

Vorlesungsmitschrift

Optische Nachrichtentechnik

Prof. Dr. Ernst Brinkmeyer
Arbeitsbereich Optische Kommunikationstechnik

Text: Christian Stimming

Grafik: Jens Cierullies, Sören Wildemann, Christian Stimming

Textergänzungen und kleinere Korrekturen:
Prof. Dr. Ernst Brinkmeyer, Dr.-Ing. Michael Krause

Stand: 4. Februar 2010.

Diese Vorlesungsmitschrift wurde uns freundlicherweise von Christian Stimming, Jens Cierullies und Sören Wildemann zur Verfügung gestellt. *Es handelt sich nicht um offizielle Vorlesungsunterlagen*, und wie viel von dem Inhalt mit dem Inhalt der jeweils aktuell gehaltenen Vorlesung übereinstimmt und ob sachliche Fehler drin sind, muß jeder für sich, z. B. durch Besuch der Vorlesung, herausfinden.

Obwohl dieses Skript nach bestem Wissen aller Beteiligten entstanden ist, können wir keine Garantie für die Richtigkeit übernehmen. Wir sind deshalb dankbar für **jeden** Hinweis auf Druckfehler, so daß wir nach und nach eine fehlerbereinigte Version anbieten können.

Inhaltsverzeichnis

1	Optische Grundlagen	7
1.1	Optische Wellen in transparenten Medien	7
1.1.1	MAXWELLSche Gleichungen	7
1.1.2	Wellengleichung (HELMHOLTZ-Gleichung)	8
1.1.3	Spezialfall einer homogenen ebenen Welle	9
1.1.4	Wellen in doppelbrechenden Medien, Polarisierung	10
1.2	Strahlenoptik und „Multimode“-Faser	11
1.2.1	Potenzprofile	11
1.2.2	Strahlen-DGL	11
1.2.3	Analytische Lösung der Strahlen-DGL in einfachen Fällen	13
1.2.4	Lokale numerische Apertur von Gradientenfaser	14
1.2.5	„Gruppen“-Laufzeiten des Lichts längs eines Strahles	14
1.3	Verhalten an dielektrischer Grenzfläche	15
1.3.1	Polarisierung senkrecht zur Einfallsebene	15
1.3.2	Polarisierung parallel zur Einfallsebene, TM-Polarisierung	17
1.3.3	Totalreflexion	17
1.3.4	Gesamt-Feldverteilung bei Totalreflexion	18
2	Planare Wellenleiter	21
2.1	Filmwellenleiter	21
2.1.1	TE-Moden (geführte Moden)	21
2.1.2	Lösung der charakteristischen Gleichung	23
2.1.3	Cut off	24
2.1.4	Geführte Leistung einer TE-Mode	25
2.1.5	TM-Moden in Schichtwellenleitern	25
2.1.6	Filmwellenleiter mit Gradientenprofil	25
2.1.7	Filmwellenleiter mit Dämpfung/Verstärkung	26
2.2	Planare Wellenleiter mit seitlicher Begrenzung	26
2.2.1	Lösungen der Wellengleichung im freien Raum	26
2.2.2	Lösungen der Wellengleichung im Filmwellenleiter	27
3	Wellenausbreitung in optischen Fasern	31
3.1	Stufenindexfaser	31
3.1.1	Wellengleichung	32
3.1.2	LP-Modenfelder für Stufenindexfaser	33
3.1.3	Grundmode	34
3.2	Geführte Moden, Strahlungsmoden und Leckwellen	35
4	Eigenschaften von Quarzglasfasern	37
4.1	Dämpfungsmechanismen	37
4.1.1	Absorption in SiO_2	37
4.1.2	Streuung	38
4.1.3	Dämpfung durch Verunreinigungen	41
4.1.4	Krümmungsverluste	41
4.2	Chromatische Dispersion	42

4.2.1	Wellenleiterdispersion	42
4.2.2	Material-Dispersion	46
4.2.3	Gruppenlaufzeit	46
4.2.4	Ausgangspulsbreite	47
4.2.5	Beispiele	47
4.2.6	Näherungsformeln	47
4.3	Polarisationsmodendispersion	48
4.3.1	Ursache	48
4.3.2	Folgen	48
4.3.3	Gruppenlaufzeitunterschiede	49
5	Grundlagen optischer Detektoren	51
5.1	PN-Photodiode	51
5.1.1	Grundstruktur Photodiode, PN-Übergang	51
5.1.2	Photostrom I_{ph}	52
5.1.3	Kennlinie einer Photodiode	53
5.2	PIN-Photodiode	53
5.2.1	Dynamisches Verhalten von PIN-Photodioden	53
5.2.2	PIN-Dioden als Heterostruktur-Photodioden	55
5.3	Lawinenphotodioden (Avalanche-, APD)	55
6	Grundlagen optischer Halbleiterquellen	57
6.1	Elektrolumineszenz, LEDs	57
6.1.1	Prinzip	57
6.1.2	Leistungsdichtespektrum	57
6.1.3	Ausgangsleistung	59
6.1.4	Modulation	60
7	Passive optische Komponenten	61
7.1	Faseranregung, Steckverbindungen	61
7.1.1	Multimodefasern und räumlich inkohärente Quellen	61
7.1.2	Monomodefasern	62
7.1.3	(Steck)Verbindungen	64
7.2	Überblick über verschiedene Komponenten	64
7.2.1	Richtkoppler	64
7.2.2	Wellenlängenselektive Koppler	65
7.2.3	Kaskadierte Koppler	65
7.2.4	Arrayed waveguide gratings, AWGs	65
7.2.5	Nicht-reziproke Komponenten	66
7.2.6	Modulatoren	66
7.2.7	Fasergitter	66
8	Rauschen in Photodioden	67
8.1	Spektrale Leistungsdichte	67
8.1.1	Definition Leistungsdichte	67
8.1.2	Summe von Einzelereignissen	68
8.1.3	Verallgemeinerung	69
8.2	Schrotrauschen des Photostroms	69
8.2.1	Photostrom durch Absorption einzelner Teilchen	69
8.2.2	Interpretation	70
8.3	Thermisches Rauschen von Widerständen	71
8.4	Zusatzrauschen in Lawinen-Photodioden	71
8.5	ESB von Photodetektoren mit Rauschquellen	72
8.6	Optische Empfänger	73
8.6.1	Einfachster Empfänger	73
8.6.2	Transimpedanz-Stufe	74

9	Laserdioden	75
9.1	Grundlegende Aspekte der Laser-Physik	75
9.1.1	Absorption, spontane und stimulierte Emission	75
9.1.2	Verstärkung optischer Signale in aktiven Materialien	77
9.2	Verstärkung in Halbleiterlasermedien	77
9.3	Fabry-Perot Laserdioden und Ratengleichungen	78
9.3.1	Struktur	78
9.3.2	Verluste	78
9.3.3	Ratengleichungen	79
9.3.4	Ausgangsleistung	81
9.3.5	Spektrum des emittierten Lichtes	81
9.3.6	Modulationsverhalten	82
9.4	Weitere Typen von Laserdioden	83
9.4.1	DBR-Laserdioden (Distributed Bragg Reflector)	83
9.4.2	DFB-Laserdioden (Distributed Feedback)	83
9.4.3	Sonstige	84
10	Faseroptische Verstärker	85
10.1	Allgemeine Eigenschaften optischer Verstärker	85
10.2	Rauschen	86
10.2.1	Definition und Berechnung der Rauschzahl	86
10.2.2	Wann lohnt sich ein optischer Verstärker?	88
10.2.3	Wie häufig soll man verstärken?	90
10.3	Erbium-Faserverstärker (EDFA)	90
10.4	Raman-Faserverstärker	91
11	Nichtlinearitäten in optischen Fasern	93
11.1	Einleitung	93
11.2	Pulsausbreitung in Anwesenheit des Kerr-Effektes	93
12	Faseroptische Übertragungssysteme	97
12.1	Binäre Intensitätsmodulation und Bitfehlerrate	97
12.2	Leistungsbilanz und Anstiegszeitenbilanz	99
12.3	Dämpfungs- und dispersionsbegrenzte Übertragungssysteme	99
12.4	WDM-Systeme	100

INHALTSVERZEICHNIS

Kapitel 1

Optische Grundlagen

1.1 Optische Wellen in transparenten Medien

Die hier behandelte Optik spielt sich in folgenden Bereichen ab: Wellenlänge $\lambda = 0,1\mu m \dots 1mm$ und Frequenz $\nu = \frac{c}{\lambda} = 3 \cdot 10^{11} \dots 3 \cdot 10^{15} Hz$

Sichtbarer Bereich $\lambda = 0,38 \dots 0,78\mu m$. $\lambda > 780nm$ Infrarot, $\lambda < 380nm$ UV.

Optische Nachrichtentechnik $0,78 \dots 1,3\mu m \dots 1,55 \dots 1,7\mu m$, der mittlere Bereich ist mit Abstand der wichtigste.

Medien (insbesondere Quarzglas, SiO_2) sind in guter Näherung

- linear (intensitätsunabhängig)
- nicht magnetisch, $\mu_r = 1$
- isotrop, ϵ skalar, \vec{D} gleiche Richtung wie \vec{E}

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = n^2 \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} \\ n &= \sqrt{\epsilon_r} \text{ ist der Brechungsindex.}\end{aligned}\tag{1.1}$$

1.1.1 MAXWELLSche Gleichungen

Es wird monochromatisches Licht betrachtet, d.h. eine Frequenz = eine Farbe und nur Sinus-Vorgänge treten auf. Dann lauten die MAXWELLSchen Gleichungen

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{E} &= -j\omega\mu_0 \vec{H} \\ \text{rot } \vec{H} &= j\omega\epsilon_0 n^2 \vec{E}\end{aligned}\tag{1.2}$$

⇒ Wellengleichung für $n = \text{const}$ (homogenes Medium), z.B. Quarzklotz

$$\begin{aligned}\underbrace{\text{rot}(\text{rot } \vec{E})}_{=\text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E}} &= -j\omega\mu_0 \text{rot } \vec{H} = \underbrace{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 n^2}_{=k^2} \vec{E} \\ &= 0, \text{ da keine Raumladung} \\ \Rightarrow -\Delta \vec{E} &= k^2 n^2 \vec{E} \\ \text{analog: } \text{grad}(\text{div } \vec{H}) - \Delta \vec{H} &= k^2 n^2 \vec{H}\end{aligned}$$

1.1.2 Wellengleichung (HELMHOLTZ-Gleichung)

Die Wellengleichung im homogenen Medium lautet

$$\begin{cases} (\Delta + k^2 n^2) \vec{E} = 0 \\ (\Delta + k^2 n^2) \vec{H} = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

mit $k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ als Wellenzahl.

Anmerkung: Nur für kartesische Komponenten von Vektorfeldern gilt

$$\Delta \vec{E} = (\Delta E_x, \Delta E_y, \Delta E_z)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \text{ usw.}$$

Lösungen von (1.3) (homogene ebene Welle)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \cdot e^{-j \vec{k}_n \cdot \vec{r}} \quad (1.4a)$$

mit $\vec{k}_n \cdot \vec{k}_n = |\vec{k}_n|^2 = (k \cdot n)^2$ als *Separationsbedingung*. \vec{k}_n Wellenvektor; $\vec{r} = (x, y, z)$ Ortsvektor

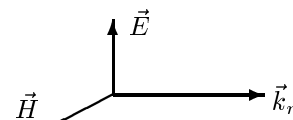
$$\text{rot}(\vec{E}_0 e^{-j \vec{k}_n \cdot \vec{r}}) = \dots = -j \vec{k}_n \times \vec{E}$$

und damit folgt aus (1.2)

$$\vec{H} = \frac{\vec{k}_n \times \vec{E}}{\omega \mu_0} \quad (1.4b)$$

d.h. $\vec{H} \perp \vec{k}_n, \vec{E}$ (stehen senkrecht aufeinander).

Mit komplexem Brechungsindex n oder k_n wird die *Dämpfung* beschrieben. Im Allgemeinen $\vec{k}_n = \vec{\beta} - j \vec{\alpha}$, zunächst aber nur $\vec{k}_n = \vec{\beta}$ (reell).



Flächen konstanter Phase

Die Flächen konstanter Phase von (1.4a) sind alle Punkte für die gilt

$$\vec{\beta} \cdot \vec{r} = \text{const} \quad (1.5)$$

Das sind Ebenen senkrecht zu $\vec{\beta}$, daher heißen (1.4) *ebene* Wellen. Die Flächen konstanter Phase sind Ebenen. Auf den Phasenflächen ist die Feldstärke konstant, daher sind (1.4) *homogene*, ebene Wellen.

Bemerkung: Die Moden in Fasern sind *inhomogene* ebene Wellen.

Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \}$$

$$= \frac{1}{2 \omega \mu_0} \vec{\beta} |\vec{E}|^2, \quad \left[\frac{W s}{m^2 s} \right] = \left[\frac{W}{m^2} \right] \quad (1.6)$$

\vec{S} wird auch *Energiedichte* genannt. Die Einheit von \vec{S} ist: Energie pro Fläche pro Sekunde – oder: Leistung pro Fläche. Die Energie fließt in Richtung $\vec{\beta}$ ($\parallel \vec{S}$).

Intensität

$$I = |\vec{S}| = \frac{1}{2 \omega \mu_0} \beta \cdot |\vec{E}|^2 \quad \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

$$I \sim |\vec{E}|^2 \quad (1.7)$$

Wellenwiderstand

$$Z = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \frac{\omega\mu_0}{kn} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\omega\mu_0}{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{1}{n} \cdot 377 \Omega \quad (1.8)$$

1.1.3 Spezialfall einer homogenen ebenen Welle

$$\vec{k}_n = \beta\vec{e}_z, \quad \vec{E}_0 = E_0\vec{e}_y \\ \Rightarrow \underline{E}_y = E_0 e^{-j\beta z}$$

$$E_y(z, t) = \text{Re}\{E_0 e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\} \\ = E_0 \cos(\omega t - \beta z)$$

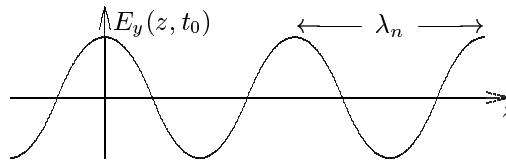


Abbildung 1.1: Wellenlänge

Abbildung 1.1: Wellenlänge $\lambda_n = ?$

$$\cos(\omega_0 t_0 - \beta z) = \cos(\omega_0 t_0 - \beta(z + \lambda_n)) \\ \Rightarrow \beta \cdot \lambda_n = 2\pi \\ \lambda_n = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{k \cdot n} = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\lambda_0}_{\text{Vakuumentwellenlänge}} \quad (1.9)$$

Die Phasenflächen (Flächen konstanter Phase) entsprechen (bei $t = t_0$) den Maxima der Welle. In der Abbildung 1.2 breitet sich die Welle in z -Richtung aus.

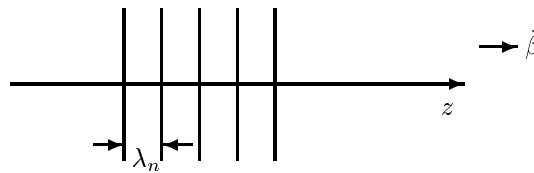


Abbildung 1.2: Phasenflächen

Phasengeschwindigkeit

Das ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Flächen konstanter Phase fortbewegen.

$$\omega t - \beta z = \text{const} \\ z(t) = \frac{\omega}{\beta} t - \frac{\text{const}}{\beta} \\ \Rightarrow v_{ph} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \quad (1.10)$$

Weitere Beziehungen:

$$\frac{v_{ph}}{\lambda_n} = \frac{\frac{\omega}{\beta}}{\frac{2\pi}{\beta}} = \frac{\omega}{2\pi} = \nu \quad (= f)$$

insbesondere für $n = 1$, Vakuum: $\frac{v}{\lambda} = \frac{c}{\lambda} = \nu$

mit (1.9) $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c}$

mit (1.3) $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ (1.11)

1.1.4 Wellen in doppelbrechenden Medien, Polarisation

Die Welle breitet sich in z -Richtung aus.



$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \Big|_{z=0} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} y \\ \nearrow E \\ \theta \\ \searrow \\ x \end{array} \quad \text{linear polarisiert } (\theta \text{ fest})$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \Big|_{z=0} = E_0 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \circlearrowright \\ \text{zirkular polarisiert} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \Big|_{z=0} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varepsilon - j \sin \theta \sin \varepsilon \\ \sin \theta \cos \varepsilon + j \cos \theta \sin \varepsilon \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{tan } \varepsilon = b/a \\ \text{elliptisch} \\ \text{polarisiert} \\ \text{(allgemein-} \\ \text{ster Fall)} \end{array}$$

Ausbreitung einer Welle in einem linear doppelbrechenden Medium

$$\begin{pmatrix} E_x(z) \\ E_y(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-j\beta_x z} & E_x(0) \\ e^{-j\beta_y z} & E_y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-j\beta_x z} & 0 \\ 0 & e^{-j\beta_y z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x(0) \\ E_y(0) \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Geometrie der Faser:  $\beta_x = \beta_y$ oder  $\beta_x \neq \beta_y$; der zweite Fall ergibt eine Doppelbrechung (Abbildung 1.3).

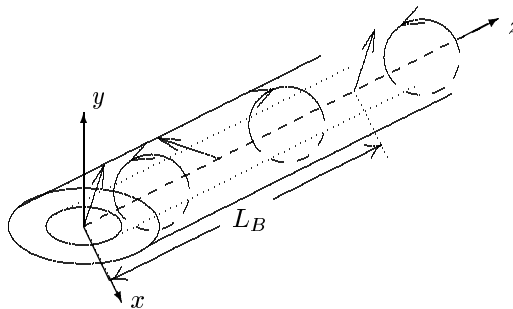


Abbildung 1.3: Doppelbrechung, Schwebungslänge L_B

1.2 Strahlenoptik und „Multimode“-Faser

1.2.1 Potenzprofile

Das Brechzahlprofil einer Gradientenfaser lautet

$$n(\rho) = \begin{cases} n_1 [1 - \Delta (\frac{\rho}{a})^g] & \rho < a \\ n_1 [1 - \Delta] & \rho > a \end{cases} \quad (1.13)$$

mit g als Grad der Brechzahländerung zwischen Kern und Mantel.

Multimodefasern können strahlenoptisch behandelt werden, da $2a \gg \frac{\lambda}{n}$ gilt.

Strahlenoptik = Grenzfall der Wellenoptik für $\lambda \rightarrow 0$

Strahlen = Orthogonaltrajektorien auf lokal ebenen Phasenflächen. (Abbildung 1.4)

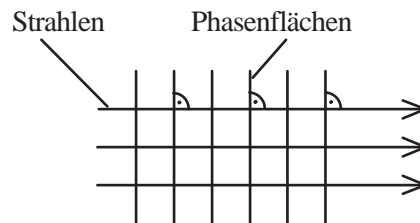


Abbildung 1.4: Strahlen, Phasenflächen

Strahlenoptik vernachlässigt Beugungserscheinungen, es gibt scharfe Hell/Dunkel-Grenzen. (Abbildung 1.5)

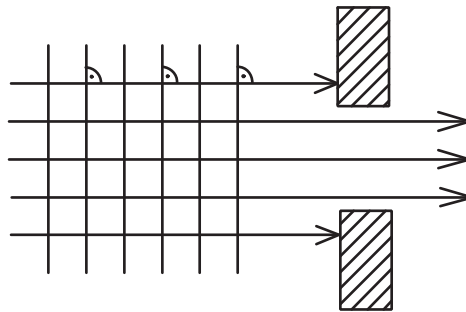


Abbildung 1.5: Scharfe Hell/Dunkel-Grenzen

1.2.2 Strahlen-DGL

Schwach inhomogenen Medien sind charakterisiert durch

$$|\text{grad } n| \ll k \cdot n \quad (1.14)$$

$k = 2\pi/\lambda$, d.h. innerhalb einer Wellenlänge ändert sich der Brechungsindex nur wenig. Dann gilt für \vec{E} , \vec{H} -Felder näherungsweise die Wellengleichung (1.3)

$$(\Delta + k^2 n^2(x, y, z)) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.15)$$

Besondere Lösungen (aus denen man die allgemeinen Lösungen zusammensetzen kann):

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0(x, y, z) e^{-j\vec{k}_n(x, y, z)\vec{r}} \\ &= \vec{E}_0(x, y, z) e^{-jkS(x, y, z)} \end{aligned} \quad (1.16)$$

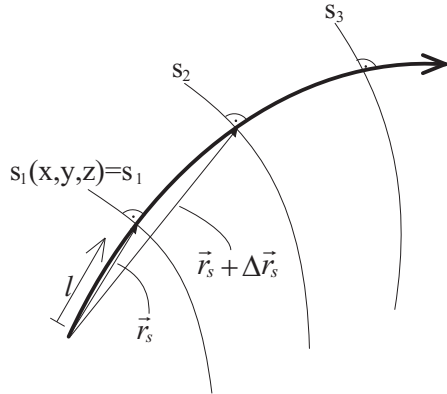


Abbildung 1.6: Phasenflächen zur Eikonalgleichung

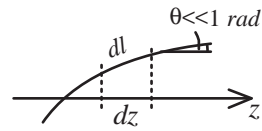


Abbildung 1.7: Paraxiale Näherung

Dies ergibt lokal ebene Wellen.

Wie in (1.4) gilt hier näherungsweise:

$$\vec{k}_n(x, y, z) \cdot \vec{k}_n(x, y, z) = k^2 n^2(x, y, z) \quad (1.17)$$

⋮

$$\boxed{[\text{grad } S(x, y, z)]^2 = n^2(x, y, z)} \quad (1.18)$$

S wird als *Eikonal* bezeichnet. (1.18) ist die Beziehung zwischen Phasenfront $S(x, y, z) = \text{const}$ und $n(x, y, z)$, genannt *Eikonalgleichung*. (Abbildung 1.6).

Aus der Eikonalgleichung folgt

$$\boxed{\frac{d}{dl} \left(n \frac{d\vec{r}_S}{dl} \right) = \text{grad } n} \quad (1.19)$$

Dies ist die *Strahlen-Differentialgleichung*.

In „paraxialer“ Näherung, d.h. es gilt im Bogenmaß $\theta \ll 1$ (Abbildung 1.7):

$$\begin{aligned} dz &= dl \cos \theta \approx dl \\ \frac{d}{dz} \left(n \frac{d\vec{r}_S}{dz} \right) &\approx \text{grad } n \end{aligned} \quad (1.20a)$$

falls zusätzlich $\frac{\partial n}{\partial z} = 0$ (in Fasern)

$$n \cdot \frac{d^2 \vec{r}_S}{dz^2} \approx \text{grad } n \quad (1.20b)$$

Zwischenbemerkung: Bei $\frac{\partial n}{\partial z} = 0$ gilt immer das „verallgemeinerte Brechungsgesetz“:

$$n \cdot \frac{dz_S}{dl} = \text{const.} = \underbrace{n \cdot \cos \theta}_{\text{invariant längs des Strahls}} \quad (1.21)$$

1.2.3 Analytische Lösung der Strahlen-DGL in einfachen Fällen

(i) $n \equiv \text{const}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{grad } n &= \vec{0} \\ \Rightarrow \frac{d\vec{r}_S}{d\ell} &= \text{const} = \vec{t}_0 \\ \Rightarrow \vec{r}_S &= \vec{r}_0 + \ell \cdot \vec{t}_0 \quad \text{Gerade} \end{aligned}$$

So verhalten sich Strahlen stückweise in Stufenprofilfasern, Abbildung 1.8.

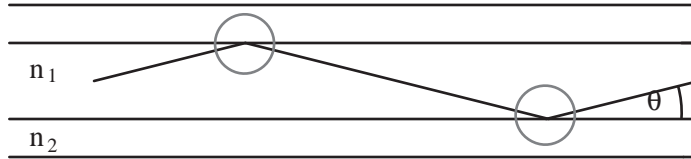


Abbildung 1.8: Totalreflexion in Stufenprofilfasern

Eine Totalreflexion tritt auf, falls gilt $\theta < \theta_c = \arccos\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ (kommt später noch).

Am Faserende, Abbildung 1.9:

$$\begin{aligned} n_1 \sin \theta &= 1 \cdot \sin \theta_0 \\ \Rightarrow |\sin \theta_0| &\leq n_1 |\sin \theta_c| = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (1.22) \\ &=: \text{NA numerische Apertur} \end{aligned}$$

Zur Öffnungswinkel bzw. der numerischen Apertur siehe Abbildung 1.10. Beispiel:

$$\begin{aligned} n_1 &= 1,45 \\ n_2 &= 0,99 \cdot 1,45 \\ \Rightarrow \text{NA} &= \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \approx 0,2 \\ \theta_{0c} &= \arcsin \text{NA} \approx 12^\circ \end{aligned}$$

(ii) $n = n(x) = n_1 \left[1 - \Delta \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$

\Rightarrow paraxial, wie in (1.20b)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_S}{dz^2} &\approx -\frac{2\Delta}{a^2} x_S(z) \\ \Rightarrow x_S(z) &= x_M \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{p} z + \psi_x\right) \end{aligned}$$

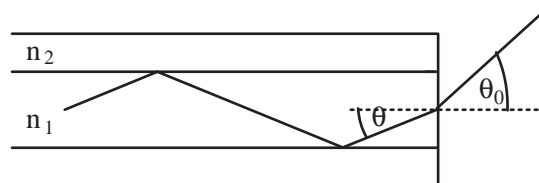


Abbildung 1.9: Faserende Stufenindexfaser

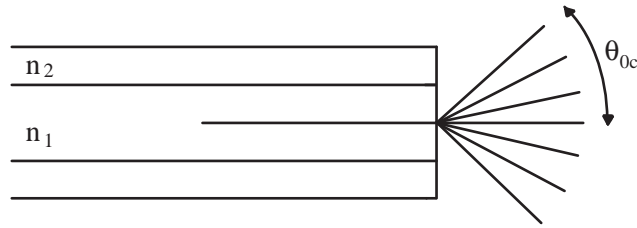


Abbildung 1.10: Numerische Apertur

mit $p = \frac{2\pi a}{\sqrt{2\Delta}}$ „pitch“, Periode.

$$(iii) \quad n = n_1 \left[1 - \Delta \left(\frac{x^2 + y^2}{a^2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \quad x_S(z) = x_M \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{p} z + \psi_x \right)$$

$$\Rightarrow \quad y_S(z) = y_M \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{p} z + \psi_y \right)$$

Bei Meridionalstrahlen gilt $\psi_x = \psi_y$ sowie für den Abstand Strahl – Achse

$$\rho_S(z) = \rho_M \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{p} z + \psi \right) \quad (1.23)$$

mit $p = \frac{2\pi a}{\sqrt{2\Delta}}$, in besserer Näherung $p = \frac{2\pi a}{\sqrt{2\Delta}} \cdot \frac{n(\rho_{\max})}{n_1}$.

1.2.4 Lokale numerische Apertur von Gradientenfaser

$$NA(\rho) = \sqrt{n_2(\rho) - n_2^2} \quad (1.24)$$

1.2.5 „Gruppen“-Laufzeiten des Lichts längs eines Strahles

$$\tau = \int_0^{L_{\text{Strahl}}} \frac{d\ell}{c/n(\ell)} \quad (1.25)$$

- für Stufenindexfaser:

$$\begin{aligned} \tau_{\min} &= n_1 \cdot \frac{L_{\text{Faser}}}{c} \\ \tau_{\max} &= n_1 \cdot \frac{L_{\text{Faser}}}{c \cdot \cos \theta_c} \\ \Delta\tau &= \tau_{\max} - \tau_{\min} \approx \frac{n_1 L_{\text{Faser}}}{c} \Delta \\ \text{mit } \Delta &= \frac{n_1 - n_2}{n_1} \end{aligned} \quad (1.26)$$

- für Gradientenfaser:

$$\tau = \int_0^{L_{\text{Strahl}}} \frac{n}{c} d\ell = \int_0^{L_S} \frac{n n(\rho_S)}{c n(\rho_S)} \underbrace{\frac{dz}{d\ell}}_{\cos \theta}$$

wobei der Ausdruck im Nenner, $n(\rho_S) \cdot \cos \theta$, konstant ist.

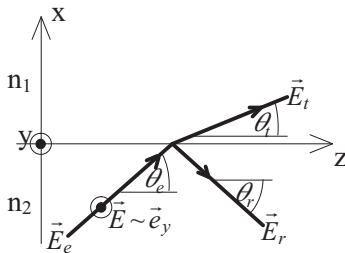
$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^{L_S} \frac{n^2(\rho_S)}{cn(\rho_{\max})} dz \\ &= \frac{1}{cn(\rho_{\max})} \cdot \int_0^{L_S} n_1^2 \left[1 - 2\Delta \left(\frac{\rho_{\max}}{a} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi}{p} z \right) \right] dz \\ &= \dots \cong \frac{n_1 L}{c} \left[1 + \frac{1}{2} \Delta^2 \left(\frac{\rho_{\max}}{a} \right)^4 \right] \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \tau(\rho_{\max} = a) - \tau(\rho_{\max} = 0) \\ &\cong \frac{n_1 L}{c} \frac{1}{2} \Delta^2 \end{aligned} \quad (1.28)$$

Beispiel: $\Delta = 0,01$

$$\frac{\Delta\tau}{L} = \begin{cases} 50 \text{ ns/km} & \text{für Stufenindexfaser} \\ 250 \text{ ps/km} & \text{für Gradientenfaser} \end{cases} \quad (1.29)$$

1.3 Reflexion und Brechung an einer dielektrischen Grenzfläche



TE-Polarisation: Elektrisches Feld in y -Richtung, $\vec{E} \cdot \vec{n} \cdot \vec{e}_y$. Die einfallende Welle wird bezeichnet mit \vec{E}_e , mitunter auch mit \vec{E}_{in} .

1.3.1 Polarisation senkrecht zur Einfallsebene

Dies bedeutet

$$\vec{E}_e = \hat{E}_e \vec{e}_y e^{-j\vec{k}_1^{(e)} \cdot \vec{r}} \quad k_{1y}^{(e)} = 0 \quad (1.30)$$

Ansatz:

$$\vec{E}_{ges} = \begin{cases} \vec{E}_e + \vec{E}_r & \text{für } x < 0 \\ \vec{E}_t & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (1.31)$$

$$\vec{E}_r = \hat{E}_r \vec{e}_y \cdot e^{-j\vec{k}_1^{(r)} \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{E}_t = \hat{E}_t \vec{e}_y \cdot e^{-j\vec{k}_2^{(t)} \cdot \vec{r}}$$

\Rightarrow MAXWELLSche Gleichungen erfüllt.

