokomponenten erläutert werden:[7]

- Zufallsrisiko:
  Dieser Begriff beschreibt die Möglichkeit, dass der kollektive Effektivwert der Schäden von deren kollektiven Erwartungswert, der dabei als gegeben und konstant angenommen wird, abweicht, weil die Anzahl der Versicherungsfälle zufälligerweise besonders hoch oder niedrig ist und/oder die Einzelschäden besonders hoch oder niedrig sind.[8] Seinen Ausdruck findet das Zufallsrisiko in der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Gesamtschäden (Schadenverteilung), falls diese lediglich durch den Zufall bei der Schadenrealisation bestimmt ist. Gemessen wird es mittels der Varianz bzw. Standardabweichung (absolut) oder mittels des Variationskoeffizienten (relativ).[9] Das Zufallsrisiko wird weiter in Kumulrisiko (zufälligerweise sind mehrere versicherungstechnische Einheiten nicht unabhängig voneinander, sodass ein Schadenereignis gleichzeitig mehrere versicherte Risiken trifft), das Ansteckungsrisiko (durch den Eintritt eines Schadenereignisses bei einem versicherten Risiko wird der Erwartungswert der Schäden weiterer versicherter Risiken erhöht) und das Großschaden- bzw. Katast-

---

6 Vgl. z. B. *Farny, D.* (2006), S. 83 sowie *Romeike, F./Müller-Reichart, M.* (2005), S. 84 f.

7 Vgl. zu dieser Erläuterung auch *Farny, D.* (2006), S. 83-93 und *Romeike, F./Müller-Reichart, M.* (2005), S. 84 f.

8 Vgl. *Nguyen, T.* (2007), S. 76.

9 Kritisiert wird jedoch, dass mit diesen Maßen nicht nur die Möglichkeit eines Überschreitens, sondern auch eines Unterschreitens der Summe aus Prämien und Sicherheitskapital durch den Gesamtschaden erfasst wird. Vgl. *Schwake, E.* (1988), S. 79.

rophenrisiko (die Größe der Schäden übersteigt eine bestimmte, jedoch willkürlich festzulegende Grenze) unterteilt.

- Irrtumsrisiko:
  Der Teil der Abweichung des kollektiven Effektivwertes der Schäden von deren kollektiven Erwartungswert, der auf einer falschen Schätzung der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gesamtschadens beruht, wird als das Irrtumsrisiko bezeichnet. Es begründet sich auf der Unvollständigkeit der Informationen des Versicherers, nicht jedoch auf Fehlern bei der Datenauswertung (z. B. Fehler in Datenverarbeitungsprogrammen).[10] Gefahren, die daraus entstehen, zählen nicht zum Irrtumsrisiko. Die Höhe des Irrtumsrisikos ist von der Qualität der statistischen Schadeninformationen abhängig und nimmt im Zeitablauf ab, da sich i. d. R. über die Zeit mehr statistische Informationen ansammeln, welche die Qualität von statistischen Schätzverfahren verbessern.

- Änderungsrisiko:
  Das Änderungsrisiko umfasst den Teil der Abweichung des kollektiven Effektivwertes der Schäden von deren kollektiven Erwartungswert, der durch die Änderung der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gesamtschadens im Zeitablauf entsteht. Bei der Kalkulation von künftigen Risiken werden Vergangenheitswerte in die Zukunft fortgeschrieben und somit die Gültigkeit der Zeitstabilitätshypothese[11] unterstellt. Wird diese Hypothese jedoch durch Strukturbrüche falsifiziert, entsteht das Änderungsrisiko. Dabei führen jedoch nur Änderungen der Schadenverteilung zur Entstehung des Änderungsrisikos, die nicht vorhersehbar sind, da vorhersehbare Änderungen bei der Prämienkalkulation berücksichtigt werden können. Die Entwicklungen, die zu einer nicht prognostizierten Änderung der Schadenverteilung führen, können aus verschiedenen Bereichen stammen. Tabelle 1 gibt hierzu einen Überblick.[12]

[10] Vgl. *Farny, D.* (2006), S. 93.
[11] Diese besagt, dass die Prämissen und das Systemverhalten in der Zukunft stabil sind. Vgl. auch *Romeike, F./Müller-Reichart, M.* (2005), S. 195-197.
[12] Vgl. zu den Entwicklungen auch *Farny, D.* (2006), S. 90 f.

Bereich der Entwicklung	Beschreibung
Natur	Veränderung von klimatischen, geologischen und ähnlichen Risikoursachen
Technik	technische Veränderungen (in Produktion, Medizin, Transport etc.)
Wirtschaft	Veränderung wirtschaftlicher Strukturen und Prozesse (z. B. Strukturverschiebungen zwischen Wirtschaftssektoren)
Gesellschaft	Veränderung gesellschaftlicher Strukturen, Verhaltensweisen und Werte (z. B. in Bezug auf Risiko, Schadenersatz, Kriminalität)
Staat	Veränderung der Gesetzgebung, Rechtssprechung und Verwaltung (z. B. im Haftpflichtrecht)
zwischenstaatliche Beziehungen	Veränderung des Verhältnisses von Staaten untereinander (z. B. mit der Folge von Kriegen)
biometrische Parameter	Veränderung der Sterblichkeit bzw. Lebenserwartung, Krankheitswahrscheinlichkeit und Pflegebedürftigkeit

Tabelle 1: Entwicklungen, die zu einem Änderungsrisiko führen

Anzumerken ist, dass in der Literatur auch noch das Markt- oder Wettbewerbsrisiko genannt wird. Dieses entsteht, wenn Versicherungsunternehmen aus wettbewerblichen Gründen eine niedrigere Prämie verlangen als unter risikotechnischen Gesichtspunkten notwendig wäre.[13] Jedoch unterliegen dem Risiko, dass angebotene Leistungen am Markt nur für einen Preis abgesetzt werden, der unterhalb der Kosten liegt, auch beliebige andere Unternehmen, sodass auch die Meinung vertreten werden kann, diese Art des Risikos sei nicht unter das versicherungstechnische Risiko zu fassen.[14] Zudem wird z. T. auch das Risiko aufgrund asymmetrischer Informationsverteilungen vom Zufalls-, Änderungs- und Irrtumsrisiko abgegrenzt.[15]

Ferner wird das versicherungstechnische Risiko auch in Diagnose- und Prognoserisiko unterteilt. Das Diagnoserisiko bezeichnet das Risiko, dass die als Hypothese angenommene Wahrscheinlichkeitsverteilung der Schäden nicht der tatsächlichen entspricht. Somit kann man es im Wesentlichen mit dem Irrtumsrisiko gleichset-

13 Vgl. *Romeike, F./Müller-Reichart, M.* (2005), S. 85.
14 Vgl. auch *Schwake, E.* (1988), S. 70 f.
15 Vgl. *Nguyen, T.* (2007), S. 75 f.

zen. Das Prognoserisiko hingegen fasst das Zufalls- und das Änderungsrisiko zusammen. Insofern fallen hierunter die Möglichkeit, dass die historische nicht mit der künftigen Schadenverteilung übereinstimmt und die Möglichkeit, dass die tatsächlichen Schäden zufälligerweise stark von ihrem Erwartungswert abweichen. Abbildung 3 zeigt die Systematisierung des versicherungstechnischen Risikos.[16]

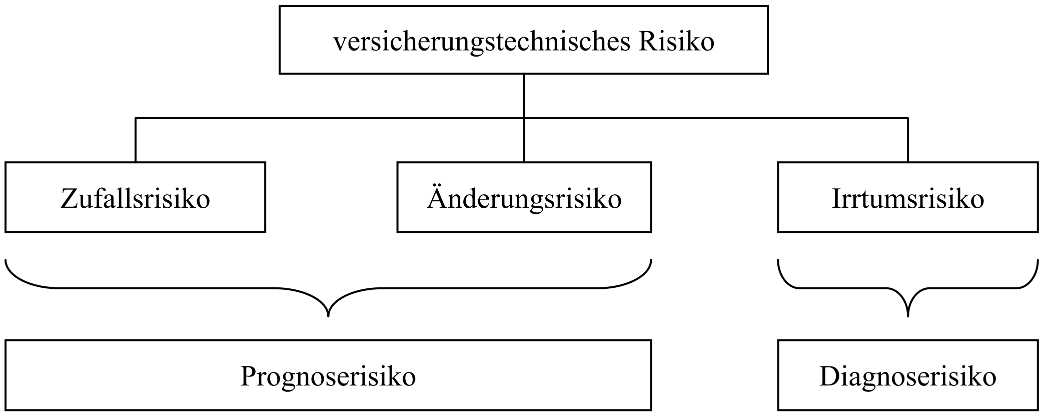

Abbildung 3: Systematisierung des versicherungstechnischen Risikos

Aus dieser Beschreibung des versicherungstechnischen Risikos konkrete, entscheidungsrelevante Überlegungen für die Versicherungspraxis anzustellen, fällt jedoch aufgrund von Problemen bei der inhaltlichen Konkretisierung der bei der Beschreibung verwendeten Begriffe und bei der Berücksichtigung realer Gegebenheiten schwer.[17] Praxisnahe Unterteilungen des versicherungstechnischen Risikos unterscheiden deshalb z. B. zwischen Underwriting Process Risk, Pricing Risk, Product Design Risk, Claims Risk, Economic Environment Risk, Net Retention Risk, Policyholder Behaviour Risk und Reserving Risk.[18] Eine solche Unterteilung entspricht zwar eher der Handhabung in der Versicherungspraxis, jedoch ist sie uneindeutig und nicht trennscharf, sodass zur Risikomodellierung auf die weiter oben beschriebenen Untergliederungen des versicherungstechnischen Risikos zurückgegriffen werden sollte.[19]

[16] Vgl. zur Überführung der Begriffe Zufalls-, Irrtums- und Änderungsrisiko in Diagnose- bzw. Prognoserisiko *Hartung, T.* (2007), S. 72. Allerdings werden die Begriffe Diagnose- und Prognoserisiko in der Literatur auch zur weiteren Unterteilung des Irrtumsrisikos verwendet. Vgl. z. B. *Nguyen, T.* (2007), S. 78 f.

[17] Vgl. *Schwake, E.* (1988), S. 75.

[18] Vgl. zur Erläuterung dieser Kategorien *International Actuarial Association (Hrsg.)* (2004), S. 29.

[19] Vgl. *Hartung, T.* (2007), S. 74.

Auch wenn die Risikokomponenten des versicherungstechnischen Risikos bezogen auf ihre Ursachen einzeln erläutert wurden, um adäquate Maßnahmen zu dessen Reduzierung treffen zu können, muss jedoch erwähnt werden, dass es in der Praxis normalerweise nicht möglich ist, das versicherungstechnische Risiko überschneidungsfrei in seine Komponenten zu zerlegen.[20] Das versicherungsspezifische Risiko kann mit Hilfe der Risikopolitik verringert, jedoch nicht vollständig eliminiert werden.[21] Somit wird immer ein Restrisiko verbleiben, dessen Tragung gerade als eine der Hauptaufgaben von Versicherungsunternehmen gesehen werden kann, für die sie auch durch die Chance auf einen entsprechenden Gewinn entlohnt werden sollen.[22]

1.2 Kreditrisiken

Ein Kreditrisiko beschreibt die Möglichkeit, dass ein Schuldner nicht in der Lage oder nicht willens ist, seine Verpflichtung gegenüber dem Gläubiger vollständig zu erfüllen.[23] Für Banken ist dies das bedeutendste Risiko. Relevant ist es jedoch auch für Versicherungsunternehmen. Obwohl auch Versicherungsnehmer als mögliche Schuldner in Betracht kommen,[24] so sind doch die Fälle, in denen die Schuldner Kreditnehmer, Wertpapieremittenten oder Rückversicherer sind, für das Kreditrisiko von Bedeutung. Gemessen werden kann das Kreditrisiko durch Kreditratings. Solche Ratings versuchen die Ausfallwahrscheinlichkeit (PD) durch Einordnung des Schuldners in eine Kategorie zu ermitteln. Außerdem sind für die Höhe des Risikos die erwartete Höhe der Forderung zum Zeitpunkt des Ausfalls (EaD) sowie die Verlustquote bei einem Ausfall (LGD) von Bedeutung. Erstellt werden können Ratings intern vom Gläubiger selbst.[25] Zudem lassen sich viele Schuldner durch externe Ratingagenturen, wie Moody's, Standard & Poor's oder Fitch, ein Kreditrating erstellen.

[20] Vgl. z. B. *Farny, D.* (2006), S. 84 sowie *Romeike, F./Müller-Reichart, M.* (2005), S. 86.
[21] Vgl. *Helten, E.* (1994), S. 7.
[22] Vgl. *Albrecht, P.* (1992), S. 13.
[23] Vgl. z. B. *International Actuarial Association (Hrsg.)* (2004), S. 145.
[24] Versicherungsnehmer als säumige Schuldner sind jedoch für die Betrachtungen im Rahmen der Beurteilung der Solvabilität von nicht allzu großer Bedeutung, denn wenn ein Versicherungsnehmer seine Prämie bzw. seinen Beitrag nicht leistet, so ist im Schadenfalle auch das Versicherungsunternehmen nicht zur Leistung verpflichtet. Vgl. §§ 37 Absatz 2, 38 Absatz 2 VVG.
[25] Vgl. auch *Henking, A./Bluhm, C./Fahrmeir, L.* (2006), S. 17.

Auch das Kreditrisiko kann hinsichtlich seiner Ursachen weiter unterteilt werden in:[26]

1. das direkte Ausfallrisiko: dieses beschreibt die Möglichkeit, dass ein Gläubiger seine Zahlung oder einen anderen Vermögenswert nicht erhält, weil der Schuldner seinen Zahlungsverpflichtungen nicht nachkommt;
2. das Herabstufungsrisiko: dieses Risiko hingegen beschreibt den Effekt, einer Wertverringerung einer Schuld durch die Erhöhung der Ausfallwahrscheinlichkeit des Schuldners und somit der Herabstufung des Ratings dieses Schuldners;
3. das indirekte Kreditrisiko: es entsteht, wenn der Markt der Auffassung ist, dass das Risiko eines Kreditnehmers, zahlungsunfähig zu werden, gestiegen ist;
4. das Abwicklungsrisiko: dieses kommt durch den zeitlichen Abstand zwischen Abrechnungs- und Fälligkeitsdatum zustande;
5. das Länderrisiko: Risiko aus der Möglichkeit der Wertänderung einer ausländischen Währung;
6. das Konzentrationsrisiko: es beschreibt die Gefahr erhöhter Verluste bei verstärkter Investition in einen bestimmten geographischen Raum oder einen Sektor der Wirtschaft;
7. das Gegenparteirisiko: hierunter wird das Risiko einer Wertänderung bei der Rückversicherung sowie bei Eventualforderungen -und schulden gefasst.

Die Risiken, die direkt auf einer möglichen Verringerung von Marktpreisen durch Veränderung der Bonität des Schuldners beruhen, können jedoch auch unter die Risiken aus der Wertänderung von Kapitalanlagen subsummiert werden.[27] Das macht deutlich, dass eine Zuordnung verschiedener Risikoaspekte in entsprechende Kategorien immer auch von einer persönlichen Sichtweise abhängig ist.

Eine besonders hohe Bedeutung für Versicherungsunternehmen hat das Risiko des Ausfalls eines Rückversicherers,[28] da die Leistungsverpflichtung an die Versiche-

[26] Vgl. *International Actuarial Association (Hrsg.)* (2004), S. 145 f.
[27] Vgl. *Hartung, T.* (2007), S. 77 f.
[28] Vgl. *KPMG (Hrsg.)* (2002), S. 20.

rungsnehmer nicht durch die Leistungsfähigkeit oder -unfähigkeit eines Rückversicherers beeinflusst wird.[29] Dabei kann unterschieden werden zwischen existierendem Rückversicherungsausfallexposure und potenziellem Rückversicherungsausfallexposure, je nachdem, ob es sich um das Risiko des Ausfalls von bereits bestehenden Zahlungsverpflichtungen eines Rückversicherers aufgrund eingetretener Schäden handelt oder ob es sich um das Risiko des Ausfalls eines Rückversicherers aufgrund in der Zukunft eintretender Schäden handelt.[30] Somit kann das existierende Rückversicherungsausfallexposure direkt aus den Daten des Rechnungswesens eines Erstversicherers und der Ausfallwahrscheinlichkeit des Rückversicherers bestimmt werden. Beim potenziellen Rückversicherungsausfallexposure ist hingegen die Wahrscheinlichkeit des Eintritts eines rückversicherten Schadens mit in die Betrachtungen einzubeziehen.[31]

Um das Kreditrisiko senken zu können, ist es wichtig, zu wissen, welche Faktoren dieses Risiko treiben. Der offensichtlichste Faktor ist die Kreditqualität. Sie bezieht sich auf die Wahrscheinlichkeit, dass der Schuldner allen vertraglichen Verpflichtungen nachkommt.[32] Aber auch Fälligkeit, Branchenkonzentration, geographische Konzentration, erwartetes Verlustausmaß bei Ausfall, Einsatz von Finanzberichterstattung und Hedging-Strategien determinieren die Höhe des Kreditrisikos.[33] Die Richtung, in die das Risiko durch diese Faktoren getrieben wird, gibt Tabelle 2 wieder.

Erhöhung/Verstärkung des Faktors	**Erhöhung (+)/Verringerung (-) des Kreditrisikos**
Kreditqualität	-
Fälligkeit	+
Branchenkonzentration	+
geographische Konzentration	+
erwartetes Verlustausmaß	+
Einsatz von Finanzberichterstattung	-
Einsatz von Hedging-Strategien	-

Tabelle 2: Richtung der Wirkung verschiedener Treiber des Kreditrisikos

29 Vgl. *Merino, S.* (2000), S. 3.
30 Vgl. *Merino, S.* (2000), S. 5 f.
31 Vgl. *Hartung, T.* (2007), S. 79.
32 Vgl. *Canadian Institute of Actuaries (Hrsg.)* (2003), S. 5.
33 Vgl. *Canadian Institute of Actuaries (Hrsg.)* (2003), S. 5-8.

Die neuen Solvabilitätsvorschriften für Versicherungsunternehmen nach Solvency II sollen sich insgesamt am Konzept der Eigenkapitalanforderungen für Banken nach Basel II orientieren. Für Banken stellt das Kreditrisiko das bedeutendste Risiko dar. Insofern liegt in der Bankenbranche bereits viel Erfahrung bzgl. des Kreditrisikos vor. Dies spricht dafür, die Steuerung des Kreditrisikos bei Versicherungsunternehmen an deren Gestaltung im Bankensektor nach Basel II anzulehnen.

1.3 Risiken aus der Wertänderung von Kapitalanlagen

Auf der Passivseite ihrer Bilanz haben Versicherungsunternehmen immense finanzielle Verpflichtungen. So betrug die Bilanzsumme des Allianzkonzerns zum Ende des Geschäftsjahres 2007 mehr als eine Billion Euro, davon waren nicht einmal 5 % Eigenkapital.[34] Diese große Kapitalmenge ist auf der Aktivseite kaum in Sachanlagen oder Vorräte investiert. Um das überlassene Kapital rentabel einzusetzen, legen Versicherungsunternehmen den größten Teil davon in Kapitalanlagen an. Da diese Kapitalanlageportfolios keineswegs ausschließlich aus sicheren Anlagen bestehen, entsteht für Versicherungsunternehmen daraus ein Risiko. Dieses wurde besonders in der Zeit nach den Terroranschlägen vom 11. September 2001 und der darauffolgenden drastischen Verschlechterung der konjunkturellen Lage deutlich. Der „Börsencrash" führte zu erheblichen Wertverlusten bei den Kapitalanlagen der Versicherungsunternehmen.[35]

Wie für das versicherungstechnische Risiko und für das Kreditrisiko sollen auch für das hier erläuterte Risiko aus der Wertänderung von Kapitalanlagen die einzelnen Risikokomponenten beschrieben werden. Diese sind das Marktrisiko, das Bonitätsrisiko und das Liquiditätsrisiko (vgl. Abbildung 4):[36]

- Marktrisiko:
  Dieses Risiko entsteht durch die Möglichkeit, das investierte Kapital bzw. einen Teil davon zu verlieren, weil die Marktpreise der Kapitalanlagen sinken. Unter das Marktrisiko werden Zinsänderungsrisiken (bedeutend insbesondere für Lebensversicherungsunternehmen) sowie Preisrisiken aus

[34] Vgl. *Allianz SE (Hrsg.)* (2008), S. 132. Dagegen hatte ein so bedeutendes Industrie- und Handelsunternehmen wie Daimler zum Ende des Geschäftsjahres 2007 „nur" eine Bilanzsumme in Höhe von 135 Milliarden Euro, davon fast 30 % Eigenkapital. Vgl. *Daimler AG (Hrsg.)* (2008), S. 137.

[35] Vgl. *Nguyen, T.* (2008), S. 258 sowie *Schradin, H. R. et al.* (2003), S. 1410.

[36] Vgl. *Romeike, F./Müller-Reichart, M.* (2005), S. 95.

Aktien und sonstigen Anteilen gefasst.[37] Teile der Literatur fassen auch noch das Währungsrisiko darunter, welches hier jedoch bereits beim Kreditrisiko erfasst wurde.

- Bonitätsrisiko:
  Das Bonitätsrisiko soll an dieser Stelle nicht das Risiko des Ausfalls eines Schuldners beschreiben, denn dieses wurde in dieser Arbeit separat unter das Kreditrisiko gefasst. Als Bonitätsrisiko ist hier das Risiko aus sinkenden Werten von Kapitalanlagen aufgrund einer Verschlechterung der finanziellen Situation des jeweiligen Schuldners gemeint. Auch dieses wurde bereits im Abschnitt 1.2 über Kreditrisiken erwähnt. Es soll in dieser Arbeit jedoch den Risiken aus der Wertänderung von Kapitalanlagen zugerechnet werden.