Randbedingungen bei $x = 0$

$$\vec{E}_{tan} \text{ und } \vec{H}_{tan} \text{ stetig.} \quad (1.32)$$

$$E_{tan} = E_y$$

$$\Rightarrow E_y^{(e,r,t)}(x=0, z) \sim e^{-jk_z^{(e,r,t)}z}$$

Stetigkeit ist für alle $\forall z$ nur möglich, wenn gilt

$$k_{1z}^{(e)} = k_{1z}^{(r)} = k_{2z}^{(t)} =: \beta \quad (1.32a)$$

bzw. wenn gilt

$$kn_1 \cos \theta_e = kn_1 \cos \theta_r = kn_2 \cos \theta_t =: \beta \quad (1.32b)$$

Daraus ergeben sich folgende zwei Gesetze:

$$\theta_r = -\theta_e \quad \text{Reflexionsgesetz} \quad (1.33)$$

$$n_1 \cos \theta_e = n_2 \cos \theta_t \quad \text{Brechungsgesetz} \quad (1.34)$$

Verhältnis der beiden Amplituden (relative Amplituden)

$$r = \frac{\hat{E}_r}{\hat{E}_e} \quad t = \frac{\hat{E}_t}{\hat{E}_e} = ?$$

$$\vec{H}_{tan} \stackrel{(1.4)}{=} \frac{k_n}{\omega \mu_0} E_y \vec{e}_z \sin \theta$$

$$\stackrel{(1.3)}{=} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} n E_y \sin \theta \cdot \vec{e}_z \quad (1.4)$$

\Rightarrow in der Ebene $x = 0$

$$E_{ye} + E_{yr} = E_{yt} \quad \Rightarrow \quad 1 + r = t$$

$$H_{ze} + H_{zr} = H_{zt} \quad \Rightarrow \quad n_1 \sin \theta_e + n_1 \sin(-\theta_e) \cdot r = n_2 \sin \theta_t \cdot t$$

bzw. $k_{1x}^{(e)}(1 - r) = k_{2x}^{(t)} \cdot t$

$$\Rightarrow r = \frac{k_{1x}^{(e)} - k_{2x}^{(t)}}{k_{1x}^{(e)} + k_{2x}^{(t)}} = \frac{n_1 \sin \theta_e - n_2 \sin \theta_t}{n_1 \sin \theta_e + n_2 \sin \theta_t} \quad (1.35a)$$

$$t = 1 + r = \dots = \frac{2n_1 \sin \theta_e}{n_1 \sin \theta_e + n_2 \sin \theta_t}$$

oder mit (1.34):

$$r = \frac{\sin(\theta_e - \theta_t)}{\sin(\theta_e + \theta_t)} \quad t = \frac{2 \sin \theta_e \cos \theta_t}{\sin(\theta_e + \theta_t)} \quad (1.35b)$$



Abbildung 1.11: Senkrechter Einfall

Bei senkrechtem Einfall, Abbildung 1.11: ($\theta_e = \theta_t = \pi/2$; Achtung, Gl. (1.35b) nicht direkt anwendbar wegen Division 0/0, stattdessen direkt Gl. (1.35a) verwenden)

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}; \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

$$\frac{I_r}{I_e} = |r|^2; \quad \frac{I_t}{I_e} = |t|^2 \cdot \frac{n_2}{n_1}$$

wobei die letzte Beziehung weniger wichtig ist, da in Fasern meist gilt $n_2 \approx n_1$.

1.3.2 Polarisation parallel zur Einfallsebene, TM-Polarisation

TM steht für transversal magnetisch, Abbildung 1.12.

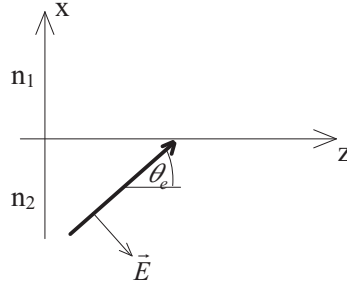


Abbildung 1.12: TM-Polarisation

$$\Rightarrow r = \frac{\tan(\theta_e - \theta_t)}{\tan(\theta_e + \theta_t)} \quad (1.36)$$

Besonderheit bei TM-Polarisation: Es existiert der BREWSTER-Winkel θ_B für $\tan \theta_e = \tan \theta_B = \frac{n_1}{n_2}$, bei dem gilt

$$r_{\parallel} = 0 \quad (1.37)$$

D.h., die Welle geht vollständig durch, nichts wird reflektiert.

1.3.3 Totalreflexion

Für $\theta_e < \theta_c := \arccos \frac{n_2}{n_1}$ (für TE und TM) tritt Totalreflexion auf, falls $n_1 > n_2$, Abbildung 1.13.

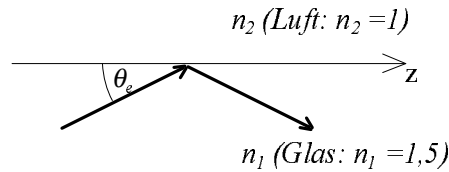


Abbildung 1.13: Totalreflexion

$$\text{Brechungsgesetz} \quad \cos \theta_t \stackrel{(1.34)}{=} \underbrace{\frac{n_1}{n_2} \cos \theta_e}_{\text{wird } > 1}$$

Für $\theta_e < \arccos \frac{n_2}{n_1} = \theta_c$ gibt es keinen reellen Winkel θ_t . In diesem Fall: gleiche Rechnung wie oben, nur θ_t nicht benutzen. D.h. z.B. (vgl. (1.32))

$$\begin{aligned} \beta &= kn_1 \cos \theta_e = kn_1 \cos \theta_r \\ &= k_{2z}^{(t)} \end{aligned}$$

Weiterhin gilt mit $|\vec{k}_z^{(t)}|$ als Länge des Wellenvektors der transmittierten Welle:

$$\begin{aligned} |\vec{k}_2^{(t)}|^2 &= \left(k_{2x}^{(t)}\right)^2 + \left(k_{2z}^{(t)}\right)^2 = k^2 \cdot n_2^2 \\ \vec{E}_t &\sim e^{-j\vec{k}_2^{(t)} \cdot \vec{r}} = e^{-j(k_{2x}^{(t)}x + k_{2z}^{(t)}z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{2x}^{(t)} &= ? \\
 &= \pm \sqrt{k^2 n_2^2 - (k n_1 \cos \theta_e)^2} \\
 &= \pm k n_2 \sqrt{1 - \underbrace{\left(\frac{n_1}{n_2} \cos \theta_e\right)^2}_{<0 \text{ für } \theta_e < \theta_c}} = \pm j k n_2 \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \cos \theta_e\right)^2 - 1} \\
 &= \pm j \alpha_{2x}^{(t)} \tag{1.38}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \vec{E}_t &= \vec{E}_t \cdot e^{-j(\pm j \alpha_{2x}^{(t)} \cdot x + \beta z)} \\
 &= \vec{E}_t \cdot e^{-\alpha_{2x}^{(t)} x} \cdot e^{-j \beta z} \tag{1.39}
 \end{aligned}$$

Quergedämpfte (1. e -Funktion), in z -Richtung fortschreitende Welle (2. e -Funktion), Abbildung 1.14. Quergedämpft deshalb, weil die Welle senkrecht zur Ausbreitungsrichtung gedämpft wird. Die entstehende Feldverteilung wird *evaneszentes Feld* genannt. Nach $\Delta x = \frac{1}{\alpha_{2x}^{(t)}}$ ist die Amplitude auf $1/e$ abgefallen. Die Welle läuft also nicht nach außen weg, sondern „klebt“ an der Ausbreitungsrichtung.

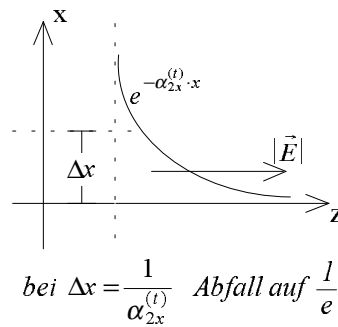


Abbildung 1.14: Querdämpfung von Wellen

Reflexionsfaktoren für $\theta_e < \theta_c$:

$$\begin{aligned}
 r_{\perp} &= \frac{k_{1x}^{(e)} + j \alpha_{2x}^{(t)}}{k_{1x}^{(e)} - j \alpha_{2x}^{(t)}} = 1 \cdot e^{+j 2 \arctan \frac{\alpha_{2x}^{(t)}}{k_{1x}^{(e)}}} \\
 &= 1 \cdot e^{j 2 \varphi_{\perp}} \\
 r_{\parallel} &= \frac{n_2^2 k_{1x}^{(e)} + j n_1^2 \alpha_{2x}^{(t)}}{n_2^2 k_{1x}^{(e)} - j n_1^2 \alpha_{2x}^{(t)}} = 1 \cdot e^{j 2 \arctan \frac{n_1^2 \alpha_{2x}^{(t)}}{n_2^2 k_{1x}^{(e)}}} \\
 &= 1 \cdot e^{j 2 \varphi_{\parallel}}
 \end{aligned} \tag{1.40}$$

„Totalreflexion“. (Weil $|r| = 1$)

1.3.4 Gesamt-Feldverteilung bei Totalreflexion

$$x \leq 0: \quad \vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_r \tag{1.41}$$

$$= \vec{E}_e \cdot e^{-j \beta z} e^{j \varphi} \cdot 2 \cos(k_{1x}^{(e)} \cdot x + \varphi) \tag{1.42}$$

$$x \geq 0: \quad \vec{E} = \vec{E}_t \cdot e^{-j \beta z} e^{-\alpha_{2x}^{(t)} x}$$

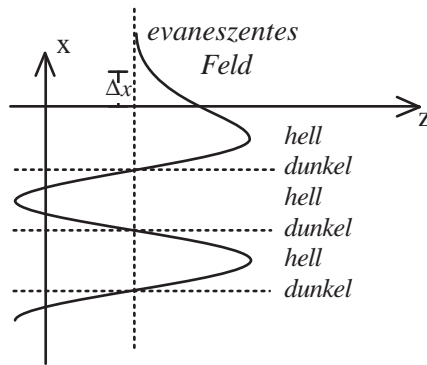


Abbildung 1.15: Feldverteilung nach (1.42)

(1.42) ergibt sich durch

$$e^{-j(k_{1x}^{(e)}x + \beta z)} + 1e^{j2\varphi} \cdot e^{-j(-k_{1x}^{(e)}x + \beta z)} = e^{-j\beta z} e^{j\varphi} \{ \dots \} = \dots$$

Schließlich ergibt sich

$$\Delta x = \frac{1}{\alpha_{2x}^{(t)}} = \frac{1}{kn_2 \sqrt{\dots}}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{k\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} & \text{für } \theta_e \rightarrow 0 \\ \rightarrow \infty & \text{für } \theta_e \rightarrow \theta_c \end{cases}$$

Beispiel

$$\lambda = 1,5\mu m; \quad n_1 = 1,475; \quad n_2 = 1,46$$

θ_e	Δx
1°	1,15 μm
5°	1,44 μm
8°	5,5 μm
8,17°	25,5 μm

Die E-Welle darf die Mantelgrenze nicht erreichen, sonst würde die Welle gestört. Mantel ca. 50 μm .

Kapitel 2

Wellenausbreitung in planaren dielektrischen Wellenleitern

2.1 Filmwellenleiter (Schichtwellenleiter)

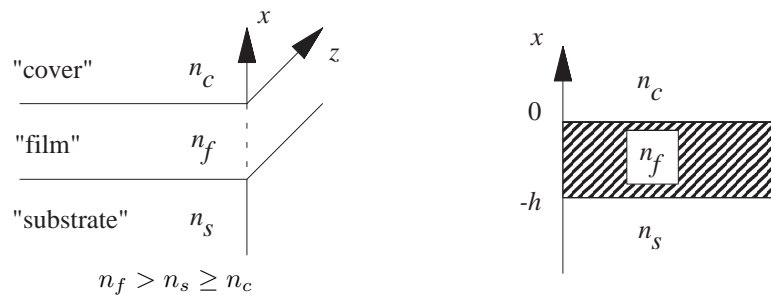


Abbildung 2.1: Filmwellenleiter

Gesucht für diese Situation: *Moden*

Bei Moden gilt: Alle Feldgrößen hängen von z ab gemäß $e^{-j\beta z}$, β Ausbreitungskonstante.

Ferner: hier nur Lösungen gesucht, die nicht von y abhängen ($\frac{\partial}{\partial y} = 0$).

Moden lassen sich klassifizieren in

- TE-Moden (H -Wellen) mit $E_z = 0$ und
- TM-Moden (E -Wellen) mit $H_z = 0$

2.1.1 TE-Moden (geführte Moden)

Maxwell-Gleichungen (1.2) ergeben hier:

1. Bei TE-Moden gilt $E_z = 0$:

$$0 = E_z \sim (\text{rot } \vec{H})_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \underbrace{\frac{\partial H_x}{\partial y}}_{=0} = 0$$
$$\Rightarrow H_y = H_y(z) \equiv 0$$

für geführte Moden, damit $H_y \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$.

2. Mit diesem Ergebnis $H_y = 0$ und der Bedingung $\frac{\partial}{\partial y} = 0$:

$$E_x \sim (\text{rot } \vec{H})_x = \underbrace{\frac{\partial H_z}{\partial y}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial H_y}{\partial z}}_{=0}$$

$$\Rightarrow E_x = 0$$

3. Da also $E_{x,z} = 0$:

$$H_x = -\frac{1}{j\omega\mu_0} (\text{rot } \vec{E})_x$$

$$= \dots = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} E_y$$

4. Und für die letzte \vec{H} -Komponente:

$$H_z = \dots = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

Insgesamt lautet die Feldverteilung also

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E} &= (0, E_y, 0) \\ \vec{H} &= \left(-\frac{\beta}{\omega\mu_0} E_y, 0, -\frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \end{aligned}} \quad (2.1)$$

$E_y(x, z) = ?$

In jedem Teilgebiet muß gelten:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \underbrace{(k^2 n_c^2 - \beta^2)}_{(s)} E_y = 0$$

Lösungen gesucht mit $E_y \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$ („geführte“ Mode).

$$\boxed{E_y(x, z) = e^{-j\beta z} \cdot \begin{cases} E_c \cdot e^{-\alpha_{cx}x} & \text{für } x > 0 \\ E_f \cdot \cos(k_{fx}x + \varphi_c) & \text{für } -h < x < 0 \\ E_s \cdot e^{\alpha_{sx}(x+h)} & \text{für } x < -h \end{cases}} \quad (2.2)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_{cx}^2 &= \beta^2 - k^2 n_c^2 \\ k_{fx}^2 &= k^2 n_f^2 - \beta^2 \\ \alpha_{sx}^2 &= \beta^2 - k^2 n_s^2 \end{aligned} \quad (2.2a)$$

ausgeteiltes Bild Feldverteilung TE-Moden

Randbedingungen

Randbedingungen allgemein: $\vec{E}_{tan}, \vec{H}_{tan}$ stetig, hier $E_y, H_z \sim \frac{\partial E_y}{\partial x}$ stetig. Dies führt zu

$$\begin{aligned} \frac{E_c}{E_f} &= \sqrt{\frac{k^2 n_f^2 - \beta^2}{k^2 n_f^2 - k^2 n_c^2}} \\ \frac{E_s}{E_f} &= \sqrt{\frac{k^2 n_f^2 - \beta^2}{k^2 n_f^2 - k^2 n_s^2}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Mit (2.1), (2.2) und (2.2a) ist alles bekannt *außer* β . Kann man β beliebig wählen? Nein, denn „die Welle muß in den Film hineinpassen“, d.h. die Phasenfronten müssen sich konstruktiv überlagern und es muß gelten

$$\boxed{k_{fx} \cdot h - \varphi_c - \varphi_s = \nu\pi}, \quad \nu \in \mathbb{Z} \quad (2.4a)$$

wobei $\tan \varphi_c = \frac{\alpha_{cx}}{k_{fx}}$, $\tan \varphi_s = \frac{\alpha_{sx}}{k_{fx}}$, abweichend von (1.40).

(2.4a) heißt *charakteristische Gleichung* und ist die Bestimmungsgleichung für β . Die charakteristische Gleichung sagt aus, daß nur diskrete Werte β_ν möglich sind.

$$\sqrt{k^2 n_f^2 - \beta^2} \cdot h - \arctan \sqrt{\frac{\beta^2 - k^2 n_c^2}{k^2 n_f^2 - \beta^2}} - \arctan \sqrt{\frac{\beta^2 - k^2 n_s^2}{k^2 n_f^2 - \beta^2}} - \nu\pi = 0 \quad (2.4b)$$

$$f(\beta) = 0$$

Eine Nullstellensuche für vorgegebene $\nu \in \mathbb{Z}$ ergibt die Moden β_ν . Damit sind die TE-Lösungen komplett.

2.1.2 Lösung der charakteristischen Gleichung

Im folgenden werden normierte Kenngrößen ausgeteiltes Blatt 2 verwendet. Mit diesen normierten Größen lautet (2.4a)

$$u - \arctan \frac{w_c}{u} - \arctan \frac{w_s}{u} - \nu\pi = 0$$

und läßt sich umstellen zu

$$\tan(u - \nu\pi) = \tan\left[\arctan \frac{w_c}{u} + \arctan \frac{w_s}{u}\right]$$

$$\tan u = \frac{u \cdot (w_c + w_s)}{u^2 - w_c \cdot w_s} \quad (2.4c)$$

In (2.4c) erscheint ν nicht mehr explizit. Nun sollen w_c, w_s in (2.4c) eliminiert werden – mit dem Asymmetrieparameter a_H und der normierten Frequenz V aus Gleichung ausgeteilt: (3.5)

und ausgeteilt: (3.6)

$$w_s^2 = V^2 - u^2; \quad w_c^2 = V^2(1 + a_H) - u^2$$

$$\tan u = \frac{u \cdot \left[\sqrt{V^2 \cdot (1 + a_H) - u^2} + \sqrt{V^2 - u^2}\right]}{u^2 - \sqrt{[V^2(1 + a_H) - u^2] \cdot [V^2 - u^2]}} \quad (2.4d)$$

Die Lösung von (2.4d) wird numerisch (grafisch) approximiert. ausgeteiltes Bild

Mit LS wird die linke Seite von (2.4d) bezeichnet, mit RS die rechte Seite. $LS = \tan(u)$ besteht aus mehreren Ästen, für $RS = g(u)$ sind V, a_H bekannt (gegeben).

Man findet verschiedene Lösungen, die jeweils die Schnittpunkte von $g(u)$ mit verschiedenen \tan -Ästen sind. Diese werden durchnummeriert: $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$. Aus den u_ν folgen dann die β_ν . Für geführte Moden sind ν, w_c, w_s reell. Daraus folgt

$$\beta \leq k \cdot n_f; \quad \beta \geq k \cdot n_s$$

$$\frac{\beta}{k} = n_{\text{eff}} \leq n_f; \quad \frac{\beta}{k} = n_{\text{eff}} \geq n_s$$

Möglicher Bereich der β_ν bzw. der u_ν -Werte:

$$k \cdot n_s \leq \overset{\implies}{\beta} \leq k \cdot n_f$$

$$0 \leq \overset{\longleftarrow}{u} \leq r \quad (2.7)$$

\implies : zunehmende Wellenführung.

2.1.3 Cut off

Betrachte eine bestimmte Mode mit der Nummer μ . Verändern der normierten Frequenz V , z.B. durch λ -Änderung:

An einer bestimmten Stelle $V = V_{co}^{(\mu)}$ ist diese Mode nicht mehr ausbreitungsfähig. (Es gibt keinen Schnittpunkt mehr mit $\tan(\mu)$ unterhalb $V_{co}^{(\mu)} \cong TE^{(\mu)}$ nicht ausbreitungsfähig; $TE^{(\mu-1)}$ bleibt.) Dort gilt $\beta_\mu = k \cdot n_S$ bzw. $u_\mu = V = V_{co}^{(\mu)}$.

An dieser Stelle lautet (2.4d):

$$\tan u_\mu = \tan V_{co}^{(\mu)} = \frac{V_{co}^{(\mu)} \cdot \left(\sqrt{V_{co}^{(\mu)^2} \cdot a_H + 0} \right)}{V_{co}^{(\mu)^2} - 0}$$

$$V_{co}^{(\mu)} = \arctan \sqrt{a_H} + \mu \cdot \pi \quad (2.8)$$

$TE^{(\mu)}$ ist nur für $V > V_{co}^{(\mu)}$ ausbreitungsfähig.

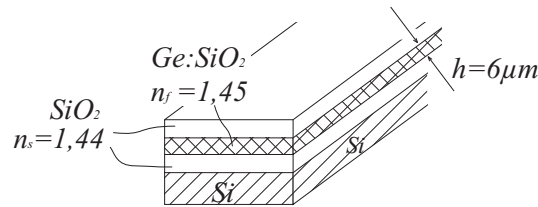


Abbildung 2.2: Beispiel zum Cut Off in Schichten

Beispiel:

$$V_{co}^{(TE_0)} = 0 = \frac{2\pi}{\lambda_{co}^{(TE_0)}} \cdot h \cdot \sqrt{n_f^2 - n_s^2}$$

$$V_{co}^{(TE_1)} = \pi = \frac{2\pi}{\lambda_{co}^{(TE_1)}} \cdot h \cdot \sqrt{n_f^2 - n_s^2}$$

$$V_{co}^{(TE_2)} = 2\pi = \frac{2\pi}{\lambda_{co}^{(TE_2)}} \cdot h \cdot \sqrt{n_f^2 - n_s^2}$$

$$\Rightarrow \lambda_{co}^{(TE_0)} = \infty \Rightarrow TE_0\text{-Mode immer ausbreitungsfähig}$$

$$\lambda_{co}^{(TE_1)} = \frac{2\pi}{\pi} \cdot h \cdot \sqrt{n_f^2 - n_s^2} = 2,04\mu m : \text{ab } \leq 2,04\mu m \text{ gibt es zwei Moden}$$

$$\lambda_{co}^{(TE_2)} = \frac{2\pi}{2\pi} \cdot h \cdot \sqrt{n_f^2 - n_s^2} = 1,02\mu m : \text{ab } \leq 1,02\mu m \text{ gibt es drei Moden}$$

Bei asymmetrischen Wellenleitern kann es sein, daß keine Mode ausbreitungsfähig ist.

$$0 < V < \pi, \lambda > 2,04\mu m : \text{eine geführte TE-Mode}$$

$$\pi < V < 2\pi, 1,02 < \lambda < 2,04\mu m : \text{zwei geführte TE-Moden}$$

Charakteristische Gleichung (2.4d) lösen für $V = 0, 1, 2, \dots, V = 0, \dots (\infty)$ ergibt $u_\nu(V), \nu = 0, 1, 2, \dots$

→ Kurven zeichnen, stattdessen

$$B_\nu(V) = 1 - \frac{u_\nu^2(V)}{V^2} \quad (2.9)$$

Dies ist die normierte Phasenkonstante. Vorteil: $0 \leq B \leq 1$

2.1.4 Geführte Leistung einer TE-Mode

Geführte Leistung einer TE-Mode pro Längeneinheit Δy (Querrichtung), die in z -Richtung transportiert wird: $P' = \frac{P}{\Delta y}$ (Abbildung 2.3).

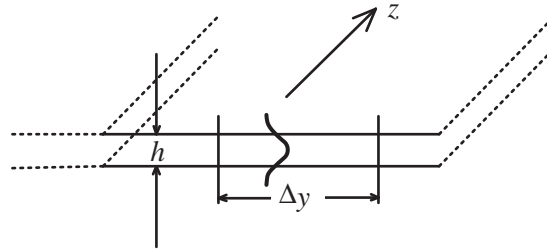


Abbildung 2.3: Geführte Leistung

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ E_y \cdot H_x^* (-\vec{e}_z) \}$$

mit H_x aus (2.1)

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \vec{e}_z \cdot \left(-\frac{\beta}{\omega \mu_0} \cdot |E_y|^2 \right) \\ P' &= \int_{-\infty}^{\infty} S_z dx = \frac{\beta}{2\omega \mu_0} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |E_y|^2 dx \\ &= \frac{\beta}{2\omega \mu_0} \cdot \left(\int_{-\infty}^{-h} |E_y|^2 dx + \int_{-h}^0 |E_y|^2 dx + \int_0^{\infty} |E_y|^2 dx \right) \\ &= \frac{\beta}{2\omega \mu_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot |E_f|^2 \cdot h_{\text{eff}} \quad \text{mit } h_{\text{eff}} = h + \frac{1}{\alpha_{sx}} + \frac{1}{\alpha_{cx}} \\ P' &= \frac{P}{\Delta y} = \frac{\beta}{2\omega \mu_0} \cdot \frac{1}{2} |E_f|^2 \cdot h_{\text{eff}} \quad \text{mit } h_{\text{eff}} = h + \frac{1}{\alpha_{sx}} + \frac{1}{\alpha_{cx}} \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.1.5 TM-Moden in Schichtwellenleitern

?

2.1.6 Filmwellenleiter mit Gradientenprofil

$$\begin{aligned} n^2(x) &= n_S^2 + 2n_S \frac{\Delta n}{\cosh^2(\frac{2x}{h})} \\ \Delta n &\ll n_S \\ n(x) &\cong n_S + \frac{\Delta n}{\cosh^2(\frac{2x}{h})} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Normierte Frequenz $V = kh\sqrt{2n_S \cdot \Delta n}$.

Welches sind die geführten Moden?

$$\text{Löse: } \frac{d^2 E_y}{dx^2} + (k^2 n^2(x) - \beta^2) E_y = 0$$

$$\text{TE-Grundmode: } E_y = \frac{\hat{E}_0}{\cosh^s(\frac{2x}{h})} e^{-j\beta z} \quad (2.12)$$

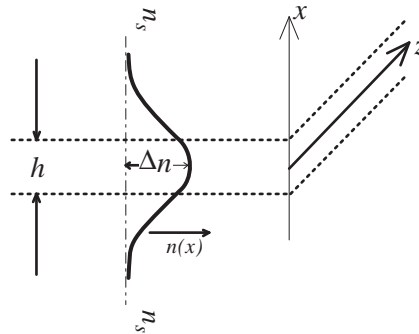


Abbildung 2.4: Gradientenprofil

mit $\beta^2 = k^2 n_s^2 + \frac{4s^2}{h^2}$ und $s = \frac{1}{2}(\sqrt{1+V^2} - 1)$. Dieser Wellenleiter ist einmodig für

$$V - V_{co}^{(TE_1)} = \sqrt{8} \quad (2.13)$$

bei $V = V_{co}^{(TE_1)} = \sqrt{8}$:

$$S = 1 \quad \Rightarrow \quad I^{(TE_0)}(x) \sim |E_y|^2 \\ \sim (n(x) - n_s)$$

2.1.7 Filmwellenleiter mit Dämpfung/Verstärkung

Komplexe Wellenzahlen einführen: (wegen $e^{-jkn_f z} \rightarrow e^{-jkn_f z} \cdot e^{-\alpha_f z}$)

$$\begin{aligned} kn_f &\rightarrow kn_f - j\alpha_f \\ kn_s &\rightarrow kn_s - j\alpha_s \\ kn_c &\rightarrow kn_c - j\alpha_c \\ &\Rightarrow \beta \rightarrow \beta - j\alpha, \quad \beta = ?, \quad \alpha = ? \end{aligned}$$

Dies ergibt eine komplexe charakteristische Gleichung (2.4a). (...) Hier nur: Das Ergebnis für die TE_0 -Welle. Mit $n_s = n_c, \alpha_s = \alpha_c = 0$ sowie $\frac{n_f - n_s}{n_f} < 1; \alpha_f \neq 0$ lautet das Ergebnis

$$\alpha = \alpha_f \cdot \Gamma \quad 0 \leq \Gamma \leq 1 \quad (2.14)$$

mit dem Füllfaktor $\Gamma = \frac{B + \sqrt{BV}/2}{1 + \sqrt{BV}/2}$ (confinement factor).

Es existieren zwei Grenzfälle:

$$\begin{aligned} V \rightarrow 0 &\Rightarrow B \rightarrow 0 \Rightarrow \Gamma \rightarrow 0 \\ V \rightarrow \infty &\Rightarrow B \rightarrow 1 \Rightarrow \Gamma \rightarrow 1 \end{aligned}$$

2.2 Planare Wellenleiter mit seitlicher Begrenzung

2.2.1 Lösungen der Wellengleichung im freien Raum

- homogene, ebene Wellen (Abbildung 2.5),
- Kugelwellen,
- aber auch: Gaußscher Strahl, siehe Abb. 2.6. Streng genommen handelt es sich beim Gaußschen Strahl aber nur um eine Näherungslösung der Wellengleichung (paraxiale Näherung).

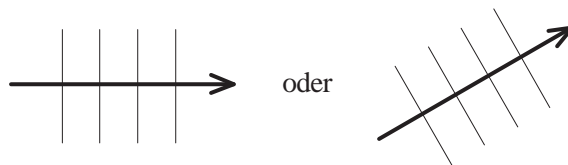


Abbildung 2.5: Homogene, ebene Welle.

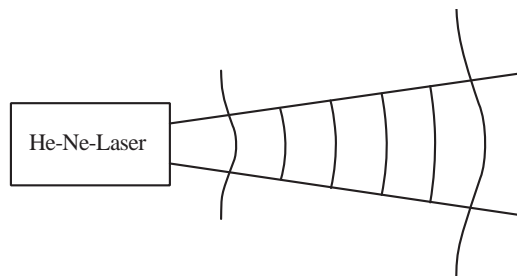


Abbildung 2.6: Der Ausgang vieler Lasertypen lässt sich als *Gaußscher Strahl* beschreiben.

2.2.2 Lösungen der Wellengleichung im Filmwellenleiter

- Filmwellen in z -Richtung oder in irgendeine andere Richtung, Abbildung 2.7.
- Aber auch begrenzte Feldverteilung, Abbildung 2.8.

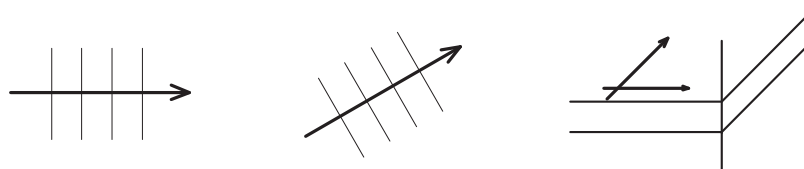


Abbildung 2.7: Filmwellen in feste Richtung

Die Aufweitung in der Schichtebene lässt sich unter Umständen verhindern durch eine Verdickung des Films, Abbildung 2.9. Weshalb? Es gilt: h wächst $\Rightarrow V$ wächst $\Rightarrow B$ wächst $\Rightarrow \beta$ wächst. Daraus folgt

$$\frac{d\beta}{dh} > 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d(\beta/k)}{dh} = \frac{dn_{\text{eff}}}{dh}$$

d.h., die Welle im dickeren Bereich (Streifen) „fühlt“ einen höheren (effektiven) Brechungsindex als im dünneren Bereich. Hier liegt also eine Führung in seitlicher Richtung vor. Andere Möglichkeit: Führung in seitlicher Richtung durch „echte“ Brechzahlsprünge, Abbildung 2.10. Wie wird die Feldverteilung in solchen Wellenleitern bestimmt?

- Maxwell-Gleichungen mit Randbedingungen lösen
- oder nur numerische Lösung bestimmen, Näherungen siehe Stichworte „Marcatili-Näherung“, „effektive Index-Methode“
- Anschaulich:

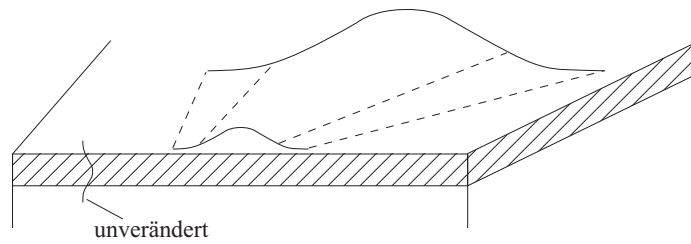


Abbildung 2.8: „Gaußverteilung“ über Filmleiter

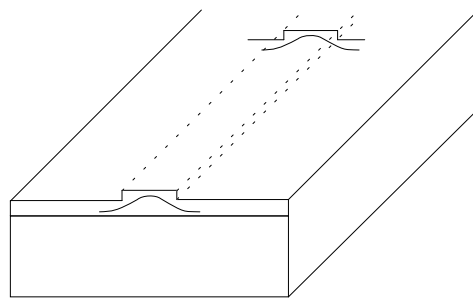


Abbildung 2.9: Verhinderung der Aufweitung

- *Filmwellen* ergeben sich durch phasenrichtige Zick-Zack-Reflexionen *ebener* Wellen in der x - z -Ebene,
- *Streifenwellen* ergeben sich durch phasenrichtige Zick-Zack-Reflexionen von *Filmwellen* in der y - z -Ebene.

Totalreflexionen von *Filmwellen* an den seitlichen Streifenkanten, Abbildung 2.11.

Ergebnis (ungefähr):

- in Abhängigkeit von x : Feldverteilung wie bei der Filmwelle (rechte Verteilung im Bild 2.11)
- in Abhängigkeit von y : stehende Wellen innerhalb des Films $\sim \cos(\dots y)$, dabei tritt ein exponentieller Abfall in den Begrenzungen auf, Abbildung 2.12.