- Liquiditätsrisiko:
  Dieses ergibt sich aus den Verpflichtungen aus Versicherungsverträgen, die das Versicherungsunternehmen gegenüber seinen Kunden hat. Dadurch, dass Kapitalanlagen nicht immer ohne Weiteres veräußerbar sind, besteht die Möglichkeit, dass das Versicherungsunternehmen seinen Zahlungsverpflichtungen – insbesondere aus Versicherungsverträgen – zu einem bestimmten Zeitpunkt nicht mehr nachkommen kann[38] oder Kapitalanlagen zur Erfüllung von Zahlungsverpflichtungen zu sehr unvorteilhaften Preisen veräußern muss bzw. Schulden machen muss und dadurch Verluste einfährt.[39]

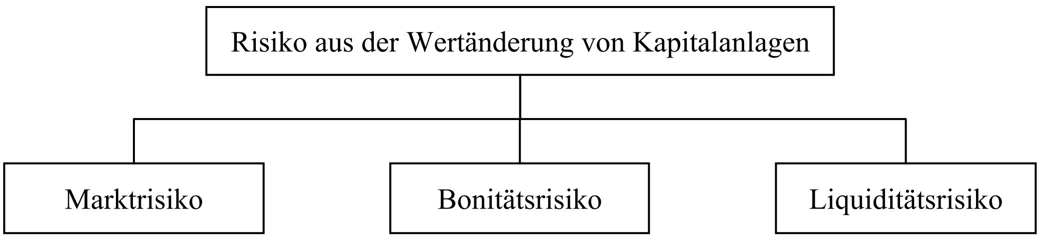

Abbildung 4: Systematisierung des Risikos aus der Wertänderung von Kapitalanlagen

Von Bedeutung ist auch der Wechsel der deutschen Versicherer von einer HGB-Bilanzierung zu einer IFRS-Bilanzierung. Nach der sog. „IAS-Verordnung“ sind

37 Vgl. *Romeike, F./Müller-Reichart, M.* (2005), S. 95.
38 Vgl. *Surrey, I.* (2006), S. 50 sowie *Romeike, F./Müller-Reichart, M.* (2005), S. 96.
39 Vgl. *International Actuarial Association (Hrsg.)* (2004), S. 32.

kapitalmarktorientierte Mutterunternehmen[40] dazu verpflichtet, für Geschäftsjahre, die am oder nach dem 1. Januar 2005 begonnen haben, einen Konzernabschluss nach den internationalen Rechnungslegungsstandards (IAS/IFRS) zu erstellen.[41] Nach § 341i Absatz 1 HGB sind außerdem grundsätzlich alle Versicherungsunternehmen konzernrechnungslegungspflichtig. Somit besteht für alle kapitalmarktorientierten Versicherungsunternehmen die Pflicht zur Anwendung der IAS/IFRS.

Dadurch kann es bei Marktpreisverlusten nicht nur zu Risiken durch einen geringeren erzielbaren Veräußerungspreis kommen. Nach dem Übergang von einer Bilanzierung nach HGB zu einer Bilanzierung nach den IAS/IFRS wird es aufgrund der nach den internationalen Rechnungslegungsnormen weitgehenden Bilanzierung von Kapitalanlagen zum Fair Value (beizulegender Zeitwert) zu stärkeren Ergebnisschwankungen – bzw. Eigenkapitalschwankungen, falls die Zeitwertänderungen direkt im Eigenkapital erfasst werden, ohne die GuV zu berühren – bei Versicherungsunternehmen kommen.[42]

1.4 Asset-Liability-Mismatch Risiko

Allgemein beschreibt der Begriff des Asset-Liability-Mismatching die Diskrepanz zwischen Passivposten und Aktivposten hinsichtlich deren Betrag oder Fälligkeit.[43] Beispielsweise entsteht ein Asset-Liability-Mismatching zur Zeit bei Versicherern, die nach IAS/IFRS bilanzieren. Diese bewerten nämlich ihre Kapitalanlagen nach dem dafür vorgesehenen Standard IAS 39 zu Zeitwerten. Dagegen werden die Verbindlichkeiten auf der Passivseite im Moment noch zu fortgeführten Anschaffungskosten und damit nicht zum Zeitwert bewertet.[44] Ein Risiko

[40] Ein Mutterunternehmen ist im Sinne der „IAS-Verordnung“ kapitalmarktorientiert, wenn es Wertpapiere ausgegeben hat, die am Abschlussstichtag zum Handel an einem geregelten Markt in einem Mitgliedsstaat zugelassen sind. Vgl. Artikel 4 der Verordnung (EG) Nr. 1606/2002 des Europäischen Parlaments und des Rates vom 19. Juli 2002 betreffend die Anwendung internationaler Rechnungslegungsstandards.

[41] Vgl. Artikel 4 der Verordnung (EG) Nr. 1606/2002 des Europäischen Parlaments und des Rates vom 19. Juli 2002 betreffend die Anwendung internationaler Rechnungslegungsstandards. Eine Übergangsfrist von zwei Jahren bekamen solche Unternehmen zugesprochen, die lediglich Schuldtitel in einem geregelten Markt in der EU emittiert hatten oder deren Wertpapiere zum öffentlichen Handel außerhalb der EU zugelassen waren und die deshalb seit einem Geschäftsjahr, das vor dem 11.9.2002 begann, bereits nach international anerkannten Rechnungslegungsnormen bilanzierten. Vgl. Artikel 9 der Verordnung (EG) Nr. 1606/2002 des Europäischen Parlaments und des Rates vom 19. Juli 2002 betreffend die Anwendung internationaler Rechnungslegungsstandards.

[42] Vgl. *Kölschbach, J.* (2004), S. 680 und *KPMG (Hrsg.)* (2002), S. 176.

[43] Vgl. auch *Nguyen, T.* (2008), S. 441.

[44] Vgl. *Kottke, T.* (2006), S. 114 f. und S. 239.

kann daraus entstehen, wenn Zahlungsverpflichtungen nicht eingehalten werden können, weil die Cash Flows aus den Vermögenswerten nicht ausreichen oder zu spät stattfinden, um die fälligen Schulden der Passivseite zu begleichen. Zudem besteht die Gefahr, dass beispielsweise Vermögenswerte der Aktivseite an Wert verlieren, während der Wert der Schulden stabil bleibt oder sich sogar erhöht.

Ein bedeutendes Risiko entsteht v. a. bei langfristigen Verpflichtungen, also beispielsweise bei langfristigen Vertragslaufzeiten, bei mehrperiodig wiederkehrenden Auszahlungen nach Vertragsfälligkeit – wie z. B. Rentenzahlungen – oder bei langer Schadenabwicklung.[45] Da ein Trend zu höherer Volatilität auf den Kapitalmärkten zu beobachten ist[46] – und eine solche wird bei der Zeitwertbilanzierung von Kapitalanlagen besonders deutlich in der Bilanz abgebildet –, nimmt auch die Bedeutung dieser Risikokategorie zu. Dies wird auch durch die Tatsache deutlich gemacht, dass für Versicherer die Einrichtung eines Asset-Liability-Management Systems gefordert wird.[47] Außerdem erhöht sich dieses Risiko mit der Höhe der Bilanzsumme.

Je nach betriebener Versicherungssparte tritt das Asset-Liability-Mismatch Risiko in unterschiedlichen Formen auf. Risikolebensversicherer müssen ihre Leistung nur bei Eintritt des Todes des Versicherten erbringen. Somit steht eine Verpflichtung zur Zahlung nicht von Vornherein fest. Allerdings ändert sich die Risikolage mit dem Alter der versicherten Person. Bleibt die Versicherungsprämie während der gesamten Vertragslaufzeit aber konstant, so nimmt das Versicherungsunternehmen im Verhältnis zu seinen Verpflichtungen aus dem Versicherungsvertrag zunächst zu viel ein. Gleiches gilt für Krankenversicherer, die zunächst – also wenn der Versicherungsnehmer noch jung ist – eine höhere als die Bedarfsprämie verlangen. Um diesen Sachverhalt angemessen zu berücksichtigen, müssen Rückstellungen auf der Passivseite der Bilanz gebildet werden. Kapitallebensversicherer hingegen müssen auf jeden Fall eine bestimmte Zahlung spätestens zum im Vertrag festgesetzten Termin leisten. Durch die in den Prämien enthaltenen Sparanteile wächst die Verpflichtung über die gesamte Vertragslaufzeit an. Somit müssen auch die Anlagen zur Deckung dieser Verpflichtungen kontinuierlich entsprechend anwachsen. Selbiges gilt für private Rentenversicherungen, wobei hier

[45] Vgl. *Hartung, T.* (2007), S. 84 f.
[46] Vgl. *Hartung, T.* (2007), S. 85.
[47] Vgl. *Europäische Kommission (Hrsg.)* (2004), Tz. 3.1.

nicht die gesamte Versicherungssumme in einer Einmalzahlung ausbezahlt wird, sondern über einen gewissen Zeitraum. In der Schadenversicherung bildet sich ein Asset-Liability-Mismatch Risiko v. a. dann, wenn lange Schadenabwicklungsdauern vorliegen, d. h. insbesondere in der Haftpflichtversicherung.

Die Einschätzung des Asset-Liability-Mismatch Risikos ist jedoch sehr schwierig, da es aus dem Zielkonflikt von langer Anlage der Mittel, mit diesen Mitteln hoher zu erzielender Renditen und der ständigen Verfügbarkeit von Liquidität entsteht. Um die Fähigkeit zu dessen Einschätzung zu verbessern, sollten deshalb keine deterministischen Verfahren sondern stochastische Ansätze angewendet werden.[48]

1.5 Operationale Risiken

Im Folgenden soll das bewusst an letzter Stelle der fünf Risikokategorien gesetzte operationale Risiko beschrieben werden. Dieses kann nämlich als Residualkategorie für die übrigen Risiken gesehen werden.[49] Von seiner Bedeutung her ist das operationale Risiko aber sicherlich nicht an letzter Stelle anzuführen. So wurde gezeigt, dass Versicherungsinsolvenzen in vielen Fällen auf Fehler des Managements zurückzuführen sind – einem Bestandteil des operationalen Risikos.[50]

Bis vor Kurzem noch wurde das operationale Risiko nicht explizit von den Aufsichtsbehörden berücksichtigt. Auch Banken, die inzwischen nach ihrer neuen Eigenkapitalverordnung Basel II dazu verpflichtet sind, das operationale Risiko bei der Eigenkapitalhinterlegung zu berücksichtigen, hatten Schwierigkeiten diese Risikoart zu managen.[51] In der Diskussion um die neue Ausgestaltung der Eigenkapitalvorschriften für Banken kam es dann erstmals zu einer intensiven Auseinandersetzung mit dem operationalen Risiko. Zunächst wurde es als Sammelbegriff für alle Risiken, die keiner der anderen Kategorien zuzuordnen sind, definiert. Der Vorteil einer solchen negativen Abgrenzung besteht darin, dass damit alle denkbaren Risiken erfasst sind. Probleme ergeben sich allerdings, wenn diese Risikoart gemessen und bewertet werden soll sowie bei dem Versuch, das Risiko

48 Vgl. zu diesem Absatz *Nguyen, T.* (2008), S. 441.
49 Vgl. *Hartung, T.* (2007), S. 80.
50 Vgl. *Conference of the Insurance Supervisory Services of the Member States of the European Union (Hrsg.)* (2002), S. 9.
51 Vgl. *McDonnell, C.* (2008), S. 49.

zu reduzieren.[52] So wurde in der Folge das operationale Risiko vom *Basler Ausschuss für Bankenaufsicht* als

> „Gefahr von unmittelbaren oder mittelbaren Verlusten, die infolge der Unangemessenheit oder des Versagens von internen Verfahren, Menschen und Systemen oder von externen Ereignissen eintreten“[53]

definiert. Diese positive Definition schließt zwar Rechtsrisiken ein, jedoch nicht strategische Risiken oder Reputationsrisiken. Da sie sehr weit gefasst ist, hat sie – wie die oben erwähnte negative Abgrenzung – auch den Vorteil quasi alle verbleibenden Risiken zu erfassen.

Als ganz konkrete Beispiele für die Entstehung von operationalen Risiken können Serverausfall, Überschwemmungsschäden, Diebstahl durch Mitarbeiter, Schäden durch Computerhacker, Mängel im Prozessmanagement und viele weitere genannt werden.[54] Es wird schnell deutlich, dass diese Risiken z. T. gerade solche sind, die Versicherungsunternehmen von ihren Kunden gegen eine Prämie übernehmen. Alle Unternehmen – aber gerade auch Versicherer – sollten also in der Lage sein, diese Risiken in ihrem Risikomanagement angemessen zu berücksichtigen.

Die Eigenkapitalregelungen nach Basel II sehen eine Untergliederung des operationalen Risikos in Risiken aus

1. internen betrügerischen Handlungen,
2. externen betrügerischen Handlungen,
3. Einstellungspraktiken und Sicherheit am Arbeitsplatz,
4. Kunden, Produkten und Geschäftspraxis,
5. Schäden am Sachvermögen,
6. Geschäftsunterbrechungen und Systemausfällen sowie
7. Ausführung, Lieferung und Prozessmanagement

vor.[55] Diese Kategorisierung kann auch als geeignet für die Unterteilung des operationalen Risikos bei Versicherungen angesehen werden. Wichtig ist, wie bei jeder Unterteilung von Risiken, die einzelnen Kategorien so zu definieren, dass

---

52 Vgl. *Romeike, F./Müller-Reichart, M.* (2005), S. 103.
53 *Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (Hrsg.)* (2003), Tz. 4.
54 Vgl. *Romeike, F./Müller-Reichart, M.* (2005), S. 103 sowie *Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (Hrsg.)* (2003), Tz. 5.
55 Vgl. *Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (Hrsg.)* (2003), Tz. 5.

diese möglichst überschneidungsfrei sind. Dazu ist eine Klassifizierung anhand der Verursacher der Risiken (z. B. Personen, Prozesse, externe Faktoren) – wie sie bereits in der oben zitierten Definition des Basler Ausschusses für Bankenaufsicht deutlich wird – zielführend.[56] Somit ist der Ausschluss des Reputationsrisikos kritisch zu beurteilen, da dieses nicht als eine Kategorie hinsichtlich Verursacher angesehen werden kann. Vielmehr kann ein Reputationsverlust verschiedenste Ursachen haben. Weiter kann argumentiert werden, dass das Inkludieren von Rechtsrisiken große Schwierigkeiten bei der Quantifizierung des operationalen Risikos verursachen wird. Dies liegt an der schwierigen Prognostizierbarkeit von finanziellen Ansprüchen aus den sehr weit reichenden rechtlichen Risiken.[57]

Aber nicht nur für Rechtsrisiken, sondern für alle den operationalen Risiken zuordenbaren Gefahren wird eine Quantifizierung des Risikos und eine darauf aufbauende Deckung mit Eigenkapital schwierig sein. Ein Grund hierfür ist, dass es immer wieder zu Überschneidungen mit den vier zuvor behandelten Risikoarten kommt. Beispielsweise würde die Gefahr des Ausfalls eines Schuldners offensichtlich dem Kreditrisiko zugerechnet werden. Wenn allerdings bereits bei der Genehmigung einer entsprechenden Verbindlichkeit Fehler des zuständigen Bearbeiters dazu geführt haben, dass die Verbindlichkeit ausgezahlt wurde, obwohl dies aufgrund der schlechten Bonität des Schuldners gar nicht hätte geschehen dürfen, dann ist der Grund für den Forderungsausfall eigentlich dem operationalen Risiko zuzuordnen.

Zusätzlich fällt es sehr schwer, das operationale Risiko zu messen, weil die dafür benötigten Verlustdaten nicht in ausreichender Menge und Qualität vorhanden sind.[58] Unter den Eigenkapitalregulierungsvorschriften nach Solvency I war nämlich eine Berücksichtigung des operationalen Risikos nicht vorgesehen. Da allerdings im Rahmen der Solvency II-Regelungen das operationale Risiko mit einbezogen werden soll, werden bereits jetzt Anstrengungen unternommen, um eine adäquate Datenbasis zu schaffen.[59] Hilfreich könnten bei der Modellierung des operationalen Risikos außerdem die Erkenntnisse aus dem Bankensektor sein, da Banken, wie bereits erwähnt, schon seit Anfang 2007 nach Basel II dazu verpflichtet sind, das operationale Risiko angemessen zu unterlegen.

56 Vgl. *Tripp, M. H. et al.* (2004), S. 939.
57 Vgl. *Bunge, A.* (2002), S. 5.
58 Vgl. *Nguyen, T.* (2008), S. 442 f.
59 Vgl. z. B. *Operational Risk Insurance Consortium (Hrsg.)* (o. J.), S. 2-4.

1.6 Beurteilung der Zweckmäßigkeit einer Untergliederung

In den vorigen Anschnitten wurde das Gesamtrisiko von Versicherungsunternehmen in verschiedene Kategorien gegliedert. Nun stellt sich die Frage nach dem Sinn und Zweck einer solchen Kategorisierung. Ihr kommt große Bedeutung zu, wenn die Risiken später quantifiziert werden sollen. Zum einen kann eine Quantifizierung besser erfolgen, wenn die dabei verwendeten Methoden an die Spezifika der Risikoart angepasst werden. Zum anderen muss auch verhindert werden, dass Risiken unbewusst doppelt erfasst oder gar nicht erfasst werden. Denn bei Nichterfassung einer Risikoart würde letztlich zu wenig Eigenkapital hinterlegt werden und das erwünschte Sicherheitsniveau könnte somit nicht erreicht werden. Daneben könnten Versicherer Anreize erhalten, die nicht im Solvabilitätssystem erfassten Risiken auszudehnen, um sich Wettbewerbsvorteile zu verschaffen. Auf den ersten Blick scheint die Doppelerfassung eines Risikos dagegen unproblematisch. Doch bei der Möglichkeit, ein Risiko zweierlei oder mehr Kategorien zuzuordnen, besteht die Gefahr, dass immer die Kategorie gewählt wird, die zu geringeren Eigenkapitalhinterlegungspflichten führt.

Damit wird auch klar, welchen Anforderungen eine Untergliederung des Gesamtrisikos gerecht werden sollte: die Kriterien Vollständigkeit und Trennschärfe sind von besonderer Bedeutung. Als weiteres Kriterium kann das der Relevanz herangezogen werden.[60] Denn wenn eine Risikoart nicht relevant ist in dem Sinne, dass das Risiko die Insolvenzwahrscheinlichkeit des Versicherers nicht signifikant erhöht, kann auf eine Berücksichtigung dieses Risikos verzichtet werden. Jedoch birgt ein solcher Verzicht auch die Gefahr in sich, dass unbedeutende Risiken im Zeitablauf an Bedeutung gewinnen und ab einem bestimmten Zeitpunkt doch berücksichtigt werden müssten. Außerdem wäre es denkbar, dass es vereinzelte Unternehmen gibt, bei denen ein allgemein als irrelevant angesehenes Risiko eine signifikante Bedeutung hat.

Die Vorgabe einer solchen Kategorisierung ist v. a. dann notwendig, wenn die Solvabilitätsanforderungen regelbasiert sind. Aufgrund der in diesem Fall verwendeten Berechnungsschemata ist es bereits ein technisches Erfordernis, das gesamte Risiko in genau definierte Kategorien zu unterteilen. Werden jedoch prinzipienbasierte Ansätze verwendet, die lediglich darauf abzielen, ein bestimm-

[60] Vgl. *Hartung, T.* (2007), S. 87.

tes Sicherheitsniveau, wie beispielsweise eine maximal zulässige Ruinwahrscheinlichkeit, zu erreichen, könnte auf eine Vorgabe der Risikokategorisierung auch verzichtet und eine solche Einteilung den Versicherungsunternehmen selbst überlassen werden. Jedoch müsste auch dann sichergestellt werden, dass die von den Unternehmen selbst gewählte Kategorisierung den oben genannten Anforderungen gerecht wird.

2 Risikomessung im Versicherungsunternehmen

Im vorigen Abschnitt wurden die Risiken, die in einem Unternehmen und insbesondere in einem Versicherungsunternehmen auftreten, genannt und erläutert. Für die Ermittlung einer angemessenen Eigenkapitalausstattung müssen sie aber auch quantifiziert werden. Hierzu stehen verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung. Im Folgenden sollen diese zunächst vorgestellt werden. Dazu werden zunächst generelle Aspekte der Risikomodellierung und dann Risikomaße dargestellt. Im Anschluss daran sollen die vorgestellten Risikomaße, aber auch die Risikomodellierung insgesamt, gewürdigt werden.

2.1 Risikomodelle

Die Messung des Risikos erfolgt mit Hilfe von Risikomodellen. Allgemein sollen Modelle Sachverhalte unter Vereinfachung der Realität abbilden. Die Vereinfachung besteht aus dem Weglassen zahlreicher Details, die für die Untersuchung einer Frage irrelevant sind, und dient dazu, das Verständnis für den tatsächlich interessierenden Sachverhalt zu verbessern. Damit sollen Probleme aus der Realität im Modell gelöst werden. Anschließend muss die im Modell gefundene Lösung wieder zurück in die reale Welt übertragen und auch noch empirisch überprüft werden, da die Lösung zunächst nur in dem verwendeten Modell Gültigkeit besitzt.

So ist es der Zweck von Risikomodellen, das real existierende Risiko in einem Unternehmen abzubilden. Deshalb sind diese Modelle auch mathematische Modelle, die insbesondere viele Elemente der Statistik beinhalten. Wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, kann das gesamte Risiko in verschiedene Teilrisiken, deren Spezifika eine Anpassung der angewendeten Messmethoden erfordert, zerlegt werden. Die Messung dieser Teilrisiken erfordert daher Teilmodelle, die schließlich zu einem Gesamtmodell zusammengeführt werden.

Im Folgenden wird zunächst ein Überblick über Risikomodelle und Risikomaße allgemein gegeben. Anschließend erfolgt die Darstellung von konkreten Risikomaßen. Dabei wird zwischen Risikomaßen Typus I (Risiko wird als Abweichung von einem Zielwert dargestellt) und Risikomaßen Typus II (Risiko wird direkt als zu unterlegende Kapitalmenge angegeben) differenziert.

2.1.1 Allgemeines zu Risikomodellen

Werden Risikomodelle entwickelt, so gibt es einen Zielkonflikt zwischen Passgenauigkeit des Modells im Hinblick auf beobachtete Daten und der Einfachheit des Modells. Umso passgenauer das Modell werden soll, d. h. umso weniger Abweichung von den Daten, desto mehr Parameter sind notwendig, desto komplexer wird daher aber auch das Modell. Deshalb muss vor der Entwicklung eines Risikomodells zwischen Passgenauigkeit und Einfachheit abgewogen werden.[61]

Anschließend muss ermittelt werden, welche Wahrscheinlichkeitsverteilungen den einzelnen Risikoarten zugrunde liegen. Dazu werden realisierte Daten ermittelt und ausgewertet, sodass daraus hypothetische Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit Hilfe der Statistik abgeleitet werden können (Diagnose). Hier kommen die Momentenmethode[62], die Maximum-Likelihood-Methode[63] oder die Bayes-Methode[64] zur Schätzung der unbekannten Parameter der Verteilungen zum Einsatz. Dabei tritt allerdings das Diagnoserisiko auf. Es kann vermindert werden, indem ein ausreichend großer Umfang an Daten bei der Auswertung verwendet wird. Sind Daten jedoch nicht in ausreichendem Maße unternehmensintern vorhanden, können sie auch unternehmensextern besorgt werden, z. B. von Branchenverbänden. Diese müssen dann allerdings an den Merkmalen des eigenen Unternehmens ausgerichtet werden.[65] Wie gut die hypothetische Wahrscheinlichkeitsverteilung mit den empirischen Daten übereinstimmt, kann mit einem Anpassungstest (z. B. χ^2-Anpassungstest, Kolmogorow-Smirnow-Test oder Anderson-Darling-Test) festgestellt werden. Gegebenenfalls müssen auf Basis der erhaltenen Resultate dann noch weitere Anpassungen vorgenommen werden.

61 Vgl. auch *Brohm, A.* (2002), S. 18 sowie *Klugman, S. A./Panjer, H. H./Willmot, G. E.* (2004), S. 3.

62 Die Momentenmethode weist nur eine geringe Güte auf. Dafür muss bei ihr der Typ der zugrunde liegenden Verteilung nicht bekannt sein. Ihre Anwendung ist dadurch gekennzeichnet, dass die Momente, die sich aus den Daten der Stichprobe ergeben, mit den Momenten der angenommenen Verteilung im Modell gleichgesetzt werden. Vgl. *Mack, T.* (2002), S. 100-103.

63 Die Maximum-Likelihood-Methode weist eine höhere Güte auf. Bei ihrer Anwendung muss allerdings der Typ der Verteilungsfunktion bekannt sein bzw. es muss eine Annahme über den Typ der Verteilungsfunktion getroffen werden. Sie geht von konstanten Parametern der Gesamtschadenverteilung aus. Vgl. *Hartung, T.* (2007), S. 94 sowie *Mack, T.* (2002), S. 103-105.

64 Auch die Bayes-Methode weist eine höhere Güte auf als die Momentenmethode. Allerdings ist auch ihre Anwendung an die Kenntnis der Verteilung oder eine Vermutung über den Typ der Verteilung gebunden. Hier werden die Parameter jedoch nicht als konstant angenommen, sondern vielmehr dass sie zufällig verteilt sind. Vgl. *Hartung, T.* (2007), S. 94 f. sowie *Cramer, E./Kamps, U.* (2008), S. 308 und *Czado, C.* (2004), S. 331 f.

65 Vgl. *Hartung, T.* (2007), S. 94 sowie auch *Brohm, A./König, A.* (2004), S. 11.

Damit erhält man aber noch keine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die unmittelbar zur Abschätzung des künftigen Risikos dienen kann. Die hypothetische Wahrscheinlichkeitsverteilung muss nämlich noch in die Zukunft prognostiziert werden (Prognose), wobei das Prognoserisiko auftritt. Im Anschluss daran kann aus den ermittelten Verteilungen das Risiko anhand von Risikomaßen in einer einzelnen Zahl dargestellt werden. Dabei wird Risikomaß als Abbildung definiert, die einer Zufallsvariablen bzw. einem Zufallsvektor[66] eine reelle Zahl zuordnet:

$$R: X \rightarrow \mathbb{R},$$
wobei R das Risikomaß und
$$X = (X_1, \dots, X_n)^T \text{ ein Zufallsvektor ist.}$$

Formel 1: Definition eines Risikomaßes

An eine solche Abbildung werden verschiedene Anforderungen gestellt, damit sie als Risikomaß gelten kann. Zunächst müssen sich Zufallsvariablen mit ihr hinsichtlich ihres Risikogehalts ordnen lassen, d. h. für zwei Zufallsvektoren X und Y muss gelten:

$$X \gtrsim_R Y \text{ (d. h. } Y \text{ ist maximal so riskant wie } X\text{)}$$
$$\Leftrightarrow R(X) \geq R(Y)$$

Formel 2: Ordnung von Zufallsvariablen

Außerdem sollten sie eine Reihe von Axiomen erfüllen. *Artzner, P./Delbaen, F./Eber, J.-M./Heath, D.* fassen vier Axiome in einem Axiomensystem zusammen.[67] Diesen Axiomen muss ein Risikomaß gerecht werden, um als kohärentes Risikomaß zu gelten.[68] Kohärente Risikomaße stehen im Vordergrund, wenn es um die Solvabilitätsvorschriften von Banken und Versicherungen geht. Im Folgenden sollen diese vier Axiome deshalb genannt und jeweils kurz erläutert werden:

[66] Dabei bezeichnen die Zufallsvariablen in diesem Abschnitt jeweils mit Unsicherheit behaftete *Gewinn*größen. Würden *Verlust*größen verwendet, müssten einige der noch folgenden Formeln modifiziert werden.

[67] Vgl. zu den Axiomen *Artzner, P. et al.* (1999), S. 209 f.

[68] Vgl. *Koryciorz, S.* (2004), S. 41.

1. Translationsinvarianz:

$$R(X+a) = R(X) - a,$$
wobei a ein determinierter Wert aus $\mathbb{R}$ ist.

Formel 3: Translationsinvarianz

Damit besagt die Translationsinvarianz, dass die Addition eines determinierten Wertes zu einer mit Unsicherheit behafteten Variablen das gemessene Risiko gerade um diesen Wert vermindert. Das Risiko wird somit Null, wenn der Wert $a = R(X)$ addiert wird. Bezogen auf die Solvabilitätsbetrachtungen heißt dies, dass die komplette Unterlegung einer risikobehafteten Position mit Eigenkapital das Risiko vollständig eliminiert. Das Axiom ist nur sinnvoll für Risikomaße, die den Sicherheitskapitalbedarf beschreiben (d. h. die hier unter den Typus II gefassten Risikomaße).[69]

2. Subadditivität:

$$R(X+Y) \leq R(X) + R(Y)$$

Formel 4: Subadditivität

Wird das Axiom der Subadditivität erfüllt, so kann das Risikomaß bei Zusammenführung zweier Risikopositionen nicht zunehmen. Es bleibt gleich oder verringert sich sogar. Diese Bedingung zielt v. a. auf die Abbildung der risikomindernden Effekte durch den Ausgleich im Kollektiv. Allerdings wird das Axiom der Subadditivität für Risikomaße auch in Frage gestellt, da es die Realität nicht immer – beispielsweise bei Katastrophenereignissen – widerspiegele.[70]

3. Positive Homogenität:[71]

$$R(\lambda X) = \lambda R(X),$$
für alle $\lambda \geq 0$.

Formel 5: Positive Homogenität

[69] Vgl. *Nguyen, T.* (2008), S. 129.
[70] Vgl. *Nguyen, T.* (2008), S. 131 f. sowie *Rootzén, H./Klüppelberg, C.* (1999), S. 9-11.
[71] Allerdings wird das Axiom der positiven Homogenität in der Literatur ebenfalls kritisiert. Vgl. *Nguyen, T.* (2008), S. 129 f.

Es handelt sich hierbei um lineare Homogenität. Dieses Axiom fordert, dass eine Vergrößerung des Umfangs der Risikoposition das Risikomaß proportional dazu erhöht. Dabei muss allerdings beachtet werden, dass diese Proportionalität zwischen Höhe des Risikomaßes und Umfang der Risikoposition nur gilt, wenn sich bei der Erhöhung der Risikoposition deren Struktur nicht ändert, sondern jeder Teil um denselben Faktor erhöht wird.[72] Ist das Axiom erfüllt, werden Skaleneffekte (i. S. v. Verminderung des Risikos alleine durch Vergrößerung des Umfangs der Risikoposition) ausgeschlossen.[73]

4. Monotonie:

$$X \leq Y \qquad (1)$$
$$\Rightarrow R(X) \geq R(Y) \quad (2)$$

Formel 6: Monotonie

Liegt Monotonie vor, dann ist das Risikomaß einer ersten Zufallsvariable X immer größer als das einer zweiten Zufallsvariable Y (2), wenn die erste Zufallsvariable X in jedem Zustand kleiner ist als die zweite Zufallsvariable Y (1).

An dieser Stelle sollte erwähnt werden, dass durchaus einige gebräuchliche Risikomaße nicht alle vier Axiome erfüllen und somit nicht zur Klasse der kohärenten Risikomaße gezählt werden können. Hierzu zählt z. B. der Value at Risk (VaR).[74] Andererseits sind nicht alle kohärenten Risikomaße auch als sinnvoll anzusehen. Um ökonomisch sinnvoll zu sein, sollten sie auch anderen Anforderungen genügen.

Im Folgenden werden die Risikomaße in zwei Typen aufgeteilt, welche separat erläutert werden. Dabei besteht der erste Typus (Typus I) aus Risikomaßen, die das Risiko als Ausmaß der Abweichung von einer Zielgröße abbilden. Sie sind somit lageunabhängig. Der zweite Typus von Risikomaßen (Typus II) bildet das Risiko dagegen als notwendiges Kapital bzw. notwendige Prämie ab. Dabei können Risikomaße des Typus II in die des Typus I überführt werden, indem sie auf $X - E(X)$ anstatt unmittelbar auf X angewendet werden und umgekehrt.[75]

[72] Vgl. *Koryciorz, S.* (2004), S. 42.
[73] Vgl. *Hartung, T.* (2007), S. 100 f.
[74] Vgl. *Rootzén, H./Klüppelberg, C.* (1999), S. 10.
[75] Vgl. *Albrecht, P.* (2003), S. 8.

2.1.2 Risikomaße Typus I

Bei Risikomaßen des Typus I kann wiederum unterschieden werden in Risikomaße, die sowohl positive als auch negative Abweichungen vom Zielwert (welcher nicht unbedingt der Erwartungswert sein muss) erfassen, und Risikomaße, die als Risiko nur einseitige Abweichungen vom Zielwert erfassen. Zu den ersteren gehören beispielsweise Varianz und Standardabweichung. Zur letzteren Kategorie gehören z. B. die Lower Partial Moments (LPM).

Die Varianz wird aus der Summe der quadrierten Abweichungen vom Erwartungswert gebildet, die Standardabweichung ist die Quadratwurzel aus der Varianz. Ein Vorteil dieser Risikomaße ist ihre Bestimmbarkeit bei Portfoliobildung risikobehafteter Positionen aus den Varianzen der einzelnen Portfoliobestandteile und den Kovarianzen zwischen diesen. Weitere Vorteile sind ihre gute Handhabung bei der Lösung von Optimierungsproblemen und ihre gute Schätzbarkeit aus historischen Daten. Auch aus theoretischer Sicht bietet die Varianz eine Reihe von Vorteilen, weshalb sie heute eine dominante Stellung hinsichtlich Risikomessung in der Finanz- und Versicherungswirtschaft einnimmt.[76]

Allerdings wird ihre Eigenschaft als zweiseitiges Risikomaß kritisiert. Wie oben beschrieben wurde, erfasst sie positive und negative Abweichungen vom Erwartungswert. Allerdings verbindet man Risiko bei Gewinngrößen eigentlich nur mit negativen Abweichungen. Dies wird zum Problem, wenn keine symmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen vorliegt, wie es im Versicherungsbereich regelmäßig der Fall ist. Um positive und negative Abweichungen vom Erwartungswert unterschiedlich stark gewichten zu können, kann das Konzept der Varianz deshalb wie folgt variiert werden:

[76] Vgl. *Albrecht, P.* (2003), S. 19 f.

herkömmliche Varianz: $R(X) = E[(X - E[X])^2]$

Modifikation der Varianz: $R(X) = E[\theta(X - E[X])^l]^{1/l}$,

$$\text{mit } \theta(v) = a * max\{0, v\} + b * max\{0, -v\} = \begin{cases} a * v, & \text{wenn } v > 0 \\ 0, & \text{wenn } v = 0 \\ b * |v| & \text{wenn } v < 0 \end{cases},$$

wobei $a, b \geq 0$ und nicht $a = b = 0$ sowie $l \geq 1$.

Formel 7: Varianz und Modifikation zur unterschiedlichen Gewichtung positiver und negativer Abweichungen[77]

Wird diese Variation der herkömmlichen Varianz angewendet, dann werden die Abweichungen aus den Realisierungen von X, die geringer sind als der Erwartungswert, mit dem Faktor b gewichtet, die Abweichungen, die sich aus Realisierungen von X ergeben, die höher sind als der Erwartungswert, dagegen mit a.

Dagegen werden bei den sog. Shortfallrisikomaßen nur einseitige Abweichungen vom Erwartungswert bzw. einer allgemeinen Zielgröße erfasst (Shortfallrisiko bzw. Downsiderisiko). Wie oben erwähnt, gehören die Lower Partial Moments zu dieser Klasse von Risikomaßen. Sie sind wie folgt definiert:

$$LPM_k(z; X) \coloneqq E[max(z - X, 0)^k] = \int_{-\infty}^{z} (z - x)^k f(x)\, dx,$$

wobei $k \geq 0$ der Grad des Risikomaßes ist, z der Zielwert,

x eine Realisation der Zufallsvariable X und $f(x)$ die Dichte von X.

Formel 8: Lower Partial Moment

Damit gibt das $LPM_k(z; X)$ den Erwartungswert der mit k potenzierten unteren Abweichung der Realisation x der Zufallsvariable X vom Zielwert z wieder, wobei als untere Abweichungen die Abweichungen vom Zielwert gelten, bei denen die Realisation der Zufallsvariable geringer ist als der Zielwert (Shortfall). Im Gegensatz dazu wird das Überschreiten des Zielwertes durch die Realisation der Zufallsvariable als Excess bezeichnet (vgl. Abbildung 5).

[77] Diese Modifikation kann noch weiter verallgemeinert werden, um auch positive und negative Abweichungen von einem *allgemeinen Zielwert* unterschiedlich stark zu gewichten. Vgl. dazu *Hartung, T.* (2007), S. 104.

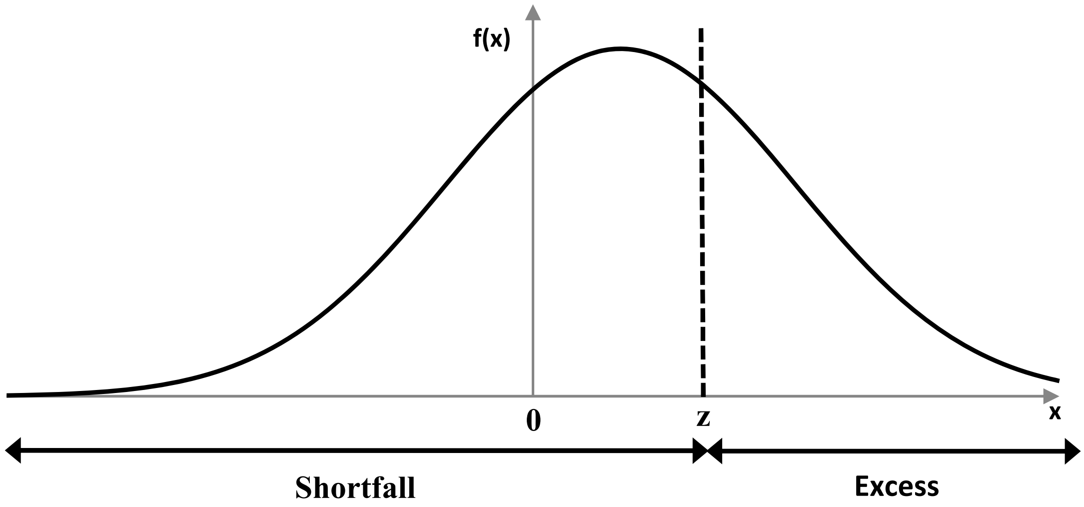

Abbildung 5: Shortfall- und Excessbereich bezüglich des Zielwerts z

Die Anwendung der LPM ermöglicht es somit, das Risiko mehrerer Alternativen in Bezug auf einen beliebigen Zielwert zu vergleichen. Der Zielwert kann abhängig von der jeweiligen Zielsetzung und vom jeweiligen Entscheidungsträger beispielsweise als ruinöser Wert, als Nullgewinnwert, als Rendite einer sicheren Anlage oder als ein in einem Unternehmen als akzeptable Leistung angesehener Wert gewählt werden.[78] Im Solvabilitätskontext würde der Zielwert als ruinöser Wert gewählt werden.[79] Die Wahl des Grades des LPM bestimmt, mit welchem Gewicht höhere und geringere Abweichungen in das Risikomaß eingehen.[80] Im Folgenden sollen die Implikationen der Wahl des Grades $k = 0,1,2$ dargestellt werden.

- $k = 0$:

$$LPM_0(z;X) = \int_{-\infty}^{z} (z-x)^0 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{z} f(x)\,dx = P(X \leq z) = F(z),$$

wobei $F(\quad)$ die Verteilungsfunktion von X ist.

Formel 9: Shortfallwahrscheinlichkeit

Das Risikomaß, das sich aus $LPM_0(z;X)$ ergibt, wird Shortfallwahrscheinlichkeit genannt. Sie gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Zielwert nicht überschritten wird. Dadurch, dass alle negativen Abweichungen mit

78 Vgl. *Fishburn, P. C.* (1977), S. 119.
79 Vgl. *Hartung, T.* (2007), S. 107.
80 Vgl. *Stone, B. K.* (1973), S. 676.

Null potenziert in dieses Maß eingehen, wird die Höhe einer möglichen Abweichung nicht berücksichtigt. Somit ist dieses Maß nur sinnvoll, wenn die *Höhe* eines Shortfalls nicht interessiert, also dann wenn der Zielwert einen kritischen Wert, wie z. B. einen ruinösen Verlust, markiert.[81]

- $k = 1$:

$$LPM_1(z;X) = \int_{-\infty}^{z} (z-x)^1 f(x)\,dx = z\int_{-\infty}^{z} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{z} xf(x)dx$$
$$= zP(X \le z) - E^z[X] = zF(z) - E^z[X],$$

wobei $E^z[X]$ als das erste partielle Moment der Verteilung von X bezeichnet werden soll.

Formel 10: Shortfallerwartungswert

Das sich aus $LPM_1(z;X)$ ergebende Risikomaß wird Shortfallerwartungswert genannt. Der Shortfallerwartungswert gibt die mittlere Unterschreitungshöhe wieder und berücksichtigt somit im Gegensatz zur Shortfallwahrscheinlichkeit die Höhe der Abweichung vom Zielwert.

- $k = 2$:

$$LPM_2(z;X) = \int_{-\infty}^{z} (z-x)^2 f(x)\,dx$$
$$= z^2\int_{-\infty}^{z} f(x)\,dx - 2z\int_{-\infty}^{z} xf(x)dx + \int_{-\infty}^{z} x^2 f(x)dx$$
$$= z^2F(z) - 2zE^z[X] + E^z[X^2],$$

wobei $E^z[X^2]$ als das zweite partielle Moment der Verteilung von X bezeichnet werden soll.

Formel 11: Shortfallvarianz

Auch bei der sich aus $LPM_2(z;X)$ ergebenden Shortfallvarianz wird die Höhe der Abweichungen vom Zielwert berücksichtigt. Durch das Potenzieren der Abweichungen mit zwei erhalten allerdings betragsmäßig stärkere Abweichungen mehr Gewicht als betragsmäßig geringere Abweichungen. Wird als Zielwert der Erwartungswert der Zufallsvariable ge-

[81] Vgl. *Hartung, T.* (2007), S. 107 f.

wählt ($z = E[X]$), so ergibt sich als Risikomaß die sog. Semivarianz bzw. als deren Quadratwurzel die sog. Semistandardabweichung.[82]

Der Vorteil dieser Shortfallrisikomaße liegt darin, dass sie als einseitige Risikomaße auch tatsächlich nur die *Unterschreitung* eines Zielwerts – wie sie einem intuitiven Risikoverständnis entspricht – mit einbeziehen. Allerdings gibt es bei ihrer Anwendung bei Portfoliobildung, Optimierungsaufgaben sowie bei der statistischen Identifikation größere technische Probleme.[83]

Bevor im nächsten Abschnitt die Risikomaße des Typus II erläutert werden, sollte noch erwähnt werden, dass bereits im Jahr 1973 eine allgemeine dreiparametrige Klasse von Risikomaßen definiert wurde (vgl. Formel 12).[84]

$$(X_0, k, A) = \left[\int_{-\infty}^{A} (|X - X_0|)^k dF(X)\right]^{\frac{1}{k}},$$

wobei X_0 ein Referenzniveau,
k der Grad des Risikomaßes
und A ein weiterer Parameter ist.

Formel 12: Allgemeine Klasse dreiparametriger Risikomaße

X_0 bestimmt dabei den Punkt, von welchem ab Abweichungen gemessen werden, A legt fest, welche Abweichungen in das Risikomaß einbezogen werden, und k hat dieselbe Funktion wie bei den LPMs, bestimmt also, mit welchem Gewicht höhere und geringere Abweichungen in das Risikomaß eingehen. Auf der Basis dieser allgemeinen dreiparametrigen Klasse von Risikomaßen wurde 1998 schließlich eine noch weiter verallgemeinerte fünfparametrige Klasse von Risikomaßen definiert (vgl. Formel 13),[85] unter welche auch die oben behandelten Lower Partial Moments gefasst werden können.[86]

$$R(X_0, c, d, A, W[\quad]) = \left[\int_{-\infty}^{A} (|X - X_0|)^c W[F(x)] f(x) dx\right]^d,$$

wobei $W[\quad]$ eine beschränkte Funktion und $c, d > 0$ sind.

Formel 13: Allgemeine Klasse fünfparametriger Risikomaße

82 Vgl. *Albrecht, P.* (2003), S. 24.
83 Vgl. *Albrecht, P.* (2003), S. 25.
84 Vgl. *Stone, B. K.* (1973), S. 676 f.
85 Vgl. *Pedersen, C. S./Satchell, S. E.* (1998), S. 103 und *Albrecht, P.* (2003), S. 25 f.
86 Vgl. *Albrecht, P.* (2003), S. 25 f.