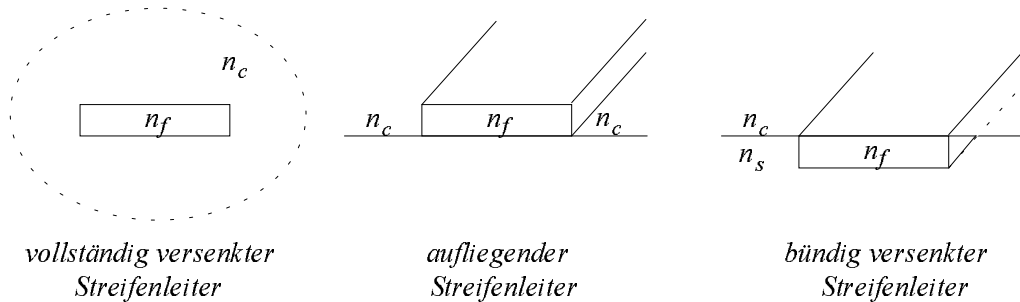


Abbildung 2.10: Führung durch Brechzahlssprünge

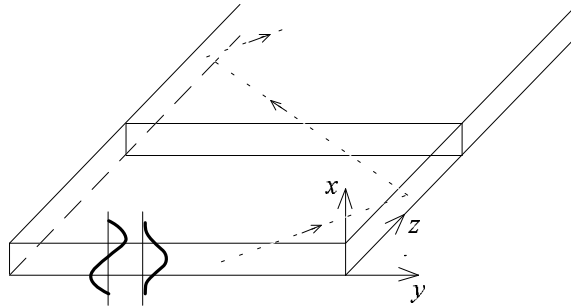


Abbildung 2.11: Totalreflexionen

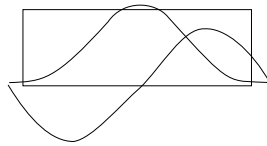


Abbildung 2.12: Abfall der stehenden Wellen

Stehende Wellen innerhalb des Streifens

Siehe Abbildung 2.13. EH/HE sind die Längskomponenten von \vec{E} und \vec{H} . (Diese entstehen durch Zickzack-Überlagerung.) Zur Nomenklatur: $HE_{m\ell}$ geht hervor aus einer H_m -Welle, und hat ℓ Nullstellen in horizontaler Richtung.

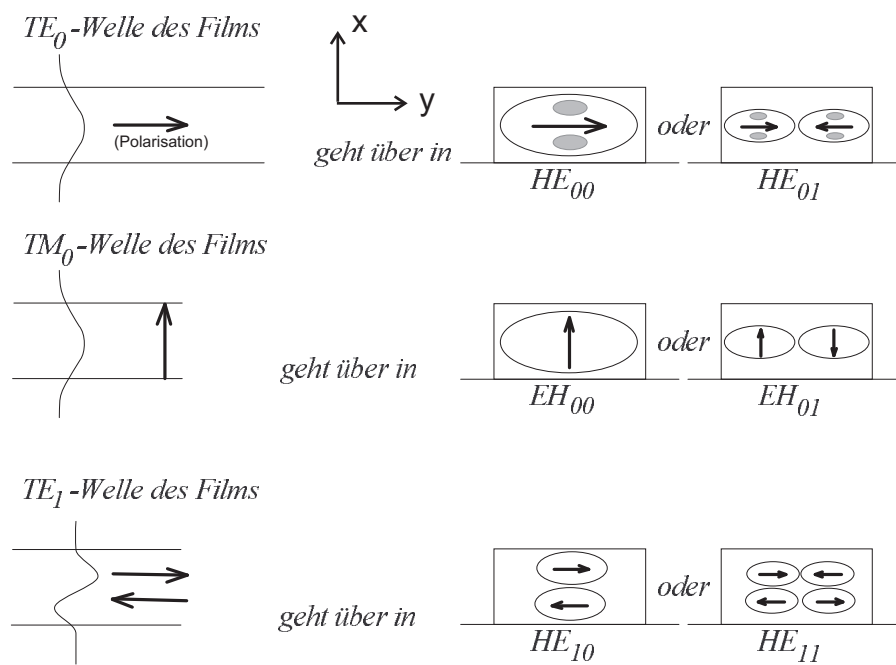


Abbildung 2.13: Stehende Wellen im Streifen.

Kapitel 3

Wellenausbreitung in optischen Fasern

3.1 Stufenindexfaser

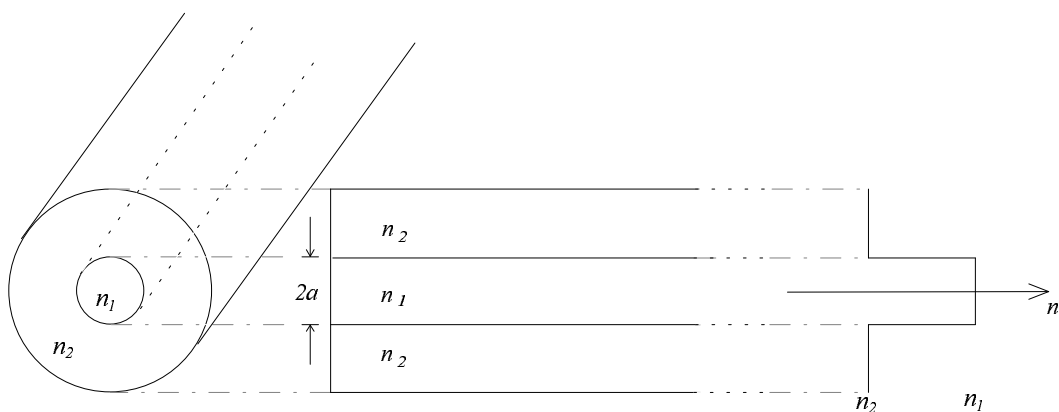


Abbildung 3.1: Stufenindexfaser

Gesucht: Lösung der Wellengleichung

$$(\Delta + k^2 n^2) E_i = 0$$

$$(\Delta + k^2 n^2) H_i = 0$$

($i = x, y, z$), im Kern ist $n = n_1$, im Mantel ist $n = n_2$; mit $E_i, H_i \sim e^{-j\beta z}$, $kn_2 < \beta < kn_1$.

Die die Randbedingungen (E_{tan}, H_{tan} stetig bei $r = a$) erfüllen: „geführte Moden“.

Exakte Lösung: analytisch möglich, aber langwierig.

Hier: Einheitlich linear polarisierte Moden suchen (LP-Moden); d.h. Transversalkomponenten sollen so aussehen:

$$\vec{E}_t = E_y(r, \varphi) e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{H}_t = H_x(r, \varphi) e^{-j\beta z} \cdot \vec{e}_x$$

(Dies ist die “Näherung der schwachen Führung”, die bei den in der Praxis am häufigsten vorkommenden Fasern mit kleinem Brechzahlkontrast $\Delta \ll 1$ zulässig ist.)

3.1.1 Wellengleichung

Versuch

$$\Delta E_y + k^2 n^2 E_y = 0 \quad (3.1)$$

In Zylinderkoordinaten

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_y}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial \varphi^2} - \beta^2 E_y + k^2 n^2 E_y = 0$$

Zur Lösung:

$$E_y(r, \varphi) = F(r) \cdot \phi(\varphi)$$

$$(3.1) \Rightarrow \frac{1}{F(r) \cdot \phi(\varphi)} \Rightarrow \frac{1}{F \cdot \phi} \phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{F \cdot \phi} F(r) \cdot \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + (k^2 n^2 - \beta^2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = \text{const.} \quad \text{hängt nicht von } \varphi \text{ ab, höchstens von } r$$

$$\phi(\varphi) = \cos(\ell \cdot \varphi)$$

mit $\ell \in \mathbb{Z}$, damit $\phi(\varphi) = \phi(\varphi + n \cdot 2\pi)$.

Die verbleibende DGL für $F(r)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(r)} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) - \frac{\ell^2}{r^2} + (k^2 n^2 - \beta^2) &= 0 \\ \Rightarrow r^2 \frac{d^2 F}{dr^2} + r \frac{dF}{dr} + [(k^2 n^2 - \beta^2)r^2 - \ell^2] F &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Normiert geschrieben:

1. **im Kern:**

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= \sqrt{\underbrace{k^2 n_1^2 - \beta^2}_{\geq 0}} \cdot r = a \sqrt{\dots} \cdot \frac{r}{a} = u \cdot \frac{r}{a} \\ \tilde{r}^2 \frac{d^2 F}{d\tilde{r}^2} + \tilde{r} \frac{dF}{d\tilde{r}} + (\tilde{r}^2 - \ell^2) F &= 0 \end{aligned} \quad (3.2a)$$

„Bessel'sche DGL“

2. **im Mantel:**

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{r}} &= \sqrt{\underbrace{\beta^2 - k^2 n_2^2}_{\geq 0}} \cdot r = a \sqrt{\dots} \cdot \frac{r}{a} = w \cdot \frac{r}{a} \\ \tilde{\tilde{r}}^2 \frac{d^2 F}{d\tilde{\tilde{r}}^2} + \tilde{\tilde{r}} \frac{dF}{d\tilde{\tilde{r}}} + (-\tilde{\tilde{r}}^2 - \ell^2) F &= 0 \end{aligned} \quad (3.2b)$$

„modifizierte Bessel'sche DGL“

Lösungen

1. **im Kern**, zu (3.2a):

$$F(\tilde{r}) = \begin{cases} J_\ell(\tilde{r}) & \text{Besselfunktion 1. Art } \ell\text{-ter Ordnung} \\ Y_\ell(\tilde{r}) & \text{nicht sinnvoll, da } Y_\ell \rightarrow \infty \text{ für } \tilde{r} \rightarrow 0. \end{cases}$$

2. **im Mantel**, zu (3.2b):

$$F(\tilde{\tilde{r}}) = \begin{cases} K_\ell(\tilde{\tilde{r}}) & \text{modifizierte Hankelfunktion } \ell\text{-ter Ordnung} \\ I_\ell(\tilde{\tilde{r}}) & \text{nicht sinnvoll, da } I_\ell \rightarrow \infty \text{ für } \tilde{\tilde{r}} \rightarrow \infty. \end{cases}$$

3.1.2 LP-Modenfelder für Stufenindexfaser

$$E_y = E_\ell \cdot e^{-j\beta z} \cdot \cos(\ell\varphi) \cdot \begin{cases} J_\ell(u \frac{r}{a}) / J_\ell(u) & \text{für } r \leq a \\ K_\ell(w \frac{r}{a}) / K_\ell(w) & \text{für } r \geq a \end{cases} \quad (3.3)$$

mit $u = a\sqrt{k^2 n_1^2 - \beta^2}$
 $w = a\sqrt{\beta^2 - k^2 n_2^2}$

Wie bei der Behandlung von Filmwellenleiter wird nun die *normierte Frequenz* definiert:

$$V := \sqrt{u^2 + w^2} = ka\sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \frac{2\pi}{\lambda} a\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (3.4)$$

Beachte: in (3.3) ist β (bzw. u, w) noch unbekannt. Die entsprechende Bestimmungsgleichung für β, u, w , d.h. die charakteristische Gleichung, wird aus den Randbedingungen gewonnen: $E_\varphi, E_z, H_\varphi, H_z$ stetig.

(i) $E_\varphi = E_y \cdot \cos \varphi$ ist in (3.3) stetig.

$$(ii) H_\varphi = H_x \cdot \sin \varphi = -\frac{1}{z_0} \begin{cases} n_1 E_y \sin \varphi & \text{im Kern} \\ n_2 E_y \sin \varphi & \text{im Mantel} \end{cases}$$

ist nur *näherungsweise stetig* falls $n_1 \approx n_2, \Delta \ll 1$. D.h. die LP-Moden (linear polarisierte) sind nicht exakt.

$$(iii) H_z \stackrel{\text{Maxwell}}{=} \frac{1}{j\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial x} = \dots = \begin{cases} \dots & \text{im Kern} \\ \dots & \text{im Mantel} \end{cases}$$

sind gleich für $r = a$.

$$(iv) E_z = \dots = \begin{cases} \dots & \text{im Kern} \\ \dots & \text{im Mantel} \end{cases}$$

Alle Randbedingungen werden für *schwach führende (weakly guiding) Fasern* näherungsweise erfüllt. Schwach führende Fasern sind Fasern, für die der Indexkontrast $\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$ sehr viel kleiner als 1 ist. Die Randbedingungen führen zu der Bedingung:

$$\boxed{u \cdot \frac{J_{\ell-1}(u)}{J_\ell(u)} = -w \cdot \frac{K_{\ell-1}(w)}{K_\ell(w)}} \quad (3.5)$$

Dies ist die *charakteristische Gleichung*. Andere Schreibweise dafür:

$$u \cdot \frac{J_{\ell-1}(u)}{J_\ell(u)} + \sqrt{V^2 - u^2} \cdot \frac{K_{\ell-1}(\sqrt{V^2 - u^2})}{K_\ell(\sqrt{V^2 - u^2})} = 0 \quad (3.5a)$$

V stellt wieder die normierte Frequenz, (3.4), dar.

Die Lösungen für gegebenes V , also die Nullstellen von (3.5a), sind

$$u_{\ell,m}(V)$$

und ergeben mehrere Lösungen für vorgegebenes ℓ . Aus $u_{\ell,m}$ ergibt sich die „wirkliche“ Ausbreitungskonstante $\beta_{\ell,m}$ und die *normierte* Phasenkonstante:

$$B_{\ell m}(V) = \frac{(\beta_{\ell m}/k)^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} = 1 - \frac{u_{\ell m}^2}{V^2} \quad (3.6)$$

Jede $LP_{\ell m}$ -Mode ist nur ausbreitungsfähig für $V \geq V_{co}^{(\ell m)}$. Bei $V = V_{co}^{\ell m}$ sind jeweils äquivalent

$$\begin{aligned}\beta_{\ell m} &= kn_2 \\ u_{\ell m} &= V = V_{co}^{\ell m} \\ w_{\ell m} &= 0 \\ B_{\ell m} &= 0\end{aligned}$$

Die charakteristische Gleichung (3.5) lautet bei $V = V_{co}^{\ell m}$

$$V_{co}^{(\ell m)} \cdot \frac{J_{\ell-1}(V_{co}^{\ell m})}{J_{\ell}(V_{co}^{\ell m})} = 0 \quad \Rightarrow \quad J_{\ell-1}(V_{co}^{(\ell m)}) = 0 \quad (3.7)$$

Damit beträgt die Grenzfrequenz der Grundmode (LP_{01}) bzw. *Grundwelle*:

$$(1. \text{ Nullstelle von } J_{-1}) \cdot V_{co}^{(01)} = 0$$

Die Grenzfrequenz der nächsthöheren Mode (LP_{11}) beträgt

$$(1. \text{ Nullstelle von } J_{1-1}) \cdot V_{co}^{(11)} = 2,4$$

Damit ist eine Stufenindexfaser im Bereich

$$0 < V < 2,4 \quad (3.8)$$

einmodig. Eine derartige Stufenindexfaser wird bezeichnet als Monomodefaser, Singlemodefaser oder Einmodenfaser.

Beispiel

$2a = 10\mu\text{m}$; $\Delta = 0,002$; $n_2 = 1,46$ ist einmodig für $V < 2,4$, d.h.

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{\lambda} an_2 \sqrt{2\Delta} &< 2,4 \\ \Rightarrow \lambda &> \frac{1}{2,4} \dots = 1209\text{nm} = \lambda_{co}^{(11)}\end{aligned}$$

3.1.3 Grundmode

$$E_y = E_0 e^{-j\beta_{01}z} \cdot \begin{cases} J_0(u_{01} \frac{r}{a}) / J_0(u_{01}) & r \leq a \\ K_0(w_{01} \frac{r}{a}) / K_0(w_{01}) & r \geq a \end{cases} \quad (3.9)$$

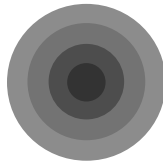


Abbildung 3.2: Intensitätsverteilung Grundmode

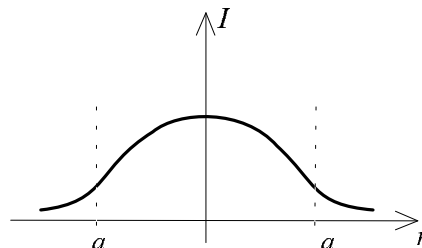


Abbildung 3.3: Feldverteilung Grundmode

Das Feld der Grundmode (Intensität bzw. Helligkeit Abbildung 3.2, Feld Abbildung 3.3) lässt sich „gut“ durch eine GAUSS-Funktion approximieren:

$$E_y^{01} \cong E_0 \cdot e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} \cdot e^{-j\beta_{01}z} \quad (3.10)$$

mit $\frac{w_0}{a} \cong 0,65 + 1,619V^{-1,5} + 2,579V^{-6}$.

Das exakte Feld der Grundmode (HE_{11} -Mode) ohne die Näherung schwacher Führung ist dagegen *nicht* genau einheitlich linear polarisiert, Abbildung 3.4.

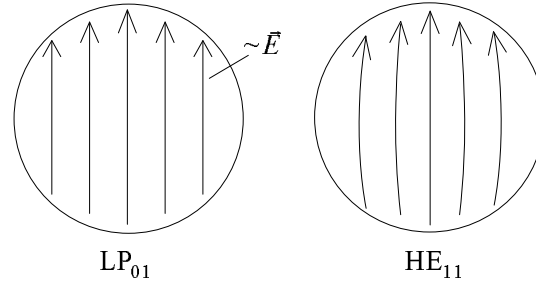


Abbildung 3.4: Exakte Feldverteilung Grundmode, ohne Näherung schwacher Führung

3.2 Geführte Moden, Strahlungsmoden und Leckwellen

(Die folgende Diskussion bezieht sich auf die in der Vorlesung zusätzlich ausgeteilten Abbildungen). Für eine schwach führende Faser mit Brechzahlprofil $n(r)$ gilt Gleichung (3.2), also

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} + \left[k^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{\ell^2}{r^2} \right] F = 0$$

Falls $[\dots] > 0$: oszillierende Lösung $F(r)$, „Licht“

Falls $[\dots] < 0$: exponentiell abfallende Lösung, „kein Licht“

Zur Klassifizierung der möglichen Lösungen der obigen DGL:

$$\begin{aligned} [\dots] &= k^2 \left[n^2(r) - \frac{\beta^2}{k^2} - \frac{\ell^2}{r^2 k^2} \right] \\ &= k^2 \left[n^2(r) - \underbrace{\left(n_{eff}^2 + \frac{\ell^2}{r^2 k^2} \right)}_{g^2(r)} \right] \end{aligned}$$

Damit gibt es folgende mögliche Lösungen, Abbildung 3.5:

$$\begin{aligned} kn_2 < \beta < kn_1 & \text{ geführte Moden} \\ \sqrt{k^2 n_2^2 - \ell^2/a^2} < \beta < kn_2 & \text{ tunnelnde Leckwellen} \\ \beta < \sqrt{k^2 n_2^2 - \ell^2/a^2} & \text{ Strahlungsmoden} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dasselbe, anders formuliert

$$\begin{aligned} 0 < u < V & \text{ geführte Moden} \\ V < u < V \sqrt{1 + \ell^2/V^2} & \text{ Leckwellen} \\ u > V \sqrt{1 + \ell^2/V^2} & \text{ Strahlungsmoden} \end{aligned} \quad (3.11a)$$

Die Stärke der Dämpfung ist unterschiedlich:

geführte Moden	klein
Leckwellen	mäßig bis stark
Strahlungsmoden	sehr stark

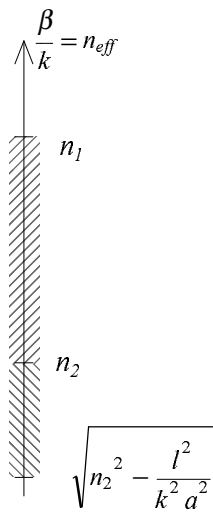


Abbildung 3.5: Unterschiedliche Lösungen bei verschiedenen β/k

Kapitel 4

Eigenschaften von Quarzglasfasern

4.1 Dämpfungsmechanismen

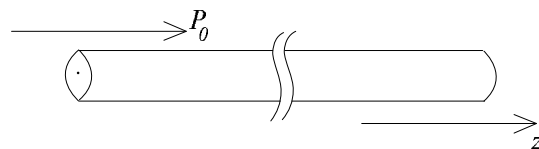


Abbildung 4.1: Leistung von z abhängig, $P = P(z)$

Die Leistung auf der Faser (Abbildung 4.1) nimmt exponentiell ab:

$$P(z) = P_0 \cdot e^{-\alpha z} \quad (4.1)$$

Der Faktor α im Exponenten beträgt z.B. $\alpha = 0,069/km$, damit $P(z = 10km) = P_0 e^{-0,69} = \frac{1}{2} P_0$. Normalerweise wird α nicht in \dots/km angegeben, sondern in dB/km :

$$\alpha_{dB}[dB/km] = - \left(10 \log_{10} \left(\frac{P(z)}{P_0} \right) \right) / z \quad (4.2)$$

Hier: $\alpha = 0,069/km \Rightarrow \alpha_{dB} = 0,3dB/km$

Notation: $\alpha_{dB} \rightarrow \alpha$, ($1dB/km \hat{=} 0,23/km$, $1/km \hat{=} 4,34dB/km$)

Dämpfung einer geführten Mode durch

- Absorption (Energie wird dissipiert)
- Streuung (Licht verläßt die Faser seitlich)
- Wellenleitereffekte (dito)

4.1.1 Absorption in SiO_2

Absorption existiert durch molekulare Schwingungen mit Absorptionsresonanzen. Es gibt SiO_2 -Schwingung bei der Frequenz $\lambda_0 \cong 9\mu m$. Dort beträgt die Dämpfung $\alpha_{9\mu m} = 10dB/\mu m$! Bei der dritte Oberwelle immerhin noch $\lambda = 3\mu m$: $\alpha_{3\mu m} \sim 50dB/m$, Abbildung 4.2. Außerdem existiert elektronische Absorption, diese fällt aber erst bei $\lambda < 0,5\mu m$ gegenüber der RAYLEIGH-Streuung ins Gewicht.

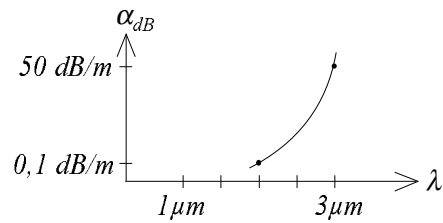


Abbildung 4.2: Absorption durch molekulare Schwingungen

4.1.2 Streuung

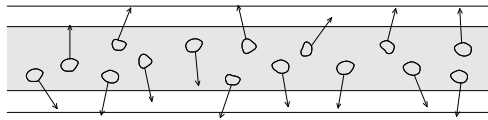


Abbildung 4.3: Streuung

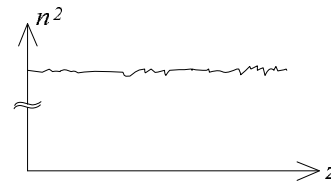


Abbildung 4.4: Schnelle Fluktuation

Brechzahlen unterscheiden sich lokal (submikroskopisch), Abbildung 4.3. Modell für streuendes Medium: RAYLEIGH-Streuung. Diese wird charakterisiert durch:

- (i) *kleine* Fluktuation, die Brechzahlschwankungen sind nur sehr klein; die Dielektrizitätszahl weicht im quadratischen Mittel nur wenig von ihrem Mittelwert \bar{n}^2 ab:

$$\overline{(\varepsilon - \bar{\varepsilon})^2} \ll \bar{\varepsilon}^2 \quad (4.3)$$

$$\text{oder} \quad \overline{(n^2 - \bar{n}^2)^2} \ll (\bar{n}^2)^2 \quad (4.4)$$

- (ii) Fluktuation *räumlich schnell*, Abbildung 4.4, d.h., die Korrelationslänge¹ d_c von $\varepsilon(x, y, z) - \bar{\varepsilon}$ ist klein gegen die Wellenlänge:

$$d_c \ll \lambda_n = \lambda / \sqrt{\bar{n}^2} \quad (4.5)$$

Als Modell werden einzelne Würfel gemäß Abbildung 4.5 angenommen. In einem Würfel der Seitenlänge d_c kann die Brechzahl dann als konstant angesehen werden. Zu lösende Probleme:

1. Was macht ein einzelner Würfel?
2. Was machen alle Würfel zusammen?

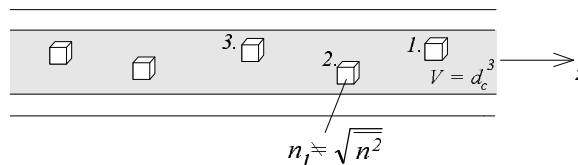


Abbildung 4.5: Fluktuation in Würfel aufgeteilt

¹oder: Korrelationsreichweite

1. Ein Würfel. Um die Strahlung zu berechnen, die in einem Würfel durch die Brechzahlabweichung gestreut wird, wird eine *effektive Quelle* für die Brechzahlabweichung des Würfels eingeführt, siehe Abbildung 4.6. Diese Quelle stellt eine elektrische Stromdichte \vec{J} im Würfel des Volumens d_c^3 dar und strahlt wie ein HERTZscher *Dipol* mit einem Moment $\vec{I}_D \ell$. Die Größe von $\vec{I}_D \ell$ folgt aus der ersten MAXWELLSchen Gleichung (1.2),

$$\text{rot } \vec{H} = j\omega\varepsilon_0 n^2 \vec{E} + 0 \quad (4.6)$$

(obere Anordnung in Bild 4.6), dies wird dann in der unteren Anordnung zu

$$\text{rot } \vec{H} = j\omega\varepsilon_0 \overline{n^2} \vec{E} + \underbrace{j\omega\varepsilon_0 (n^2 - \overline{n^2}) \vec{E}}_{\text{da } \vec{J} \neq 0 \text{ in } \Delta V} \quad (4.7)$$

Das Moment des Dipols beträgt damit

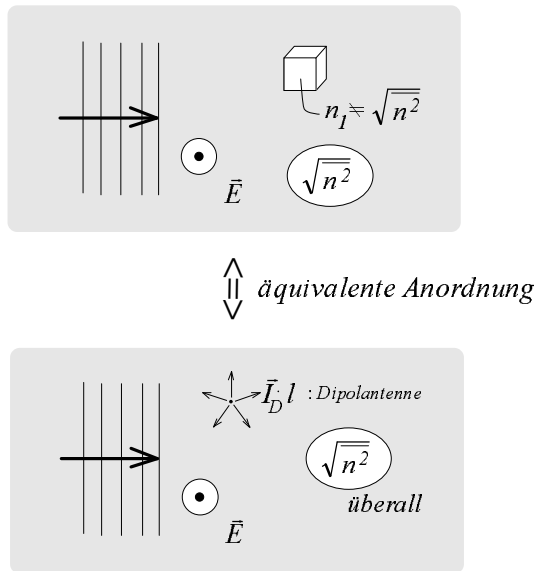


Abbildung 4.6: Effektive Quelle

$$\vec{I}_D \ell = \vec{J} \Delta V = j\omega\varepsilon_0 (n^2 - \overline{n^2}) d_c^3 \vec{E} \quad (4.8)$$

Dessen Strahlungsfeld ist *rotationssymmetrisch* zur Polarisationsrichtung der Welle. Abbildung 4.7 zeigt die Abhängigkeit der Strahlungsintensität vom polaren Winkel θ . Die

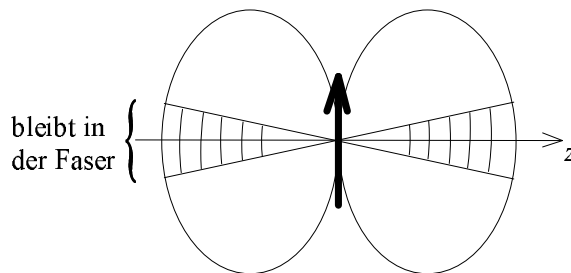


Abbildung 4.7: Strahlungscharakteristik der RAYLEIGHstreuung

gesamte vom Dipol abgestrahlte Leistung beträgt

$$\Delta P_D = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{|\vec{I}_D \ell|^2}{\lambda^2} \Big/ \sqrt{n^2} \quad (4.9)$$

Diese² Leistung P_D geht der Faser (fast) vollständig verloren.

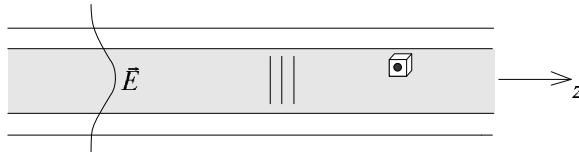


Abbildung 4.8: Geführte Wellenmode und Brechzahlabweichung

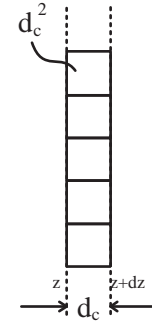


Abbildung 4.9: Änderung von I mit z

2. Viele Würfel. Geführte Leistung in einer Ebene $z = \text{const.}$, Abbildung 4.8,

$$P(z) + \underbrace{\iint I(x, y)}_{\text{Intensität}} dx dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sqrt{n^2} \iint |E(x, y, z)|^2 dx dy \quad (4.10)$$

Änderung von I mit z durch die Würfel, Abbildung 4.9:

$$-\frac{\partial I(x, y, z)}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{I(x, y, z) \cdot d_c^2}{d_c^2} \right] = \frac{1}{d_c^2} \cdot \frac{\Delta P_D(x, y, z)}{d_c} \quad (4.11)$$

$$= \frac{1}{d_c^3} \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{|\vec{I}_D \ell|^2}{\lambda^2} \Big/ \sqrt{n^2} \quad (4.12)$$

$$= \frac{8\pi^3}{3\lambda^4} (n^2 - \bar{n}^2)^2 d_c^3 I(x, y, z) \quad (4.13)$$

Änderung der geführten Leistung P :

$$\frac{dP}{dz} = \iint \frac{dI(x, y, z)}{dz} dx dy = -\frac{8\pi^3}{3\lambda^4} (n^2 - \bar{n}^2)^2 d_c^3 \cdot P(z) \quad (4.14)$$

Lösung der Differentialgleichung

$$P(z) = P_0 \cdot e^{-\alpha_s z} \quad (4.15)$$

mit $\alpha_s = \frac{8\pi^3}{3\lambda^4} (n^2 - \bar{n}^2)^2 d_c^3 \sim 1/\lambda^4$, die Dämpfung ist proportional zu $1/\lambda^4$. Neben der Abhängigkeit von der Wellenlänge tritt nur noch eine charakteristische Materialgröße auf, das *Streuolumen*

$$V_{sc} = \overline{(n^2 - \bar{n}^2)^2} d_c^3 \quad (4.16)$$

Für SiO_2 : $V_{sc} \approx 7,5 \cdot 10^{-31} \text{m}^3$, d.h. $\alpha_s \approx 0,8 \frac{\text{dB}}{\text{km}} \left(\frac{\mu\text{m}}{\lambda}\right)^4$, z.B. bei $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$: $\alpha_s \approx 0,13 \text{dB/km}$.

²Achtung – in der dem Autor vorliegenden Mitschrift steht das letzte $\sqrt{n^2}$ (fälschlicherweise?) im Zähler; im Buch von H.-G. UNGER dagegen steht der Term im Nenner, was dem Autor auch logisch erscheint.

4.1.3 Dämpfung durch Verunreinigungen

OH^- : Resonanzen bei $\lambda = 2,73\mu m, 1,395\mu m, 0,95\mu m$. Dadurch Zusatzverluste $\Delta\alpha$:

	$2,74\mu m$	$1,395\mu m$	$0,95\mu m$
1ppm OH^-		40dB/km	1dB/km
1ppb OH^-		0,04dB/km	-

(ppb steht für Parts per billion, 10^9 .)