Indem nun zwei voneinander unabhängige Parameter c und d sowie eine beliebige beschränkte Funktion $W[\quad]$ integriert sind, werden mit der durch Formel 13 definierten Klasse aber nicht nur die LPMs, sondern auch zahlreiche andere bekannte Risikomaße erfasst.[87] Dabei sind diese algebraisch aber immer noch einfach handhabbar.[88]

2.1.3 Risikomaße Typus II

Im Folgenden sollen Risikomaße vorgestellt werden, die das Risiko nicht als Abweichung von einer Zielgröße abbilden, sondern als notwendigen Kapital- oder Prämienbetrag. Hierzu werden verschiedene Möglichkeiten vorgeschlagen:

- Quantile
- Value at Risk
- Expected Shortfall
- Conditional Value at Risk
- Expected Policyholder Deficit

Zunächst sollen Quantile betrachtet werden. Sie stellen die Ausprägung einer Zufallsvariable dar, unterhalb derer eine Wahrscheinlichkeitsmasse einer bestimmten Höhe α liegt.[89] Im Solvabilitätskontext kann also mit Hilfe von Quantilen eine gewisse Ausfallwahrscheinlichkeit α vorgegeben werden. Ist die Verteilungsfunktion des Wertes der mit Risiko behafteten Position bekannt, kann dann über das entsprechende Quantil die zugehörige Ausfallhöhe bestimmt werden. Im Folgenden wird angenommen, dass zu X die Verteilungsfunktion F und eine Dichtefunktion f existiere. Damit ist F streng monoton und invertierbar.[90] Folgende Formel 14 zeigt, wie ein Quantil dann definiert ist:

$$P(X \leq Q_\alpha) = \alpha \Leftrightarrow Q_\alpha = F^{-1}(\alpha),$$

wobei Q_α das α-Quantil von F und

F^{-1} die Quantilfunktion von F heißt.

Formel 14: Quantil

---

[87] Vgl. *Pedersen, C. S./Satchell, S. E.* (1998), S. 103-105.

[88] Vgl. *Pedersen, C. S./Satchell, S. E.* (1998), S. 106.

[89] Vgl. *Albrecht, P.* (2003), S. 27.

[90] Sollte dies nicht der Fall sein – wie z. B. bei diskreten Wahrscheinlichkeiten – sind Quantile nicht eindeutig bestimmt. Dann muss zwischen oberem und unterem Quantil unterschieden werden. Vgl. hierzu *Hartung, T.* (2007), S. 110.

Abbildung 6 veranschaulicht diese Definition graphisch. Als Risikomaß kann dann z. B. $R(X) = -Q_\alpha(X)$ gewählt werden. Shortfallwahrscheinlichkeiten und Quantile hängen dabei eng miteinander zusammen: Bei der Shortfallwahrscheinlichkeit wird ein Zielwert vorgegeben und die Wahrscheinlichkeit dafür ermittelt, dass dieser nicht überschritten wird. Bei Quantilen wird umgekehrt eine Wahrscheinlichkeit vorgegeben und dann der Wert ermittelt, der mit dieser Wahrscheinlichkeit nicht überschritten wird.

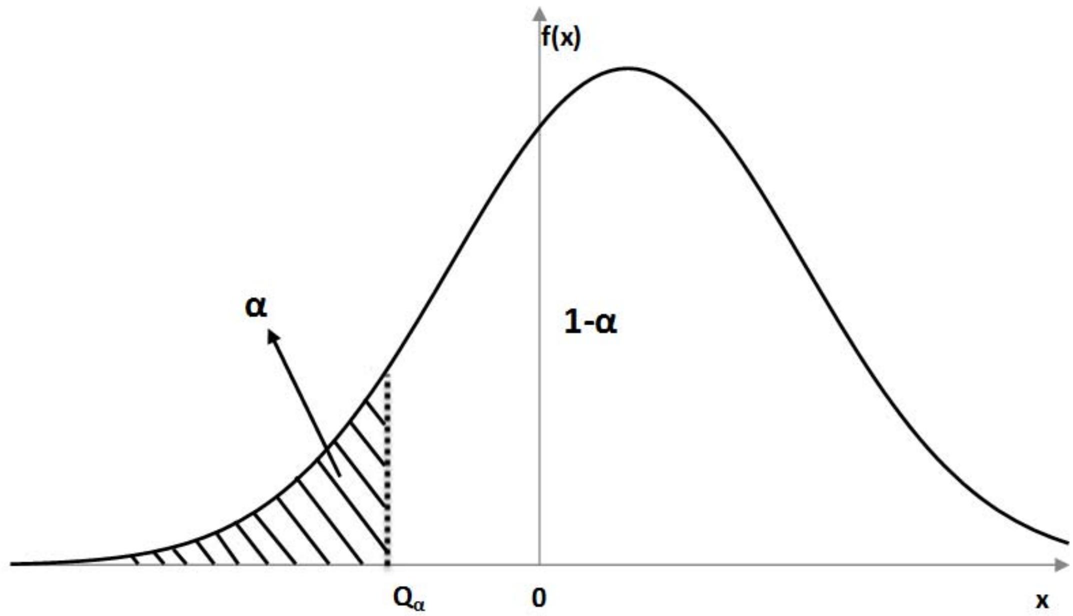

Abbildung 6: Quantil einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

Der Value at Risk (VaR) ist ein spezifisches Quantilmaß. Er wird insbesondere zur Messung von Markt- und Zinsrisiken eingesetzt und stellt die in Geldeinheiten gemessene negative Veränderung dar, die innerhalb eines bestimmten Zeitraumes mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit nicht überschritten wird. Er ist durch folgende Formel 15 definiert:

$$P\big(X_t - X_0 \leq VaR_\alpha(t)\big) = \alpha,$$
$$\Leftrightarrow \quad P\big(X_0 - X_t < VaR_\alpha(t)\big) = 1 - \alpha$$
$$\overset{X\ stetig}{\Longleftrightarrow} VaR_\alpha(t) = F^{-1}_{X_0 - X_t}(1-\alpha) = Q_{1-\alpha}(X_0 - X_t)$$

wobei X_t der Wert der Zufallsvariable zum Zeitpunkt $t \geq 0$,
X_0 der Wert der Zufallsvariable zum Zeitpunkt 0 und
$VaR_\alpha(t)$ der VaR zum Konfidenzniveau α
über einen Zeitraum der Länge t ist.

Formel 15: Value at Risk[91]

D. h. in $100 * (1-\alpha)$ % der Fälle ist der Verlust $X_0 - X_t$ kleiner als $VaR_\alpha(t)$, sodass ein Unternehmen, das freie Mittel in Höhe des $VaR_\alpha(t)$ besitzt, mit einer Wahrscheinlichkeit von $100 * (1-\alpha)$ % einen Verlust durch diese freien Mittel ausgleichen kann. Nur mit einer Wahrscheinlichkeit von α kommt es zu einem so großen Verlust, dass das in Höhe des $VaR_\alpha(t)$ hinterlegte Kapital nicht ausreicht und das Unternehmen zahlungsunfähig wird. Somit sind auch beim VaR nur einseitige Abweichungen – mögliche Verluste – berücksichtigt. Abbildung 7 zeigt das Prinzip des VaR graphisch auf. Dort erkennt man auch gut, dass – wenn man von stetigen Zufallsvariablen ausgeht – es sich beim VaR zum Konfidenzniveau α um nichts anderes als das 1-α-Quantil der Verteilung der Verlusthöhe $X_0 - X_t$ handelt.

Kritisiert wird der VaR aufgrund der Tatsache, dass er im Allgemeinen das Axiom der Subadditivität nicht erfüllt und somit kein kohärentes Risikomaß darstellt.[92] Außerdem berücksichtigt der VaR nicht die Höhe der Verluste, in den Fällen, in denen sie ihn übersteigen. So könnte eine ausschließliche Orientierung am VaR dazu führen, die ohnehin nicht berücksichtigten rechten Verteilungsenden auszudehnen.[93] Weitere Kritikpunkte sind möglicherweise widersprüchliche Ergebnisse bei unterschiedlichen Konfidenzniveaus, Nichtanwendbarkeit bei Op-

[91] Da es sich beim $VaR_\alpha(t)$ um das 1-α-Quantil der Verteilung von $X_0 - X_t$ handelt, wird der $VaR_\alpha(t)$ in der Literatur teilweise auch als Value at Risk zum *Konfidenzniveau 1-α* bezeichnet. Vgl. z. B. *Hartung, T.* (2007), S. 111. Zudem kann der $VaR_\alpha(t)$ auch unabhängig von den Eigenschaften der zugrunde liegenden Verteilung (insbesondere ihrer Stetigkeit) definiert werden. Vgl. hierzu *Acerbi, C./Tasche, D.* (2002), S. 1489 und *Tasche, D.* (2002), S. 1520.

[92] Vgl. Abschnitt 2.1.1. Ist jedoch die dem Verlust $X_0 - X_t$ zugrundeliegende Verteilung z. B. eine Normalverteilung und α < 0,5, ist der zugehörige VaR subadditiv und damit kohärent. Vgl. *Albrecht, P.* (2003), S. 31.

[93] Vgl. *Szegö, G.* (2002), S. 1261.

timierungsproblemen sowie die Tatsache, dass die VaRs aus verschiedenen Risikoquellen nicht zusammengefasst werden können.[94]

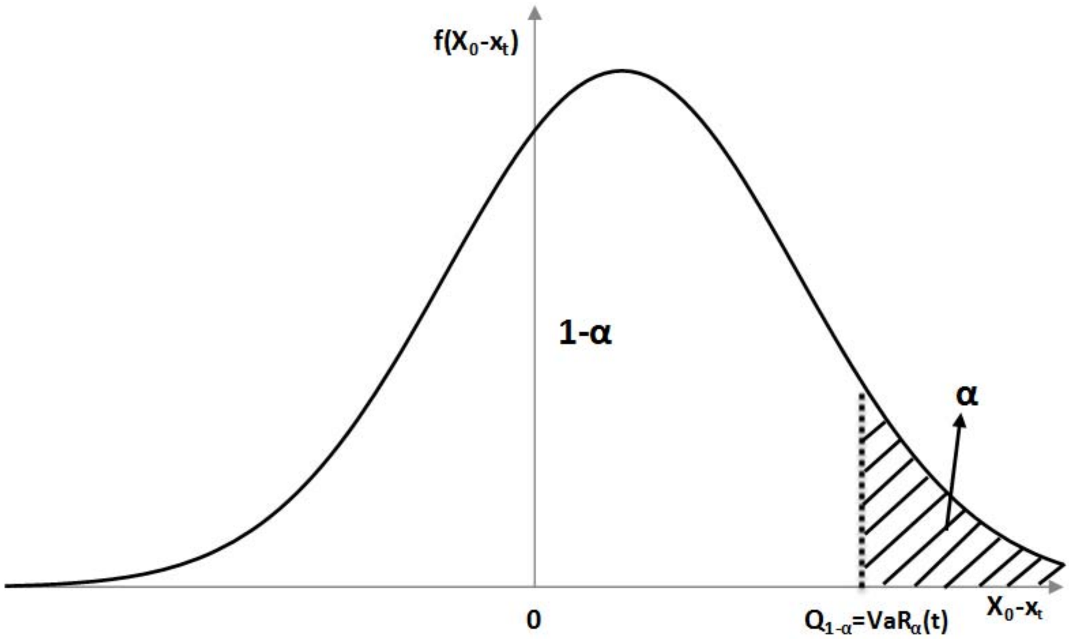

Abbildung 7: Value at Risk

Deshalb sollen im Folgenden weitere Risikomaße des Typus II vorgestellt werden, die zumindest die Kohärenzaxiome erfüllen und außerdem die rechten Verteilungsenden berücksichtigen. Zunächst soll der Expected Shortfall (ES) betrachtet werden, welcher auch als Tail Value at Risk bezeichnet wird. Der Expected Shortfall zum Konfidenzniveau α (ES_α) versucht den Nachteil der Nichtberücksichtigung des rechten Verteilungsendes beim VaR zu beseitigen, indem er den Durchschnitt aller $VaR_u(t)$ mit $0 \leq u \leq \alpha$ bildet. Entsprechend lautet seine Definition:

$$ES_\alpha(t) = E[(X_0 - X_t)|(X_0 - X_t) \geq VaR_\alpha(t)]$$

Formel 16: Expected Shortfall

Somit handelt sich es beim $ES_\alpha(t)$ auch um den erwarteten Verlust für die Fälle, in denen der $VaR_\alpha(t)$ vom Verlust $X_0 - X_t$ überschritten wird. Neben der Be-

94 Vgl. *Szegö, G.* (2002), S. 1261.

rücksichtigung auch der $100 * \alpha$ % schlimmsten Fälle bietet der Expected Shortfall gegenüber dem VaR auch den Vorteil, dass er kohärent ist.[95]

Diese Bedingung erfüllt der sog. Conditional Value at Risk (CVaR) nur, wenn die dem Verlust $X_0 - X_t$ zugrunde liegende Verteilung eine Dichte besitzt.[96] In diesem Fall fallen Expected Shortfall und Conditional Value at Risk jedoch auch zusammen.[97] Natürlich entspricht dann auch die Interpretation des ES als erwarteter Verlust für die Fälle, in denen der VaR vom Verlust überschritten wird, der Interpretation des CVaR. Im allgemeinen Fall, also wenn keine Dichtefunktion für die Verteilung von $X_0 - X_t$ vorhanden ist, sind ES und CVaR jedoch nicht gleichzusetzen. Da hier jedoch grundsätzlich von der Existenz einer Dichtefunktion f ausgegangen wird, sollen beide Risikomaße als äquivalent angesehen werden. Allerdings kann der CVaR wie folgt zerlegt werden:

$$CVaR_\alpha(t) = VaR_\alpha(t) + E[(X_0 - X_t) - VaR_\alpha(t) | (X_0 - X_t) \geq VaR_\alpha(t)]$$

Formel 17: Zerlegung des Conditional Value at Risk

Aus dieser Zerlegung werden zwei Dinge deutlich: Zum einen ist der CVaR (und damit hier auch der ES) immer mindestens so hoch wie der VaR. Zum anderen sieht man, dass die Höhe der möglichen Überschreitung des VaR berücksichtigt wird. Das Risikomaß ergibt sich als Summe aus VaR und der mittleren Überschreitung des VaR im Falle einer solchen Überschreitung (mittlere bedingte Überschreitung).[98]

Wird der CVaR als zu hinterlegendes Risikokapital gewählt, so kann man dieses Kapital als Summe aus den folgenden drei Komponenten mit ihren jeweiligen spezifischen Funktionen darstellen:[99]

- Erwarteter Verlust $E[(X_0 - X_t)]$
- Quantilkapital $VaR_\alpha(t) - E[(X_0 - X_t)]$
- Exzesskapital $E[(X_0 - X_t) - VaR_\alpha(t) | (X_0 - X_t) \geq VaR_\alpha(t)]$

Die Funktion der ersten Komponente ist es, den erwarteten Verlust (welcher theoretisch natürlich auch kleiner als Null und damit ein Gewinn sein kann) abzude-

95 Vgl. z. B. *Acerbi, C./Tasche, D.* (2002), S. 1491.
96 Vgl. *Rockafellar, R. T./Uryasev, S.* (2002), S. 1445.
97 Vgl. *Acerbi, C./Tasche, D.* (2002), S. 1496.
98 Vgl. *Albrecht, P.* (2003), S. 32.
99 Vgl. *Albrecht, P.* (2003), S. 33.

cken. Die zweite Komponente soll die Differenz zu dem Verlust abdecken, der in $100 * (1-\alpha)$ % der Fälle als Maximalverlust auftritt, und schafft damit das Konfidenzniveau in Höhe von α. Die letzte Komponente (auch Stresskapital genannt) soll schließlich den mittleren Exzessverlust für den Fall, dass der $VaR_{\alpha}(t)$ überschritten wird, abdecken. Sollte es zur Insolvenz des Versicherers kommen, dient dieses Kapital auch zur Erfüllung der Ansprüche von Versicherungsnehmern. Diese Zerlegung einer Risikokapitalunterlegung in Höhe des CVaR stellt Abbildung 8 anschaulich dar.

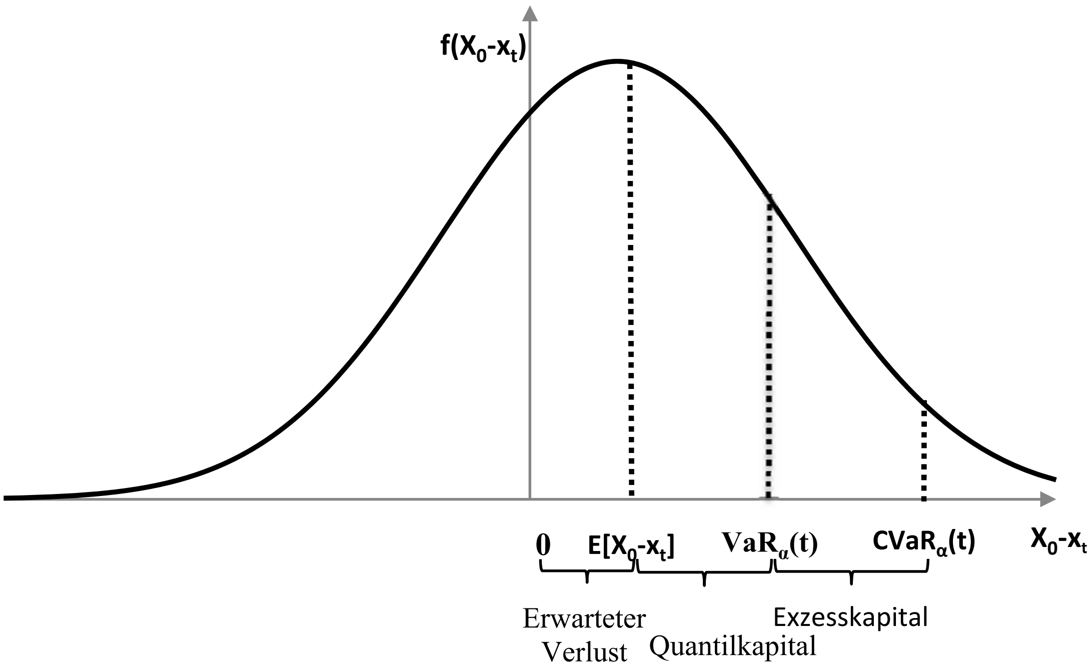

Abbildung 8: Zerlegung einer Risikokapitalunterlegung in Höhe des CVaR

Allerdings ist auch das Risikomaß CVaR nicht frei von Kritik. So wurde in einem Vergleich für verschiedene Verteilungen festgestellt, dass er sich beim Ansteigen des „Tail-Risikos" nicht konsistent verhält.[100] Ein weiterer Nachteil bei der Anwendung des CVaR besteht in seiner höheren Komplexität. So ist bei der hier notwendigen Modellierung der Verteilungsenden zusätzlicher Aufwand zu betreiben.[101] Außerdem dürfte eine Begründung, warum gerade Exzesskapital in Höhe der mittleren bedingten Überschreitung zur Verfügung gestellt werden sollte, schwer fallen.

[100] Vgl. *Hürlimann, W.* (2002), S. 245 f.
[101] Vgl. *Hartung, T.* (2007), S. 117.

Weitere Kritik wird an den signifikant höheren Werten des CVaR gegenüber dem VaR, insbesondere bei stark rechtschiefen Verteilungen, geübt. In einem solchen Falle steige der Kapitalbedarf unverhältnismäßig im Vergleich zur Verbesserung der Unternehmenssicherheit, was unter wirtschaftlichen Gesichtspunkten nicht zu rechtfertigen sei.[102] Weiter kann argumentiert werden, dass das Exzesskapital nicht zwingenderweise für die Erfüllung der Ansprüche der Versicherungsnehmer zur Verfügung steht, wenn das Versicherungsunternehmen insolvent wird. Denn das zusätzliche Eigenkapital reduziert zwar die Ausfallwahrscheinlichkeit, kommt es jedoch dennoch zum Ausfall, dann kann dieses zusätzliche Kapital bereits aufgezehrt sein. Eine Lösung hierfür würde sich durch die Einstellung dieses Kapitals in eine Rückstellung anstatt in das haftende Eigenkapital ergeben.

Bevor die vorgestellten Risikomaße beurteilt werden, soll noch ein weiteres des Typus II betrachtet werden. Es handelt sich hierbei um das sog. Expected Policyholder Deficit (EPD). Dieses Maß gibt den erwarteten Ausfall an. Zu dessen Berechnung wird die Ausfallhöhe mit der Eintrittswahrscheinlichkeit für einen Ausfall in dieser Höhe multipliziert.[103] In das Risiko werden somit nur die Ansprüche, die das Versicherungsunternehmen im Falle einer Insolvenz nicht erfüllen kann, mit einbezogen. Im Insolvenzfall noch erfüllbare Ansprüche werden dagegen nicht als Risiko gewertet.

Als praktikables Risikomaß in einem Solvabilitätssystem sollte aber nicht direkt das EPD gewählt werden, sondern das sog. EPD-Ratio. Für dieses könnte dann ein Maximalwert vorgegeben werden. Es entsteht durch Division des EPD durch den erwarteten Wert der Verbindlichkeiten L (vgl. Formel 18).

$$EPD - Ratio = \frac{EPD}{L}$$

Formel 18: EPD-Ratio

Ein wesentlicher Unterschied zu den anderen hier behandelten Risikomaßen Typus II besteht darin, dass beim EPD-Ratio eine Ruinwahrscheinlichkeit nicht fix vorgegeben wird, die unterschritten werden muss, sondern eben nur das EPD-

[102] Vgl. *Hartung, T.* (2007), S. 117-119.

[103] Vgl. *Butsic, R. P.* (1994), S. 660. Das EPD kann somit als Wert einer Put-Option für die Eigentümer des Versicherungsunternehmens gesehen werden. Diese Option stellt das Recht der Eigentümer dar, im Insolvenzfall den nichterfüllbaren Zahlungsverpflichtungen gegenüber den Versicherungsnehmern nicht nachkommen zu müssen. Vgl. *Butsic, R. P.* (1994), S. 676 f. sowie *Lowe, S. P./Stanard, J. N.* (1997), S. 369.

Ratio. Dies führt dazu, dass sich für verschiedene Versicherungsunternehmen letztlich verschiedene Ausfallwahrscheinlichkeiten ergeben können.[104]

2.2 Beurteilung

Im Folgenden sollen zunächst die vorgestellten Risikomaße beurteilt werden. Im Anschluss daran soll abgewogen werden, welche Maße für die Solvabilitätsregulierung von Versicherern heranzuziehen sind. Schließlich soll auch noch auf die Risikomodellierung insgesamt eingegangen werden. Dies geschieht in Abschnitt 2.2.2 in der Form einer Würdigung der praktischen Anwendung von Risikomodellen.