Ähnliches gilt für: $Va, Cr, Ma, F_2, Co, Ni, \dots$

4.1.4 Krümmungsverluste

In Multimode-Fasern: siehe Abbildung 4.10, $R_c \approx \frac{a}{(NA)^2}$

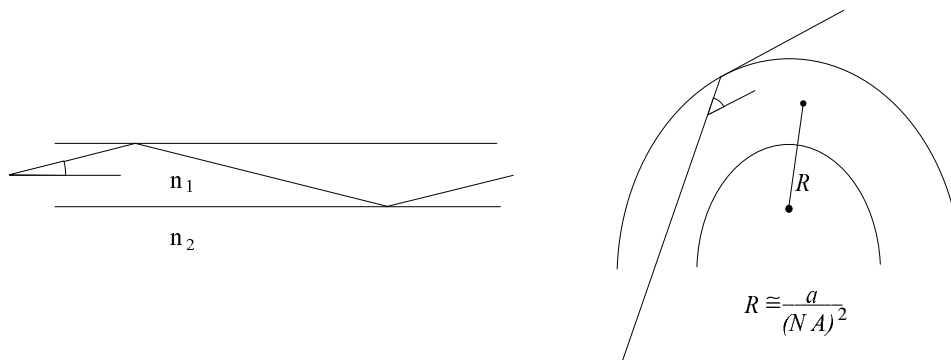


Abbildung 4.10: Krümmung in Multimode-Faser

In Monomodefasern ist eine Ausbreitungsgeschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit, Abbildung 4.11, nicht möglich, daher führt ein Abknicken zu Verlusten. In praktischen An-

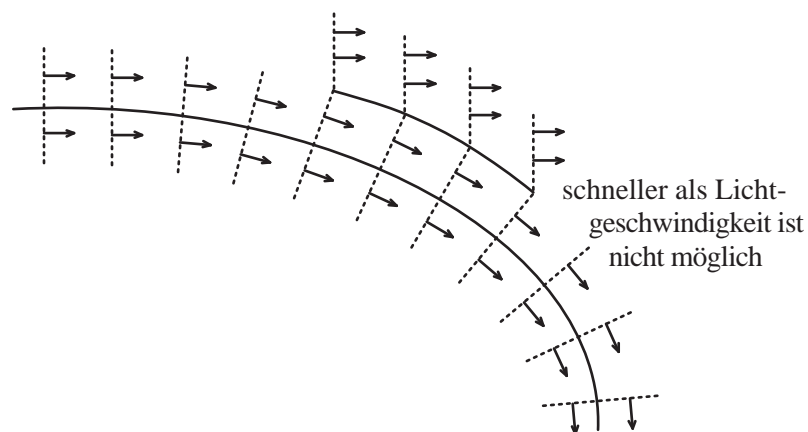


Abbildung 4.11: Krümmung in Monomode-Faser

wendungen sind Mikrokrümmungen, Abbildung 4.12, häufig viel stärker als die Einzelkrümmungen.



Abbildung 4.12: Mikrokrümmungen

4.2 Chromatische Dispersion und Pulsverbreiterung in Monomod-efasern

4.2.1 Wellenleiterdispersion

Ein Impuls bekannter Form werde in eine Faser gesendet, Abbildung 4.13. Die Form des Ausgangsimpulses hängt ab von

- der Faser und
- vom Eingangsimpuls.

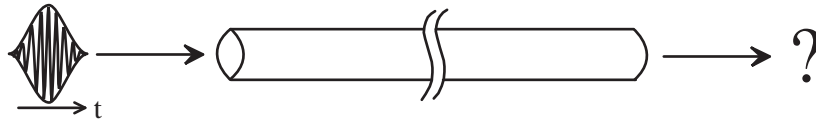


Abbildung 4.13: Eingangsimpuls

Die Faser wird charakterisiert durch $\beta(\nu)$, $\alpha(\nu)$. Der Eingangsimpuls wird charakterisiert durch $\vec{E}_{in}((x, y, z = 0), t)$.

Eingangsimpuls:

$$\underbrace{E_{in}(t)}_{\text{komplexe Amplitude}} = \underbrace{u(t)}_{\text{komplexe Einhüllende}} \cdot \underbrace{e^{j\omega_0 t}}_{\omega_0 \text{ mittlere optische Frequenz}} \quad (4.17)$$

Z.B. $\omega_0 = 2\pi \frac{c}{1,5\mu m} = 2\pi \cdot 200THz$, Abbildung 4.14.

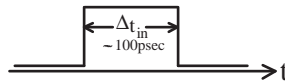


Abbildung 4.14: Beispielimpuls

$$P_{in}(t) = |E_{in}(t)|^2 = |U_{in}(t)|^2 \quad (\text{z.B. } 10mW) \quad (4.18)$$

Fourierzerlegung des Eingangsimpulses:

$$E_{in}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{in}(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu \quad (4.19)$$

Bestimmung der Fourierkoeffizienten $F_{in} = ?$

$$F_{in}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{in}(t) e^{-j2\pi\nu t} dt \quad (4.20)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{j2\pi\nu_0 t} \cdot e^{-j2\pi\nu t} dt \quad (4.21)$$

Jede monochromatische Komponente von $E_{in}(t)$ breitet sich unterschiedlich aus. Komponenten z.B.

$$[F_{in}(\nu)d\nu] \cdot e^{j2\pi\nu t} \quad (4.22)$$

$$[F_{in}(\nu)d\nu] \cdot e^{j2\pi\nu t} \cdot e^{-j\beta(\nu)z} \cdot e^{j2\pi\nu t} \quad (4.23)$$

Dies ergibt

$$E_{out}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{in}(\nu) e^{-\frac{1}{2}\alpha(\nu)z} e^{-j\beta(\nu)z} e^{j2\pi\nu t} d\nu \quad (4.24)$$

und $P_{out}(t) = |E_{out}(t)|^2$ (mit $z = L$).

Näherungen zur Berechnung von $E_{out}(t)$

$$\beta(\nu) = \beta(\nu_0) + \left. \frac{d\beta}{d\nu} \right|_{\nu_0} \cdot (\nu - \nu_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\beta}{d\nu^2} \right|_{\nu_0} \cdot (\nu - \nu_0)^2 + \dots \quad (4.25)$$

$$\alpha(\nu) = \alpha(\nu_0) + \dots \quad (\text{sehr gute Näherung}) \quad (4.26)$$

Damit

$$E_{out}(t) \cong e^{-\frac{1}{2}\alpha(\nu_0)L} \cdot e^{-j\beta(\nu_0)L} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F_{in}(\nu) \cdot e^{-j2\pi(\nu-\nu_0)\tau} \cdot e^{-j\pi(\nu-\nu_0)^2\tau'} \cdot e^{j2\pi\nu t} d\nu \quad (4.27)$$

$$\text{mit } \tau = \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} \cdot L = \frac{1}{2\pi} \left. \frac{d\beta}{d\nu} \right|_{\nu_0} \cdot L \quad (4.28)$$

$$\tau' = \left. \frac{d\tau}{d\nu} \right|_{\nu_0} = \frac{1}{2\pi} \left. \frac{d^2\beta}{d\nu^2} \right|_{\nu_0} \cdot L \quad (4.29)$$

Zwei Fälle:

- (i) τ' ist vernachlässigbar
- (ii) τ' ist nicht vernachlässigbar
- (i)

$$E_{out}(t) = e^{-\frac{1}{2}\alpha(\nu_0)L} \cdot e^{-j\beta(\nu_0)L} \cdot e^{+j2\pi\nu_0\tau} \cdot E_{in}(t - \tau) \quad (4.30)$$

$$P_{out}(t) = e^{-\alpha(\nu_0)L} \cdot P_{in}(t - \tau) \quad (4.31)$$

D.h., der Puls wird *nicht* verzerrt, nur verzögert um die *Gruppenlaufzeit*

$$\tau = \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} \cdot L \quad (4.32)$$

Entsprechend lautet die Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{L}{\tau} = \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\omega_0} \quad (4.33)$$

(Beachte: Die Phasengeschwindigkeit v_{ph} ist die Geschwindigkeit einer Phasenfront einer rein monochromatischen Welle = $\frac{\omega}{\beta} \neq \frac{d\omega}{d\beta}$.)

- (ii) Die Form des Pulses verändert sich, es treten *Pulsverzerrungen* auf. Intuitive Erklärung:

τ = Gruppengeschwindigkeit

$\tau' \neq 0$: Gruppengeschwindigkeit hängt von ν ab. Damit laufen verschiedene Frequenzkomponenten verschieden schnell und es tritt Pulsverzerrung auf.

Beispiel: Gauß-Impuls

$$E_{in}(t) = \hat{u} \cdot e^{-\xi(\frac{t}{\Delta t_{in}})^2} e^{j\omega_0 t} \quad (4.34)$$

Die Fouriertransformierte davon lautet

$$F_{in}(\nu) = \hat{u} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \dots \quad (4.35)$$

$$= \hat{u} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\xi}} \Delta t_{in} \cdot e^{-\frac{1}{\xi}[\pi \Delta t_{in}(\nu - \nu_0)]^2} \quad (4.36)$$

Die unterschiedliche Ausbreitung der monochromatischen Komponenten führt zu

$$F_{out}(\nu) = F_{in}(\nu) \cdot e^{-j\beta(\nu)L} \quad (4.37)$$

Eingesetzt in (4.27) ergibt

$$E_{out}(t) = \hat{u} \cdot e^{-\frac{1}{2}\alpha(\nu_0)L} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{1 + (\frac{\xi}{\pi} \frac{\tau'}{(\Delta t_{in})^2})^2}} \cdot \exp\left(-\xi \frac{(t - \tau)^2}{(\Delta t_{in})^2 [1 + (\frac{\xi}{\pi} \frac{\tau'}{(\Delta t_{in})^2})^2]}\right) \cdot e^{j[2\pi\nu_0 t + \Psi(t)]} \quad (4.38)$$

$$\Delta t_{out} = \Delta t_{in} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\xi}{\pi} \frac{\tau'}{(\Delta t_{in})^2}\right)^2} \quad (4.39)$$

$\xi = 1$ bedeutet: $\Delta t_{in,out}$ = halbe 1/e-Breite der elektrischen Feld-Amplitude

$\xi = 1,39$ bedeutet: $\Delta t_{in,out}$ = FWHM (full width half maximum, Abbildung 4.15) der optischen Leistung. Z.B. $e^{-2 \cdot 1,39} \cdot \frac{t^2}{(\Delta t_{in})^2} = \frac{1}{2}$ für $t = \frac{\Delta t_{in}}{2}$.

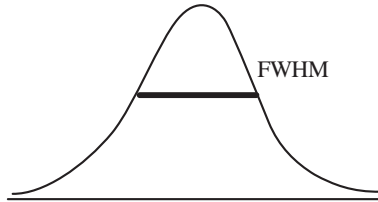


Abbildung 4.15: Full Width Half Maximum

$$\Delta t_{out} = \Delta t_{in} \sqrt{1 + (0,44 \cdot \frac{\tau'}{(\Delta t_{in})^2})^2} \quad (4.40)$$

$$\frac{P_{out,max}}{P_{in,max}} = e^{-\alpha(\nu_0)L} \cdot \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1 + (0,44 \frac{\tau'}{(\Delta t_{in})^2})^2}}_{\text{durch die Pulsaufweitung}}} \quad (4.41)$$

$$\frac{\epsilon_{out}}{\epsilon_{in}} = \frac{\int P_{out}(t) dt}{\int P_{in}(t) dt} = e^{-\alpha(\nu_0)L} \quad (4.42)$$

Je schmaler der Puls, desto breiter das Spektrum und desto größer die Pulsaufweitung.

„Gechirpter“ Gauß-Impuls

$$E_{in}(t) = \hat{u} e^{-\xi(\frac{t}{\Delta t_{in}})^2} \cdot e^{j\pi\gamma t^2} \cdot e^{j2\pi\nu_0 t} \quad (4.43)$$

$$\nu_{mom}(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} (2\pi\nu_0 t + \pi\gamma t^2) \quad (4.44)$$

$$= \nu_0 + \underbrace{\gamma \cdot t}_{\text{(linearer) chirp}} \quad (4.45)$$

$$\Delta t_{out} = \Delta t_{in} \cdot \sqrt{1 + [0,44 \frac{\tau'}{(\Delta t_{in})^2}]^2 + [(\gamma\tau' + 1)^2 - 1]} \quad (4.46)$$

Allgemeiner Fall

Wir betrachten einen Puls auf einem *nicht-monochromatischen* optischen Träger (z.B. LED – man spricht allgemein von einer continuous-wave-Quelle (CW), falls die Lichtleistung zeitlich einigermaßen konstant, jedenfalls nicht pulsförmig ist).

$$E_{in}(t) = \underbrace{u(t)}_{\text{durch Modulation}} \cdot \underbrace{[u_0(t) \cdot e^{j2\pi\nu_0 t}]}_{\text{CW-Lichtquelle}} \quad (4.47)$$

In Gl. (4.47) wird eine allgemeine CW-Lichtquelle dargestellt durch einen monochromatischen Träger $\exp(j2\pi\nu_0 t)$ und eine einhüllende Zeitfunktion $u_0(t)$. Wenn $u_0 = \text{const}$, dann haben wir eine monochromatische Lichtquelle, ansonsten ein verbreitertes Spektrum, z.B. bei Phasenrauschen $u_0(t) = 1 \cdot \exp(j\Psi(t))$, wo Ψ ein Rauschprozeß ist.

Wenn die Lichtquelle nicht streng monochromatisch ist, ist eine exakte analytische Bestimmung des Ausgangsfeldes $E_{out}(t)$ schwierig. Daher qualitative Behandlung: Das CW-Licht enthält bereits verschiedene Frequenzkomponenten, Abbildung 4.16. Damit variieren die Gruppenlaufzeiten zwischen

$$\tau_{min} = \frac{1}{2\pi} \left. \frac{d\beta}{d} \right|_{min} \cdot L \quad \text{und} \quad \tau_{max} = \frac{1}{2\pi} \left. \frac{d\beta}{d} \right|_{max} \cdot L \quad (4.48)$$

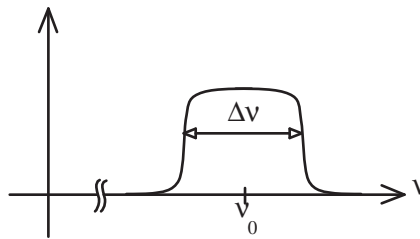


Abbildung 4.16: Optisches Leistungsdichtespektrum

Dies ergibt eine Gruppenlaufzeitstreuung

$$\Delta\tau = \tau_{max} - \tau_{min} \cong \frac{d\tau}{d} \cdot \Delta\nu = \tau' \cdot \Delta\nu \quad (4.49)$$

Verbreiterungen addieren sich quadratisch:

$$(\Delta t_{out})^2 \cong (\Delta t_{in})^2 + \underbrace{(0,44 \frac{\tau'}{\Delta t_{in}})^2}_{\text{Verbreiterung durch Modulation}} + \underbrace{(\tau' \cdot \Delta\nu)^2}_{\text{Verbreiterung durch Quellenbandbreite}} \quad (4.50)$$

$$\Rightarrow \Delta t_{out} = \sqrt{(\Delta t_{in})^2 + (0,44\tau')^2 [\frac{1}{(\Delta t_{in})^2} + \frac{1}{t_{coh}^2}]} \quad (4.51)$$

mit $t_{coh} := 0,44 \cdot \frac{1}{\Delta\nu}$ als Kohärenzzeit der Quelle.

Beispiele

- Laserdiode, longitudinal einmodig, $\Delta\nu \approx 10MHz$, $\rightarrow t_{coh} \approx 50ns$
- Laserdiode, longitudinal multimodig, $\Delta\nu \approx 500GHz$, $\rightarrow t_{coh} \approx 1ps$
- LED, $\Delta\nu \approx 10THz$, $\rightarrow t_{coh} \approx 50fs$

4.2.2 Material-Dispersion

Ebene homogene Welle in homogenen Medien mit $n(\omega)$:

$$\beta = \frac{\omega}{c}n(\omega) \quad (4.52)$$

$$\rightarrow \tau = \frac{1}{2\pi}L\frac{d\beta}{d\nu} = \frac{L}{c} \left[n(\nu) + \nu \frac{dn}{d\nu} \right] \quad (4.53)$$

$$= \dots = \frac{L}{c} \underbrace{\left[n(\lambda) - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right]}_{\text{Gruppenindex } n_{gr}} \quad (4.54)$$

$$\tau' = \frac{d\tau}{d\nu} = \frac{L}{c} \left[2\frac{dn}{d\nu} + \nu \frac{d^2n}{d\nu^2} \right] = \dots = L \cdot \frac{\lambda^2}{c} \cdot \underbrace{\frac{\lambda}{c} \frac{d^2n}{d\lambda^2}}_{=-D_{Mat}} \quad (4.55)$$

mit D_{Mat} als Material-Dispersionskoeffizient.

4.2.3 Gruppenlaufzeit

Kombination von 4.2.2 und 4.2.1, Wellenleiter- und Materialdispersion, ergibt für die Gruppenlaufzeit τ

$$\tau \cong \frac{L}{c} \left[n_{2gr} + (n_{1gr} - n_{2gr}) \frac{d(VB)}{dV} \right] \quad (4.56)$$

Die Änderung mit der optischen Frequenz beträgt

$$\tau' \cong -\frac{L\lambda^2}{c} [D_W + D_{Mat}] = -\frac{L\lambda^2}{c} \cdot D \quad (4.57)$$

mit dem Wellenleiterdispersionskoeffizient

$$D_W = -\frac{1}{\lambda c} (n_{1gr} - n_{2gr}) V \frac{d^2(VB)}{dV^2}. \quad (4.58)$$

Der Dispersionskoeffizient ergibt sich (ohne Beweis) auch als

$$\frac{1}{L} \frac{d\tau}{d\lambda} = \dots = D$$

Die Dimension von D beträgt eigentlich Sekunden pro Quadratmeter, wird aber, da das in der Anwendung viel praktischer ist, in Picosekunden pro Kilometer und Nanometer angegeben: $[D] = \frac{ps}{km \cdot nm}$.

4.2.4 Ausgangspulsbreite

Es werden Abkürzungen eingeführt:

$$\Delta\lambda_{Source} = \frac{\lambda^2}{c} \Delta\nu \quad (4.59)$$

$$\Delta\lambda_{mod} = \frac{\lambda^2}{c} \Delta\nu_{mod} = \frac{\lambda^2}{c} 0,44 \frac{1}{\Delta t_{in}} \quad (4.60)$$

Der Index *mod* steht für die Modulation, Δt_{in} bezeichnet die Eingangspulsbreite und der Faktor 0,44 ist schon in (4.40) vorgekommen.

Mit diesen Abkürzungen ergibt sich für die Ausgangspulsbreite

$$\begin{aligned} \Delta t_{out} &= \sqrt{(\Delta t_{in})^2 + (D \cdot L \Delta\lambda_{mod})^2 + (D \cdot L \Delta\lambda_{Source})^2} \\ &= \sqrt{(\Delta t_{in})^2 + (D \cdot L \Delta\lambda_{eff})^2} \end{aligned} \quad (4.61)$$

mit $\Delta\lambda_{eff} = \sqrt{(\Delta\lambda_{mod})^2 + (\Delta\lambda_{Source})^2}$, der effektiven Bandbreite des Lichts.

Falls, wie oft gegeben, gilt $\Delta t_{out} \gg \Delta t_{in}$, dann läßt sich Formel (4.61) vereinfachen zu

$$\boxed{\Delta t_{out} \cong |D| \cdot \Delta\lambda_{eff} \cdot L} \quad (4.62)$$

4.2.5 Beispiele

- $D = \pm 20 ps/km \cdot nm$ und $\lambda = 1550 nm$, Eingangspulsbreite $\Delta\lambda_{Source} = 3 nm$, $\Delta\lambda_{mod} \ll 3 nm$, Faserlänge $L = 10 km$ ergibt eine Ausgangspulsbreite von $\Delta t_{out} \cong 600 ps$. Aus einem 1...10ps-Impuls wird nach 10km ein 600ps-Impuls, für die Datenübertragung ist dies unbrauchbar.
- $D = \pm 20 \frac{ps}{km \cdot nm}$, $\Delta t_{in} = 10 ps$ ($\Delta\lambda_{mod} \cong 0,5 nm$), $\Delta\lambda_{Source} \ll \Delta\lambda_{mod}$, $L = 100 km \Rightarrow \Delta t_{out} \cong 1 ns$.
- $\lambda \cong 1300 nm$, $D \cong 0 \Rightarrow \Delta t_{out} = ?$ unbekannt ($\Delta t_{out} \approx \Delta t_{in}$). $D \cong 0$ erfordert bessere Näherung, z.B. Dispersion höherer Ordnung betrachten:

$$\beta = \beta_0 + \beta' \cdot (\nu - \nu_0) + \dots + \beta''' \cdot (\nu - \nu_0)^3$$

oder einführen $S = \frac{dD}{d\lambda} \left[\frac{ps}{km \cdot nm^2} \right]$

4.2.6 Näherungsformeln

Dispersion des Materials:

$$D_{Mat} \cong \frac{q_1}{\lambda^3} + q_2 \lambda \quad (4.63)$$

$$q_1 = -6,5 \cdot 10^{-23} \cdot m \cdot s \text{ [Meter} \cdot \text{ Sekunde]} \quad (4.64)$$

$$q_2 = 24 \frac{s}{m^3} \left[\frac{\text{Sekunde}}{\text{Meter}^3} \right] \quad (4.65)$$

Wellenleiterdispersionskoeffizient, mit $B(V) \cong (1,143 - 0,996/V)^2$ (dies ist eine sehr gute Approximation im interessierenden Bereich)

$$\begin{aligned} D_W &= -10^{-8} \frac{s}{m} \cdot \frac{\Delta}{\lambda V^2} \\ &= \frac{-10^{-8} s}{8\pi^2 n^2 m} \cdot \frac{\lambda}{a^2} \end{aligned}$$

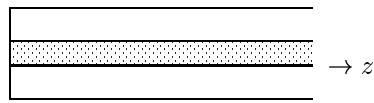


Abbildung 4.17: Stufenindexfaser

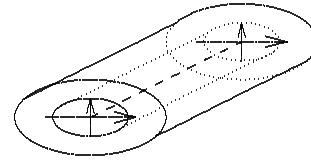


Abbildung 4.18: Elliptische Faser

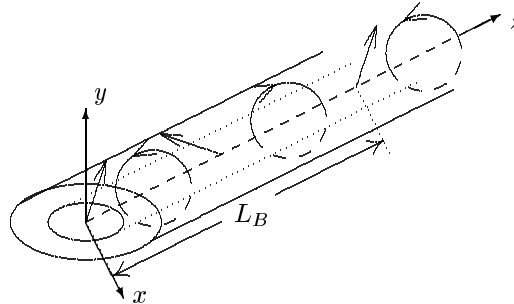


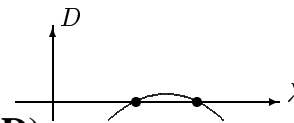
Abbildung 4.19: Änderung der Polarisation, Schwebung

mit Δ Differenz des Brechzahlindex, a Radius des Faserkerns.

Bei einer Stufenindexfaser bewirkt ein kleinerer Kernradius eine Verschiebung der Dispersion: *dispersion shifted fiber, DSF*.

ausgeteiltes Bild

Durch spezielle Profile (double clad, quadruple clad) sind auch mehrere Nullstellen der Dispersionskurve möglich: *dispersion flattened fiber, DFF*.



4.3 Polarisationsmodendispersion (PMD)

4.3.1 Ursache

Eine monochromatische ebene Welle habe die Amplitude

$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$ (JONES-Vektor). Das Verhältnis $\chi = \frac{E_y}{E_x}$ wird als *Polarisationsparameter* bezeichnet. Es wird eine Einmodenfaser betrachtet, Abbildung 4.17. χ ist in Längsrichtung vom Ort z abhängig, $\chi = \chi(z)$.

Bei nichtidealer Faser ändert sich die Polarisation der Welle. Zunächst sei eine elliptische Faser (Abbildung 4.18) betrachtet.

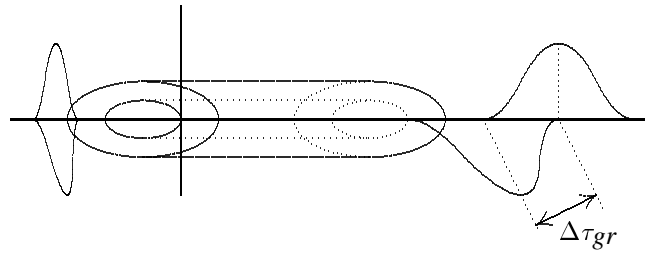
Licht, das nur in x -Richtung polarisiert ist, ändert seine Polarisation nicht und breitet sich mit der Ausbreitungskonstanten β_x aus. Ebenso ändert in y -Richtung polarisiertes Licht seine Polarisation nicht und hat die Ausbreitungskonstante $\beta_y \neq \beta_x$. Eine Welle, die Anteile in x - und y -Richtung hat (z.B. lineare Polarisation mit $\theta = 45^\circ$), ändert ihre Polarisation, denn die x - und y -Komponenten breiten sich unterschiedlich schnell aus (Abbildung 4.19). Der Polarisationsparameter hängt von z ab:

$$\chi(z) = e^{-j(\beta_y - \beta_x)z} \quad (4.66)$$

L_B ist die *Schwebungslänge (beat length)*. Im Abstand L_B wiederholt sich die Polarisation wieder.

4.3.2 Folgen

Folgen aus $\chi = \chi(z)$:


 Abbildung 4.20: Gruppenlaufzeitunterschied $\Delta\tau_{gr}$

- Übertragung würde gestört, falls polarisationsabhängige Bauelemente in der Strecke vorkommen (*polarization-dependent loss, PDL*). Dies ist in der Praxis eher selten der Fall.
- x - und y -polarisierte Anteile eines Pulses haben unterschiedliche Gruppenlaufzeit τ_{gr} (Abbildung 4.20).

$$\Delta\tau_{gr} = L \cdot \left(\frac{d\beta_x}{d\omega} - \frac{d\beta_y}{d\omega} \right) \quad (4.67)$$

typisch: $\frac{\Delta\tau_{gr}}{L} \approx 1 \frac{\text{pSekunde}}{\text{km}} \dots 1 \frac{\text{ns}}{\text{km}}$
 „low-bi“ „hi-bi“

„hi-“ bzw. „low-bi“ steht für Fasern mit hoher bzw. niedriger Doppelbrechung.

In realen „low-bi“-Fasern ändern die Ellipsenachsen ihre Orientierung entlang der Faser. Dies bewirkt, daß es *keine* Polarisationszustände gibt, die erhalten bleiben – anders als im oben betrachteten Modell. Stattdessen werden bei einer realen Faser zwei ausgezeichnete Polarisationszustände angegeben, für die gilt

$$\left. \frac{d\chi_{out}}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = 0 \quad (4.68)$$

Bei diesen sogenannten *Hauptzuständen* (*principal states*) ist die Änderung des Polarisationsparameters χ bei kleinen Änderungen an der Frequenz ω_0 gleich Null. Dies entspricht einer Verallgemeinerung von Polarisationszuständen, die erhalten bleiben. Weiterhin gilt

$$\Delta\tau_{gr} = \tau_{1p} - \tau_{2p} \quad (4.69)$$

und außerdem ergibt sich, daß die beiden Hauptzustände immer senkrecht aufeinander stehen.

4.3.3 Gruppenlaufzeitunterschiede

Gruppenlaufzeitunterschiede in „hi-bi“-Fasern

$$\Delta\tau_{gr} = \left(\frac{\Delta\tau_{gr}}{L} \right) \cdot L \quad (4.70)$$

z.B. $1 \frac{\text{ns}}{\text{km}} \cdot L$

„low-bi“-Faser mit schwankender Orientierung der Ellipsenachsen

$$\Delta\tau_{gr} = \left(\frac{\Delta\tau_{gr}}{\sqrt{L}} \right) \cdot \sqrt{L} \quad (4.71)$$

denn statistisch betrachtet heben sich die Laufzeitunterschiede teilweise wieder auf – deswegen $\Delta\tau_{gr} \sim \sqrt{L}$. Beispielhafte Werte: Fall A, $0,13 \frac{ps}{\sqrt{km}}$; Fall B, $0,54 \frac{ps}{\sqrt{km}}$; Fall C, $50 \frac{ps}{\sqrt{km}}$. A und B ergeben auch bei Kabellängen in der Größenordnung von $10\,000 km$ tolerierbare Laufzeitunterschiede.

Kapitel 5

Grundlagen optischer Detektoren

5.1 PN-Photodiode

Licht wird als Strom von Photonen betrachtet. Diese erzeugen bei ihrer Absorption Elektronen-/Lochpaare: $h\nu \rightarrow \oplus \ominus$. Dies ist der *innere Photoeffekt*. Er tritt nur auf, wenn die Wellenlänge kurz genug ist: $h\nu > E_g$. Dies ist jeweils abhängig von Halbleiter.

Bei Silizium tritt dies nur im Bereich bis $1100nm$ auf; oberhalb davon ist die Photonenenergie zu klein, bedingt durch den Bandabstand. Bei GaAs geht das bis $1700nm$.

5.1.1 Grundstruktur Photodiode, PN-Übergang

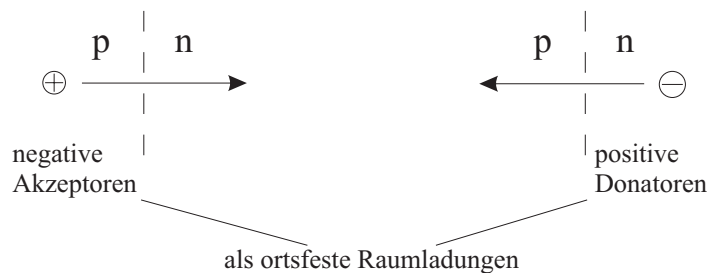


Abbildung 5.1: Ladungsträgerdiffusion

Die bei Ladungsträgerdiffusion (Abb. 5.1) zurückbleibenden Akzeptoren bzw. Donatoren ergeben eine Raumladungsverteilung $\rho(x)$, die seinerseits ein elektrisches Feld E ($\frac{\rho}{\epsilon} = \text{div}E = \frac{dE}{dx}$) bewirkt. Dieses wiederum treibt die Majoritätsträger zurück. Daraus entsteht ein Gleichgewichtszustand.

Resultat: In der Umgebung des *pn*-Übergangs befinden sich Raumladungen und damit nur wenige bewegliche Ladungsträger (andernfalls würden sie sich wegbewegen). Dies ist dann die *Raumladungszone* bzw. die *Sperrschicht*.

Die Diffusionsspannung beträgt

$$U_d = - \int E dr = \frac{kT}{e} \ln \frac{N_A \cdot N_D}{n_i^2} \quad (5.1)$$

Die Breite der Raumladungszone ergibt sich zu

$$\ell = x_n + |x_p| = \sqrt{\frac{2\epsilon_r \epsilon_0}{e} \left(\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D} \right) (U_D - U)} \quad (5.2)$$

Sperrschicht-Kapazität:

$$C_D = \varepsilon \cdot \frac{A}{\ell} = \frac{\varepsilon A}{\ell_0 \sqrt{1 - \frac{U}{U_D}}} \quad (5.3)$$

Im Sperrbereich der Diodenkennlinie gilt $U < 0$, ℓ nimmt dann zu und C_D nimmt ab.

Bei dem pn -Übergang von Photodioden treten einfallende Photonen auf, für die $h\nu > E_g$ gilt, d.h. es entstehen Ladungsträgerpaare, weil Elektronen aus dem Valenz- ins Leitungsband gehoben werden, z.B. (vorzugsweise) in der Raumladungszone.

Die Elektronen (und Löcher), die in der Raumladungszone entstanden sind, bewegen sich zunächst noch, weil dort ja ein elektrisches Feld herrscht. Die Elektronen driften zum n -Bereich (nach rechts), die Löcher driften nach links zum p -Bereich.

Daraus folgt auch ein Stromfluß im äußeren Stromkreis (weil im geschlossenen Stromkreis überall der gleiche Strom fließt) während dieser Drift, also nicht nur infinitesimal kurz. Falls kein geschlossener Stromkreis anliegt, entsteht eine Spannung. Diese Beschaltung ist aber unüblich, da viel zu langsam und nichtlinear.

5.1.2 Photostrom I_{ph}

Welcher Photostrom I_{ph} fließt bei gegebener optischer Leistung P ? Annahme: Ideale Photodiode, d.h. gesamte optische Leistung wird in der Raumladungszone absorbiert.

Die *optische Leistung* beträgt $P = N \cdot h\nu$ (N : Zahl der einfallenden Photonen pro Sekunde). Nach vollständiger Absorption gibt es genausoviel Elektronen/Loch-Paare wie Photonen, d.h. es muß gelten $N_- + N_+ = N$. Dann gibt es einen Ladungstransport durch die Fläche $x = 0$ (die hier willkürlich gewählt wurde, Abbildung 5.2).

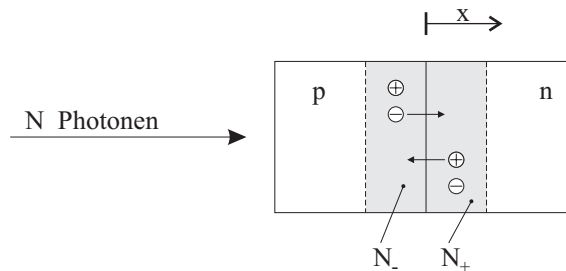


Abbildung 5.2: Absorption von Photonen

Dieser beträgt

$$\frac{dQ}{dt} = N_- \cdot e - N_+ \cdot (-e) = (N_- + N_+)e = N \cdot e = e \cdot \frac{P}{h\nu} \quad (5.4)$$

$$\boxed{I_{ph} = \frac{e}{h\nu} \cdot P} \quad (5.5)$$

Für eine reale Photodiode tragen nicht alle Elektronen/Loch-Paare zu I_{ph} bei; ein Teil der optischen Leistung wird zu früh oder zu spät absorbiert. Nun soll abgezählt werden, wieviele Elektronen/Loch-Paare verloren gehen:

$$g(x) = \text{Ladungsträgergenerationsrate pro Längeneinheit} = \alpha \cdot N \cdot e^{-\alpha(x+d)} \quad (5.6)$$

Man beachte: die Gesamtgenerationsrate ist gleich der Anzahl der einfallenden Photonen:

$$\int_{-d}^{+\infty} g(x) dx = N.$$

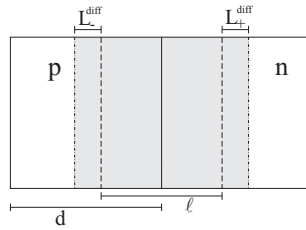


Abbildung 5.3: Verbreiterung der Raumladungszone, Diffusionszonen

Zu I_{ph} tragen bei: Ladungsträger, die in der Raumladungszone entstehen, plus Ladungsträger, die in den Diffusionszonen L_-^{diff} und L_+^{diff} entstehen, Abbildung 5.3.

$$I_{ph} = e \int_{x_-}^{x_+} g(x) dx = \dots = e \frac{P}{h\nu} \left[e^{-\alpha(x_-+d)} - e^{-\alpha(x_++d)} \right] \quad (5.7)$$

$$\boxed{I_{ph} = \eta \cdot \frac{e}{h\nu} P} ; \quad \eta : \text{Quantenausbeute} \quad (5.8)$$

mit $\eta = (1 - R) [e^{-\alpha(x_-+d)} - e^{-\alpha(x_++d)}]$, R Frontflächen-Leistungsreflexionsfaktor. Üblicherweise ist $(x_- + d)$ klein, die erste e -Funktion also 1, und $(x_+ + d)$ ist groß, die zweite e -Funktion also 0, damit die Klammer 1 und bei $R = 0$ liegt mit $\eta = 1$ eine ideale Photodiode vor.

Konversionsfaktor bzw. Ansprechempfindlichkeit

Ansprechempfindlichkeit ist eine alternative Darstellung der Quantenausbeute.

$$R = \frac{I_{ph}}{P} = \eta \cdot \frac{e}{h\nu} = \eta \cdot \underbrace{\frac{e\lambda}{hc}}_{\approx 1A/W} \quad (5.9)$$

5.1.3 Kennlinie einer Photodiode

$$I = \underbrace{I_s \left(e^{\frac{U}{U_T}} - 1 \right)}_{\text{normale Diode}} - I_{ph} \stackrel{\text{für } U < 0}{\cong} -I_s - I_{ph} \quad (5.10)$$

I_s wird auch als I_d , Dunkelstrom, bezeichnet, weil im Dunkeln der Photostrom verschwindet.

5.2 PIN-Photodiode

Um bessere $h\nu$ -Absorption im felderfüllten Raum zu erreichen, verwendet man eine PIN-Photodiode (statt PN), deren Struktur in Abbildung 5.4 gezeigt wird. I steht für intrinsische (eigenleitende, d.h. nicht dotierte) Schicht, deren Breite ℓ wird technologisch vorgegeben. Es entsteht ein größerer Bereich, in dem ein Feld wirksam ist. ℓ ist bis zu einigen $100\mu m$ lang. Für großes ℓ gilt $\eta \rightarrow 1$, aber: für großes ℓ wird die Photodiode langsam.

5.2.1 Dynamisches Verhalten von PIN-Photodioden

Zum Teil bestimmt durch Laufzeiteffekte (Driftzeit). Frage: Wie sieht die elektrische Antwort auf einen kurzen optische Impuls aus (Abbildung 5.5)?

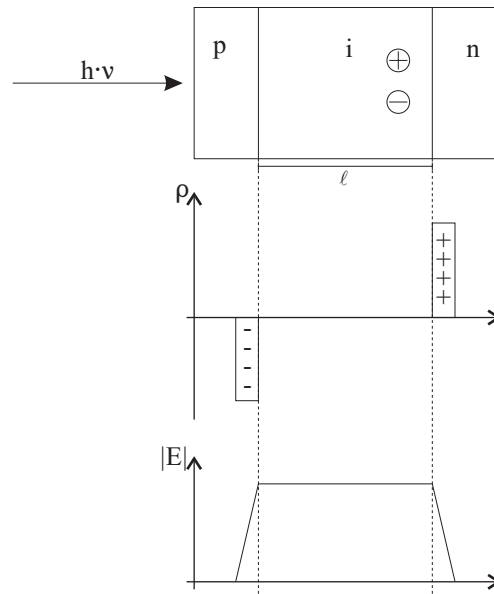


Abbildung 5.4: Struktur PIN-Photodiode

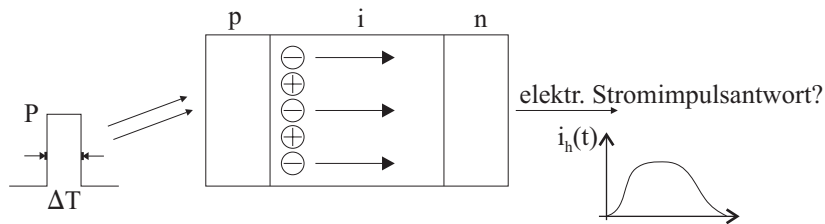


Abbildung 5.5: Elektrische Antwort auf optischen Impuls

Beispiel: $\alpha \ell \gg 1$. Daraus folgt

$$i_h(t) = 0 \quad \text{für } t < 0$$

$$i_h(t) = 0 \quad \text{für } t > \tau_e$$

Für $0 < t < \tau_e$:

$$i_h(t) = \frac{\text{Ladung}}{\text{Driftzeit}} = \frac{(N \Delta t) e}{\tau_e} = \frac{P \Delta t e}{h \nu \tau_e} = \frac{W e}{h \nu \tau_e} \quad (5.11)$$

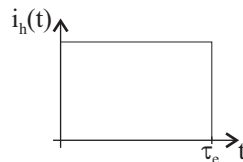


Abbildung 5.6: „Impulsantwort“

Die entsprechende Übertragungsfunktion lautet

$$H(\omega_m) = \frac{e}{h \nu} \frac{\sin(\pi f_m \tau_e)}{\pi f_m \tau_e} \cdot \exp(-j \pi f_m \tau_e) \quad (5.12)$$

Beispiel: $\ell = 10\mu\text{m}$, $v_e = 100\mu\text{m/ns}$ ergibt $\tau_e = 100\text{ps}$ (Halbwertsbreite) und als Grenzfrequenz $f_{max} \cong 0,6/\tau_e = 6\text{GHz}$

Die Laufzeit ist nicht die einzige Begrenzung der Übertragungsfunktion. Siehe dazu das einfachste Ersatzschaltbild der Photodiode, Abbildung 5.7: Eine Stromquelle getrieben von der einfallenden optischen Leistung bewirkt einen Strom, der durch den äußeren Lastwiderstand fließt.

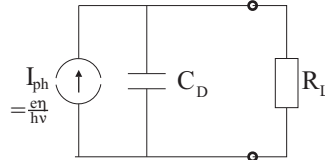


Abbildung 5.7: Ersatzschaltbild Photodiode

Darüber hinaus ist zu berücksichtigen, daß eine *Sperrschichtkapazität* vorliegt.

$$C_D = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \frac{A}{\ell} \quad (5.13)$$

Beispiel: $A = 200 \times 200\mu\text{m}^2$; $\ell = 10\mu\text{m}$; $\varepsilon_r = 12 \Rightarrow C_D \cong 0,5\text{pF}$. $\tau_D = R_L \cdot C_D$ ist die RC-Zeitkonstante.

Totale Zeitkonstante: $\tau_{tot} \approx \tau_D + \tau$ z.B. τ_e

Beispiel: $A = 200 \times 200\mu\text{m}^2$; $\ell = 10\mu\text{m}$; $\varepsilon_r = 12$; $v_e = 100\mu\text{m/ns}$ ergibt $\tau_e \cong 100\text{ps}$

$$\tau_D \cong \begin{cases} 25\text{ps} & \text{für } R_L = 50\Omega \\ 5\text{ns} & R_L = 10\text{k}\Omega \end{cases} \quad (5.14)$$

5.2.2 PIN-Dioden als Heterostruktur-Photodioden

Aus InP und $\text{In}_{0,53}\text{Ga}_{0,47}\text{As}$. Verschiedene Halbleiter haben verschiedene Bandlücken. Bandlücke E_g

$$E_{g,\text{InP}} = 1,34\text{eV} \quad \text{ergibt Grenzfrequenz } \lambda_g = 925\text{nm}$$

$$E_{g,\text{InGaAs}} = 0,75\text{eV} \quad \text{ergibt Grenzfrequenz } \lambda_g = 1600\text{nm}$$

5.3 Lawinphotodioden (Avalanche-, APD)

Dieser Diodentyp wird selten eingesetzt, weil PIN-Photodioden meistens ausreichen. Der Vorteil von Avalanchephotodioden ist, daß die Ansprechempfindlichkeit um Faktor 100 größer sein kann. Dies wird durch Ladungsträgermultiplikation erreicht.

Siehe Bild auf dem ausgeteilten Beiblatt. Die wichtigste Zone ist die Multiplikationszone, wo eine hohe Feldstärke herrscht.

- Optische Leistung wird (vorwiegend) in der Absorptionszone absorbiert.
- Erzeugte Ladungsträger werden räumlich getrennt, laufen also nach rechts oder nach links (Elektronen/Löcher je nach Polung)
- (linkes Bild) Elektronen werden in die Hochfeld-/Multiplikations-/Lawinenzone injiziert.
- In der Lawinenzone: Stoßionisation ergibt mehr Ladungsträger und größeren Photostrom.

Bei kleinem P : Lineare Verstärkung des primären Photostroms in Abhängigkeit von den *Ionisierungskoeffizienten* α_n, α_p . Bei großem P : Sperrspannung an der Diode vermindert sich, Abbildung 5.8. Für den *Multiplikationsfaktor* $M = I/I_{ph}$ gilt

$$M = \frac{1}{1 - \left(\frac{U - RI_{ph}}{U_B}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}} \quad (5.15)$$

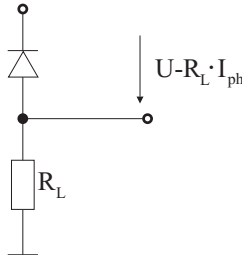


Abbildung 5.8: Sperrspannung an Lawinenphotodiode

D.h. I wächst *nicht linear* mit P . Daher ist die Verwendung nur in besonderen Fällen, wenn kleine optische Leistungen empfangen werden, ratsam.

M hängt außerdem über die Durchbruchspannung von der Temperatur ab. Die Temperatur und/oder die dazugehörige Sperrspannung muß daher im Betrieb geregelt werden – hier ist ein viel höherer Aufwand nötig als bei der PIN-Diode.

Kapitel 6

Grundlagen optischer Halbleiterquellen

6.1 Elektrolumineszenz, LEDs

6.1.1 Prinzip

Die Lichterzeugung erfolgt durch Elektron-Loch-Rekombination in einem Halbleitermaterial. Dies wird als Elektro-Lumineszenz bezeichnet. Der wichtigste Prozeß ist der direkte Band-Band-Übergang von Ladungsträgern zwischen Leitungs- und Valenzband, Abbildung 6.1.

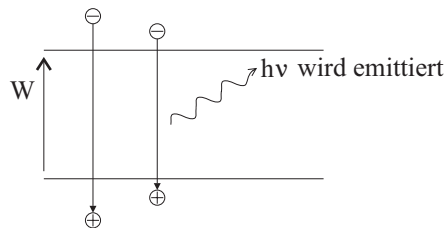


Abbildung 6.1: Band-Band-Übergang in einer Leuchtdiode

Aus dem Energiesatz folgt: $h\nu \cong W_g$, W_g ist der Bandabstand (*Gap*). Das ist die Energie, die beim Übergang mit anschließender Rekombination frei wird. Damit ist die Wellenlänge der emittierten Photonen abhängig vom Bandabstand. [Ebeling]

6.1.2 Leistungsdichtespektrum

Welches Leistungsdichtespektrum kann man erwarten? Elektronen müssen nicht zwangsläufig an der Kante des Leitungsbandes sitzen, sie können sich auch darüber befinden bzw. mit Löchern rekombinieren, die tiefer als die Oberkante des Valenzbandes sitzen (Abbildung 6.2). Hier wird keine genaue Rechnung zur Elektronenverteilung durchgeführt, sondern nur eine grobe Schätzung angegeben für die Elektronendichte pro Energieintervall im Leitungsband $\frac{dn}{dW}$ und die Löcherdichte pro Energieintervall im Valenzband $\frac{dp}{dW}$.

$$\frac{dn}{dW} \cong A \exp \left[-\frac{W - W_C}{kT} \right] \quad (6.1)$$

$$\frac{dp}{dW} \cong B \exp \left[-\frac{W_V - W}{kT} \right] \quad (6.2)$$

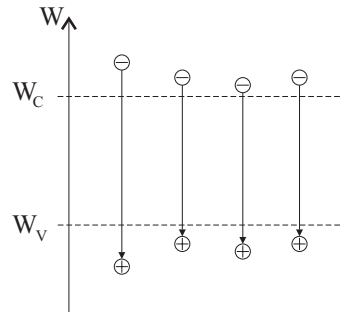


Abbildung 6.2: Unterschiedliche Abstände bei Rekombination

Der Verlauf dieser Gleichungen ist in Abbildung 6.3 gezeigt.

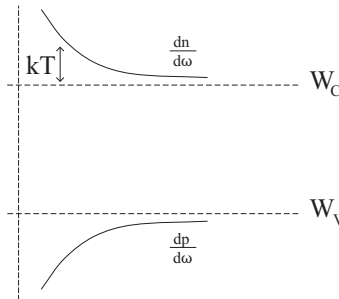


Abbildung 6.3: Elektronen- und Löcherdichte pro Energieintervall

Das Abzählen der möglichen „Pfeillängen“ führt zum Leistungsdichtespektrum (Abbildung 6.4).

$$LDS \sim \int n'(W_2) \cdot p(W_1) dW_2 \quad (6.3)$$

mit $W_{ph} = W_2 - W_1 = h\nu$

$$\sim (W_{ph} - W_g) \cdot \exp \left[-\frac{W_{ph} - W_g}{kT} \right] \quad (6.4)$$

(und 0 für $W_{ph} < W_g$)

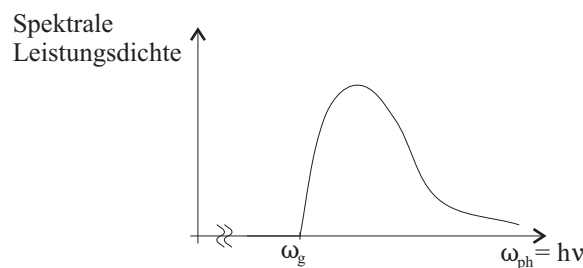


Abbildung 6.4: Spektrale Leistungsdichte der Ladungsträgerverteilung

Die Breite des Spektrums bei FWHM (full width at half maximum, Abbildung 6.5) beträgt $2,4kT$; real: $1,5 \dots 3,5kT$

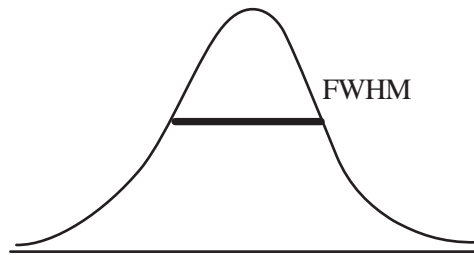


Abbildung 6.5: FWHM

$2,4kT$ entspricht in optischen Frequenzen bei $\Delta\gamma \cong 10THz$ der Bandbreite $\Delta\lambda \cong 100nm$ für die Mittenfrequenz $\bar{\lambda} \cong 1500nm$. Eine LED hat also eine relativ große Bandbreite. Dies ist in der Anwendung für hochratige Datenübertragung über Fasern unerwünscht (Stichwort Gruppenlaufzeit und Dispersion). Aber die LEDs sind die Grundlagen für die Laserdioden.

6.1.3 Ausgangsleistung

Wie groß ist die Ausgangsleistung? Wenn alle Ladungsträger strahlend rekombinieren, dann ist die Ausgangsleistung einfach anzugeben:

$$P = \underbrace{\frac{I}{e}}_{\text{Zahl/s der inj. Ladungsträger}} \cdot h\nu \quad (6.5)$$

Zahl/s der inj. Ladungsträger

Wenn nicht alle rekombinieren, kommt ein Faktor < 1 hinzu:

$$P = \eta_{int} \frac{I}{e} h\nu \quad \text{mit} \quad \eta_{int} = \frac{1}{1 + \frac{\tau_{rr}}{\tau_{nr}}} \quad (6.6)$$

als „interner Quantenwirkungsgrad“. Die Ladungsträger-Lebenszeiten sind gegeben durch τ_{rr} für strahlende Übergänge (*radiation*) und τ_{nr} für die nicht strahlenden Übergänge (*no radiation*).

$$\tau_{rr} \cong \frac{1}{B \cdot n_A} \quad (6.7)$$

Die Konstante B hängt stark vom Halbleiter ab. Wenn die Lebensdauer für strahlende Übergänge sehr kurz ist ($\approx 100ns$) bzw. kurz gegen die nichtstrahlende $\tau_{nr} \gg \tau_{rr}$ z.B. bei GaAs, InP, $In_xGa_{1-x}As_yP_{1-y}$, dann gilt $\eta_{int} \rightarrow 1$. Dies ist insbesondere der Fall bei allen *direkten Halbleitern*.

Bei indirekten Halbleitern dagegen gilt $\tau_{nr} \ll \tau_{rr}$ und dadurch $\eta_{int} \rightarrow 0$.

Für die Ausgangsleistung ist zusätzlich ein optischer Wirkungsgrad zu betrachten:

$$P_{out} = \eta_{opt} \cdot \eta_{int} \cdot \frac{I}{e} h\nu \quad (6.8)$$

Dies wird zusammengefasst als η_{ext} , externer Quantenwirkungsgrad. Dieser ist meist klein, z.B. 1%, so daß sich eine Ausgangskennlinie ähnlich Bild 6.6 ergibt. η_{opt} als optischer Wirkungsgrad ist gegeben z.B. durch die Totalreflexion beim Austritt des Lichtes aus der LED, wobei ja eine große Differenz der Brechindizes auftritt.

An dieser Stelle ist die Frage interessanter, welchen Anteil vom Licht in eine Faser eingekoppelt werden kann. Der Einkopplungswirkungsgrad η_f in eine Faser wird günstig, je näher die Faser am Emissionsgebiet anliegt.

$$P_f = \eta_f \cdot \eta_{ext} \cdot \frac{I}{e} h\nu \quad (6.9)$$

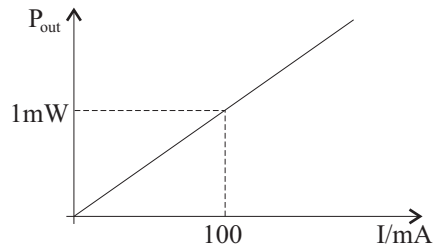


Abbildung 6.6: Ausgangskennlinie LED

Für SLED (*Surface-emitting LED*) beträgt der Einkopplungswirkungsgrad $\eta_f \approx 10^{-3}$ bei einer Multimodefaser. Dieser Wert ist rein optisch zu bestimmen (Totalreflexion etc.). Bei Monomodefaser ist der Wert noch kleiner, z.B. 10^{-5} .

Daher sind andere LED-Strukturen wesentlich interessant, siehe ausgeteiltes Beiblatt: *Edge-emitting LED*, bei der das Licht an der Seite und nicht an der Oberfläche austritt.

Heterostruktur-LEDs: Diese bestehen aus verschiedenen Halbleitern, die jeweils verschieden dotiert sind und verschiedene Bandabstände haben. Für die Wahl der verschiedenen Halbleiter gibt es mehrere Gründe:

- Elektrische Gründe: Man hat eine Energiebarriere hinter der aktiven Zone, so daß Ladungsträger in der aktiven Zone „eingesperrt“ werden (Zone mit kleinerem Bandabstand) und dort besser rekombinieren.
- Optische Gründe: Keine Reabsorption bei Surface-emitting LEDs (da W_g der angrenzenden Schichten größer), und
- kleinerer Bandabstand in der aktiven Zone bedeutet größeren Brechungsindex n , der damit größer ist als der der angrenzenden Schichten (wie Stufenindexfaser). Diese führt damit die Wellen und leitet sie an den Austrittspunkt an der Stirnfläche. Zwar konnte nur ein Teil des erzeugten Lichts in die *Schicht* eingekoppelt werden, aber davon kann ein großer Teil in die Faser eingekoppelt werden. (Wichtig für Edge-emitting LEDs)

6.1.4 Modulation

Nächste Frage: Wie schnell läßt sich ein Sender modulieren? Dies führt auf die Modulationsübertragungsfunktion.

$$H(\omega_{mod}) = \frac{P(\omega_{mod})}{I(\omega_{mod})} \quad (6.10)$$

$$|H(\omega_{mod})| \sim \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_{mod}^2 \tau^2}} \quad (6.11)$$

wobei $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{rr}} + \frac{1}{\tau_{nr}}$.

$$f_{max} \cong \frac{1}{2\pi\tau} \quad (6.12)$$

Die Grenzfrequenz f_{max} von LEDs beträgt oft nur einige MHz, möglich ist aber etwas mehr als 1 GHz.

Schlußbetrachtung: Sowohl Modulierbarkeit als auch Bandbreite und Ausgangsleistung bei LEDs sind ungeeignet für höchste Datenraten.

Kapitel 7

Passive optische Komponenten

7.1 Anregung von Fasern mit optischen Wellen, Spleiss- und Steckverbindungen

Zwei Grenzfälle, die einfach zu behandeln sind:

7.1.1 Multimodefasern und räumlich inkohärente Quellen

Die Rechnung kann strahlenoptisch erfolgen, Abbildung 7.1.

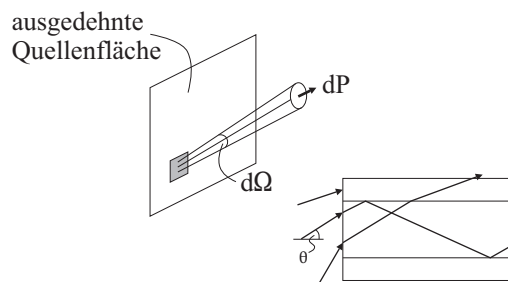


Abbildung 7.1: Strahlenoptische Rechnung

Es liegt eine ausgedehnte Quellen-/Senderfläche vor. Davon wird lediglich ein Flächenelement betrachtet. Da die Fläche räumlich inkohärent angenommen wird, kann dann von einem Element auf die ganze Fläche geschlossen werden. Räumlich inkohärent bedeutet, daß keine festen Phasenbeziehungen zwischen Flächenelementen bestehen.

Nun wird alles außer der kleinen Fläche abgedeckt angenommen. Von dem genannten Flächenelement fallen Strahlen im Raumwinkel $d\Omega$ in die Faser auf den Ortsvektor dP ein. Damit das Licht eingekoppelt wird, muß es auf die Kernfläche einfallen; Licht, das auf den Mantel fällt, kann in der Faser nicht geführt werden. Ebenso Licht, dessen Winkel zu steil war (größer als die numerische Apertur). Günstige Strahlen sind damit die, die unter kleinem Winkel auf die Kernfläche einfallen.

Also: Strahlen, die anschließend geführt werden, müssen 1. den Kern treffen und 2. genügend flach sein, $\sin \theta < \text{numerische Apertur}$.

Der *Einkopplungswirkungsgrad*

$$\eta = \frac{\text{Leistung, die in geführten Moden der Fasern ankommt}}{\text{Gesamtleistung der Quelle}} \quad (7.1)$$

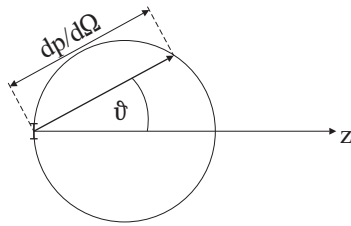


Abbildung 7.2: Strahlungsdiagramm

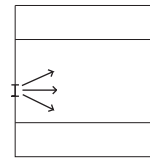


Abbildung 7.3: Endfläche Stufenindexfaser

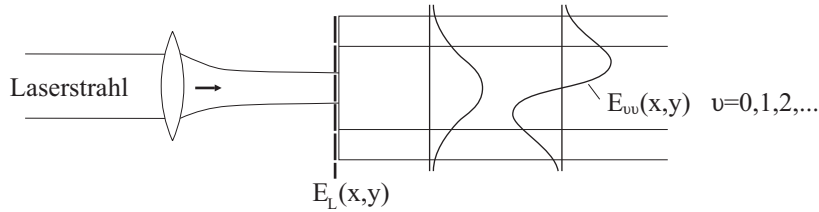


Abbildung 7.4: Verteilung auf Monomodefaser

kann aus dem Strahlungsdiagramm der Quelle (bzw. jedes einzelnen Quellenelementes) berechnet werden.

Dies wird hier nicht allgemein betrachtet (zu kompliziert), sondern an einem einfachen Beispiel: Kleiner LAMBERT'scher Strahler. Bei diesem gilt

$$\frac{dP}{d\Omega} = I_0 \cos \theta \quad (7.2)$$

Das dazugehörige Strahlungsdiagramm (P in Abhängigkeit von z) ist in Abbildung 7.2 zu sehen. Auf der Endfläche (Abbildung 7.3) einer Stufenindexfaser gilt damit

$$\eta = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi (I_0 \cos \theta) \sin \theta \, d\theta \, d\phi}{\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (I_0 \cos \theta) \sin \theta \, d\theta \, d\phi} = \dots \cong (NA)^2 = 4\% \quad (7.3)$$

für $NA=0,2$.

Aus einer ausgedehnten Lichtquelle in eine Multimodefaser? [siehe ausgeteiltes Blatt „Fiber coupling loss“]

Zunahme der Verluste bei größerem Abstand kann mit denselben Methoden bestimmt werden wie Einkopplung oben. Große numerische Apertur strahlt unter großem Winkel ab (und koppelt dadurch wenig ein, größere Verluste).

7.1.2 Monomodefasern und quasimonochromatische, räumlich kohärente Quellen

Quasichromatische Quellen meint natürlich Laserquellen.

Indem man $E_L(x, y)$ hinschreiben kann, ist bereits ein räumlich kohärentes Feld gemeint. Wie regt das vorgegebene Feld die Moden $E_{y\nu}(x, y)$ in der Faser an? (Abbildung 7.4) Gesucht ist der Einkopplungswirkungsgrad in jeder Mode.

Zur Berechnung werden zwei Eigenschaften genutzt:

1. Verschiedene Modenfelder sind gegenseitig orthogonal, d. h. verschiedene Modenfelder multipliziert und über den Querschnitt integriert ergeben Null,

$$\iint E_{y\nu}(x, y) E_{y\mu}^*(x, y) \, dx \, dy = \frac{2\omega\mu_0}{\beta_\nu} P_\nu \delta_{\nu\mu} \quad (7.4)$$

2. alle Moden zusammen bilden einen vollständigen Satz von Funktionen, d. h. ich kann jede (also besonders die gegebene Feld-) Verteilung darstellen als Summe von Modenfeldern

$$E_L(x, y) = \sum_{\mu} c_{\mu} E_{y\mu}(x, y) \quad (7.5)$$

Dabei müssen nicht nur die geführten Moden (sondern auch die Strahlungsmoden) mit einbezogen werden.

Ziel: c_{μ} ausrechnen, insbesondere: Mit welcher Amplitude ist die Grundmode c_0 angeregt? Rechenmethode: nimm Gl. (7.5), multipliziere mit E_{y0}^* , integriere über den Querschnitt, und wende Orthogonalitätsbeziehung (7.4) an:

$$\begin{aligned} \iint E_L(x, y) E_{y0}^*(x, y) dx dy &= \iint \left(\sum_{\mu} c_{\mu} E_{y\mu}(x, y) \right) E_{y0}^*(x, y) dx dy & (7.6) \\ &= \sum_{\mu} c_{\mu} \iint E_{y\mu} E_{y0}^* dx dy \\ &= c_0 \iint |E_{y0}(x, y)|^2 dx dy \\ \Rightarrow c_0 &= \frac{\iint E_L(x, y) E_{y0}^*(x, y) dx dy}{\iint |E_{y0}(x, y)|^2 dx dy} & (7.7) \end{aligned}$$

Leistungs-Einkopplungskoeffizient

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \frac{P_0}{P_L} = \frac{\frac{\beta_0}{2\omega\mu_0} |c_0|^2 \iint |E_{y0}(x, y)|^2 dx dy}{\frac{\beta}{2\omega\mu_0} \iint |E_L(x, y)|^2 dx dy} \\ &\cong \frac{|\iint E_L(x, y) E_{y0}^*(x, y) dx dy|^2}{\iint |E_{y0}(x, y)|^2 dx dy \iint |E_L(x, y)|^2 dx dy} & (7.8) \end{aligned}$$

Beachte: $\eta_0 = 1$ falls die Feldverteilung, die die Quelle anbietet, gleich dem Modenfeld ist, also für $E_L(x, y) = E_{y0}(x, y)$. Sonst immer kleiner.

Der Term im Zähler von (7.8) heißt Überlappintegral und muss möglichst groß gemacht werden. Dazu muß die richtige Feldgröße getroffen werden.

Beispiel

Beispiel: Für einen Gauß'schen Laserstrahl

$$E_L(x, y) = \hat{E}_L \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_L^2}\right) \quad (7.9)$$

w_L ist die Weite (Breite) des Laserstrahles. Damit das Feld gleich ist, soll auch schon mal w_L ungefähr so groß sein wie der Kerndurchmesser.

Grundmode in einer Stufenindexfaser gemäß Gleichung 3.3

$$E_{y0}(x, y) = \hat{E}_0 \begin{cases} J_0(\dots) \\ K_0(\dots) \end{cases} \quad (7.10)$$

$\Rightarrow \eta_0 = \dots$ mehr als 90%, Lösung numerisch. Siehe Abbildung 7.5, also über 90%.

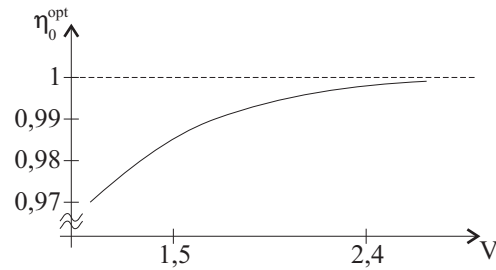


Abbildung 7.5: η -Abhängigkeit von V

7.1.3 (Steck)Verbindungen

Stecker für Lichtwellenleiter waren heikles Thema, sind aber mit der Zeit besser geworden.

Man unterscheidet Stecker mit physical Contact, *PC*. Denn neben der Dämpfung sind vor allem die *Reflexionen* an den Grenzflächen störend. Desweiteren: sellfoc-Lens, *SFL*, bei Linsenstecker – diese kann man viel gegeneinander verschieben, ohne Dämpfung zu bekommen. Dafür muß aber der Kippwinkel viel genauer sein. Quasi ergibt sich: Das Produkt aus Kippwinkelgenauigkeit und transversaler Genauigkeit bleibt konstant.