2.2.1 Beurteilung der Risikomaße

In den vorigen Abschnitten wurden verschiedene Risikomaße – eingeteilt in zwei Typenklassen – vorgestellt. Risikomaße des Typus I bewerten Risiko anhand der Abweichung von einer Zielgröße. Risikomaße des Typus II bilden das Risiko als zu unterlegenden Kapitalbetrag ab. Schon aus dieser Definition wird deutlich, dass für die Zwecke der Solvabilitätsregulierung bei Versicherungsunternehmen die Risikomaße des Typus II herangezogen werden sollten. Jedoch gibt es auch hier mehrere verschiedene Möglichkeiten zur Auswahl.

Das zuletzt behandelte EPD-Ratio ist aus theoretischer Sicht wertvoll, da es im Insolvenzfall zwischen erfüllbaren und nicht mehr erfüllbaren Verpflichtungen differenziert. Allerdings ergeben sich bei seiner Anwendung große Schwierigkeiten dadurch, dass die Insolvenzwahrscheinlichkeit nicht festgelegt wird. So kann es bei Anwendung des EPD-Ratios v. a. bei großen Versicherungsunternehmen zum Tolerieren sehr hoher Ausfallwahrscheinlichkeiten kommen. Generell kann gezeigt werden, dass bei einer Orientierung am EPD-Ratio das Ausfallrisiko mit steigender Unternehmensgröße zunehmen darf.[105] Gerade Insolvenzen großer Versicherungsunternehmen ziehen jedoch schwerwiegende negative Konsequenzen nach sich, sodass von einer Wahl des EPD-Ratios als Risikomaß strikt abzuraten ist.[106]

104 Vgl. *Barth, M. M.* (2000), S. 400.
105 Vgl. *Barth, M. M.* (2000), S. 402-409.
106 Vgl. *Schmeiser, H.* (2005), S. 6.

Das Risikomaß VaR wird von diversen Regulierungsbehörden bevorzugt, da es u. a. ein kompaktes Risikomaß darstelle.[107] Vor allem der oben bereits angeführte Kritikpunkt der fehlenden Subadditivität wirkt jedoch schwerwiegend, da somit beim VaR Risikosenkungen durch Diversifikation nicht zwingend berücksichtigt werden. Auch die Nichtberücksichtigung rechter Verteilungsenden durch den VaR kann sich im Versicherungsbereich mit den dort üblichen schiefen Verteilungen fatal auswirken. Deshalb sind Expected Shortfall bzw. Conditional Value at Risk dem Value at Risk vorzuziehen.[108] Dabei müssen die zusätzlichen Informationen über die rechten Verteilungsenden nicht zwingend in höheren Eigenkapitalanforderungen münden. Wie oben gezeigt, ist die Zurverfügungstellung zusätzlichen Kapitals über den VaR hinaus in Form von nichthaftendem Kapital als sinnvoller anzusehen.

Der ES und der CVaR enthalten also mehr Informationen als der VaR. Wie bereits an mehreren Stellen aufgezeigt, ist es allein schon wichtig und hilfreich, die Öffentlichkeit mit möglichst vollständigen Informationen zu versorgen. Auch dies spricht somit für die Anwendung der Risikomaße ES und CVaR.

Die Probleme von ES und CVaR sind v. a. technischer Natur. Da diese Risikomaße in vielen Fällen nicht analytisch berechnet werden können, seien sie nicht für den Einsatz in einem Standardmodell geeignet.[109] Zudem stehen für die Kalibrierung der Modelle in den beim ES und CVaR wichtigen Verteilungsenden in der Regel nur wenige Daten zur Verfügung, sodass die Robustheit der CVaRs für die meisten Risikoarten in Frage gestellt wird.[110] Insgesamt kann man also sagen, dass ES und CVaR in der konkreten Anwendung schwieriger sind als der VaR und diese somit nicht in jedem Fall als Risikomaß gewählt werden können. Sofern ihre Anwendung jedoch möglich ist, sind sie dem VaR vorzuziehen.

2.2.2 Beurteilung der Anwendung von Risikomodellen

Auch wenn adäquate Risikomaße gewählt und angewendet werden können, so setzen diese doch die Kenntnis von Verteilungen voraus. Verteilungen müssen jedoch aus historischen Daten geschätzt werden, was zum Irrtumsrisiko bei der Aufstellung der hypothetischen Wahrscheinlichkeitsverteilungen führt. Außerdem

[107] Vgl. *Szegö, G.* (2002), S. 1261.
[108] Vgl. *International Actuarial Association (Hrsg.)* (2004), S. 35.
[109] Vgl. *Djehiche, B./Hörfelt, P.* (2005), S. 379.
[110] Vgl. *Hartung, T.* (2007), S. 122.

können sich Schadenverläufe aufgrund von diversen Entwicklungen ändern. Solche Entwicklungen müssen – z. B. auf Basis aktueller naturwissenschaftlicher Erkenntnisse – berücksichtigt werden.[111] Insgesamt kann aber auch festgehalten werden, dass die Verteilungen aufgrund der sich weiterentwickelnden mathematischen Methoden der Risikomodellierung zunehmend genauer ermittelt werden können.[112]

Probleme können daraus aber entstehen, wenn das Vertrauen in die Modelle zu stark zunimmt und somit ihre Risiken unterschätzt werden. Für Risiken in Modellen gibt es vielfältige Gründe. Einer davon ist z. B., dass in Krisenzeiten die Annahmen vieler Modelle keine Gültigkeit mehr besitzen.[113] Somit muss bei der Anwendung von Risikomodellen darauf geachtet werden, dass die Fortschritte bei den mathematischen Methoden der Risikomodellierung nicht durch die Modellrisiken kompensiert oder sogar überkompensiert werden.

Weitere Schwierigkeiten ergeben sich aus oftmals falschen Annahmen über Zufallsvariablen aufgrund der Fortführung von Traditionen anstatt einer Orientierung an ökonomischen Tatbeständen. Als Beispiel hierfür wird der Rückgriff auf das Modell des Random Walk bei der Modellierung von Preisänderungsrisiken angeführt. Hierbei wird angenommen, dass sich Preisänderungen zufällig und unabhängig von vorangegangenen Preisänderungen einstellen, was jedoch nicht zwingenderweise der Realität entsprechen muss.[114] Zudem werden Risikomodelle aufgrund ihres Mangels an Robustheit kritisiert. Ihre Anwendung führe in schlechten Zeiten sogar zu einer Verstärkung der Krise und sei deshalb grundsätzlich abzulehnen.[115]

Doch sollte man einer so radikalen Ansicht folgen, stellt sich die Frage, auf welche Weise Risiko alternativ bewertet und reduziert werden kann. Für dieses Problem steht im Moment keine akzeptable Lösung zur Verfügung. Schon allein deshalb muss auf die Risikomodellierung zurückgegriffen werden. Dieser Ansicht ist auch die Europäische Kommission, die die Verwendung von internen Risikomodellen zur Solvabilitätsregulierung vorschlägt und deren Anwendung fördern

[111] Vgl. *Gründl, H./Winter, M.* (2005), S. 200 f.
[112] Vgl. *Hartung, T.* (2007), S. 123.
[113] Vgl. *Daníelsson, J.* (2002), S. 1275.
[114] Vgl. *Hartung, T.* (2007), S. 125.
[115] Modelle, die auf Basis von Daten aus stabilen Wirtschaftsperioden gebildet werden, berücksichtigten die in einer Krise veränderten Bedingungen nicht und versagten dann. Vgl. *Daníelsson, J.* (2002), S. 1275-1278.

möchte.[116] Auch Kritiker einer Risikomodellierung als Teil eines Regulierungsinstrumentariums halten *interne* Risikomodelle dennoch für effektiv.[117] Zudem sollte es gelingen, die oben beschriebenen Probleme der Risikomodellierung durch sorgfältige Modellbildung in Grenzen zu halten. Beispielsweise könnten Daten aus Krisenzeiten benutzt werden, um das Problem der Selbstverstärkung einer Krise zu reduzieren.[118]

Zusammenfassend kann also festgestellt werden, dass die Modellierung von Risiken in Versicherungsunternehmen ein unverzichtbarer Bestandteil der Eigenkapitalregulierung von Versicherungsunternehmen ist. Der Kritik an der Risikomodellierung kann durch sorgfältige Gestaltung der Risikomodelle begegnet werden. V. a. die Forderung interner und damit speziell an die Risikosituation des einzelnen Unternehmens angepasster Risikomodelle scheint hier besonders hilfreich zu sein.

[116] Vgl. *Europäische Kommission (Hrsg.)* (2003), Tz. 26.
[117] Vgl. *Daníelsson, J.* (2002), S. 1292.
[118] Vgl. *Daníelsson, J.* (2002), S. 1293.

3 Quantifizierung von Abhängigkeitsstrukturen

Wenn die einzelnen Risiken in einem Versicherungsunternehmen mittels eines Risikomaßes quantifiziert sind, kann das Gesamtrisiko nicht durch bloße Addition der Kapitalanforderungen für die Einzelrisiken ermittelt werden. Dies würde vollständige Abhängigkeit zwischen den Risiken bedeuten und somit evtl. tatsächlich vorhandene Diversifikationseffekte ignorieren. Andererseits kann die generelle Unterstellung von Unabhängigkeit zwischen den Einzelrisiken zu einer signifikanten Unterschätzung des Gesamtrisikos führen.

Gerade in der Versicherungsbranche bestehen bedeutende Abhängigkeiten, z. B. bei extremen Situationen, wie Terroranschlägen, oder bei Ereignissen, die Kumulschäden auslösen. Deshalb müssen die Abhängigkeitsstrukturen zwischen den Einzelrisiken möglichst präzise berücksichtigt werden.[119] Dafür stehen verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung, die im Folgenden erläutert und anschließend bewertet werden sollen. Hierbei soll zunächst auf spezielle Abhängigkeitsmaße eingegangen werden, bevor die Modellierung von Abhängigkeiten mittels multivariater Verteilungen in Verbindung mit Copulae dargestellt wird. Abschließend erfolgt eine Beurteilung der vorgestellten Konzepte.

3.1 Spezielle Abhängigkeitsmaße

Zunächst wird auf spezielle Abhängigkeitsmaßzahlen eingegangen, die die Abhängigkeit zwischen mehreren Risiken in einer einzigen Zahl darstellen. Diese sind deshalb natürlich relativ einfach handhabbar. Allerdings ergeben sich bei ihrer Anwendung auch einige Schwierigkeiten, die bei der Beurteilung aufgezeigt werden. Das wohl bekannteste Abhängigkeitsmaß ist der lineare Korrelationskoeffizient nach Pearson, der zuerst vorgestellt werden soll. Zudem soll aber noch auf andere Abhängigkeitsmaßzahlen eingegangen werden, die gegenüber dem linearen Korrelationskoeffizienten einige Vorteile aufweisen.

3.1.1 Linearer Korrelationskoeffizient nach Pearson

Eine erste einfache Möglichkeit,[120] stochastische Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen, die beispielsweise Schadenhöhen darstellen, zu erfassen, ergibt

[119] Vgl. auch *International Actuarial Association (Hrsg.)* (2004), S. 75.

[120] Vgl. z. B. *Szegö, G.* (2002), S. 1254 und *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (2002), S. 7.

sich durch den linearen Korrelationskoeffizienten nach Pearson. Er ist wie folgt definiert:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) * Var(Y)}},$$

wobei $\rho(X,Y)$ der lineare Korrelationskoeffizient von X und Y, $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$ die Kovarianz von X und Y und $Var(X)$ sowie $Var(Y)$ die endlichen Varianzen von X und Y sind.

Formel 19: Korrelationskoeffizient nach Pearson

Im mehrdimensionalen Fall muss die Korrelationsmatrix angewendet werden. In diesem Fall seien $X = (X_1, \dots, X_n)$ und $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ quadratisch integrierbare Zufallsvektoren. Dann ergibt sich die symmetrische und positiv semi-definite Korrelationsmatrix zu:

$$\rho(X,Y) = \begin{pmatrix} \rho(X_1,Y_1) & \cdots & \rho(X_1,Y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(X_n,Y_1) & \cdots & \rho(X_n,Y_n) \end{pmatrix},$$

$$\text{d. h. } \rho(X,Y)_{a,b} = \rho(X_a,Y_b), 1 \leq a,b \leq n$$

Formel 20: Korrelationsmatrix

Wie der Name dieses Abhängigkeitsmaßes bereits suggeriert, misst der lineare Korrelationskoeffizient die lineare stochastische Abhängigkeit zwischen den betreffenden Zufallsvariablen. Er nimmt Werte zwischen -1 und +1 an, d. h. $-1 \leq \rho(X,Y) \leq +1$. Jedoch gilt nicht, dass perfekt positiv abhängige Zufallsvariablen notwendigerweise eine Korrelation von 1 besitzen und perfekt negativ abhängige Zufallsvariablen eine Korrelation von -1.[121] Stark abhängige Zufallsvariablen können auch eine Korrelation aufweisen, die betragsmäßig nahe bei Null liegt.

Dadurch, dass nur lineare Abhängigkeit gemessen wird, werden Unterschiede in der Intensität der Abhängigkeit über die Ausprägungen der Zufallsvariablen nicht berücksichtigt. Da solche Unterschiede aber bei einer Vielzahl von Abhängigkeitsstrukturen auftreten, kann man von einem identischen Korrelationskoeffizien-

[121] Vgl. *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (1999), S. 6. Dabei bedeutet perfekt (positiv oder negativ) abhängig, dass die Ausprägung einer Zufallsvariablen direkt mittels einer deterministischen Funktion aus der perfekt abhängigen Zufallsvariablen ermittelt werden kann. Vgl. *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (1999), S. 4 f.

ten noch nicht auf eine identische Abhängigkeitsstruktur schließen. Die folgende Abbildung 9 zeigt dies deutlich: Obwohl zwischen den Zufallsvariablen X_1 und X_2 derselbe lineare Korrelationskoeffizient besteht wie zwischen X_1 und X_3, ist die Abhängigkeitsstruktur insgesamt eine völlig unterschiedliche.[122]

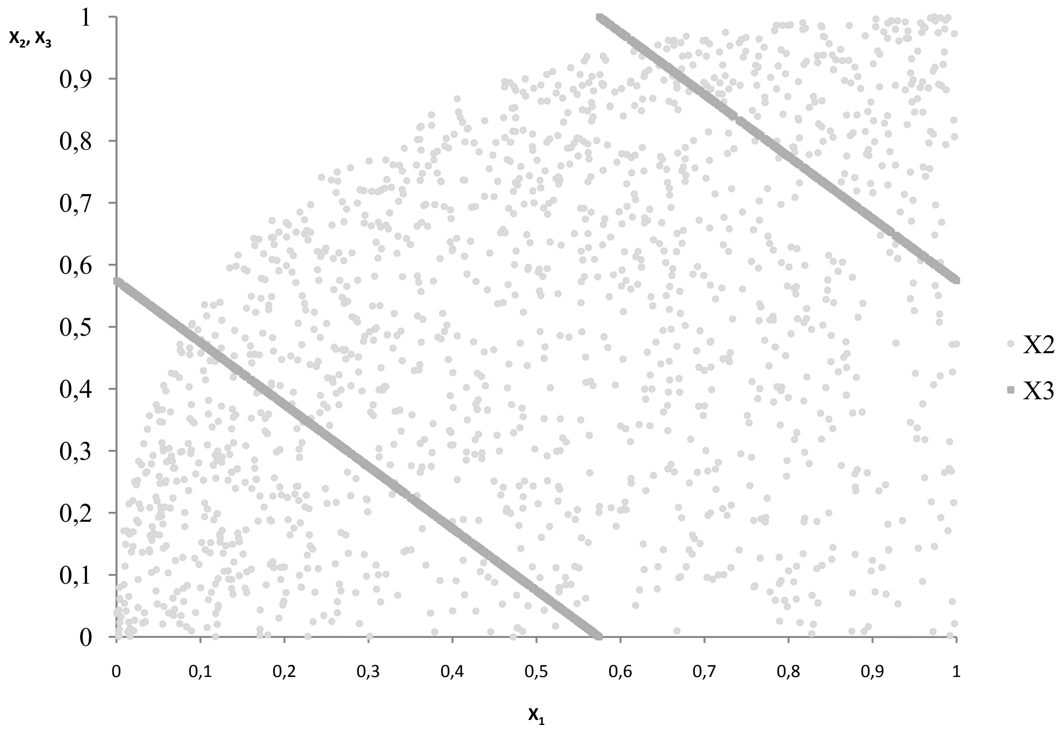

Abbildung 9: Abhängigkeitsstruktur zwischen jeweils zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 sowie X_1 und X_3

Für unabhängige Zufallsvariablen ist die Kovarianz zwischen ihnen Null und somit auch der Korrelationskoeffizient. Zu beachten ist, dass die Umkehrung hiervon im Allgemeinen nicht gilt.[123] Ein betragsmäßig kleiner Korrelationskoeffizient impliziert somit auch nicht zwingenderweise geringe Abhängigkeit. So gibt es Beispiele von Zufallsvariablen, die sehr stark abhängig sind, aber dennoch eine Korrelation von fast Null haben.[124]

Als Abhängigkeitsmaß kann der lineare Korrelationskoeffizient nach Pearson nur für die Klasse der elliptischen Verteilungen[125] eingesetzt werden. Sein Einsatz für nicht elliptische Verteilungen kann zu falschen Ergebnissen führen. Insbesondere

122 Vgl. zu diesem Beispiel – insbesondere zur Konstruktion der Zufallsvariablen X_1, X_2 und X_3 – *Pfeifer, D.* (2003), S. 677 f.

123 Vgl. *Mummenhoff, A.* (2007), S. 35.

124 Vgl. *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (2002), S. 24 f.

125 Hierzu zählen beispielsweise die Normalverteilung sowie die Studentsche-t-Verteilung. Vgl. z. B. *Junker, M./May, A.* (2005), S. 431.

die Abhängigkeit der Risiken bei extremen Ereignissen (d. h. hohen Verlusten) wird bei Anwendung des linearen Korrelationskoeffizienten stark unterschätzt, falls es sich um nicht elliptische Verteilungen handelt.[126]

Ein weiteres Defizit des linearen Korrelationskoeffizienten ist die Bedingung, dass die Varianzen der betrachteten Verteilungen endlich sein müssen, damit der lineare Korrelationskoeffizient definiert ist. Insbesondere bei der Modellierung von Großschäden kommen jedoch Verteilungen zum Einsatz, die diese Bedingung nicht erfüllen. Zudem ist die lineare Korrelation nicht invariant bzgl. streng monoton steigender nicht linearer Transformationen.[127] Dies ist beispielsweise dann ein Nachteil, wenn Schadenhöhen mittels einer nicht linearen Transformation in Schadenauszahlungen überführt werden sollen.

3.1.2 Spearman's Rangkorrelation und Kendall's τ

Aufgrund der oben genannten Defizite des linearen Korrelationskoeffizienten nach Pearson sollen in diesem und im folgenden Abschnitt weitere Kennzahlen zur Messung der Abhängigkeit zwischen zwei Risiken vorgestellt werden. Die erste Kennzahl, Spearman's Rangkorrelation, ergibt sich für stetige Zufallsvariablen aus der Anwendung des linearen Korrelationskoeffizienten nach Pearson auf die Verteilungsfunktionen der Zufallsvariablen:[128]

$$\rho_S(X,Y) = \rho\big(F_X(X), F_Y(Y)\big)$$

Formel 21: Spearman's Rangkorrelation für zwei stetige Zufallsvariablen

Wie der lineare Korrelationskoeffizient nach Pearson nimmt dieses Abhängigkeitsmaß ebenfalls Werte zwischen -1 und +1 an. Im Gegensatz zum linearen Korrelationskoeffizienten nach Pearson ist es aber invariant bzgl. streng monoton steigender linearer *und* nicht linearer Transformationen.[129] Außerdem kann nicht nur bei einem Wert des ρ_S von +1 direkt auf Komonotonität bzw. bei einem Wert

126 Vgl. *Szegö, G.* (2002), S. 1254 f.
127 Vgl. *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (2002), S. 7 f.
128 Auch die Rangkorrelation nach Spearman kann für mehr als zwei abhängige Zufallsvariablen bestimmt werden. Dies geschieht analog zum linearen Korrelationskoeffizienten nach Pearson durch Aufstellen einer Matrix. Vgl. *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (2002), S. 16.
129 Vgl. *Denuit, M. et al.* (2005), S. 259.

von -1 auf Countermonotonität[130] geschlossen werden, sondern es gilt auch die Umkehrung hiervon, d. h. perfekt positiv abhängige Zufallsvariablen haben zwingenderweise eine Spearman's Rangkorrelation von +1 und perfekt negativ abhängige Zufallsvariablen eine Spearman's Rangkorrelation von -1.[131]

Eine weitere Kennzahl für die Abhängigkeit zwischen Zufallsvariablen ergibt sich durch Kendall's Rangkorrelation, welche auch als Kendall's τ bezeichnet wird. Hiernach müssen zum Messen der Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen X und Y zunächst zwei unabhängige und identisch verteilte Zufallsvektoren (X_1, Y_1) und (X_2, Y_2) aufgestellt werden, wobei X_1 und X_2 wie X und Y_1 und Y_2 wie Y verteilt sind. Anschließend werden folgende Berechnungen angestellt:[132]

$$\tau(X,Y) = P\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\big) - P\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\big)$$

Formel 22: Kendall's τ

Wiederum gilt ein Wertebereich von [-1,1] für das Abhängigkeitsmaß. Und auch Kendall's τ ist invariant bzgl. streng monoton steigender linearer *und* nicht linearer Transformationen.[133] Zudem gilt, dass perfekte positive Abhängigkeit einen Wert von +1 für Kendall's τ und perfekte negative Abhängigkeit einen Wert von -1 für Kendall's τ zur Folge hat, sowie die Umkehrung hiervon.[134]

3.1.3 Maß für die Abhängigkeit in den Verteilungsenden

Schließlich soll noch ein weiteres Abhängigkeitsmaß für Risiken betrachtet werden. Das Besondere an diesem ist, dass es auf die Abhängigkeiten in den Verteilungsenden fokussiert. Dies ist insbesondere für Schadenversicherer bei der Modellierung von Extremereignissen von zentraler Bedeutung. Das Maß für die Abhängigkeit im oberen Verteilungsende zwischen zwei Zufallsvariablen X und Y kann wie folgt definiert werden:

---

130 Dabei bedeutet Komonotonität, dass die Zufallsvariablen perfekt positiv abhängig sind und Countermonotonität, dass die Zufallsvariablen perfekt negativ abhängig sind. Vgl. *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (1999), S. 4.