Das läßt sich alles über das Überlappintegral in (7.8) herleiten.

Falls die Faser miteinander verschweißt werden (*Spleiß*), ist die Dämpfung praktisch nicht mehr existent. ($< 0, 1dB$).

7.2 Überblick über verschiedene Komponenten

Koppler, WDM's, AWG's, Isolatoren, Zirkulatoren, Fasergitter, Modulatoren

7.2.1 Richtkoppler

2x2 Koppler, Ausführung z.B. als Anschliffkoppler. Dabei kommt der Kern in die Nähe der Grenzfläche. Dann koppeln die Wellenleiter miteinander.

ausgeteiltes Bild Aufsicht auf einen Richtkoppler;

Einfallendes Licht kann man verzweigen. Dabei Theorie der gekoppelten Moden (hier nicht genauer ausgeführt), gekoppelte Modengleichung:

$$\frac{dA}{dz} = -j\kappa B(z)e^{j\delta y} \quad (7.11)$$

$$\frac{dB}{dy} = -j\kappa A(z)e^{+j2\delta y} \quad (7.12)$$

$$\text{mit } \delta \cong (\beta_b - \beta_a)/2 \quad (7.13)$$

Wenn die Wellenleiter weit auseinander liegen, bleibt die Amplitude A die gleiche. Wenn sie nah beieinander sind, ändert sich A mit (7.11) mit dem Kopplungsfaktor κ .

Lösungen

$$P_b(z) = P_0 \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \delta^2} \sin^2[\sqrt{\kappa^2 + \delta^2} z] \quad (7.14)$$

$$P_a(z) = P_0 - P_b(z) \quad (7.15)$$

Die übergekoppelte Leistung ändert sich mit der Länge des Kopplungsstücks.

ausgeteiltes Bild: Mode power

3dB-Koppler: aus beiden Fasern kommt nachher die gleiche Leistung heraus, nämlich die Hälfte von A , daher der Name.

7.2.2 Wellenlängenselektive Koppler

Bei einer Wellenlänge wird von Faser 1 nach 3 gekoppelt; bei einer anderen Wellenlänge dagegen von Faser 1 nach 4 und umgekehrt. Wenn die Kopplung bei einer Wellenlänge stärker ist als bei einer anderen, dann ist die Abhängigkeit von der Länge unterschiedlich. Je nach Länge koppelt die eine Wellenlänge über, die andere aber nicht. Dies ist ein einfacher Wellenlängen-Multiplexer, *wavelength division multiplexing*, *WDM*. Zum Multiplexen könnte auch ein nicht-wellenlängenselektiver Koppler genutzt werden, z.B. ein 3dB-Koppler, aber dann ist die Hälfte der Leistung verloren.

7.2.3 Kaskadierte Koppler

Eingehende Leistung soll auf verschiedene *ports* verteilt werden. Die Leistung, die aus einem 1-auf-N-Splitter austritt, ist um den Faktor N kleiner als ein Eingangsleistung, da sich die eingehende Leistung auf N Ports aufteilt. Anders als man erwarten könnte treten üblicherweise aber fast *keine* weiteren Verluste auf.

7.2.4 Arrayed waveguide gratings, AWGs

Andere Bezeichnungen: Phased Array, Wavelength router (Abbildung 7.6). Am Eingang liegt nur eine Faser an, über die aber verschiedene Wellenlängen geführt werden: Wellenlängen-Kanäle. Diese sollen nun gesplittet werden. Der Ausgang besteht also aus N einzelnen Fasern.

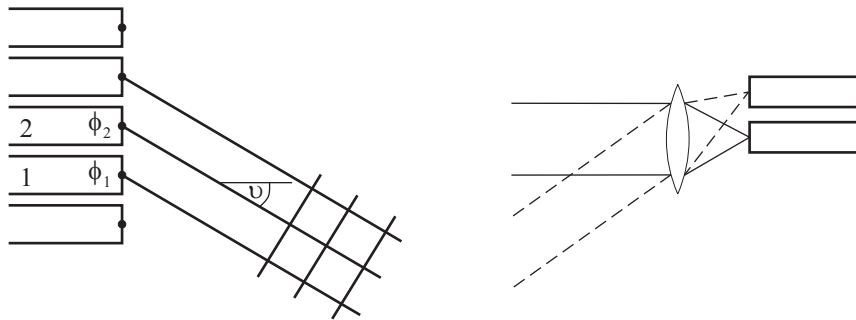


Abbildung 7.6: Phased Array

In der Richtung θ , in die sich die Wellenfronten ausbreiten, müssen die Wellen *in Phase* sein, um konstruktive Interferenz zu erreichen. Gesucht wird die Phase θ , in der das gegeben ist.

$$\phi_1 \stackrel{!}{=} \phi_2 + \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x \sin \theta + m \cdot 2\pi \quad m \in \mathbb{N} \quad (7.16)$$

Wegunterschied zwischen den Wellen aus zwei Fasern:

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \ell_{AWG} \quad (7.17)$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x \sin \theta + m 2\pi \quad (7.18)$$

Daraus folgt

$$\sin \theta = \frac{1}{\Delta x} (\Delta \ell_{AWG} + m \lambda) \quad (7.19)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \sin \theta = \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{\Delta x} \quad (7.20)$$

Es liegt Wellenlängenselektivität vor; d.h. verschiedene Wellenlängen gehen in verschiedene Richtungen. Dadurch werden die Wellenlängen getrennt und anschließend jeweils über eine Art Linse exakt auf die gewünschte Faser fokussiert.

7.2.5 Nicht-reziproke Komponenten

Faraday-Rotatoren Longitudinales Magnetfeld ergibt $\phi_F = V \cdot H_z \cdot L$ (Verdey-Konstante). Gewünscht wird 45-Grad-Rotation. Rotation in denselben Drehsinn auf Hin- und Rückweg bedeutet, daß *keine Reziprozität* vorliegt.

Isolator besteht aus Polarisator, Rotator, noch ein Polarisator. Wird benötigt, um Sender zu schützen.

Zirkulatoren gibt es auch noch.

7.2.6 Modulatoren

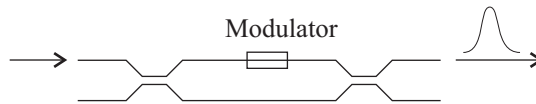


Abbildung 7.7: Modulator

Manchmal benutzt man eine Quelle, die einen Dauerstrich liefert, der erst nachträglich moduliert wird, Abbildung 7.7.

Aufbau z.B. durch

- Verstimmung von Wellenleiterkopplern über elektrooptische Materialien
- Umwandlung von Phasen- in Intensitätsmodulation durch Interferometer

... ??

7.2.7 Fasergitter

Siehe Abbildung 7.8.

$$n(z) = n_1 + \delta_n \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} z\right) \quad (7.21)$$

$$\delta P_1 = 10^{-7} \quad \delta E_1 \sim \sqrt{\delta P_1} \quad (7.22)$$

$$\delta P_2 = 10^{-7} \quad \delta E_2 \sim \sqrt{\delta P_2} \quad (7.23)$$

$$(\delta E_1 + \delta E_2)^2 \sim (2\sqrt{\delta P_1})^2 = 4\delta P_1 \quad (7.24)$$

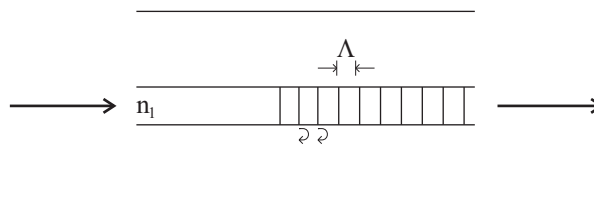


Abbildung 7.8: Fasergitter mit Abstand $\lambda/2$

Kapitel 8

Rauschen in Photodioden

8.1 Spektrale Leistungsdichte einer Sequenz von zufälligen Ereignissen

8.1.1 Definition Leistungsdichte

Gegeben sei eine reelle Zeitfunktion und deren Fourier-Transformierte (Frequenzspektrum)

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(f)e^{+j2\pi ft} df \quad (8.1)$$

$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (8.2)$$

Die Betrachtung eines endlichen Zeitabschnittes ergibt als Zeitfunktion

$$v_T(t) = \begin{cases} v(t) & \text{für } -\frac{T}{2} \leq t \leq +\frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (8.3)$$

mit der Fourier-Transformierten

$$V_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} v(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (8.4)$$

$V_T(f)$ ist konjugiert gerade: $V_T(f) = V_T^*(-f)$, denn $v(t)$ ist rein reell.

Die Augenblicksleistung von $v(t)$ wird definiert als $v^2(t)$. Für die mittlere Leistung wird eine zeitliche Mittelung vorgenommen:

$$P_v = \overline{v^2(t)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v^2(t) dt \quad (8.5)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} v_T^2(t) dt \quad (8.6)$$

$$P_v = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |V_T(f)|^2 df \quad (8.7)$$

Zur Herleitung von Gleichung (8.7) wurde das Parsevalsches Theorem angewandt. Gleichung (8.7) läßt sich aufgrund der Symetrie vereinfachen zu

$$P_v = \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{2}{T} |V_T(f)|^2}_{=S(f)} df \quad (8.8)$$

Der Ausdruck $S(f)$ im Integral in der letzten Gleichung (8.8) gibt die spektrale Leistungsdichte an.

8.1.2 Summe von Einzelereignissen

Wir betrachten nun eine spezielle Zeitfunktion

$$i(t) = \sum_i g(t - t_i) \quad (8.9)$$

$i(t)$ besteht aus einer großen Anzahl von identischen Einzelereignissen $g(t)$ zu verschiedenen zufälligen Zeitpunkten t_i .

Die a priori Wahrscheinlichkeit, daß ein Einzelereignis in einem gegebenen Meßintervall erscheint, sei gleichverteilt. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit, daß n Ereignisse in einem Meßintervall T zu finden sind,

$$p(n) = \frac{(\bar{n})^n}{n!} \cdot e^{-\bar{n}} \quad \text{POISSON-Verteilung} \quad (8.10)$$

\bar{n} ist der Mittelwert der Anzahl Ereignisse, die in T zu finden sind.

Wie sieht nun die spektrale Leistungsdichte von (8.9) aus? Zunächst wird eine Fensterung von $i(t)$ eingeführt, weil nur ein endliches Intervall betrachtet werden kann

$$i_T(t) = \sum_{i=1}^{M_T} g(t - t_i) \quad 0 \leq t \leq T \quad (8.11)$$

Die Fourier-Transformierte davon beträgt

$$I_T(f) = \mathcal{F} \left\{ \sum g(t - t_i) \right\} \quad (8.12)$$

$$= \underbrace{G(f)}_{\mathcal{F}\{g(t)\}} \sum_i e^{-j2\pi f t_i} \quad (8.13)$$

Zur Bestimmung der Leistungsdichte wird das Betragsquadrat gebildet¹

$$|I_T(f)|^2 = |G(f)|^2 \cdot \sum_i \sum_k e^{-j2\pi f(t_i - t_k)} \quad (8.14)$$

$$= |G(f)|^2 \cdot \left[\sum_i \sum_k \dots + \sum_{i \neq k} \sum \dots \right]$$

$$= |G(f)|^2 \cdot \left[M_T + \sum_{i \neq k} \sum \frac{1}{2} \cos 2\pi f(t_i - t_k) \right] \quad (8.15)$$

Wenn nun viele Ereignisse betrachtet werden, wird sich als Mittelwert M_T herausstellen, wogegen die \cos -Terme in (8.15) sich zu Null mitteln werden.

¹Zitat der Vorlesung: „Wir müssen das jetzt nicht verstehen.“ - H. Renner

Gesucht ist nun der Ensemble-Mittelwert (auch Schar-Mittelwert genannt).

$$\overline{|I_T(f)|^2} = |G(f)|^2 \cdot \overline{M_T} = \overline{N} \cdot T \cdot |G(f)|^2 \quad (8.16)$$

\overline{N} ist die mittlere Anzahl von Ereignissen pro Zeitintervall T (d.h. \overline{N} ist eine Rate, bezeichnet die Anzahl je Sekunde).

Die spektrale Leistungsdichte davon lautet gemäß der Definition (8.8)

$$S(f) = \frac{2}{T} \overline{|I_T(f)|^2} = 2\overline{N} \underbrace{|G(f)|^2}_{\text{Leistungsdichtespektrum des Einzelereignisses}} \quad (8.17)$$

8.1.3 Verallgemeinerung

Die Verallgemeinerung davon lautet

$$S(f) = 2\overline{N} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_\alpha(f)|^2 p(\alpha) d\alpha \quad (8.18)$$

und wird angewendet, wenn es mehrere unterschiedliche Klassen von Ereignissen gibt (Aufreffen eines Positrons, eines Elektrons, etc.), die jeweils mit $g_\alpha(t)$ bezeichnet werden. Dann gibt $p(\alpha)$ die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des jeweiligen Teilchens an (bzw. der jeweiligen Ereignisklasse). Denn: Unterschiedliche Teilchen tragen alle unterschiedlich zur gesamten Leistungsdichte bei.

$S(f)$ ist jetzt eine *gewichtete Summe* der Ereignisse der Einzelklassen.

8.2 Schrotrauschen des Photostroms in einer PIN-Photodiode

Der Gesamtstrom besteht aus individuellen Beiträgen der driftenden Ladungsträger.

8.2.1 Photostrom durch Absorption einzelner Teilchen

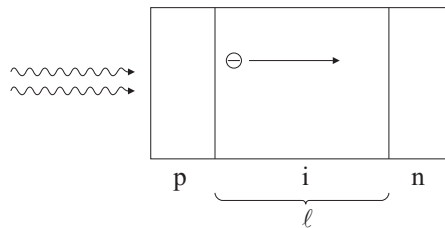


Abbildung 8.1: Absorption einfallender Photonen

Annahme: Starke Absorption (Abbildung 8.1), d.h. $\alpha \gg \frac{1}{l}$. Ein Einzelereignis bezeichnet einen Impuls infolge eines Driftelektrons, gezeigt in Abbildung 8.2.

$$i_e(t) = \begin{cases} \frac{e}{\tau_e} & \text{in } 0 \leq t \leq \tau_e \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (8.19)$$

Ein Teilchen schlägt ein Elektron raus, das Elektron bewegt sich und während dieser Zeit fließt ein Strom. Natürlich kommen die Lichtteilchen nicht schön nacheinander jeweils

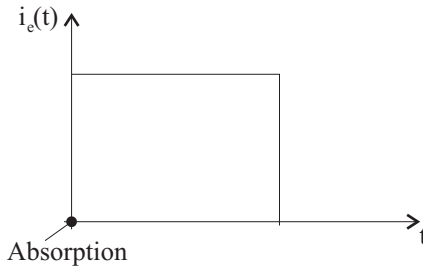


Abbildung 8.2: Stromfluß durch Absorption

im Abstand τ_e , sondern die Rechtecke überlagern sich zu Rauschen. Das Spektrum eines solchen Einzelereignisses ist

$$G(f) = \mathcal{F}\{i_e(t)\} = \frac{e}{\tau_e} \int_0^{\tau_e} 1 \cdot e^{-j2\pi ft} dt \quad (8.20)$$

$$= \frac{e}{\tau_e} \frac{1 - e^{-2j\pi f\tau_e}}{j2\pi f} \approx e \quad \text{für } \tau_e \ll \frac{1}{f}$$

$$= e \cdot \underbrace{\Gamma(f)}_{\text{Transferfunktion, Übertragungsfunktion}} \approx e = \text{const.} \quad (8.21)$$

Transferfunktion, Übertragungsfunktion

Dies ist konstant *innerhalb der Detektionsbandbreite*.

Mit (8.17) beträgt die Leistungsdichte des gesamten Photostroms i_{ph}

$$S(f) = 2\overline{N}|G(f)|^2 = 2\overline{N}e^2\Gamma^2(f) \quad (8.22)$$

$$= 2e \cdot \underbrace{\overline{N}}_{i_{ph}} \cdot e \cdot \Gamma^2(f) \quad (8.23)$$

$$\cong 2e \cdot \overline{i_{ph}} \quad \text{innerhalb der Bandbreite der Photodiode} \quad (8.24)$$

Das gleiche Ergebnis ergibt sich für Ladungsträgererzeugung bei verteilter Absorption in der I-Schicht (d.h. wenn nicht alle Lichtteilchen am Anfang absorbiert werden.)

8.2.2 Interpretation

Für konstante optische Eingangsleistung P_{opt} folgt gemäß (5.8) ein konstanter mittlerer Photostrom

$$\overline{i_{ph}} = \frac{e \cdot \eta}{h \cdot \nu} \cdot P_{opt} \approx 1 \frac{A}{W} \cdot P_{opt} \quad (8.25)$$

sowie in jedem Frequenzintervall von f bis $f + \Delta f$ ein Rauschstrom (Abbildung 8.3) mit einem quadratischen Effektivwert

$$\overline{i_N^2} = S(f) \cdot \Delta f = 2e \cdot \overline{i_{ph}} \cdot \Delta f \quad (8.26)$$

$$\sqrt{\overline{i_N^2}} = \sqrt{2e \cdot \overline{i_{ph}} \cdot \Delta f} \quad (8.27)$$

Beispiel

Beispiel: Schwaches Sinus-Signal

$$\Delta P_{\sim} = \Delta \hat{P}_{\sim} \cdot (1 + \cos \omega_m t), \quad \omega_m/2\pi = 100MHz$$

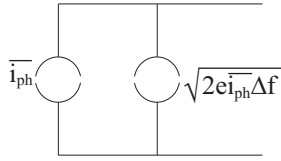


Abbildung 8.3: ESB einer Photodiode: Photo- und Rauschstromquelle

in Gegenwart eines starken CW-Hintergrundes (continuous wave) $P = 1mW$, Photodiode $B = 1GHz$

$$\overline{i_{ph}} = 1mA \Rightarrow \overline{i_N^2} = 2e \cdot \overline{i_{ph}} \cdot B = [5,6 \cdot 10^{-7} A]^2$$

$\Delta\hat{P}_{\sim} \approx 1\mu W$ notwendig für Detektion. Für $\Delta\hat{P}_{\sim} < 1\mu W \Rightarrow$ Bandbreite der Photodiode reduzieren.

$$\Delta\hat{P}_{\sim} = \frac{h\nu}{e\eta} \cdot \overline{i_{ph}} > \frac{h\nu}{e\eta} \sqrt{\overline{i_N^2}} = 1 \frac{W}{A} \cdot 5,6 \cdot 10^{-7} A$$

Der erzeugte Photostrom soll größer sein als der Rauschstrom bzw. dessen Leistung.

8.3 Thermisches Rauschen von Widerständen

Leistungsdichtespektrum

$$S_{th} = \frac{4kT}{R} \quad (8.28)$$

Das LDS ist in guter Näherung unabhängig von der Frequenz.

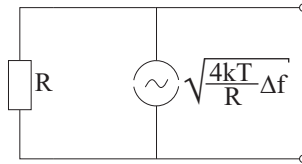


Abbildung 8.4: ESB Widerstand mit Rauschstromquelle

Δf ist die elektrische Bandbreite, wie auch beim shot noise.

8.4 Zusatzrauschen in Lawinen-Photodioden

$$\overline{i_{N,APD}^2} = \overline{M^2} \cdot \underbrace{\overline{i_{N,primär}^2}}_{2e\overline{i_{ph,primär}} \cdot \Delta f} + \overline{(M - \overline{M})^2} \cdot \overline{i_{ph,primär}} \cdot e\Delta f \quad (8.29)$$

APD steht für Avalanche Photo Diode. Der Lawinenprozeß schwankt, daher gibt es ein zusätzliches Rauschen [siehe EBELING].

$$\overline{i_{N,APD}^2} = \overline{M^2} \overline{i_{M,primär}^2} \cdot F_M \quad (8.30)$$

mit $F_M = (1 + \frac{(M - \overline{M})^2}{2\overline{M}^2})$ Lawinen-Zusatzrauschfaktor. F_M ist stark variabel; hängt ab von Avalanche-Verstärkung und Ionisierungskoeffizient (d.h., vom Material) α_e, α_h (Elektronen, Löcher)

$$F_M = \overline{M} \cdot \frac{\alpha_h}{\alpha_e} + (2 - \frac{1}{\overline{M}})(1 - \frac{\alpha_h}{\alpha_e}) \quad (8.31)$$

Bei $\alpha_e = \alpha_h$ ist $F_M \approx \bar{M}$, bei einem Multiplikationsfaktor $\bar{M} = 100$ (z.B. Ga) ist F_M also schlecht. Gewünscht ist $\frac{\alpha_h}{\alpha_e} \ll 1$ z.B. durch $\alpha_h = 0$, also Löcher ionisieren nicht.

Bei Löcherinjektion (statt Elektroneninjektion wie eben) wird α_h und α_e vertauscht, $\frac{\alpha_h}{\alpha_e} \Rightarrow \frac{\alpha_e}{\alpha_h}$

8.5 ESB von Photodetektoren mit Rauschquellen

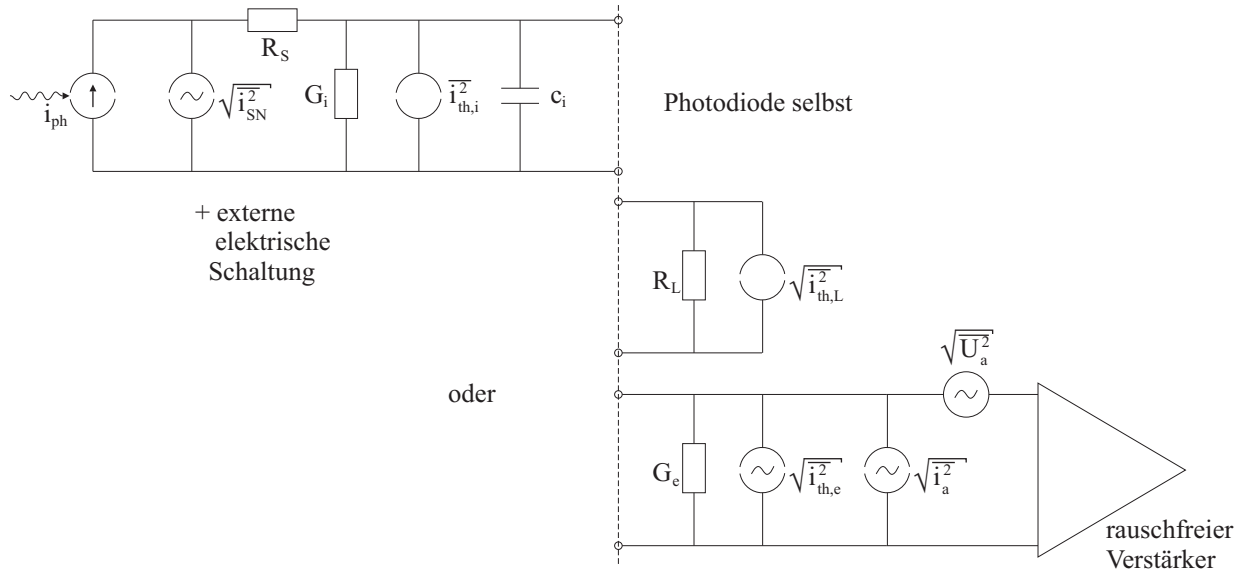


Abbildung 8.5: Photodetektor mit elektrischer Schaltung

Gesucht ist das Verhältnis der Rauschleistungen (der -quellen) in Abbildung 8.5. Die einfallende optische Leistung beträgt

$$P(t) = P_0(1 + m \cos(\omega_m t)) \quad (8.32)$$

Der AC-Anteil des Signalstromes ist

$$i_{ph,eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} m \frac{e\eta}{h\nu} P_0 \cdot |\Gamma(\omega_m)| \cdot M \quad (8.33)$$

$M = 1$ falls keine APD. Der Gesamt-Rauschstrom in der Bandbreite $[f, f + \Delta f]$ eines Empfängers ist

$$\bar{i}_n^2 \cong 2e(\bar{i}_{ph} + \bar{i}_{bg} + i_d) |\Gamma(\omega_m)|^2 M^2 F_M \cdot \Delta f + 4kTG \cdot F \cdot \Delta f \quad (8.34)$$

\bar{i}_{bg} background-Rauschen, i_d Dunkelstrom, $M^2 F_M$ nur bei APD, erster Term insgesamt ist das Schrotrauschen, G ist der zusammengefasste Leitwert des Verstärkers ($G_i \parallel R_L$), F Rauschzahl des Verstärkers.

Mit $\bar{i}_{ph} = \frac{e\eta}{h\nu} \cdot P_0$ ergibt sich als Signal zu Rausch-Verhältnis

$$SNR := \frac{(i_{ph,eff})^2}{\bar{i}_n^2} = \frac{1}{2} \frac{(m\bar{i}_{ph})^2 M^2}{[2e(\bar{i}_{ph} + \bar{i}_{bg} + i_d) M^2 F_M + 4kTGF] \cdot B} \quad (8.35)$$

m Modulationsindex, B elektrische Bandbreite (Δf).

Vereinfachende Annahmen: $m = 1$, $\bar{i}_{bg} = 0$, $F = 1$ (idealer Verstärker) ergibt

$$SNR \cong \frac{1}{2} \frac{\bar{i}_{ph}^2 \cdot M^2}{[2e(\bar{i}_{ph} + i_d) M^2 F_M + 4kTG] \cdot B} \quad (8.36)$$

Beispiel

- (i)
- $4kTG \ll 2e(\overline{i_{ph}} + i_d)M^2F_M$
- d.h. thermisches Rauschen wird vernachlässigt.

$$SNR \cong \frac{\overline{i_{ph}}^2}{4Be(\overline{i_{ph}} + i_d)F_M}$$

F_M ist abhängig von M . Optimierung durch $F_M = 1$ also $M = 1$ also keine APD benutzen in diesem Fall. Gesucht ist noch die minimale optische Leistung, bei der ein Impuls gerade noch erkennbar ist.

$$\overline{i_{ph,min}} \big|_{SNR=1} = 4Be \left(1 + \frac{i_d}{\overline{i_{ph,min}}} \right) = 4Be \quad \text{falls } i_d \text{ vernachlässigbar}$$

Das ist der minimale Photostrom, der für $SNR = 1$ nötig ist. Dies entspricht folgender optischen Leistung

$$\begin{aligned} P_{0,min} = \Delta P_{min} &= \frac{h\nu}{e\eta} 4eB = \frac{4h\nu}{\eta} \cdot B \\ &= \frac{4h\nu/\eta}{1/B} = \begin{cases} 5 \cdot 10^{-19} W & \text{für } B = 1 Hz \\ 50 pW & \text{für } B = 100 MHz \end{cases} \end{aligned}$$

- (ii) meistens:
- $4kTG \gg \dots$
- also thermisches Rauschen dominant. Gesucht ist wieder der minimale Photostrom bei
- $SNR = 1$
- .

$$\begin{aligned} \overline{i_{ph,min}} \big|_{SNR=1} &= \frac{1}{M} \sqrt{8kTG} \cdot \sqrt{B} \sim \sqrt{B} \\ \Delta P_{min} &= \frac{h\nu}{e\eta} \cdot \frac{1}{M} \sqrt{8kTG} \sqrt{B} \end{aligned}$$

Definition NEP, *Noise equivalent power*

$$NEP = \frac{\Delta P_{min}}{\sqrt{B}} \left[\frac{W}{\sqrt{Hz}} \right]$$

Man beachte die etwas ungewohnte Einheit Watt pro Wurzel aus Hertz. Bsp. $NEP \approx 5 pW/\sqrt{Hz}$ für $M = 1, R = 1 k\Omega, T = 300 K$.

- (iii) Nichts wird vernachlässigt. Dann
- existiert*
- eine
- optimale*
- Lawinenverstärkung
- $1 < M_{opt} < \infty$
- .

8.6 Optische Empfänger**8.6.1 Einfachster Empfänger**

$$U_{sig} \sim R_L \quad (8.37)$$

$$\sqrt{U_{th}^2} = \sqrt{\frac{4kT}{R_L} B \cdot R_L} \sim \sqrt{R_L} \quad (8.38)$$

Das thermische Rauschen ist proportional zu $\sqrt{R_L}$, die Signalspannung dagegen zu R_L . Damit ist ein großes R_L wünschenswert. Gleichzeitig soll aber gelten

$$R_L \stackrel{!}{<} \frac{1}{2\pi BC_{tot}} \quad (8.39)$$

mit der gesamten Kapazität $C_{tot} = C_D + C_{ampl}$ aus Diodenkapazität und Verstärkerkapazität.

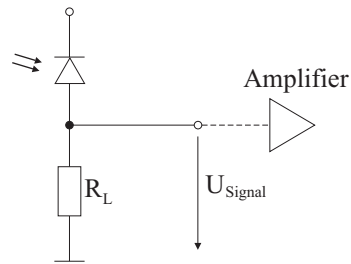


Abbildung 8.6: Einfachster Empfänger

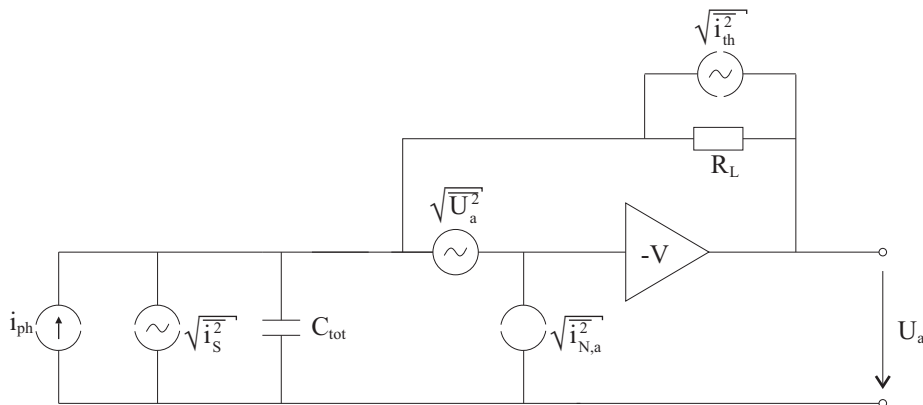


Abbildung 8.7: Transimpedanz-Stufe

8.6.2 Transimpedanz-Stufe

$$U_a = \frac{1}{1 + j\omega R_L C_{tot}/V} R_L i_{ph} \cdot M \quad (8.40)$$

$$B = \frac{1}{2\pi R_L C_{tot}/V} = \frac{V}{2\pi R_L C_{tot}} \quad (8.41)$$

Bei einer Transimpedanz-Stufe, Abbildung 8.7, ist im Vergleich zum einfachen Empfänger, Abschnitt 8.6.1,

- die Bandbreite bei gleichem R_L um V größer, oder
- bei gleicher Bandbreite darf R_L um Faktor V größer sein (so daß SNR um so besser ist).

Wie ändert sich die Empfindlichkeit (*sensitivity*)? Empfindlichkeit ist die optische Leistung, die auf den optischen Empfänger einfallen muß, um die Bitfehlerrate kleiner als 10^{-9} zu erreichen. Bei kleinerem (Konversions-) Widerstand R_F wird mehr optische Leistung benötigt. Allerdings ermöglicht ein kleinerer Widerstand eine größere Bandbreite. Kleine Leistung – großer Widerstand, große Bandbreite – kleiner Widerstand.