131 Vgl. *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (2002), S. 16.

132 Kendall's Rangkorrelation kann ebenfalls für mehr als zwei abhängige Zufallsvariablen bestimmt werden. Auch dies geschieht analog zum linearen Korrelationskoeffizienten nach Pearson durch Aufstellen einer Matrix. Vgl. *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (2002), S. 16.

133 Vgl. *Denuit, M. et al.* (2005), S. 254.

134 Vgl. z. B. *Denuit, M. et al.* (2005), S. 256 und *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (2002), S. 16.

$$\lambda(X,Y) = \lim_{\alpha \to 1-} P\left(Y > F_Y^{-1}(\alpha) \middle| X > F_X^{-1}(\alpha)\right),$$

unter der Bedingung, dass ein solcher Grenzwert existiert.

Formel 23: Maß für die Abhängigkeit in den Verteilungsenden

Gilt $0 < \lambda(X,Y) \leq 1$, so sagt man, die Zufallsvariablen X und Y seien asymptotisch abhängig im oberen Verteilungsende, gilt hingegen $\lambda(X,Y) = 0$, so sagt man, X und Y seien asymptotisch unabhängig im oberen Verteilungsende. Da α von links gegen Eins strebt, gibt dieses Maß die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass eine Zufallsvariable einen hohen Wert realisiert unter der Bedingung, dass die zweite betrachtete Zufallsvariable ebenfalls einen hohen Wert realisiert. Dabei werden jedoch die Abhängigkeiten in den restlichen Teilen der gemeinsamen Verteilungsfunktion nicht berücksichtigt. Das macht deutlich, dass es auch diesem Abhängigkeitsmaß nicht gelingt, vollständige Informationen über die Abhängigkeitsstruktur zwischen mehreren Zufallsvariablen zu liefern.[135]

3.2 Ermittlung von Abhängigkeiten zwischen Risiken mittels multivariater Verteilungen

Zur Erfassung der Stärke der Abhängigkeit zwischen Zufallsvariablen kann aber auch deren gemeinsame Verteilung ermittelt werden, falls diese existiert. Multivariate Verteilungen geben die Beziehung zwischen zwei Zufallsvariablen im Gegensatz zum linearen Korrelationskoeffizienten nach Pearson nämlich *vollständig* wieder.[136] Zunächst sollen deshalb allgemeine Charakteristika dieser multivariaten Verteilungen erläutert werden, bevor im Anschluss die Konstruktion dieser durch Copulae beschrieben wird. Schließlich sollen noch Ansätze zur empirischen Ermittlung von multivariaten Verteilungen und Copulae vorgestellt werden.

3.2.1 Multivariate Verteilungen

Die gemeinsame Verteilungsfunktion mehrerer Zufallsvariablen ist wie folgt definiert:

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

Formel 24: Gemeinsame Verteilungsfunktion mehrerer Zufallsvariablen

[135] Die Berechnung dieses Maßes mit Formel 23 kann bei gewissen Typen von multivariaten Verteilungen schwierig werden. Für diesen Fall ist die Berechnung auch mittels einer alternativen Formel möglich. Vgl. dazu *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (2002), S. 18 f.

[136] Vgl. z. B. *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (2002), S. 4 oder *Szegö, G.* (2002), S. 1256.

Eine gemeinsame Verteilung kann beispielsweise direkt aus bekannten Verteilungen der einzelnen Zufallsvariablen konstruiert werden. Besonders einfach ist dies bei einer multivariaten Normalverteilung[137]. Hierbei müssen nur die entsprechenden Randverteilungen sowie die Korrelationen zwischen den einzelnen Zufallsvariablen bekannt sein.[138] Umgekehrt ergeben sich als Randverteilungen einer multivariaten Normalverteilung wiederum univariate Normalverteilungen.[139] Abbildung 10 zeigt als Beispiel den Graph der Dichtefunktion einer bivariaten Normalverteilung[140] mit den Parametern $\mu_X = \mu_Y = 0,\ \sigma_X = \sigma_Y = 1$ sowie der Korrelation $\rho(X, Y) = 0{,}6$.

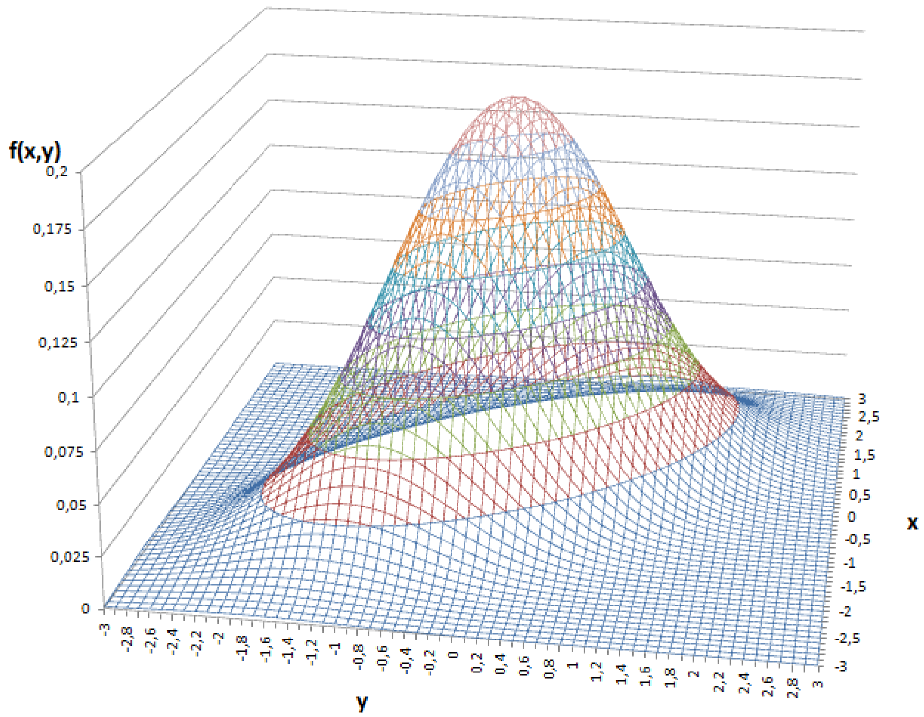

Abbildung 10: Dichtefunktion einer bivariaten Normalverteilung

Ein Problem bei der Konstruktion der multivariaten Verteilung direkt aus den einzelnen Verteilungen liegt allerdings darin, dass dieser Ansatz nur angewendet werden kann, wenn sämtliche Randverteilungen zu derselben Familie von Verteilungen gehören. Außerdem muss für die Ermittlung der gemeinsamen Verteilung in vielen Fällen bereits ein Abhängigkeitsmaß zwischen den betreffenden Zufallsvariablen bekannt sein.

137 Dabei ist unter einer multivariaten Normalverteilung die gemeinsame Verteilung mehrerer normalverteilter Zufallsvariablen zu sehen.

138 Vgl. *Ané, T./Kharoubi, C.* (2003), S. 411 f.

139 Vgl. *Cramer, E./Kamps, U.* (2008), S. 201.

140 Entsprechend ist unter einer *bivariaten* Normalverteilung die gemeinsame Verteilung *zweier* normalverteilter Zufallsvariablen zu verstehen.

Um diesen Problemen auszuweichen, werden die Risiken meist als unabhängig voneinander angenommen. Gerechtfertigt wird eine solch vereinfachende Annahme häufig damit, dass Abhängigkeitsstrukturen zwischen Risiken weit weniger Einfluss auf die Verteilung des Gesamtrisikos hätten als die Wahl der Verteilungen für die Einzelrisiken. Dabei muss allerdings beachtet werden, dass ein geringer Einfluss von Abhängigkeiten auf das Gesamtrisiko tatsächlich nur dann gegeben ist, wenn die Verteilungen der Einzelrisiken durch geringe Varianzen gekennzeichnet sind und die Abhängigkeit zwischen den Einzelrisiken nicht hoch ist.[141] Gerade aber bei Extremereignissen, wie Naturkatastrophen oder Terroranschlägen, ist davon auszugehen, dass einzelne Risiken nicht unabhängig voneinander auftreten, sondern vielmehr signifikant positiv korrelieren. Somit kann das Ignorieren jeglicher Abhängigkeit zwischen Risiken dazu führen, dass das Gesamtrisiko eines Versicherungsunternehmens unterschätzt wird.

Eine solche Unterschätzung kann für die Solvabilität eines Versicherers sehr gefährlich werden. Um Abhängigkeiten zwischen Risiken, denen verschiedene Typen von Verteilungsfunktionen zugrunde liegen, zu erfassen, wurden deshalb in der jüngeren Vergangenheit vermehrt Copulae in Betracht gezogen.[142] Mit diesen können verschiedenste multivariate Verteilungen konstruiert werden. Das Konzept der Copulae soll deshalb im folgenden Abschnitt näher erläutert werden.

3.2.2 Copulae

Das Konzept der Copulae basiert auf der Idee, die gemeinsame Verteilungsfunktion mehrerer Zufallsvariablen in einen Teil zu zerlegen, der die Abhängigkeitsstruktur zwischen ihnen beschreibt, und in einen Teil (bzw. mehrere Teile), der die Randverteilungen der einzelnen Zufallsvariablen beschreibt. Die Copula wurde von dem Mathematiker *Sklar* definiert.[143] Der Begriff entstammt dem Lateinischen und bedeutet Bindemittel oder Band, bezeichnet in der Grammatik aber auch einen Ausdruck, der ein Subjekt mit einem Prädikat verbindet. Mit diesem Begriff soll also zum Ausdruck gebracht werden, dass die Copula eine Verbindung zwischen einer multivariaten Verteilungsfunktion und ihren jeweiligen ein-

141 Vgl. *Bukowski, J./Korn, L./Wartenberg, D.* (1995), S. 218.

142 Vgl. z. B. *Ané, T./Kharoubi, C.* (2003), *Di Clemente, A./Romano, C.* (2004), S. 326, *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (2002), *Faivre, F.* (2003), *Pfeifer, D.* (2003), sowie *Tang, A./Valdez, E. A.* (2006).

143 Vgl. *Sklar, M.* (1959).

dimensionalen Randverteilungen herstellt.[144] Es handelt sich bei ihr selbst um eine multivariate Verteilungsfunktion mit auf dem Intervall [0,1] gleichverteilten Randverteilungen, die folgendermaßen definiert ist:

$C(u_1, \dots, u_n) = P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n)$,
wobei $C(\quad)$ die Copula,
$(U_1, \dots, U_n)^T$ mit $U_i \sim U(0,1)$ für alle $i = 1, \dots, n$ ein Zufallsvektor
und $(u_1, \dots, u_n)^T \in [0,1]^n$ Realisationen von $(U_1, \dots, U_n)^T$ darstellen.

Formel 25: Copula

Alternativ wird eine Copula als beliebige Funktion $C: [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ mit den folgenden drei Eigenschaften definiert:[145]

1. $C(u_1, \dots, u_n)$ wächst in jeder Komponente u_i für $i \in \{1, \dots, n\}$.
2. $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, $u_i \in [0,1]$.
3. Für alle $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1, \dots, b_n) \in [0,1]^n$ mit $a_i \leq b_i$ gilt:

   $\sum_{i_1=1}^{2} \dots \sum_{i_n=1}^{2} (-1)^{i_1+\cdots+i_n} C\left(u_{1i_1}, \dots, u_{ni_n}\right) \geq 0$,

   wobei $u_{j1} = a_j$ und $u_{j2} = b_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$.

Es kann gezeigt werden, dass diese Definition und die Definition aus Formel 25 äquivalent sind.[146]

Die Risikomodellierung erfolgt beim Copula-Ansatz in zwei Schritten. In einem ersten Schritt werden die Randverteilungen für alle Risikokomponenten ermittelt. Sobald man sämtliche Randverteilungen bestimmt hat, wird im zweiten Schritt die gemeinsame Verteilung aller Risikokomponenten mit Hilfe der oben vorgestellten Copula-Funktion, welche die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Einzelrisiken widerspiegelt, ermittelt.[147] Dies geschieht, indem zunächst alle n Einzelrisiken X_i mittels ihrer Randverteilungsfunktion F_i jeweils in eine auf dem Intervall [0,1] stetig gleichverteilte Zufallsgröße U_i transformiert werden:

[144] Vgl. *Mummenhoff, A.* (2007), S. 38.
[145] Vgl. *z. B. Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (2002), S. 4.
[146] Vgl. *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (2002), S. 4.
[147] Vgl. *Junker, M./May, A.* (2005), S. 428.

$$U_i = F_i(X_i)$$

Formel 26: Transformation beliebig verteilter Einzelrisiken in auf [0,1] stetig gleichverteilte Zufallsgrößen

Werden nun diese transformierten Zufallsgrößen U_i in die Copula-Funktion eingesetzt, erhält man die multivariate gemeinsame Verteilungsfunktion aller Einzelrisiken X_i:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(u_1, \dots, u_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

Formel 27: multivariate gemeinsame Verteilungsfunktion aus Copula

Es kann auch das Umgekehrte gezeigt werden, nämlich dass jede multivariate Verteilungsfunktion mit Hilfe einer Copula aus ihren Randverteilungsfunktionen zusammengesetzt werden kann. Für den Fall, dass alle Randverteilungsfunktionen stetig sind, kann sogar gezeigt werden, dass die Copula eindeutig bestimmt ist.[148] Wenn zudem alle F_i und die Copula C differenzierbar sind, kann die gemeinsame Dichte bestimmt werden zu:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) * \dots * f_n(x_n) * c\big(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)\big),$$

wobei $f_i(x_i)$ jeweils die Dichte zur Verteilungsfunktion F_i

und $c(u_1, \dots, u_n) = \dfrac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}$ die Dichte der Copula ist.

Formel 28: Dichtefunktion der multivariaten gemeinsamen Verteilungsfunktion aus Copula

Der Wertebereich von Copulae wird dabei durch die sog. Fréchet-Schranken begrenzt.[149]

Somit kann aus gewählten Randverteilungen und einer Copula, die Informationen über die Abhängigkeitsstrukturen der einzelnen Variablen enthält, eine multivariate Verteilungsfunktion hergeleitet werden. Umgekehrt kann aber auch aus den Inversen der Randverteilungen und einer multivariaten Verteilungsfunktion eine Copula hergeleitet werden.[150]

[148] Vgl. *Sklar, M.* (1959), S. 229 sowie auch *Ané, T./Kharoubi, C.* (2003), S. 413 f. und *Nelsen, R. B.* (2006), S. 18.
[149] Vgl. zu diesen z. B. *Faivre, F.* (2003), S. 3 f. sowie *Sklar, M.* (1959), S. 230.
[150] Vgl. z. B. *Faivre, F.* (2003), S. 5 sowie *Mummenhoff, A.* (2007), S. 38 f.

Im Folgenden sollen einige bedeutende Familien von Copulae genannt und erläutert werden. Im Einzelnen sind dies:

- die elliptischen Copulae mit
  - den Gaußschen Copulae sowie
  - den Studentschen Copulae und
- die archimedischen Copulae mit
  - den Gumbel Copulae,
  - den Cook-Johnson Copulae sowie
  - den Frank Copulae

Die Copulatypen unterscheiden sich v. a. darin, dass die Bereiche der Wahrscheinlichkeitsfunktion, in denen die Abhängigkeit stärker und schwächer ist, verschieden sind.[151] Die Gaußschen Copulae werden auch als Normal Copulae bezeichnet. Der Grund hierfür liegt darin, dass man bei Anwendung dieser Copulae und Wahl von Standardnormalverteilungen für die Randverteilungen als Ergebnis multivariate Normalverteilungen erhält. Die Familie der Gaußschen Copulae kann allgemein wie folgt dargestellt werden:

$$C_\rho^{Gau}(u_1, \dots, u_n) = \Phi_\rho^n(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)),$$

wobei Φ_ρ^n die Verteilungsfunktion der n-variaten Standardnormalverteilung mit Korrelation ρ und Φ^{-1} die Inverse der Verteilungsfunktion der univariaten Standardnormalverteilung ist.

Formel 29: Gaußsche Copulae

Eine bedeutende Eigenschaft der Gaußschen Copulae ist die gegen Null strebende Abhängigkeit in ihren Verteilungsenden.[152] Dies bedeutet, dass die einzelnen Zufallsvariablen der gemeinsamen Verteilung gerade bei hohen Realisationen quasi unabhängig sind, selbst wenn insgesamt eine hohe Korrelation zwischen ihnen herrscht. Im Gegensatz dazu weisen die Studentschen Copulae den Nachteil –

151 Vgl. *Venter, G. G.* (2002), S. 68.

152 Vgl. z. B. *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (2002), S. 19 sowie *Tang, A./Valdez, E. A.* (2006), S. 6. Dies gilt nicht für den Fall, dass die Korrelation genau Eins oder minus Eins beträgt. Somit sind diese i. A. Copulae asymptotisch unabhängig im oberen Verteilungsende (vgl. Abschnitt 3.1.3).

zumindest für die Modellierung gewisser Risiken in Versicherungsunternehmen – der asymptotischen Unabhängigkeit in den Verteilungsenden nicht auf.[153]

Dies wird auch in Abbildung 11 und Abbildung 12 deutlich, die Graphen der Dichten beider Klassen von Copulae darstellen.[154] Formel 30 zeigt, wie die Familie der Studentschen Copulae definiert ist:

$$C_{\nu,\rho}^{Stu}(u_1, \dots, u_n) = t_{\nu,\rho}^{n}\left(t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_n)\right),$$

wobei ν die Anzahl der Freiheitsgrade,

$t_{\nu,\rho}^{n}$ die Verteilungsfunktion der n-variaten Studentschen-t-Verteilung mit ν Freiheitsgraden und Korrelation ρ sowie

t_ν^{-1} die Inverse der Verteilungsfunktion der univariaten Studentschen-t-Verteilung mit ν Freiheitsgraden ist.

Formel 30: Studentsche Copulae

Für den bivariaten Fall gilt: Solange die Korrelation ρ größer ist als minus Eins, weisen diese Copulae asymptotische Abhängigkeit im oberen Verteilungsende auf, auch wenn ρ Null oder sogar negativ ist. Die Stärke der Abhängigkeit in den Verteilungsenden nimmt dabei mit sinkender Anzahl von Freiheitsgraden ν und steigender Korrelation ρ zu.[155] Bei Wahl einer Gleichverteilung über dem Intervall (0,1) als Randverteilung[156] ergeben sich folgende Graphen für die Dichten einer bivariaten Gaußschen und einer bivariaten Studentschen Copula:

153 Vgl. z. B. *Faivre, F.* (2003), S. 6 oder *Tang, A./Valdez, E. A.* (2006), S. 6.

154 Noch deutlich anschaulicher wird die asymptotische Unabhängigkeit bei den Normal Copulae aber, wenn als Randverteilungen Standardnormalverteilungen gewählt werden, sodass sich die multivariate Normalverteilung ergibt. Vgl. Abbildung 10.

155 Wird als Freiheitsgrad $\nu = 1$ gewählt, spricht man von Cauchy Copulae. Vgl. *Tang, A./Valdez, E. A.* (2006), S. 6.

156 In diesem Fall gilt $x_1=u_1$ und $x_2=u_2$, d.h. die Abbildungen können zum einen als die Graphen der Ableitung der Copula c(u) interpretiert werden, gleichzeitig aber auch als Graphen von Dichten multivariater Verteilungen f(x) mit Copula C und auf (0,1) gleichverteilten Rändern.

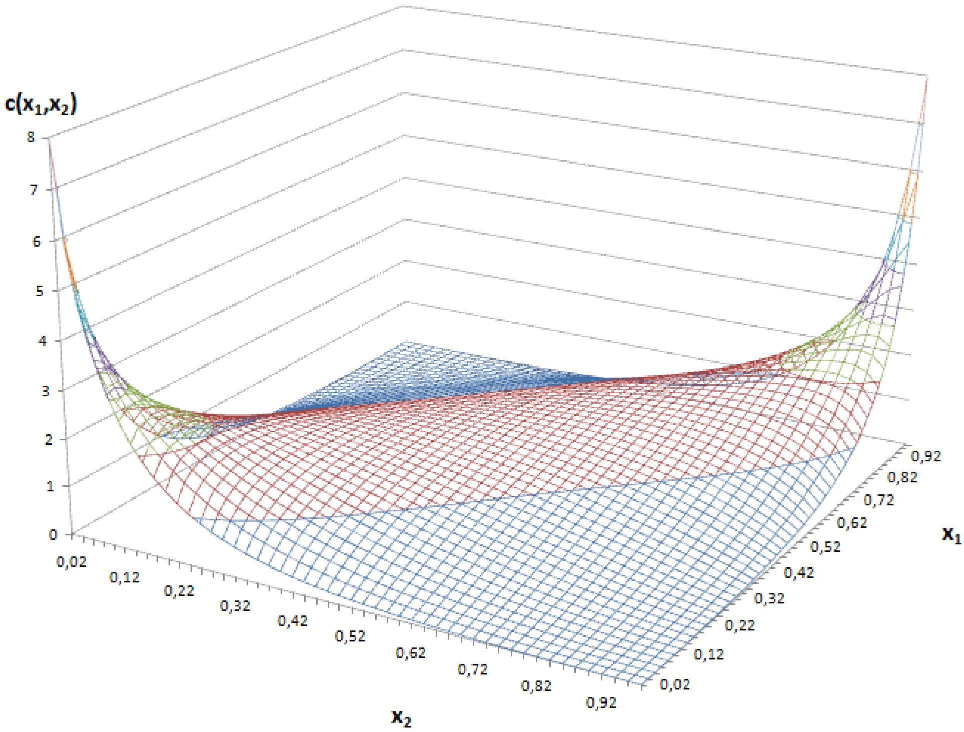

Abbildung 11: Dichte einer Gaußschen Copula mit einem Korrelationskoeffizient ρ von 0,7

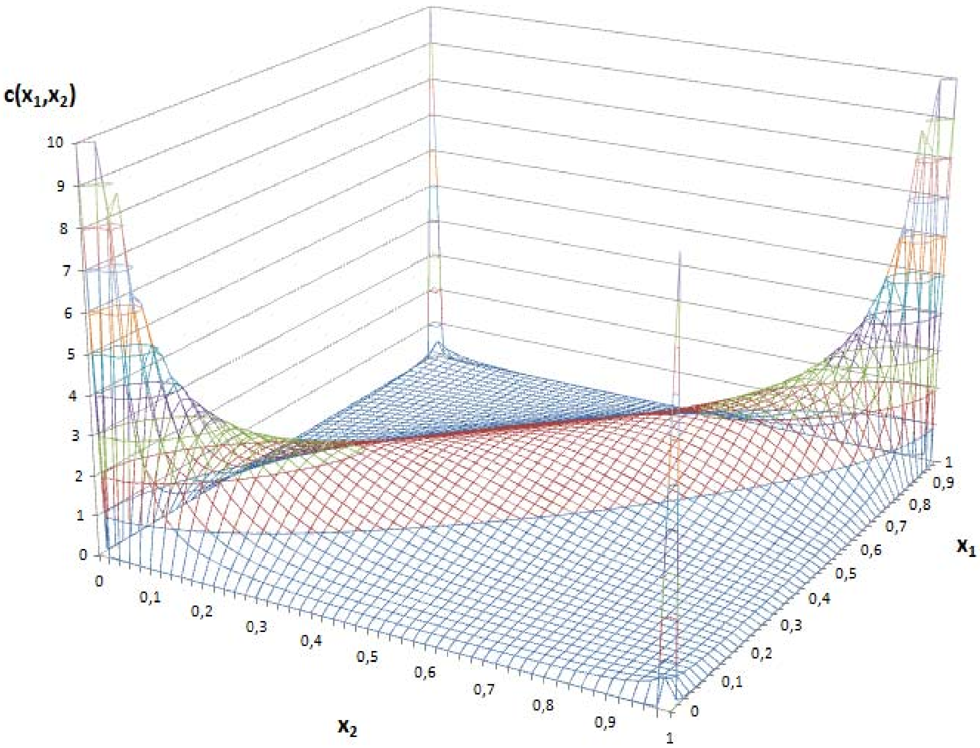

Abbildung 12: Dichte einer Studentschen Copula mit einem Korrelationskoeffizient ρ von 0,7 und ν = 2

Eine weitere Klasse von Copulae ist durch die archimedischen Copulae gegeben. Ihr gehören u. a. die Gumbel Copulae an. Obwohl die Gumbel Copulae zu einer anderen Klasse gehören als die Studentschen Copulae, weisen auch sie die Eigenschaft einer hohen Abhängigkeit im Verteilungsende auf, allerdings nicht wie die Studentschen Copulae in beiden Verteilungsenden, sondern nur im oberen (vgl. Abbildung 13).[157] Im unteren Verteilungsende weisen die Gumbel Copulae dagegen immer asymptotische Unabhängigkeit auf. Auch sie sind deshalb zur Modellierung von Extremereignissen geeignet. Insgesamt passen sie i. d. R. sogar noch besser zu den empirischen Schadenbeobachtungen: Zum einen können damit Schäden aus Stressszenarien[158], zwischen denen häufig Abhängigkeiten vorhanden sind, adäquat erfasst werden, zum anderen aber auch gewöhnliche Schäden (geringerer Höhe), die meist unabhängig voneinander auftreten. Formel 31 zeigt die Definition der Gumbel Copulae:

$$C_\beta^{Gum}(u_1, \dots, u_n) = e^{\left(-\left(\sum_{i=1}^{n}(-ln(u_i))^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)},$$

mit $\beta \geq 1$ als Strukturparameter.

Formel 31: Gumbel Copulae

Wird als Strukturparameter Eins gewählt, so erhält man die multivariate Verteilung unabhängiger Zufallsvariablen. Nur in diesem Fall weisen die Gumbel Copulae auch keine asymptotische Abhängigkeit im oberen Verteilungsende auf. Allgemein können mit einer Gumbel Copula nur Abhängigkeitsstrukturen von Unabhängigkeit oder *positiver* Abhängigkeit dargestellt werden.[159]

Eine weitere Copulaefamilie aus der Klasse der archimedischen Copulae stellen die Cook-Johnson Copulae dar.[160] Konträr zu den Gumbel Copulae weisen sie gerade im unteren Verteilungsende asymptotische Abhängigkeit auf und im oberen Verteilungsende asymptotische Unabhängigkeit (vgl. Abbildung 14). Sie eig-

[157] Damit sind diese Copulae asymmetrisch. Vgl. *Faivre, F.* (2003), S. 6 sowie *Venter, G. G.* (2002), S. 72.

[158] Damit sind Szenarien mit extrem hohen und ungünstigen Abweichungen von der jeweils erwarteten Entwicklung gemeint. Vgl. *Zwiesler, H.-J.* (2005), S. 125 f.

[159] Vgl. *Faivre, F.* (2003), S. 6.

[160] Die Cook-Johnson Copulae werden in der Literatur auch als Pareto Copulae und Clayton Copulae bezeichnet. Vgl. *Nelsen, R. B.* (2006), S. 118 sowie *Tang, A./Valdez, E. A.* (2006), S. 6.

nen sich daher z. B. besonders zur Modellierung von Abhängigkeiten zwischen Aktienindexrenditen.[161] Formal können sie wie folgt dargestellt werden:

$$C_\beta^{C-J}(u_1,\dots,u_n) = \left(u_1^{-\beta} + \cdots + u_n^{-\beta} - n + 1\right)^{-\frac{1}{\beta}},$$
$$\text{mit } \beta > 0 \text{ als Strukturparameter.}$$

Formel 32: Cook-Johnson Copulae

Schließlich soll noch eine Copulaefamilie vorgestellt werden, die ebenfalls zu den archimedischen Copulae gehört, jedoch weder im oberen noch im unteren Verteilungsende asymptotische Abhängigkeit aufweist. Sie bildet daher eine ähnliche Abhängigkeitsstruktur wie die Familie der Normal Copulae ab, allerdings mit dem Unterschied dass sie in den Verteilungsenden noch weniger Abhängigkeit aufweist (vgl. Abbildung 15). Es handelt sich hierbei um die Frank Copulae.[162] Folgende Formel 33 zeigt, wie sie definiert ist:

$$C_\beta^{Fra}(u_1,\dots,u_n) = -\frac{1}{\beta}\,ln\left(1 + \frac{\left(e^{-\beta u_1} - 1\right)\dots\left(e^{-\beta u_n} - 1\right)}{(e^{-\beta} - 1)^{n-1}}\right),$$
$$\text{mit } \beta > 0 \text{ als Strukturparameter.}$$

Formel 33: Frank Copulae

Auch für die drei Familien archimedischer Copulae sollen im Folgenden jeweils bivariate Vertreter durch die Graphen ihrer Dichte visuell dargestellt werden.

161 Vgl. *Ané, T./Kharoubi, C.* (2003), S. 429.
162 Vgl. *Ané, T./Kharoubi, C.* (2003), S. 417, *Junker, M./May, A.* (2005), S. 432 sowie *Venter, G. G.* (2002), S. 84 f.

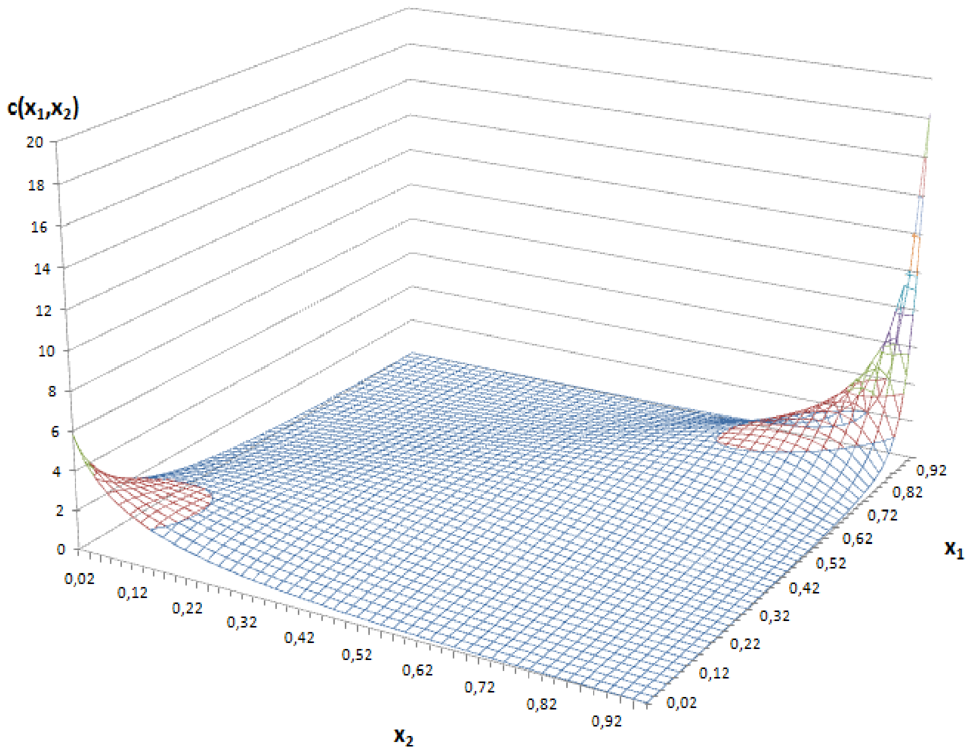

Abbildung 13: Gumbel Copula mit Srukturparameter β = 2

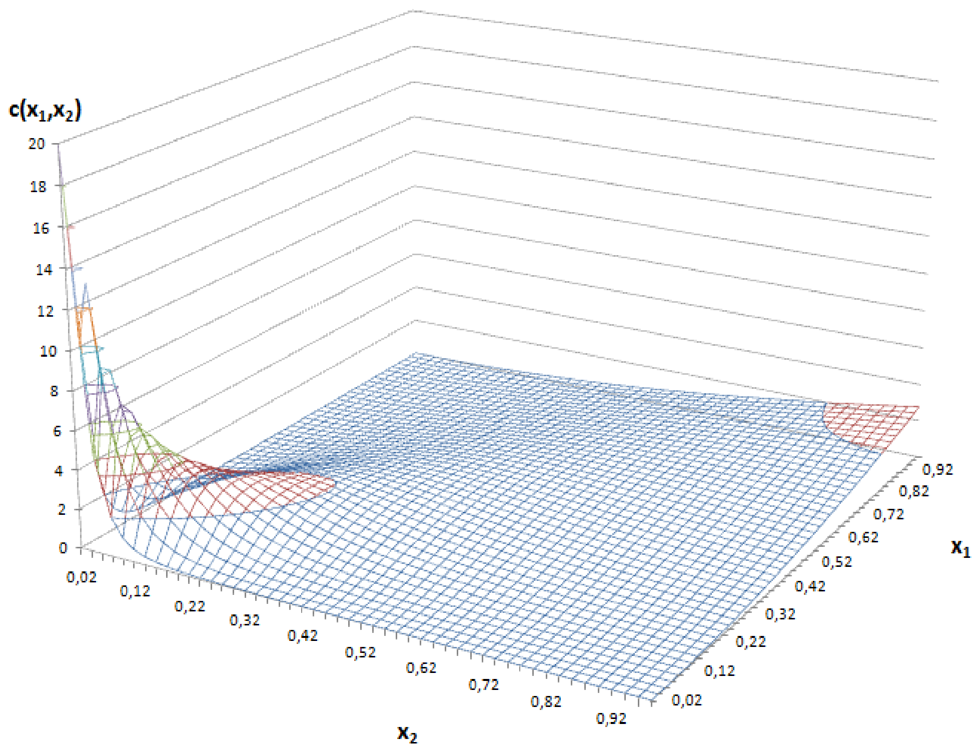

Abbildung 14: Cook-Johnson Copula mit Srukturparameter β = 2

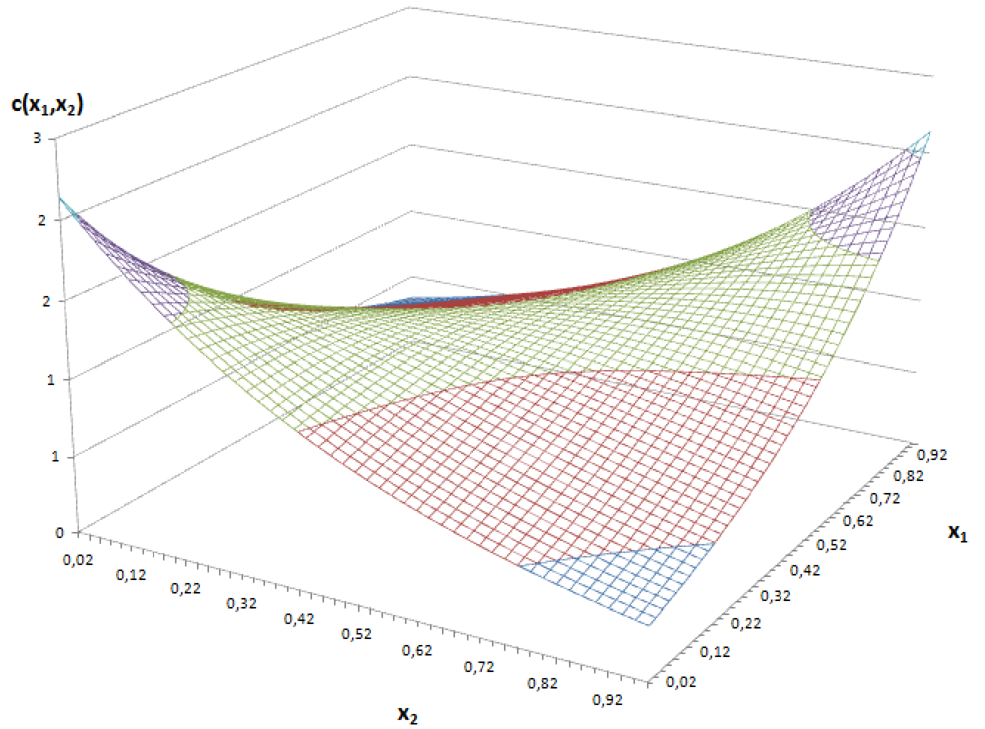

Abbildung 15: Frank Copula mit Srukturparameter β = 2

3.2.3 Ermittlung von Copulae und multivariaten Verteilungen

Um das Konzept der Copula zur Abbildung der Abhängigkeiten zwischen Risiken in einem Versicherungsunternehmen anwenden zu können, müssen zunächst die entsprechende Copulae identifiziert werden. Hierzu stehen zwei alternative Methoden zur Verfügung: parametrische und nicht-parametrische Vorgehensweisen. Bei ersteren wird der Copulatyp im Voraus festgelegt.[163] Aus den vorigen Ausführungen wird schnell klar, dass die verschiedenen Copulatypen jeweils spezifische Eigenschaften besitzen, mit denen unterschiedliche Abhängigkeitsstrukturen beschrieben werden können. Es muss also ein Copulatyp ausgewählt werden, dessen Eigenschaften sich möglichst gut für die Beschreibung der jeweiligen Abhängigkeitsstruktur eignen. Dies kann z. B. über die Anwendung eines bestimmten Verfahrens geschehen, mit dem ermittelt wird, welcher Typ archimedischer Copulae am besten zu beobachteten Daten passt.[164]

Wenn dies geschehen ist, gilt es aber noch die Parameter der Copula so anzupassen, dass die Abhängigkeitsstrukturen möglichst so, wie sie in der Realität beo-

[163] Vgl. *Szegö, G.* (2002), S. 1268.
[164] Vgl. *Frees, E. W./Valdez, E. A.* (1998), S. 9 f. und zu dem Verfahren im Speziellen *Genest, C./Rivest, L.-P.* (1993).

bachtet wurden, abgebildet werden. Dies kann durch Anwendung der Maximum-Likelihood-Methode zusammen mit der Abschätzung der Parameter für die Randverteilungen geschehen.[165] Der Vorteil der Anwendung von Copulae liegt aber gerade in der Trennung der Abschätzung der Randverteilungen und der Abschätzung der Abhängigkeitsstruktur. Alternativ ist deshalb auch ein Vorgehen in zwei Schritten – zunächst werden die Parameter der Randverteilungen geschätzt und anschließend die der Copula – möglich.[166]

Im Gegensatz dazu wird beim nicht-parametrischen Ansatz aus den vorhandenen Daten eine empirische Copula bestimmt ohne a priori einen bestimmten Copulatyp festzulegen.[167] Wie die tatsächliche multivariate Verteilungsfunktion durch die tatsächliche Copula und die tatsächlichen Randverteilungen festgelegt ist, so ist auch die empirische multivariate Verteilungsfunktion durch die empirische Copula und die empirischen Randverteilungen festgelegt. Zudem gilt, dass mit zunehmendem Umfang der Daten die empirische Copula gegen die tatsächliche Copula konvergiert.[168]

Insgesamt muss bei der multivariaten Modellierung prinzipiell ähnlichen Anforderungen wie bei der univariaten Modellierung genügt werden.[169] Im Unterschied zur Modellierung univariater Verteilungen konnten allerdings bei der Modellierung multivariater Verteilungen erst sehr wenige Erfahrungen gesammelt werden. Ein weiteres Problem ergibt sich daraus, dass die Abschätzung einer adäquaten Copula stark von den bereits im Voraus zu bestimmenden Randverteilungen abhängt.[170] Bei einer parametrischen Vorgehensweise könnte dieses aber z. B. dadurch teilweise behoben werden, dass zu einem sog. semi-parametrischen Ansatz übergegangen wird. Dabei wird die Copula selbst über einen parametrischen Ansatz angepasst, dazu werden jedoch nicht-parametrische, empirische Randverteilungsfunktionen verwendet.[171]

165 Vgl. hierzu *Frees, E. W./Valdez, E. A.* (1998), S. 14 f.
166 Vgl. *Junker, M./May, A.* (2005), S. 437.
167 Vgl. *Szegö, G.* (2002), S. 1268.
168 Vgl. *Ané, T./Kharoubi, C.* (2003), S. 425.
169 Vgl. *Pfeifer, D.* (2003), S. 681.
170 Vgl. *Pfeifer, D.* (2003), S. 681.
171 Vgl. *Junker, M./May, A.* (2005), S. 437. In *Ané, T./Kharoubi, C.* (2003), S. 424-431 wird z. B. auf diese Weise eine bestimmte Cook-Johnson Copula als die parametrische Copula identifiziert, die die Abhängigkeiten zwischen den Renditen verschiedener Aktienindizes am besten darstellen kann.

3.3 Beurteilung

In den vorangegangen Abschnitten wurden zwei völlig verschiedene Konzepte zur Darstellung der Abhängigkeiten zwischen Risiken beschrieben. Während die zuerst vorgestellten Abhängigkeitsmaße Abhängigkeiten zwischen Risiken anhand von nur einer einzelnen Kennzahl beschreiben (bzw. anhand einer Matrix von Kennzahlen bei Dimensionen, die größer sind als zwei), können durch Copulae multivariate Verteilungen konstruiert werden, die die gesamte Abhängigkeitsstruktur vollständig erfassen. Beide Konzepte sollen im Folgenden beurteilt werden. Zunächst werden jedoch noch einige Kriterien dargestellt, denen spezielle Abhängigkeitsmaße gerecht werden sollten.

3.3.1 Wünschenswerte Eigenschaften für Abhängigkeitsmaße

Die in Abschnitt 3.1.1 und Abschnitt 3.1.2 beschriebenen Abhängigkeitsmaße sollen anhand der Erfüllung von fünf Eigenschaften beurteilt werden, die bei einem Maß für die Abhängigkeit zwischen Risiken wünschenswert sind. Dazu sollen diese Eigenschaften zunächst genannt und erläutert werden. Es sei $\delta(\quad)$ ein Abhängigkeitsmaß, dann können die Eigenschaften wie folgt beschrieben werden:[172]

1. Symmetrie: $\delta(X,Y) = \delta(Y,X)$
2. Normierung: $-1 \leq \delta(X,Y) \leq 1$
3. Schluss von und auf Ko- bzw. Countermonotonität:
    a. $\delta(X,Y) = 1 \Leftrightarrow X,Y$ sind komonoton
    b. $\delta(X,Y) = -1 \Leftrightarrow X,Y$ sind countermonoton
4. Invarianz bzgl. streng monotoner Transformationen: Für eine auf dem Wertebereich von X streng monotone Transformation $T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ folgt:
    a. $\delta(T(X),Y) = \delta(X,Y)$, falls T streng monoton steigend ist
    b. $\delta(T(X),Y) = -\delta(X,Y)$, falls T streng monoton fallend ist
5. Schluss von und auf Unabhängigkeit:

    $\delta(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X,Y$ sind unabhängig

172 Vgl. *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (2002), S. 15.

Allerdings kann ein Abhängigkeitsmaß niemals all diese fünf Eigenschaften gleichzeitig besitzen, da die vierte Eigenschaft die fünfte Eigenschaft ausschließt und umgekehrt.[173]

Die erste Eigenschaft ist für ein Abhängigkeitsmaß wünschenswert, weil ansonsten die Stärke der Abhängigkeit von der Reihenfolge der betrachteten Risiken nicht unabhängig wäre. Die Erfüllung des zweiten Kriteriums macht die Abhängigkeit zwischen verschiedenen Paaren von Zufallsvariablen vergleichbar, da dann ein einheitlicher Maßstab für die Abhängigkeit gilt. Ein Schluss von und auf Ko- bzw. Countermonotonität ermöglicht das sofortige Erkennen stark abhängiger Zufallsvariablen. Gilt (wie z. B. beim linearen Korrelationskoeffizienten nach Pearson) nicht, dass bei perfekt abhängigen Zufallsvariablen das Maß zwingend einen Betrag von Eins annimmt, so kann eine starke Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen evtl. nicht direkt erkannt werden.

Die Invarianz bzgl. streng monotoner Transformationen ist v. a. für praktische Anwendungen wichtig. Wird eine stochastische Größe X mittels einer deterministischen streng monotonen Funktion T in eine andere, davon abhängige Größe $T(X)$ transformiert, so ist die Abhängigkeitsstruktur zwischen X und einer zweiten stochastischen Größe Y dieselbe wie zwischen $T(X)$ und Y. Deshalb sollte auch das Abhängigkeitsmaß jeweils denselben Wert annehmen. Die fünfte Eigenschaft ist für ein Abhängigkeitsmaß wichtig, damit die Unabhängigkeit zwischen Risiken erkannt werden kann. Gilt (wie ebenfalls beim linearen Korrelationskoeffizienten nach Pearson), dass bei einem Betrag des Abhängigkeitsmaßes von Null nicht auf Unabhängigkeit geschlossen werden kann und umgekehrt, so kann eine möglicherweise bestehende Unabhängigkeit von Risiken (zumindest mit dem Abhängigkeitsmaß) nicht identifiziert werden.