Kapitel 9

Laserdioden

9.1 Grundlegende Aspekte der Laser-Physik

9.1.1 Absorption, spontane und stimulierte Emission

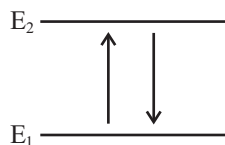


Abbildung 9.1: Übergang zwischen Energieniveaus

Wir betrachten ein System von Atomen oder Molekülen mit zwei verschiedenen Energieniveaus als aktives Material (diese Niveaus können elektronische Anregungszustände sein oder auch Schwingungszustände von Molekülen). Übergänge zwischen Energieniveaus können auf folgende Weise geschehen:

(i) *Spontane Emission* (Abbildung 9.2)

$$-\frac{dN_2}{dt} = \frac{N_2}{\tau_{sp}} = A_{21} \cdot N_2 \quad (9.1)$$

τ_{sp} ist die mittlere Lebensdauer des oberen Energieniveaus, d.h., die Zeit, die im Durchschnitt verstreicht, bis das angeregte Atom oder Molekül unter Aussendung eines Photons in den unteren Zustand wechselt, $A_{21} = 1/\tau_{sp}$ ist die Übergangsrate.

$$h \cdot \nu \cong E_2 - E_1 \quad (9.2)$$

Emissionsspektrum siehe Abbildung 9.3, dabei gilt die Normierung

$$\int_0^{\infty} g(\nu) d\nu = 1 \quad (9.3)$$

(ii) *Absorption* (Abbildung 9.4)

$$\frac{dN_2}{dt} = +B_{12}N_1\rho_\nu \cdot g(\nu) \quad (9.4)$$

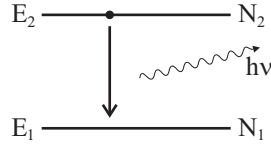


Abbildung 9.2: Spontane Emission

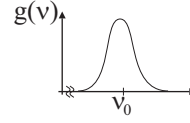


Abbildung 9.3: Emissionsspektrum und Absorptionscharakteristik

Das Plus auf der rechten Seite bezeichnet eine Zunahme. ρ_ν bezeichnet die Energiedichte des einfallenden Lichtes in der Einheit $[\frac{W_s}{cm^3}]$. $g(\nu)$ ist die normierte Linienform der Absorptionscharakteristik des aktiven Materials, abhängig von der Frequenz, normiert gemäß (9.3).

(iii) *stimulierte bzw. induzierte Emission* (Abbildung 9.5)

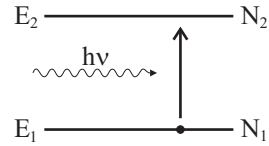


Abbildung 9.4: Absorption

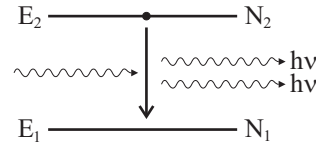


Abbildung 9.5: Stimulierte Emission

Die ausgesendeten Photonen bewegen sich in der gleichen Richtung wie die einfallenden.

$$\frac{dN_2}{dt} = -B_{21}N_2\rho_\nu g(\nu) \quad (9.5)$$

Das Minus auf der rechten Seite bezeichnet eine Abnahme.

(ii) und (iii) sind induzierte Prozesse. Die Übergangsrate pro Atom beträgt

$$W_{21} = B_{21}\rho_\nu \cdot g(\nu) + A_{21} \quad (9.6)$$

$$W_{12} = B_{12}\rho_\nu \cdot g(\nu) + 0 \quad (9.7)$$

Die Null in Gleichung (9.7) bedeutet, daß keine spontanen „Aufwärtssprünge“ stattfinden.

A_{21} ist der EINSTEIN-Koeffizient für die spontane Emission, B_{21} und B_{12} die Koeffizienten für die induzierten Übergänge. Thermodynamische Überlegungen (oder quantenmechanische Berechnungen) ergeben für die Einstein-Koeffizienten die Relationen

$$B_{12} = B_{21} \quad (9.8)$$

und

$$A_{21} \equiv \frac{1}{\tau_{sp}} = \frac{8\pi n^3 h\nu^3}{c^3} \cdot B_{21}, \quad (9.9)$$

wo n der Brechungsindex des aktiven Materials ist und ν die mittlere optische Übergangsfrequenz ($\nu = (E_2 - E_1)/h$). Dies wird eingesetzt in (9.7) und führt für die beiden identischen Übergangsraten zu

$$W_i = \frac{A_{21}c^3\rho_\nu g(\nu)}{8\pi n^3 h\nu^3} \quad \text{mit } i = 12, 21 \quad (9.10)$$

Die Energiedichte wird ersetzt durch Intensität der einfallenden Welle $I_\nu = \frac{c}{n}\rho_\nu [\frac{W}{cm^2}]$, so daß die Übergangsrate lautet

$$W_i = \frac{c^2 g(\nu) I_\nu}{8\pi n^2 h\nu^3 \tau_{sp}} \quad (9.11)$$

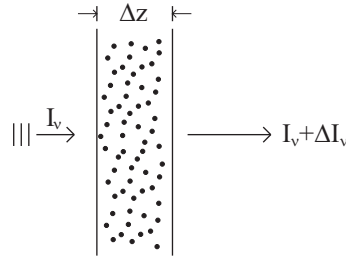


Abbildung 9.6: Änderung der Intensität im Lasermedium

9.1.2 Verstärkung optischer Signale in aktiven Materialien

Eine Welle mit der Intensität I_ν fällt auf ein aktives Material, siehe Abbildung 9.6. Die Leistungsänderung pro Fläche ergibt sich aus der Zahl der Atome pro Fläche in E_2 (stimulierte Emission) minus der Zahl der Atome pro Fläche in E_1 (Absorption). Die spontane Emission vernachlässigen wir hier.

$$\Delta I_\nu = +N_2 \Delta z \cdot W_i(\nu) \cdot h\nu - N_1 \Delta z \cdot W_i(\nu) \cdot h\nu \quad (9.12)$$

Nun wird (9.11) eingesetzt und der Grenzübergang von Δz zu dz durchgeführt.

$$\frac{dI_\nu}{dz} = (N_2 - N_1) \frac{c^2 g(\nu)}{8\pi n^2 \nu^2 \tau_{sp}} \cdot I_\nu \quad (9.13)$$

Lösung der DGL (9.13):

$$I_\nu(z) = I_\nu(0) e^{\gamma(\nu)z} \quad (9.14)$$

$$\text{mit } \gamma = (N_2 - N_1) \frac{c^2}{8\pi n^2 \nu^2 \tau_{sp}} g(\nu) = (N_2 - N_1) \frac{h\nu}{nc} B_{12} g(\nu) \quad (9.15)$$

Verstärkung tritt auf, wenn gilt $N_2 > N_1$. Dieser Zustand wird als *Besetzungsinversion* bezeichnet. Erreichbar ist dies durch sog. "Pumpen" des Materials, z.B. durch Kollisionen in einer Gasentladung (z.B. He-Ne-Laser), Injektion von Pumplicht (z.B. Nd-YAG-Laser, Er-Faserverstärker und -laser) oder Elektroneninjektion (Laserdioden).

9.2 Verstärkung in Halbleiterlasermedien

Übergangswahrscheinlichkeit Emission:

$$\sim \left\{ \begin{array}{l} \text{Wahrscheinlichkeit der} \\ \text{Besetzung von } E_2 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{Wahrscheinlichkeit der} \\ \text{Nicht-Besetzung von } E_1 \end{array} \right\} \quad (9.16)$$

Für geringe oder keine Injizierung gibt es nur Absorption und keine Verstärkung. Dagegen gibt es Verstärkung für genügend hohe Elektronendichte.

Wie ist das Maximum der Verstärkung? Man betrachtet die Maxima der Kurven für die jeweiligen Injektionsladungsträgerdichten. Es wird nun der *gain* aufgetragen – unabhängig von der Wellenlänge, *nur* abhängig von der Ladungsträgerdichte.

ausgeteiltes bild gain i.abh. von carrier density

Das Bild sagt, daß bei einer Ladungsträgerdichte von unter $1.5 \cdot 10^{18}$ keine Verstärkung im Material stattfindet. Betrachtet wird die Frequenz ν_0 mit maximaler Verstärkung,

$$\gamma(\nu_0) = \gamma_{max} \cong: a(n - n_t) \quad (9.17)$$

Das t in n_t steht für Transparenz (des Lasermediums). Diese lineare Näherung gilt so ungefähr, mit

$$n_t \approx 10^{18} \text{ cm}^{-3}. \quad (9.18)$$

Was darüber liegt, wächst linear. Darunter gibt es keine Verstärkung.

$$\text{Proportionalitätsfaktor } a = \frac{\partial \gamma}{\partial n} \approx 2 \dots 3 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2 \quad (9.19)$$

9.3 Fabry-Perot Laserdioden und Ratengleichungen

9.3.1 Struktur

ausgeteiltes Bild Basic Structure ...

Struktur wie bei der Kantenemitter-LED.

- Ladungsträger werden in die aktive Zone (150 nm) injiziert. Bei der LED haben die Ladungsträger dann dort mit den Löchern rekombiniert (spontan).
- Wie bei LED ist die aktive Zone ein Filmwellenleiter. (allgemeiner Vorteil der Doppelhetero-Struktur). Damit haben wir einen Wellenleiter.

Zusätzlich nun: Kristallendflächen wirken als Reflektoren. Die Reflexionsfaktoren betragen

$$R \cong \left(\frac{\bar{n} - 1}{\bar{n} + 1} \right)^2 \approx 30\% \quad (9.20)$$

Anmerkung: Der Brechungsindex wird nicht mehr mit n bezeichnet, sondern mit \bar{n} , weil n die Elektronendichte ist.

Es liegt ein Filmwellenleiter vor, der vorne und hinten mit einem Spiegel endet (wenn auch nur mit 30%); also ein *optischer Resonator mit innerer Verstärkung*.

Man stelle sich ein Photon vor, das in die richtige Richtung fliegt; dann ist anzunehmen, daß daraus mehr als ein Photon wird, denn dieses wird verstärkt und reflektiert.

Welche Feldverteilung liegt in longitudinaler Richtung vor? D.h. „longitudinale Moden“ = „stehende Wellen“.

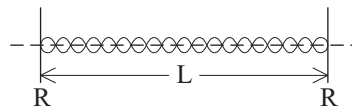


Abbildung 9.7: Spiegel – stehende Welle – Spiegel

Die elektrische Feldstärke kann nur so verteilt sein (Abbildung 9.7), daß eine ganze Zahl $m \in \mathbb{N}$ von Halbwellen in L hineinpaßt.

$$L \stackrel{!}{=} m \cdot \frac{\lambda_{\text{medium}}}{2} = m \cdot \frac{\lambda}{2\bar{n}}, \quad (9.21)$$

wo λ_{medium} die Wellenlänge im Medium bedeutet, und λ die Freiraumwellenlänge ist. Typisch: $L \approx 300 \mu\text{m}$; $\bar{n} \approx 3,5 \Rightarrow m \approx 2000$.

9.3.2 Verluste

Wie groß sind die Verluste?

$$\alpha_c = \alpha_i + \alpha_R = \alpha_i + \frac{1}{L} \ln \frac{1}{R} \quad (9.22)$$

1. Term: intrinsische Materialverluste; 2. Term: effektive Dämpfungskonstante durch $R < 1$.

Für gute Kristalle gilt $\alpha_i \approx 5 \dots 10 \text{ cm}^{-1}$ und $\alpha_R \approx 40 \text{ cm}^{-1}$

$$e^{-\alpha_R \cdot L} = e^{-(\frac{1}{L} \ln \frac{1}{R}) \cdot L} = R \quad (9.23)$$

Die örtlichen Verluste am Ende des Kristalls werden verteilt auf die ganze Länge (einfach andere Schreibweise). Die Schwellbedingung für Oszillation lautet: Die Verstärkung (9.17) muß genauso groß sein wie die Verluste.

$$\gamma_{th} \stackrel{!}{=} \alpha_i + \alpha_R = a \cdot (n_{th} - n_t) = \alpha_i + \frac{1}{L} \ln \frac{1}{R} \quad (9.24)$$

n_{th} steht für *threshold*, Schwelle. Es reicht nicht, daß die Elektronendichte gleich der Transparentdichte (9.18) ist, sondern sie muß etwas größer sein.

9.3.3 Ratengleichungen

(i) Photonenbilanz

Annahmen: Transversal einmodige Wellenführung, nur ein longitudinaler Modus aktiv in der Laserdiode.

N_{ph} = Photonendichte im Resonator

n = injizierte Elektronendichte (intrinsische Elektronendichte ohne Injektion ist viel kleiner und wird deswegen vernachlässigt)

τ_{sp} = „klassische“ Lebensdauer der Elektronen, begrenzt durch die spontane Emission (deshalb *sp*).

n_t = Elektronendichte bei Transparenz gemäß (9.18)

Bilanzgleichung: Wie ändert sich die Gesamtphotonzahl (oder -dichte)?

$$\frac{dN_{ph}}{dt} = S \cdot \underbrace{\frac{n}{\tau}}_{\text{totale spontane Emission}} + \underbrace{a(n - n_t) \cdot N_{ph}}_{\substack{\text{Zuwachs durch} \\ \text{stimulierte Emission} \\ \text{pro Längeneinheit}}} \cdot \frac{c}{\bar{n}} - \underbrace{\frac{N_{ph}}{\tau_c}}_{\substack{\text{Abnahme pro Zeiteinheit} \\ \text{durch Resonatorverluste und} \\ \text{Auskopplung}}} \quad (9.25)$$

S ist ein Faktor, der darstellt, daß nur ein Teil der spontan emittierten Photonen in den Resonator eingekoppelt werden. Der Proportionalitätsfaktor c/\bar{n} setzt die durch Gl. (9.17) beschriebene Wellenintensitätsverstärkung mit der hier beschriebenen Photonenzahlzuwachsrate in Zusammenhang. τ_c ist die mittlere Lebensdauer der Photonen:

$$\frac{1}{\tau_c} = \alpha_c \cdot \frac{c}{\bar{n}} = \frac{c}{\bar{n}} \left[\alpha_i + \frac{1}{L} \ln \frac{1}{R} \right] \quad (9.26)$$

Das c in α_c steht für *cavity*, Lebensdauer. S Bruchteil in die betrachtete Mode (noch nicht für alle Moden) $\approx 10^{-2} \dots 10^{-4}$.

(ii) Elektronenbilanz

$$\frac{dn}{dt} = \frac{I}{eV} - \frac{n}{\tau_{sp}} - a(n - n_t)N_{ph} \cdot \frac{c}{\bar{n}} \quad (9.27)$$

I ist der Injektionsstrom; $\frac{I}{eV} = \frac{J \cdot A}{eA \cdot d} = \frac{J}{ed}$ mit J als Stromdichte $[\frac{A}{\text{cm}^2}]$. d ist die Dicke der aktiven Zone; im (ausgeteilten) Bild 0, $15 \mu\text{m}$

Modifikation von (9.25)

Ein Faktor Γ wird in den ersten beiden Termen der rechten Seite eingeführt. Γ : *confinement*-Faktor (Füllfaktor). Dieser Faktor $0 \leq \Gamma \leq 1$ berücksichtigt, daß die Verstärkung auf die aktive Zone beschränkt ist, die optische Welle aber weiter ausgedehnt ist. Damit:

$$\frac{dN_{ph}}{dt} = \Gamma S \cdot \frac{n}{\tau_{sp}} + \Gamma a(n - n_t) \cdot N_{ph} \cdot \frac{c}{\bar{n}} - \frac{N_{ph}}{\tau_c} \quad (9.28)$$

Lösungen der Ratengleichungen im stationären Zustand ($\frac{d}{dt} = 0$)

(9.25) und (9.27) sind zwei gekoppelte nichtlineare Differentialgleichungen. Die allgemeine Lösung ist nur numerisch möglich. Vereinfachung: stationärer Zustand.

Weitere Annahme: Spontane Emission $S \cdot \frac{n}{\tau_{sp}}$ vernachlässigbar in (9.28).

$$0 = \Gamma a(n - n_t) N_{ph} \frac{c}{\bar{n}} - \frac{N_{ph}}{\tau_c} \quad (9.29)$$

$$N_{ph} \left[\Gamma a n \frac{c}{\bar{n}} - \Gamma a n_t \frac{c}{\bar{n}} - \frac{1}{\tau_c} \right] = 0 \quad (9.30)$$

d.h. entweder

(A) $N_{ph} = 0$, keine Photonen, kein Laserbetrieb oder

(B) [...] = 0 d.h. $n = n_t + \frac{\bar{n}}{ca\tau_c\Gamma} = const$ bei Laserbetrieb.

Aus der Elektronenbilanz (9.27) folgt im Fall A mit der Stromdichte $J = \frac{ed}{V} I$

$$n = \frac{\tau_{sp}}{ed} J \sim J \quad (9.31)$$

und im Fall B, indem (9.27) und der zweite Term von (9.30) in (9.29) eingesetzt werden,

$$N_{ph} = \frac{\Gamma\tau_c}{de} J - \frac{1}{\tau_{sp}} \left[\Gamma n_t \tau_c + \frac{\bar{n}}{ca} \right] \quad (9.32)$$

(beide Fälle siehe Abbildung 9.8) und damit

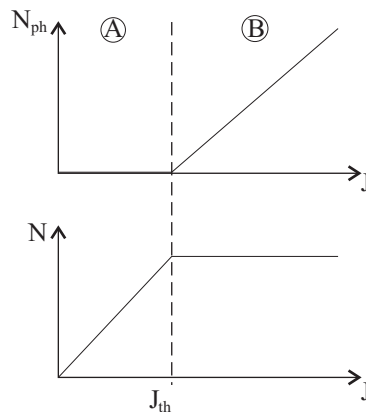


Abbildung 9.8: Photonendichte N_{ph} und injizierte Elektronendichte n als Funktion der Stromdichte

$$N_{ph}(J_{th}) = +0 \Rightarrow J_{th} = \frac{de}{\tau_{ph}} \left[n_t + \frac{\bar{n}}{\Gamma\tau_c ca} \right] \quad (9.33)$$

Im Bereich B gilt

$$n = n_{th} = \frac{\tau_{sp}}{ed} J_{th} = const \quad (9.34)$$

für $J = J_{th}$. Die Photonendichte beträgt dabei

$$N_{ph} = \frac{\Gamma \tau_c}{de} (J - J_{th}) \quad (9.35)$$

das ist die Photonendichte pro cm^3 innerhalb des Resonators.

9.3.4 Ausgangsleistung

Wie groß ist die Ausgangsleistung?

$$P_{out} = \frac{N_{ph} \cdot V}{\tau_{cr}} \cdot h\nu \frac{1}{\Gamma} \quad (9.36)$$

τ_{cr} ist die Zeitkonstante, wieviele Photonen pro Sekunde den Resonator verlassen, mit $1/\tau_c$ cavity-Lebensdauer = $\frac{c}{n} [\alpha_i + \frac{1}{L} \ln \frac{1}{R}] = \frac{1}{\tau_{ci}} + \frac{1}{\tau_{cr}}$

Ergibt

$$P_{out} = A \cdot dh\nu \frac{1}{de} \frac{1}{1 + \frac{\tau_{cr}}{\tau_{ci}}} (J - J_{th}) \quad (9.37)$$

$$= \frac{h\nu}{e} \cdot \frac{\frac{1}{L} \ln \frac{1}{R}}{\alpha_i + \frac{1}{L} \ln \frac{1}{R}} (I - I_{th}) \cdot \underbrace{\eta_i}_{\text{neuer Faktor}} \quad (9.38)$$

η_i ist der interne Quantenwirkungsgrad; er besagt, wie steil die Kennlinie ist.

$$= \frac{h\nu}{e} \eta_d (I - I_{th}) \quad (9.39)$$

$$\eta_d = \frac{\eta_i}{1 + \frac{\alpha_i L}{\ln \frac{1}{R}}} = \frac{d(P_{out}/h\nu)}{d(I/e)} \quad (9.40)$$

Gesamter Quantenwirkungsgrad η_d , beträgt typisch $\eta_d = 50...80\%$

9.3.5 Spektrum des emittierten Lichtes

Laser können (gleichzeitig) auf verschiedenen Frequenzen laufen, bzw. auf verschiedenen longitudinalen Moden. Optischer Frequenzunterschied zwischen zwei longitudinalen Moden

$$\Delta\nu = \frac{c}{2\bar{n}L} \quad (9.41)$$

Z.B. $\bar{n} = 3, L = 300\mu m, \Rightarrow \Delta\nu = 0.1 \cdot 10^{12} Hz$.

Wie sieht das Spektrum aus? (Abbildung 9.9) Laserdioden-Spektrum ist ein Linienspektrum – aber der genaue Verlauf ist hier nicht bekannt. Es gibt eine ganze Menge Linien. Im Spitzenwert sind einige Linien, die sich nur um den Faktor 2-3 in der Amplitude unterscheiden.

Dagegen ist bei manchen Lasern nur genau eine Spektrallinie vorhanden (besonders bei darauf gezüchteten). Die Breite dieser einen Linie beträgt

$$\delta\nu_L \geq \frac{\pi(\Delta\nu_{1/2})^2 h\nu}{P_{out}} \quad (9.42)$$

Dies ist die SCHAWLOW-TOWNES-Beziehung (hergeleitet aus der spontanen Emission).

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{c}{2\pi nL} \frac{1-R}{\sqrt{R}} \quad (9.43)$$

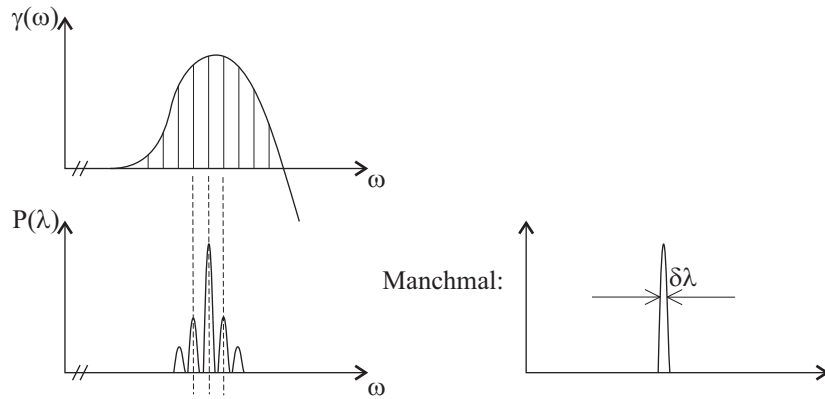


Abbildung 9.9: Spektrum der Laserdiode

ist die passive Breite eines Perot-Resonators. Beispiel: $\lambda = 1300nm$, $R = 0,3$, $P_{out} = 10mW$, $L = 300\mu m \Rightarrow \delta\nu_L \geq 200kHz$. Der tatsächliche Wert liegt aber bei $1...10MHz$.

Gleichzeitig ändert sich aber auch die Mittenfrequenz, besonders bei Temperaturänderungen oder Stromänderungen. Eventuell ändert sich dann auch der aktive Modus (sprunghaft). Wobei sich mit der Temperatur auch die *gain*-Kurve ändert.

9.3.6 Modulationsverhalten

Wie hoch darf die elektrische Frequenz sein, so daß die optische Leistung noch folgen kann? D.h. wie ist die Übertragungsfunktion?

Die Lösung wird näherungsweise aus den Ratengleichungen bestimmt: (9.25) und (9.27)

$$\frac{dN_{ph}}{dt} = \dots \quad \text{und} \quad \frac{dn}{dt} = \frac{J(t)}{ed} \dots \quad (9.44)$$

Gesucht sind Lösungen für $N_{ph}(t)$ (und ggf. $n(t)$). Für diese gekoppelten, nichtlinearen DGLs gibt es keine analytische Lösung. Eine Näherungslösung wird durch Linearisierung der DGLn gewonnen, Stichwort Kleinsignalverhalten. D.h. alle zeitlich veränderlichen Größen "wackeln" nur ganz wenig um den stationären Zustand herum. Der Ansatz lautet also

$$J(t) = J_0 + \Delta J(t) \quad |\Delta J| \ll J_0 \quad (9.45)$$

$$n(t) = n_0 + \Delta n(t) \quad |\Delta n| \ll n_0 \quad (9.46)$$

$$N_{ph}(t) = N_{ph0} + \Delta N_{ph}(t) \quad |\Delta N_{ph}| \ll N_{ph0}, \quad (9.47)$$

wo J_0 , n_0 und N_{ph0} die Werte im stationären Zustand sind. Dies wird jeweils eingesetzt in die Bilanzgleichung; dann werden die statischen Ergebnisse benutzt; Produkte kleiner Ergebnisse werden vernachlässigt. (z.B. $\Delta n \cdot \Delta N_{ph}$). Dies ergibt lineare DGLs, die lösbar sind. Genutzt wird der Ansatz

$$\Delta J = \Delta \hat{J} e^{j\omega_m t}, \quad \Delta n = \Delta \hat{n} e^{j\omega_m t}, \quad \Delta N_{ph} = \Delta \hat{N}_{ph} e^{j\omega_m t}, \quad (9.48)$$

ω_m ist die Modulationsfrequenz.

Das Ergebnis ist

$$\Delta \hat{N}_{ph} = \frac{\omega_r^2 \tau_c \Gamma / ed}{\omega_r^2 - \omega_m^2 + j\omega\gamma} \Delta \hat{J} = |\Delta N_{ph}| e^{j\Delta\gamma} \quad (9.49)$$

$$\Delta \hat{n} = \dots \Delta \hat{J} \quad (9.50)$$

mit $\omega_r = \sqrt{\frac{acN_{ph0}}{\bar{n}\tau_c}}$ Resonanzfrequenz und $\gamma = \frac{1}{\tau_{sp}} + \frac{acN_{ph0}}{\bar{n}}$ Dämpfungskonstante. Damit

$$\Delta P_{out} \sim |\Delta \hat{N}_{ph}| \quad (9.51)$$

Für eine flache Modulationscharakteristik muß gelten (nach [UNGER])

$$\omega_m^2 < \omega_r^2 - \frac{\gamma^2}{2} \quad (9.52)$$

Die Rechnung von oben gilt für sinusförmiges Eingangssignal. Wie würde ein Laser auf Impulse reagieren? Mit Relaxationsschwingungen der Frequenz $\omega = \sqrt{\omega_r^2 - \gamma^2/4}$, Abbildung 9.10.

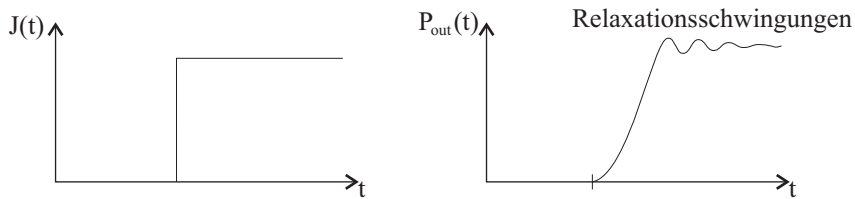


Abbildung 9.10: Reaktion auf impulsförmiges Eingangssignal

9.4 Weitere Typen von Laserdioden

9.4.1 DBR-Laserdioden (Distributed Bragg Reflector)

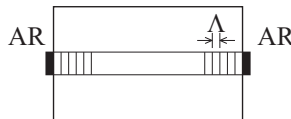


Abbildung 9.11: DBR-Laserdiode

Der Reflexionsfaktor wird reduziert, der Laser entspiegelt, z.B. von 30% auf 10^{-2} . Dann ist kein Resonator mehr da, sondern nur noch ein Verstärker.

Gleichzeitig werden Gitter vor der Endfläche eingefügt, Abbildung 9.11. Gitter können die Spiegel ersetzen, es gibt eine BRAGG-Reflexion, die die Reflexion an den Kristallendflächen ersetzt.

Aber die Bragg-Reflexion wirkt nur sehr schmalbandig, nur bei $\lambda_B = 2\bar{n}\Lambda$.

9.4.2 DFB-Laserdioden (Distributed Feedback)

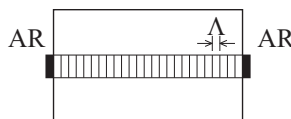


Abbildung 9.12: DFB-Laserdiode

Die gesamte aktive Zone ist mit Gittern gefüllt, siehe Abbildung 9.12. Dadurch: Die Hin- und rücklaufende Welle sind miteinander verkoppelt.

9.4.3 Sonstige

Es gibt noch andere Laserdioden, die eine sehr viel dünnere aktive Schicht besitzen, 10nm statt 100nm. Dort gibt es insbesondere sehr kleine Schwellströme.

Kapitel 10

Faseroptische Verstärker

10.1 Allgemeine Eigenschaften optischer Verstärker

Zur leistungsmäßigen Wiederherstellung optischer Pulse nach ihrer Dämpfung in Übertragungsstrecken kommen zwei Verfahren infrage:

1. sogenannte Repeater (siehe Chp11.pdf, Folie "Loss Compensation", Bild oben links)
2. optische Verstärker (siehe Chp11.pdf, Folie "Loss Compensation", Bild oben rechts)

Bei der Verwendung von Repeatern werden die Pulse an einer Zwischenstation empfangen, elektronisch regeneriert und anschließend zur Ausbreitung auf der nächsten Teilstrecke mit einer optischen Quelle erneut gesendet. Die optisch-elektrische und elektrisch-optische Wandlung ist aufwendig, insbesondere dann, wenn es sich um ein WDM-System handelt, bei dem jeder Kanal wie beschrieben behandelt werden muss.

Eine attraktive Alternative ist der Einsatz optischer Verstärker (2.). Hier geschieht die Wiederherstellung (re-amplification) durch stimulierte Emission in laseraktiven Medien. Dabei kann es sich grundsätzlich z.B. um Halbleiterverstärker oder um Raman-Faserverstärker (s.u.) handeln. Von überragender Bedeutung sind jedoch Faserverstärker, bei denen Quarzglasfasern mit Selten-Erd-Ionen dotiert sind.

Jeder gegebene optische Verstärker ("Laser ohne Resonator") hat ein gewisses Verstärkungsspektrum, d.h. einen Verstärkungskoeffizienten γ , der von der Wellenlänge bzw. von der optischen Frequenz abhängt. Beispielhaft nehmen wir hier ein Verstärkungsspektrum gemäß

$$\gamma(\omega) = \frac{\gamma_0}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \cdot T_2^2 + \frac{P}{P_S}} \quad (10.1)$$

angenommen, wie es bei einem homogen verbreiterten Zweiniveausystem auftritt. Dabei ist ω die optische Kreisfrequenz und ω_0 die Mittenfrequenz, die sich aus dem energetischen Abstand der beiden Niveaus ergibt. T_2 hängt vom Lasersystem ab und wird als Dipol-Relaxationszeit bezeichnet. Sie bestimmt die optische Bandbreite. Mit P_S ist die Sättigungsleistung bezeichnet. Sie hängt vom Gain-Medium ab und bestimmt die Signalleistung P , bei der (bei der Mittenfrequenz) der Verstärkungsfaktor auf die Hälfte seines Kleinsignalwertes sinkt.

Ohne Verstärkungssättigung, also für $P \ll P_S$ gilt:

$$\frac{dP}{dz} = \gamma P; \quad P(z) = P_{\text{in}} e^{\gamma z} \quad (10.2)$$

$$\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = G = e^{\gamma L} \quad (10.3)$$

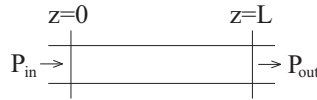


Abbildung 10.1: Ein- und Ausgangsleistung

Mit Verstärkungssättigung bei $\omega = \omega_0$

$$\frac{dP}{dz} = \frac{\gamma_0 P}{1 + \frac{P}{P_s}} \Rightarrow G = G_0 \exp \left[-\frac{G-1}{G} \frac{P_{\text{out}}}{P_s} \right] < G_0 \quad (10.4)$$

Folglich halbiert sich die Ausgangsleistung aufgrund der Sättigung bei einer Signalausgangsleistung von etwa $0.69 P_s$ bzw. einer Signal-Eingangsleistung von $0.69 P_s / (G_0/2)$.

10.2 Rauschen

10.2.1 Definition und Berechnung der Rauschzahl

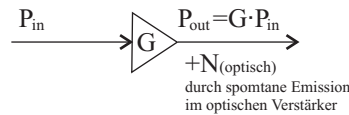


Abbildung 10.2: Ein- und Ausgangsleistung mit Rauschen

Jeder optische Verstärker verschlechtert das Signal-Rauschverhältnis. Diese Verschlechterung wird charakterisiert durch die Rauschzahl F_n . Sie ist definiert als

$$F_n = \frac{\text{SNR}_{\text{in}}}{\text{SNR}_{\text{out}}}, \quad (10.5)$$

wobei SNR_{in} und SNR_{out} das jeweilige elektrische Signal-Rauschverhältnis bezeichnen, gemessen am Eingang bzw. am Ausgang mit einer idealen Photodiode. Am Eingang erhält man damit

$$\text{SNR}_{\text{in}} = \frac{\left(\frac{e}{h\nu} P_{\text{in}}\right)^2}{2e\left(\frac{e}{h\nu} P_{\text{in}}\right)\Delta f} = \frac{P_{\text{in}}}{2h\nu\Delta f} \quad (10.6)$$

da unvermeidlich und also auch mit einem idealen Detektor Schrotrauschen des Photostroms auftritt.