173 Zum Beweis hierfür vgl. *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (2002), S. 15.

3.3.2 Beurteilung der vorgestellten Konzepte zur Beschreibung von Abhängigkeiten

Zunächst sollen die Abhängigkeitsmaße betrachtet werden. Das bekannteste Maß, der lineare Korrelationskoeffizient nach Pearson, besitzt lediglich die ersten beiden der im vorigen Abschnitt vorgestellten wünschenswerten Eigenschaften.[174] Er ist daher Spearman's Rangkorrelation und Kendall's τ unterlegen. Diese besitzen nämlich die ersten vier der genannten wünschenswerten Eigenschaften.[175] Zudem ist der lineare Korrelationskoeffizient nach Pearson nur bei Vorliegen endlicher Varianzen definiert. Im Gegensatz zum Pearsonschen Korrelationskoeffizienten messen Spearman's Rangkorrelation und Kendall's τ außerdem nicht nur die lineare Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen, sondern allgemein die monotone Abhängigkeit.[176] Ihre Berechnung ist in manchen Fällen schwieriger, in manchen Fällen aber auch einfacher als die des linearen Korrelationskoeffizienten.[177]

Das in Abschnitt 3.1.3 vorgestellte Maß für die Abhängigkeit in den Verteilungsenden kann nicht mit dem linearen Korrelationskoeffizienten oder den Rangkorrelationsmaßen verglichen werden, da es nur auf die Abhängigkeit in den Verteilungsenden fokussiert. Es ist also dann vorzuziehen und anzuwenden, wenn die jeweilige Fragestellung eine solche Betrachtung erfordert. Wie bereits erwähnt, ist dies v. a. dann der Fall, wenn es um die Modellierung von Extremereignissen geht. Eine Beurteilung anhand der Erfüllung der oben dargestellten wünschenswerten Eigenschaften erscheint vor diesem Hintergrund nicht sinnvoll.

Mit Hilfe von Copulae können jedoch multivariate Verteilungen konstruiert werden, die Abhängigkeitsstrukturen voll und ganz abbilden. Somit ermöglichen sie auch die vollständige Information über Risiken und ihre Abhängigkeit in einem Versicherungsunternehmen, wohingegen bei der Verwendung von Abhängigkeitsmaßen die Abhängigkeitsstruktur auf eine einzelne Kennzahl reduziert wird und somit wichtige Informationen verloren gehen können. Dies wird auch aus der Tatsache deutlich, dass zwar aus der Copula die Korrelation bestimmt werden

174 Vgl. *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (2002), S. 15.

175 Zumindest wenn sie auf stetige Verteilungsfunktionen angewendet werden. Vgl. *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (2002), S. 15.

176 Vgl. *Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D.* (2002), S. 16.

177 Arbeitet man beispielsweise mit multivariaten Normalverteilungen oder multivariaten Studentschen Verteilungen ist die Berechnung des momentenbasierten linearen Korrelationskoeffizienten einfacher. Liegen jedoch Verteilungen vor, deren Abhängigkeit durch z. B. eine Gumbel Copula repräsentiert wird, kann dafür die Berechnung der Rangkorrelationsmaße einfacher sein.

kann, jedoch kann aus der Korrelation i. A. nicht die Copula bestimmt werden. Gerade bei Abhängigkeiten, die nicht linear sind, sondern sich zum größten Teil in den Verteilungsenden wiederfinden, kann es so zu einer deutlichen Unterschätzung des Risikos kommen.

Technisch gesehen bieten Copulae den Vorteil, dass die Randverteilungen und somit die Einzelrisiken zunächst separat unter Berücksichtigung der jeweiligen Gegebenheiten modelliert werden können und die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Einzelrisiken unabhängig davon ermittelt werden kann. Zudem sind Copulae – wie auch die Rangkorrelationsmaße – invariant gegen sämtliche monotone Transformationen.[178]

Gegenüber der direkten Modellierung multivariater Verteilungen aus Randverteilungen haben Copulae zudem den Vorteil, dass sie unabhängig vom Typ der Randverteilungen angewendet werden können, d. h. aus einzelnen Randverteilungen kann mit den Copulae auch dann eine multivariate Verteilung konstruiert werden, wenn die Randverteilungen nicht alle zu derselben Familie gehören und nicht bereits ein Abhängigkeitsmaß zwischen ihnen ermittelt wurde (vgl. Abschnitt 3.2.1).

In Bezug auf die Qualität der Ergebnisse der Abschätzung von Abhängigkeiten ist somit das Konzept der Copulae dem Konzept der Abhängigkeitsmaße eindeutig überlegen. Vorteile weisen die Abhängigkeitsmaße lediglich in der praktischen Anwendung auf, da sie wesentlich einfacher ermittelbar sind, dabei weniger Aufwand betrieben werden muss und wesentlich mehr Erfahrung vorhanden ist. Wird die Anwendung von Copulae jedoch weiter verbreitet, so ist davon auszugehen, dass sich diese Probleme in Zukunft reduzieren werden.

Weitere Defizite des Konzeptes der Copulae ergeben sich aus der Tatsache, dass Copulae wohl die Abhängigkeitsstruktur vollständig abbilden, jedoch nicht bei der Untersuchung von Ursache-Wirkungszusammenhängen helfen können, da durch sie nicht erkennbar wird, ob mehrere Zufallsvariablen gleichermaßen voneinander abhängen oder ob nur eine Zufallsvariable auf eine andere wirkt, ohne dass die Umkehrung hiervon gilt. Als Problem im Zusammenhang mit Copulae werden außerdem die hohen Mengen an Daten genannt, die bei der Modellierung – gerade

[178] Vgl. *Pfeifer, D.* (2003), S. 679.

von komplexen Copulae – notwendig sind. Gerade in den Verteilungsenden, d. h. auch für Extremereignisse, sind diese aber knapp.

Insgesamt kann man aber zu dem Schluss kommen, dass zur Beschreibung der Abhängigkeitsstrukturen zwischen einzelnen Risiken in einem Versicherungsunternehmen, wenn möglich, Copulae angewendet werden sollten, da Kennzahlen Abhängigkeitsstrukturen nicht vollumfänglich wiedergeben können, somit weit weniger Informationen liefern und es schließlich zu einer Unterschätzung des tatsächlich vorhandenen Risikos in einem Versicherungsunternehmen kommen kann. Gerade bei der internen Modellierung der Risikolage eines Versicherers ist die Anwendung von Copulae besonders geeignet.

Literaturverzeichnis

Acerbi, C./Tasche, D. (2002), On the coherence of expected shortfall, in: Journal of Banking and Finance 2002, Vol. 26, Issue 7, S. 1487-1503.

Albrecht, P. (1992), Zur Risikotransformationstheorie der Versicherung: Grundlagen und ökonomische Konsequenzen, Karlsruhe 1992.

Albrecht, P. (2003), Zur Messung von Finanzrisiken, Mannheim 2003.

Allianz SE (Hrsg.) (2008), Geschäftsbericht 2007 Allianz Gruppe, München 2008.

Ané, T./Kharoubi, C. (2003), Dependence Structure and Risk Measure, in: Journal of Business 2003, Vol. 76, no. 3, S. 411-438.

Artzner, P./Delbaen, F./Eber, J.-M./Heath, D. (1999), Coherent Measures of Risk, in: Mathematical Finance 1999, Vol. 9, No. 3, S. 203-228.

Basedow, J. (2003), Regulierung und Wettbewerb in marktwirtschaftlichen Ordnungen, in: Rechtspolitisches Forum 2003, Heft 14, S. 3-19.

Barth, M. M. (2000), A Comparison of Risk-Based Capital Standards Under the Expected Policyholder Deficit and the Probability of Ruin Approaches, in: The Journal of Risk and Insurance 2000, Vol. 67, No. 3, S. 397-413.

Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (Hrsg.) (2003), Management operationeller Risiken – Praxisempfehlungen für Banken und Bankenaufsicht (Februar 2003), URL: http://www.bis.org/publ/bcbs96de.pdf (30.5.2008).

Brohm, A./König, A. (2004), Anforderungen an die Abbildung von Versicherungsunternehmen im Rahmen mathematisch-ökonomischer Modelle in der Unternehmenspraxis, in: Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft 2004, 93. Band, Heft 1, S. 3-16.

Bukowski, J./Korn, L./Wartenberg, D. (1995), Correlated Inputs in Quantitative Risk Assessment: The Effects of Distributional Shape, in: Risk Analysis 1995, Vol. 15, No. 2, S. 215-219.

Bunge, A. (2002), Operational Risk Insurance – Treatment under the New Basel Accord (Frühjahr 2002), URL: http://www.law.harvard.edu/programs/pifs/pdfs/aino_bunge.pdf (31.5.2008).

Butsic, R. P. (1994), Solvency Measurement for Property-Liability Risk-Based Capital Applications, in: The Journal of Risk and Insurance 1994, Vol. 61, No. 4, S. 656-690.

Canadian Institute of Actuaries (Hrsg.) (2003), Report of the CIA Subcommittee on Credit Risk (21.10.2003), URL: http://www.actuaries.ca/publications/2003/203087e.pdf (25.5.2008).

Conference of the Insurance Supervisory Services of the Member States of the European Union (Hrsg.) (2002), Prudential Supervision of Insurance Undertakings (Dezember 2002), URL: http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/solvency/solvency2-conference-report_en.pdf (20.9.2008).

Cramer, E./Kamps, U. (2008), Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik – Ein Skript für Studierende der Informatik, der Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften, 2. Auflage, Berlin Heidelberg 2008.

Daimler AG (Hrsg.) (2008), Geschäftsbericht 2007, Stuttgart 2008.

Daníelsson, J. (2002), The emperor has no clothes: Limits to risk modelling, in: Journal of Banking and Finance 2002, Vol. 26, Issue 7, S. 1273-1296.

Denuit, M./Dhaene, J./Goovaerts, M./Kaas, R. (2005), Actuarial Theory for Dependent Risks – Measures, Orders and Models, Chichester 2005.

Di Clemente, A./Romano, C. (2004), Measuring and Optimizing Portfolio Credit Risk: A Copula-based Approach, in: Economic Notes 2004, Vol. 33, no. 3, S. 325-357.

Djehiche, B./Hörfelt, P. (2005), Standard approaches to asset & liability risk, in: Scandinavian Actuarial Journal 2005, Vol. 2005, No. 5, S. 377-400.

Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D. (1999), Correlation: Pitfalls and Alternatives (März 1999), URL: http://www.math.ethz.ch/~mcneil/ftp/risk.pdf (27.6.2008).

Embrechts, P./McNeil, A./Straumann, D. (2002), Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls (Juli 1999), URL: http://www.math.ethz.ch/~strauman/preprints/pitfalls.pdf (18.6.2008).

Europäische Kommission (Hrsg.) (2003), MARKT/2509/03-DE (3.3.2003), URL: http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/markt-2509-03/markt-2509-03_de.pdf (17.5.2008).

Faivre, F. (2003), Copula: A new vision for Economic Capital and application to a four line of business company (August 2003), URL: http://www.actuaries.org/ASTIN/Colloquia/Berlin/Faivre.pdf (19.6.2008).

Farny, D. (2006), Versicherungsbetriebslehre, 4. Auflage, Karlsruhe 2006.

Fishburn, P. C. (1977), Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns, in: American Economic Review 1977, Vol. 67, NO. 2, S. 116-126.

Frees, E. W./Valdez, E. A. (1998), Understanding Relationships Using Copulas, in: North American Actuarial Journal 1998, Vol. 2, Number 1, S. 1-25.

Genest, C./Rivest, L.-P. (1993), Statistical Inference Procedures for Bivariate Archimedean Copulas, in: Journal of the American Statistical Association 1993, Vol. 88, No. 423, S. 1034-1043.

Gründl, H./Winter, M. (2005), Risikomaße in der Solvenzsteuerung von Versicherungsunternehmen, in: Gründl, H./Perlet, H. (Hrsg.) (2005), Solvency II und Risikomanagement – Umbruch in der Versicherungswirtschaft, Wiesbaden 2005, S. 183-204.

Hartung, T. (2007), Eigenkapitalregulierung bei Versicherungsunternehmen – Eine ökonomisch-risikotheoretische Analyse verschiedener Solvabilitätskonzeptionen, Karlsruhe 2007.

Helten, E. (1994), Die Erfassung und Messung des Risikos, Wiesbaden 1994.

Henking, A./Bluhm, C./Fahrmeir, L. (2006), Kreditrisikomessung – Statistische Grundlagen, Methoden und Modellierung, Berlin Heidelberg New York 2006.

Hürlimann, W. (2002), Analytical Bounds for Two Value-at-Risk Functionals, in: ASTIN Bulletin 2002, Vol. 32, No. 2, S. 235-265.

International Actuarial Association (Hrsg.) (2004), A Global Framework for Insurer Solvency Assessment: Research Report of the Insurer Solvency Assessment Working Party (2004), URL:

http://www.actuaires.org/LIBRARY/Papers/Global_Framework_Insurer_Solvency_Assessment-public.pdf (22.5.2008).

Junker, M./May, A. (2005), Measurement of aggregate risk with copulas, in: Econometrics Journal 2005, Vol. 8, (3), S. 428-454.

Klugman, S. A./Panjer, H. H./Willmot, G. E. (2004), Loss Models – From Data to Decisions, 2. Auflage, Hoboken New Jersey 2004.

Kölschbach, J. (2004), Aktuelle Entwicklungen in der Beaufsichtigung und Rechnungslegung von Versicherungsunternehmen: IFRS und Solvency II, in: Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft 2004, 93. Band, Heft 4, S. 675-692.

Koryciorz, S. (2004), Sicherheitskapitalbestimmung und -allokation in der Schadenversicherung – Eine risikotheoretische Analyse auf der Basis des Value-at-Risk und des Conditional Value-at-Risk, Karlsruhe 2004.

Kottke, T. (2006), Fair Value Bilanzierung versicherungstechnischer Verpflichtungen vor dem Hintergrund der Entwicklung und der Implementierung eines einzuführenden IFRS für Versicherungsverträge, Diss., Gießen 2006.

KPMG (Hrsg.) (2002), Study into the methodologies to assess the overall financial position of an insurance undertaking from the perspective of prudential supervision (Mai 2002), URL: http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/solvency/solvency2-study-kpmg_en.pdf (26.5.2008).

Lowe, S. P./Stanard, J. N. (1997), An Integrated Dynamic Financial Analysis and Decision Support System for a Property Catastrophe Reinsurer, in: ASTIN Bulletin 1997, Vol. 27, No. 2, S. 339-371.

Mack, T. (2002), Schadenversicherungsmathematik, 2. Auflage, Karlsruhe 2002.

Merino, S. (2000), Measuring Counterparty Credit Risk from Reinsurance (März 2000), URL: http://www.istfin.eco.unisi.ch/seminar-papers-merino.pdf (25.5.2008).

Mummenhoff, A. (2007), Analyse des deutschen Standardmodells für Lebensversicherer unter Solvency II, Ulm 2007.

Nelsen, R. B. (2006), An Introduction to Copulas, 2. Auflage, New York 2006.

Nguyen, T. (2007), Grenzen der Versicherbarkeit von Katastrophenrisiken - Erweiterungsmöglichkeiten durch Rückversicherung, Katastrophenanleihen und Versicherungsderivate, Wiesbaden 2007.

Nguyen, T. (2008), Handbuch der wert- und risikoorientierten Steuerung von Versicherungsunternehmen, Karlsruhe 2008.

Operational Risk Insurance Consortium (Hrsg.) (o. J.), Das Operational Risk Insurance Consortium (ORIC) – Eine Initiative zur Bereitstellung essentieller Risikodaten für Versicherungsunternehmen, URL: http://www.abioric.com/media/741/oric_brochure_ger.pdf (1.6.2008).

Pedersen, C. S./Satchell, S. E. (1998), An Extended Family of Financial-Risk Measures, in: The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory 1998, Vol. 23, Number 2, S. 89-117.

Pfeifer, D. (2003), Möglichkeiten und Grenzen der mathematischen Schadenmodellierung, in: Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft 2003, 92. Band, Heft 4, S. 665-696.

Romeike, F./Müller-Reichart, M. (2005), Risikomanagement in Versicherungsunternehmen – Grundlagen, Methoden, Checklisten und Implementierung, Weinheim 2005.

Rootzén, H./Klüppelberg, C. (1999), A single number can't hedge against economic catastrophes (3.10.1999), URL: http://www-m4.mathematik.tu-muenchen.de/m4/Papers/Klueppelberg/cat991003.ps.gz (4.6.2008).

Schmeiser, H. (2005), Interne Risikosteuerungsmodelle unter Solvency II (April 2005), URL: http://www.ivw.unisg.ch/org/ivw/web.nsf/SysWebRessources/WP5/$FILE/WP5.pdf (15.6.2008).

Schradin, H. R./Gronenberg, S./Kreeb, M./Reichenbach, B./Willmes, O./Zons, M. (2003), Lebensversicherung: Beim Sicherheitskapital ist die Decke sehr dünn geworden – Datenanalyse 2002 zur Kapitalausstattung deutscher Lebensversicherungsunternehmen, in: Versicherungswirtschaft 2003, Jg. 58, Heft 18, S. 1407-1412.

Schwake, E. (1988), Das versicherungstechnische Risiko als arteigenes Risiko der Versicherungsunternehmen?, in: Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft 1988, 77. Band, S. 61-81.

Sklar, M. (1959), Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, in: Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris 1959, Heft 8, S. 229-231.

Stone, B. K. (1973), A General Class of Three-Parameter Risk Measures, in: The Journal of Finance 1973, Vol. 28, Issue 3, S. 675-685.

Surrey, I. (2006), Die Bilanzierung von Versicherungsgeschäften nach IFRS, Düsseldorf 2006.

Szegö, G. (2002), Measures of risk, in: Journal of Banking and Finance 2002, Vol. 26, Issue 7, S. 1253-1272.

Tang, A./Valdez, E. A. (2006), Economic Capital and the Aggregation of Risks using Copulas (2006), URL: http://www.ica2006.com/Papiers/282/282.pdf (20.6.2008).

Tasche, D. (2002), Expected shortfall and beyond, in: Journal of Banking and Finance 2002, Vol. 26, Issue 7, S. 1519-1533.

Tripp, M. H./Bradley, H. L./Devitt, R./Orros, G. C./Overton, G. L./Pryor, L. M./Shaw, R. A. (2004), Quantifying Operational Risk in General Insurance Companies, in: British Actuarial Journal 2004, Vol. 10, V, S. 919-1012.

Venter, G. G. (2002), Tails of Copulas, in: Proceedings of the Casualty Actuarial Society 2002, Vol. 89, Number 171 Part 2, S. 68-113.

Zwiesler, H.-J. (2005), Asset-Liability-Management – die Versicherung auf dem Weg von der Planungsrechnung zum Risikomanagement, in: Spremann, K. (Hrsg.) (2005), Versicherungen im Umbruch – Werte Schaffen, Risiken managen, Kunden gewinnen, Berlin Heidelberg 2005, S. 117-131.

Schriften der Wissenschaftlichen Hochschule Lahr

Bisher erschienen:

Heft 1: Günther Seeber, Helmut Keller
Kooperatives Marketing in Bildungsträgernetzwerken
Januar 2003, 37 Seiten, ISBN 3-937727-00-0

Heft 2: Martin Reckenfelderbäumer, Michael Welling
Fußball als Gegenstand der Betriebswirtschaftslehre.
Leistungstheoretische und qualitätspolitische Grundlagen
März 2003, 87 Seiten, ISBN 3-937727-01-9

Heft 3: Sabine Boerner, Diether Gebert, Ralf Lanwehr, Joachim G. Ulrich
Belastung und Beanspruchung von Selbständigen und Angestellten
August 2003, 19 Seiten, ISBN 3-937727-02-7

Heft 4: Dirk Sauerland, Sabine Boerner, Günther Seeber
Sozialkapital als Voraussetzung von Lernen und Innovation
Dezember 2003, 64 Seiten, ISBN 3-937727-03-5

Heft 5: Helmut Keller, Peter Beinborn, Sabine Boerner, Günther Seeber
Selbstgesteuertes Lernen im Fernstudium.
Ergebnisse einer Studie an den AKAD Privathochschulen
September 2004, 61 Seiten, ISBN 3-937727-04-3

Heft 6: Günther Seeber u. a.
Betriebliche Weiterbildung in Rheinland-Pfalz.
Eine Analyse der Daten des IAB-Panels für 2001
September 2005, 44 Seiten, ISBN 3-937727-68-X

Heft 7: Seon-Su Kim, Martina Schmette, Dirk Sauerland
Studium im Wandel?! Die Erwartungen der Studierenden an betriebswirtschaftliche Erst- und Weiterbildungsstudiengänge.
Teil I: Die Wahl von Hochschultyp und Studienabschluss beim Erststudium: Motive, Erwartungen und Einschätzungen der Studierenden
Dezember 2005, 85 Seiten, ISBN 3-937727-69-8

Schriften der Wissenschaftlichen Hochschule Lahr

Heft 8: Martina Schmette, Seon-Su Kim, Dirk Sauerland
Studium im Wandel?! Die Erwartungen der Studierenden an betriebswirtschaftliche Erst- und Weiterbildungsstudiengänge.
Teil II: Zur Notwendigkeit wissenschaftlicher Weiterbildung: Die Nachfrage nach Weiterbildungsstudiengängen und ihre Determinanten
Dezember 2005, 87 Seiten, ISBN 3-937727-70-1

Heft 9: Tristan Nguyen, Robert D. Molinari
Versicherungsaufsicht in Deutschland –
Zur Notwendigkeit der Versicherungsregulierung
in der Marktwirtschaft
Januar 2009, 74 Seiten, ISBN 978-3-86692-014-9

Heft 10: Robert D. Molinari, Tristan Nguyen
Risikotheoretische Aspekte bei der Solvabilitätsregulierung von Versicherungsunternehmen
Januar 2009, 74 Seiten, ISBN 978-3-86692-015-6

Die Hefte stehen zum Teil auch kostenlos als pdf-Dateien zum Download zur Verfügung unter: www.whl-lahr.de/schriftenreihe.

Wissenschaftliche Hochschule Lahr
ISBN: 978-3-86692-015-6