Am Ausgang tritt (neben dem durch die geänderte optische Leistung ebenfalls geänderten Schrotrauschen) zusätzliches Rauschen auf, das durch den optischen Verstärker entsteht:

$$\text{SNR}_{\text{out}} = \frac{\left(\frac{e}{h\nu} P_{\text{out}}\right)^2}{2e\left(\frac{e}{h\nu} P_{\text{out}}\right)\Delta f + i_{N,\text{ampl}}^2} \quad (10.7)$$

Der Verstärker erzeugt an seinem Ausgang eine optische Rauschleistung $N = P_{\text{ASE}}$, die als verstärkte Spontanemission (amplified spontaneous emission) bezeichnet wird. Der Zusatzrauschterm $i_{N,\text{ampl}}^2$ im elektrischen SNR_{out} aus Gleichung (10.7) hängt, wie im Folgenden erläutert, auf subtile Weise mit P_{ASE} zusammen.

Zunächst soll die optische Rauschleistung P_{ASE} am Ausgang eines Verstärkers bestimmt werden, die durch verstärkte spontane Emission zustande kommt. Dazu werde ein

Längenelement des Gainmediums betrachtet (vgl. Chp11 . pdf, Folie “Noise in fiber amplifiers”, unteres Bild). In ihm entsteht eine gesamte spontan emittierte Lichtleistung von

$$dP_N = \frac{N_2 \cdot (Adz)}{t_{sp}} h\nu \quad (10.8)$$

Von dieser Leistung wird jedoch nur ein sehr kleiner Anteil in den zu verstärkenden Modus eingestrahlt entsprechend dem Raumwinkelbereich, der diesem Modus zugeordnet werden kann und der mit

$$\frac{d\Omega_{\text{mode}}}{4\pi} \approx \frac{\lambda^2}{n^2 A \cdot 4\pi} \quad (10.9)$$

abgeschätzt werden kann. Das Spektrum dieses Lichtes wird in normierter Form durch die Linienformfunktion $g(\nu)$ angegeben, die für verschiedene Lasersysteme sehr unterschiedlich sein kann. Soll die Leistung berechnet werden, die in ein kleines optisches Frequenzelement $\Delta\nu$ fällt, so ergibt sich dieser Anteil (beachte, dass das Integral über g zu eins normiert ist) durch Multiplikation mit $g(\nu)\Delta\nu$. Ein weiterer Faktor 1/2 ergibt sich, da die Leistung in einen Polarisationszustand (z.B. linear horizontale Polarisation) berechnet werden soll und das spontan emittierte Licht unpolarisiert ist. Insgesamt erhält man somit

$$dP_N^{\text{mode}, \Delta\nu} = \frac{1}{2} \frac{N_2 (Adz) h\nu}{t_{sp}} \frac{\lambda^2}{n^2 A \cdot 4\pi} g(\nu) \Delta\nu \quad (10.10)$$

$$= \frac{N_2}{N_2 - N_1} h\nu \Delta\nu dz \cdot \frac{(N_2 - N_1) c^2 g(\nu)}{8\pi n^2 \nu^2 t_{sp}} \quad (10.11)$$

$$= n_{sp} h\nu \Delta\nu dz \cdot \gamma. \quad (10.12)$$

Die Leistung des zu verstärkenden Modus wächst damit gemäß

$$\frac{dP}{dz} = \gamma P + n_{sp} \gamma h\nu \Delta\nu, \quad (10.13)$$

wobei der erste Term auf der rechten Seite die (erwünschte) Verstärkung durch stimulierte Emission beschreibt, der zweite Term den soeben berechneten Anteil durch spontane Emission. Damit erhält man als Entwicklung der Leistung $P(z)$ längs des Verstärkers

$$P(z) = P_{in} e^{\gamma z} + n_{sp} h\nu \Delta\nu (e^{\gamma z} - 1) \quad (10.14)$$

wobei γ als konstant vorausgesetzt ist (Kleinsignalverhalten). Der Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsleistung des Verstärkers lässt sich somit in der Form

$$P_{\text{out, ges}} = G P_{in} + n_{sp} h\nu \Delta\nu (G - 1) = G P_{in} + P_{\text{ASE}} \quad (10.15)$$

angeben. Den letzten Term bezeichnet man als verstärkte Spontanemission (amplified spontaneous emission, ASE), das Verhältnis des Nutzterms zu P_{ASE} als optisches Signal-Rausch-Verhältnis:

$$\text{SNR}_{\text{out}}^{\text{optisch}} = \frac{G P_{in}}{n_{sp} h\nu \Delta\nu (G - 1)} \xrightarrow[n_{sp} \rightarrow 1]{G \gg 1} \frac{P_{in}}{h\nu \Delta\nu} = \frac{P_{\text{out}}}{G h\nu \Delta\nu} \quad (10.16)$$

Es lässt die Interpretation zu, dass 1 Photon $h\nu$ pro Zeiteinheit $1/\Delta\nu$ am Verstärkereingang das Ausgangsrauschen $G h\nu \Delta\nu$ verursacht.

Dieses optische Signal-Rausch-Verhältnis ist jedoch nur indirekt von Interesse. Wichtiger ist das elektrische Signal-Rausch-Verhältnis SNR am Ausgang des Empfängers. Um ein Charakteristikum des optischen Verstärkers zu bekommen, wird als opto-elektrischer Konverter eine ideale Photodiode vorausgesetzt in dem Sinne, dass sie dem Photostrom nur das unvermeidliche Schrotrauschen hinzufügt. Unter diesen Bedingungen lässt sich der Photostrom folgendermaßen darstellen:

$$i_{\text{out}} = \frac{e}{h\nu} \left[P_{\text{out}} + P_{\text{ASE}} + 2\sqrt{P_{\text{out}} P_{\text{ASE}}} \cos(\omega_m t + \Delta\phi) \right] + i_{\text{schrot}} \quad (10.17)$$

Wichtig für den Beitrag des optischen Verstärkers zum elektrischen SNR ist der dritte Term auf der rechten Seite, der die Interferenz zwischen dem Signal und dem ASE-Licht beschreibt. Sein quadrierter Effektivwert ist

$$\overline{i_{\text{ASE-Signal}}^2} = \left(\frac{e}{h\nu}\right)^2 2P_{\text{out}}P_{\text{ASE}} \quad (10.18)$$

mit

$$P_{\text{ASE}} = n_{\text{sp}}h\nu\Delta\nu(G-1) \quad (10.19)$$

Setzt man voraus, dass die optische Bandbreite durch ein Filter der Bandbreite $\Delta\nu$ begrenzt ist mit der optischen Signalfrequenz als Mittenfrequenz, so liegt dieses Interferenz-Rauschsignal innerhalb der elektrischen Bandbreite $\Delta f = \Delta\nu/2$, sodass $\overline{i_{\text{ASE-Signal}}^2}$ dargestellt werden kann als

$$\overline{i_{\text{ASE-Signal}}^2} = \left(\frac{e}{h\nu}\right)^2 2GP_{\text{in}}n_{\text{sp}}h\nu 2\Delta f(G-1) \quad (10.20)$$

$$= \frac{4e^2}{h\nu} P_{\text{in}}G(G-1)n_{\text{sp}}\Delta f \quad (10.21)$$

Zu diesem quadrierten Effektivwert des verstärkerbedingten Interferenzrauschens addiert sich der quadrierte Effektivwert des Schrotrauschens

$$\overline{i_{\text{Schrot,out}}^2} = 2e \left(\frac{e}{h\nu} GP_{\text{in}}\right) \Delta f \quad (10.22)$$

sodass sich ein elektrisches Signal-Rausch-Verhältnis am Ausgang ergibt gemäß

$$\text{SNR}_{\text{out}} = \frac{\left(\frac{e}{h\nu} GP_{\text{in}}\right)^2}{\frac{2e^2}{h\nu} GP_{\text{in}}\Delta f + \frac{4e^2G(G-1)P_{\text{in}}n_{\text{sp}}\Delta f}{h\nu}} \quad (10.23)$$

$$= \frac{P_{\text{out}}}{2h\nu\Delta f + 2P_{\text{ASE}}} \underset{G \gg 1}{\approx} \frac{P_{\text{in}}}{4n_{\text{sp}}h\nu\Delta f} \quad (10.24)$$

Als ein den Verstärker charakterisierendes Merkmal definiert man das Verhältnis des elektrischen Signal-Rausch-Verhältnis vor dem optischen Verstärker – ebenfalls mit einem idealen, nur dem Schrotrauschen unterworfenen Detektor – zu dem elektrischen SNR am Ausgang als Rauschzahl des optischen Verstärkers

$$F_n = \frac{\text{SNR}_{\text{in}}}{\text{SNR}_{\text{out}}} = \frac{P_{\text{in}}}{2h\nu\Delta f} \frac{\frac{2e^2}{h\nu} GP_{\text{in}}\Delta f + \frac{4e^2}{h\nu} G(G-1)P_{\text{in}}n_{\text{sp}}\Delta f}{\left(\frac{e}{h\nu}\right)^2 G^2 P_{\text{in}}} \frac{P_{\text{ASE}}}{n_{\text{sp}}h\nu\Delta\nu(G-1)} \quad (10.25)$$

$$= \frac{1}{G} + \frac{2\rho_{\text{ASE}}}{G \cdot h\nu} \quad (10.26)$$

mit $\rho_{\text{ASE}} = P_{\text{ASE}}/\Delta\nu$ als spektrale ASE-Rauschleistungsdichte. Für Verstärkungen $G \gg 1$ folgt daraus

$$F_n \underset{G \gg 1}{\approx} \frac{\frac{P_{\text{in}}}{2h\nu\Delta f}}{\frac{P_{\text{in}}}{4n_{\text{sp}}h\nu\Delta f}} = 2n_{\text{sp}} \geq 2 \quad (10.27)$$

bzw.

$$F_{n,\text{dB}} = 10 \log F_n \geq 3 \text{ dB}. \quad (10.28)$$

10.2.2 Wann lohnt sich ein optischer Verstärker?

Wie Gleichung (10.28) zeigt, ist das elektrische Signal-Rausch-Verhältnis hinter dem optischen Verstärker mindestens um 3 dB schlechter als vor dem Verstärker. Daraus könnte

der Schluß gezogen werden, der Einsatz eines optischen Verstärkers sei in jedem Falle schädlich. Dies ist jedoch nicht der Fall, denn tatsächlich muss man mit realen Detektoren auskommen, die neben dem Quantenrauschen insbesondere noch thermisches Rauschen aufweisen. Die Frage stellt sich somit, unter welchen Bedingungen sich der Einsatz eines optischen Verstärkers lohnt. Dazu müssen die realen elektrischen SNR (d.h. unter Einschluss des thermischen Rauschens) am Eingang und am Ausgang verglichen werden. Dabei ergibt sich:

$$\text{SNR}_{\text{in}}^{\text{real}} = \frac{\left(\frac{e}{h\nu} P_{\text{in}}\right)^2}{2e \left(\frac{e}{h\nu} P_{\text{in}}\right) \Delta f + \frac{4kT}{R} \Delta f} \quad (10.29)$$

$$= \frac{\left(\frac{e}{h\nu} P_{\text{in}}\right)^2}{2e \left(\frac{e}{h\nu} P_{\text{in}}\right) \Delta f (1 + \sigma)} \quad (10.30)$$

wobei σ das Verhältnis der quadrierten Effektivwerte des thermischen und des Schrot-rauschstroms am Eingang bezeichnet

$$\sigma = \frac{\frac{4kT}{R} \Delta f}{2e \left(\frac{e}{h\nu} P_{\text{in}}\right) \Delta f} = \frac{\overline{i_{\text{th}}^2}}{i_{\text{SN}}^2|_{\text{input}}} \quad (10.31)$$

Für das reale SNR am Ausgang ergibt sich entsprechend

$$\text{SNR}_{\text{out}}^{\text{real}} = \frac{\left(\frac{e}{h\nu} P_{\text{out}}\right)^2}{2e \left(\frac{e}{h\nu} P_{\text{out}}\right) \Delta f + \frac{4kT}{R} \Delta f + \left(\frac{e}{h\nu}\right)^2 2P_{\text{out}} P_{\text{ASE}}} \quad (10.32)$$

$$= \frac{G^2 \left(\frac{e}{h\nu}\right)^2 P_{\text{in}}^2}{G 2e \frac{e}{h\nu} P_{\text{in}} \Delta f + \frac{4kT}{R} \Delta f + G \left(\frac{e}{h\nu}\right)^2 2P_{\text{in}} P_{\text{ASE}}} \quad (10.33)$$

$$= \frac{P_{\text{in}}}{\frac{1}{G} 2h\nu \Delta f + \frac{1}{G} 2P_{\text{ASE}} + \frac{1}{G^2} \left(\frac{h\nu}{e}\right)^2 \frac{1}{P_{\text{in}}} \frac{4kT}{R} \Delta f} \quad (10.34)$$

$$= \frac{P_{\text{in}}}{2h\nu \Delta f \left[\frac{1}{G} + \frac{\sigma}{G^2}\right] + \frac{2P_{\text{ASE}}}{G}} \quad (10.35)$$

Dieser Ausdruck ist mit dem obigen SNR am Eingang zu vergleichen

$$\text{SNR}_{\text{in}}^{\text{real}} = \frac{P_{\text{in}}}{2h\nu \Delta f (1 + \sigma)}; \quad (10.36)$$

Der Vergleich liefert nach kurzer Rechnung, dass das SNR am Ausgang besser (also größer) ist als am Eingang, falls

$$\sigma = \sigma_{\text{in}} = \frac{\overline{i_{\text{th}}^2}}{i_{\text{SN}}^2|_{\text{input}}} > \frac{G}{G+1} [2n_{\text{sp}} - 1] \approx 1 \quad (10.37)$$

Daran ist anzulesen, dass ein guter optischer Verstärker dann einen Vorteil bringt, wenn ohne ihn das thermische Rauschen im Detektorsignal größer als das Quantenrauschen ist. Ferner zeigt der Ausdruck für das reale SNR am Ausgang, dass es bei gegebenem σ eine optimale Verstärkung G gibt. Sie ergibt sich aus der Bedingung

$$2h\nu \Delta f \left[\frac{1}{G} + \frac{\sigma}{G^2}\right] + 4n_{\text{sp}} h\nu \Delta f \frac{G-1}{G} \stackrel{!}{=} \min \quad (10.38)$$

zu

$$G_{\text{opt}} = \frac{2\sigma}{2n_{\text{sp}} - 1} \quad (10.39)$$

Das SNR am Ausgang bei dieser optimalen Verstärkung ergibt sich damit zu

$$\text{SNR}_{\text{out}}^{\text{optimal}} = \frac{P_{\text{in}}}{4n_{\text{sp}} h\nu \Delta f + \frac{1}{2\sigma} h\nu \Delta f (2n_{\text{sp}} - 1)^2} \quad (10.40)$$

10.2.3 Wie häufig soll man verstärken?

Bei großen Übertragungstrecken werden in der Regel in regelmäßigen Abständen optische Verstärker eingesetzt. Dabei ist von Interesse, wie sich solch ein Hintereinanderschalten auf das Signal-Rausch-Verhältnis auswirkt. Dazu betrachten wir den praktisch wichtigen Fall, dass jeder Verstärker dieselbe Verstärkung hat, die gerade so bemessen ist, die Verluste des vorgeschalteten Faser-Streckenabschnittes ΔL zu kompensieren [Verluste $\exp(-\alpha\Delta L)$, $G = \exp(+\alpha\Delta L)$]. Damit ist die Ausgangssignalleistung P_{out} hinter jedem der Verstärker dieselbe, während die ASE-Rauschleistung sich von Verstärker zu Verstärker aufsummiert. Damit gilt für das elektrische SNR hinter dem m -ten Verstärker

$$\text{SNR}_m = \frac{P_{\text{out}}}{2h\nu\Delta f + m \cdot 2P_{\text{ASE}}} \quad (10.41)$$

$$= \frac{P_{\text{out}}}{2h\nu\Delta f[1 + m \cdot 2n_{\text{sp}}(G - 1)]}. \quad (10.42)$$

Eine vorgegebene Gesamtstrecke L_{ges} kann man in M Teilstücke der Länge ΔL unterteilen. Die Frage, welches SNR_M maximal ist, ist dann gleichbedeutend mit der Frage, für welches M der Ausdruck $M[\exp(+\alpha\Delta L) - 1]$ minimal ist. Dies ist der Fall für $M \rightarrow \infty$ bzw. $\Delta L \rightarrow 0$, also bei einer kontinuierlichen Verstärkung. In diesem Fall gilt

$$\text{SNR}_{\text{out}} = \text{SNR}_{\text{out}}^{\text{optimal}} = \text{SNR}_{\text{out}}^{M \rightarrow \infty} = \frac{P_{\text{out}}}{2h\nu\Delta f[1 + 2n_{\text{sp}}\alpha L_{\text{ges}}]} \quad (10.43)$$

$$\stackrel{\alpha L_{\text{ges}} \gg 1}{=} \frac{P_{\text{out}}}{2h\nu\Delta f} \frac{1}{2n_{\text{sp}}\alpha L_{\text{ges}}} \quad (10.44)$$

Zum Vergleich sind die (schlechteren) SNR-Werte für den Fall eines einzigen diskreten Verstärkers ($M = 1$) bzw. für den Fall zweier Verstärker ($M = 2$):

$$\text{SNR}_{\text{out}}^{M=1} = \frac{P_{\text{out}}}{2h\nu\Delta f[1 + 2n_{\text{sp}}(e^{\alpha L_{\text{ges}}} - 1)]} \quad (10.45)$$

$$\approx \frac{P_{\text{out}}}{2h\nu\Delta f} \frac{1}{2n_{\text{sp}} e^{\alpha L_{\text{ges}}}} \quad (10.46)$$

$$\text{SNR}_{\text{out}}^{M=2} \approx \frac{P_{\text{out}}}{2h\nu\Delta f} \frac{1}{2n_{\text{sp}} e^{\alpha L_{\text{ges}}/2}} \quad (10.47)$$

Die Ausdrücke für $M = 1$, $M = 2$ und $M = \infty$ unterscheiden sich durch die Terme $1/\exp(\alpha L_{\text{ges}})$, $1/\exp(\alpha L_{\text{ges}}/2)$ und $1/(\alpha L_{\text{ges}})$. Beträgt die Gesamtstreckendämpfung z.B. 60 dB ($\alpha L_{\text{ges}} = 13.8$), haben diese Terme die Werte 10^{-6} , 10^{-3} und 0.072. Hier wäre folglich ein einziger Verstärker mit hoher Verstärkung weitaus ungünstiger als viele kleinere Verstärker.

10.3 Erbium-Faserverstärker (EDFA)

Seltene Erden (auch Lanthanide) sind die Elemente Nr. 57 bis 71 des Periodensystems. Sie besitzen alle dieselbe Struktur der äußeren Elektronen ($5s^2 5p^6 6s^2$) und unterscheiden sich dadurch, dass Schritt für Schritt die innere 4f-Schale aufgefüllt wird. Unter den Seltenen Erden befinden sich u.a. die Elemente Praseodym, Neodym, Holmium, Erbium und Thulium, von denen Erbium von besonderem Interesse ist.

Er^{3+} -Ionen in der Quarzglasmatrix stellen ein 3-Niveau-Lasersystem dar (vgl. Folie "Pump bands in Nd^{3+} - and Er^{3+} -fiber amplifiers"). Durch optisches Pumpen kann das obere Laserniveau $^4I_{13/2}$ mit Elektronen bevölkert werden. Anschließend kann durch stimulierte Emission Verstärkung auftreten für Wellenlängen um ca. 1530nm, gegeben durch den energetischen Abstand zum unteren Laserniveau, das hier gleichzeitig – anders als bei

4-Niveau-Systemen – den Grundzustand darstellt ${}^4I_{15/2}$ (vgl. Folie “Pump bands in Nd^{3+} - and Er^{3+} -fiber amplifiers”).

In Erbium existieren viele nutzbare Pumpniveaus (vgl. Folie “Pump bands in Nd^{3+} - and Er^{3+} -fiber amplifiers”). Dies sind Niveaus oberhalb des oberen Laserniveaus, die durch Absorption kurzwelligerer Strahlung vom Grundzustand aus erreicht werden können, wenn Pumplicht mit der zur Energiedifferenz passenden Wellenlänge eingestrahlt wird. Die nutzbaren Pumpübergänge und die zugehörigen Pumpwellenlängen sind in der Abbildung dargestellt. Insbesondere kann Erbium demnach mit grünem Licht eines Argon-Lasers bei 514 nm, mit Laserdioden bei 800 nm sowie – ebenfalls mit Laserdioden – bei 980 nm und 1480 nm gepumpt werden. Nur die beiden letztgenannten sind heute von praktischer Bedeutung. Beim Pumpen in höhere Niveaus finden anschließend nichtstrahlende Übergänge der Elektronen statt (unter Erzeugung von Gitterschwingungen/Phononen) bis sie in dem metastabilen oberen Laserniveau ${}^4I_{13/2}$ ankommen. Die spontane Lebensdauer dieses Niveaus ist mit ca. 10 ms sehr lang. Die Pumpniveaus wie insbesondere aber auch das obere und das untere Laserniveau sind im lokalen Feld der Glasmatrix aufgespalten (verbreitert) aufgrund des Stark-Effektes. Daher sind insbesondere die stimulierten Übergänge, die zur Verstärkung von Signallicht genutzt werden sollen, nicht scharf bei einer Wellenlänge, sondern in einem ganzen Wellenlängenband, z.B. im Bereich zwischen 1520 und 1580 nm. Erst die Verbreiterung des oberen und unteren Laserniveaus ermöglicht es auch, den Übergang ${}^4I_{15/2} \rightarrow {}^4I_{13/2}$ als Pumpübergang zu nutzen (Pumpwellenlänge ≈ 1480 nm).

Faserverstärker werden, anders als viele Festkörperlaser, longitudinal gepumpt, d.h. das Pumplicht wird co-direktional oder kontra-direktional in Bezug auf das Signallicht (oder in beide Richtungen) in die Faser eingekoppelt. Dazu werden vernünftigerweise wellenlängenabhängige Koppler (WDM-Koppler) eingesetzt (siehe Chp11 . pdf, erste Folie), mit denen das Pumplicht zu beinahe 100% eingekoppelt werden kann, während das Signallicht zu beinahe 100% transmittiert wird. In der Er-dotierten Faser wird anschließend das Pumplicht absorbiert und dadurch, wie oben beschrieben, das ${}^4I_{13/2}$ -Niveau bevölkert und ggfls. Besetzungsinversion, die Voraussetzung für optische Verstärkung, erreicht.

Ein gepumpter EDFA (Erbium-doped fiber amplifier) zeigt in Abwesenheit von einfallendem Signallicht nur spontane Emission (Fluoreszenz). Das Fluoreszenzspektrum hat sein Maximum bei ≈ 1535 nm und weist eine Halbwertsbreite von ≈ 30 nm auf. Die Details können jedoch die Dotierungskonzentrationen und durch Ko-Dotierungsstoffe verändert werden. In Anwesenheit eines optischen Signals erhält man eine Signalverstärkung. Die Verstärkungskurve entspricht in etwa dem Fluoreszenzspektrum. Die absolute Größe der Verstärkung hängt von der Besetzungsinversion und damit von der Pumpleistung ab (siehe Folie “Experimental data on gain characteristics”). Für ein 3-Niveau-System wie Erbium muss berücksichtigt werden, dass ungepumpte (oder wegen Pumpdämpfung schwach gepumpte) Abschnitte Absorption anstatt Verstärkung hervorrufen. Daher muss die Länge der EDFAs richtig bemessen werden.

10.4 Raman-Faserverstärker

Raman-Faserverstärker basieren auf dem Effekt der Stimulierten Raman-Streuung (SRS). Bei diesem Verstärkungseffekt nutzt man nicht, wie bei EDFAs, elektronische Energieniveaus des verstärkenden Materials, sondern die Interaktion des Lichts mit Vibrationszuständen (siehe Folie “Fiber Raman Amplifiers” in Chp11 . pdf).

Zunächst *spontane* Raman-Streuung: ein Pump-Photon wird vom Material absorbiert und sofort re-emittiert in Form eines Signal- oder Stokes-Photons. Dieses hat eine kleinere Energie (und damit eine längere Wellenlänge) als das Pump-Photon. Die verbleibende Energie verbleibt als Gitterschwingungen / Phononen im Material. Der Frequenzversatz zwischen Pumpe und Signal wird somit durch die Frequenzen der verfügbaren Gitterschwingungen des Materials bestimmt. In Glas z. B. 13.2 THz (Mittelfrequenz; Spektrum ist sehr breit), in Silizium z. B. 15.6 THz (Breite des Spektrums etwa 100 GHz).

Nun *stimulierte* Raman-Streuung: je mehr Signal-Photonen bereits im Material vorhanden sind, desto häufiger findet der eben beschriebene Effekt statt. Es findet also echte Verstärkung des Signallichts statt, sobald genügend starkes Pumplicht in der Faser vorhanden ist. Die eben erwähnten 13.2 THz entsprechen einem Wellenlängenversatz zwischen Pumpe und Signal von etwa 100 nm. SRS findet in jeder Standard-Glasfaser statt, dazu sind keine Dotierungsstoffe notwendig (dennoch kann durch geeignetes Design der Faser die Stärke der SRS in gewissen Grenzen beeinflusst werden).

Die Entwicklung von Pump- und Signalleistung entlang der Faser wird beschrieben durch

$$\frac{dP_s}{dz} = -\alpha_s P_s + \gamma P_s = -\alpha_s P_s + \frac{\gamma_R}{A_{\text{eff}}} P_p P_s, \quad (10.48)$$

$$\frac{dP_p}{dz} = -\alpha_p P_p - \frac{\omega_p}{\omega_s} \frac{\gamma_R}{A_{\text{eff}}} P_s P_p, \quad (10.49)$$

wobei γ_R/A_{eff} der Raman-Gainkoeffizient der verwendeten Faser ist. Bei Standard-Single-mode-Fasern beträgt er etwa 0.3 /Wkm, in Spezialfasern auch 2.0 /Wkm oder mehr. Der Faktor ω_p/ω_s in der zweiten Gleichung repräsentiert den sogenannten Quantendefekt, also denjenigen Teil der Pumpphotonenenergie, die als Vibration im Material verbleibt.

Für den Fall $P_s \ll P_p$ lassen sich die obigen Gleichungen leicht lösen:

$$P_s(L) = G P_s(0) \quad (10.50)$$

mit der Gesamtverstärkung (Gain):

$$G = \exp \left[\gamma_R \frac{P_0}{A_{\text{eff}}} L_{\text{eff}} - \alpha_s L \right], \quad (10.51)$$

wo $P_0 = P_p(0)$ die eingespeiste Pumpleistung bezeichnet, und die effektive Länge definiert ist als

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{\alpha_p} (1 - e^{-\alpha_p L}). \quad (10.52)$$

Sie enthält die echte Faserlänge L , die aber aufgrund des Abfalls der Pumpleistung entsprechend α_p effektiv verkürzt erscheint, es gilt also immer $L_{\text{eff}} \leq L$.

Häufig interessiert auch der sogenannte on-off-Gain,

$$G_0 := \frac{G \text{ with pump } P_0 \text{ switched on}}{G \text{ with pump switched off}} = \exp \left[\gamma_R \frac{P_0}{A_{\text{eff}}} L_{\text{eff}} \right]. \quad (10.53)$$

Im Gegensatz zum "echten" Gain (10.51) sind aus ihm die linearen Faserverluste bei der Signalwellenlänge extrahiert, daher ist immer $G_0 > 0$ dB. Der Gesamtgain ergibt sich gemäß $G = G_0 \exp(-\alpha_s L)$.

Kapitel 11

Nichtlinearitäten in optischen Fasern

11.1 Einleitung

Stichworte in diesem Thema: Abhängigkeit des Brechungsindex von der Intensität, Selbstphasenmodulation, Kreuzphasenmodulation, Vier-Wellen-Mischung, RAMAN- und BRILLOUIN-Streuung.

Heutzutage wichtigster Effekt, nur ein Wellenlängenkanal liegt vor: KERR-Effekt. Auch bezeichnet als Selbst-Phasenmodulation (ausgeteiltes Bild). Der Brechungsindex von Quarzglas beträgt $n \approx 1,46$. Wo der Puls maximal ist, ist der Brechungsindex ein bißchen größer ($1,46 + \varepsilon$). Linearer Fall: Zweiter Term (2.Zeile ausgeteilte Rechnung) ist Null, weil da Polarisation proportional zu E^2, E^3, \dots

Der Materialspezifischer Koeffizient χ_3 ist der Unterschied zum Vorfaktor des erster Term (2.Zeile), der χ_1 ist. Der Brechungsindex ist dann nicht mehr $\varepsilon_0 \cdot n^2$ sondern $\varepsilon_0 \cdot (n + \text{irgendwas})^2$.

Beispiel für SiO_2 : $\Delta n_L \cong 3 \cdot 10^{-20} \cdot I / (W/m^2)$ Bei den Intensitätsdichten, die in Fasern üblich sind, ergibt sich z.B. 10^{-11} Unterschied in der Brechzahl. Rechnet man dann die Pulsausbreitung unter *Vernachlässigung* des eben genannten Effekts, wird der Puls mit der Entfernung breiter durch Dispersion links unten ausgeteiltes Blatt. Rechnet man *mit* diesem Effekt, kann die Nichtlinearität die Dispersion ausgleichen: *Soliton*.

11.2 Pulsausbreitung in Anwesenheit des Kerr-Effektes

Bei $z = 0$

$$E_0^t(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu \quad \text{reelle elektrische Feldstärke} \quad (11.1)$$

$$A(\nu) = \frac{1}{2} \begin{cases} A_+(\nu) & \text{für } \nu > 0 \\ A_-(\nu) = A_+^*(-\nu) & \text{für } \nu < 0 \end{cases} \quad (11.2)$$

Einhüllende:

$$E_0^{t,env}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_{+s}(\nu_s) e^{j2\pi\nu_s t} d\nu_s \quad (11.3)$$

$$A_{+s}(\nu_s) = A_+(\nu) \quad (11.4)$$

$$\nu_s = \nu - \nu_0 \quad (11.5)$$

A_+ ist das analytische Signal, d.h. nur mit positiven Frequenzanteilen.

Bei $z = \Delta z$ und Ausbreitung in einem *linearen* Medium

$$E_{\Delta z}^t(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\nu) H(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu \quad (11.6)$$

mit

$$H(\nu) = e^{-j\beta(\nu)\Delta z} \quad (11.7)$$

$$\beta(\nu) = \beta_0 + \beta'(\nu - \nu_0) + \frac{1}{2}\beta''(\nu - \nu_0)^2 \dots \quad (11.8)$$

Es wird eine neue Variable für die Zeit definiert¹:

$$\tau := t - \frac{\beta'}{2\pi} z = t - \frac{z}{v_{gr}} \quad (11.9)$$

$$E_{\Delta z}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\nu) H(\nu) e^{j\beta'\nu\Delta z} e^{j2\pi\nu\tau} d\nu \quad (11.10)$$

$$E_{\Delta z}^{env}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} A_{+s}(\nu_s) H_s(\nu_s) e^{j\beta'(\nu_s+\nu_0)\Delta z} e^{j2\pi\nu_s\tau} d\nu_s \quad (11.11)$$

mit

$$H_s(\nu_s) = e^{-j\beta(\nu_s+\nu_0)\Delta z} \cong e^{-j[\beta_0+\beta'\nu_s+\frac{\beta''}{2}\nu_s^2]\Delta z} \quad (11.12)$$

Daraus folgt für die Einhüllende der elektrischen Feldstärke

$$E_{\Delta z}^{env}(\tau) = e^{-j[\beta_0-\beta'\nu_0]\Delta z} \cdot \left\{ E_0^{env}(\tau) - j\frac{\beta''}{2}\Delta z \int_{-\infty}^{\infty} \nu_s^2 A_{+s}(\nu_s) e^{j2\pi\nu_s\tau} d\nu_s \right\} \quad (11.13)$$

$$= \underbrace{e^{j\psi_0}}_{\text{lediglich konstante Phase}} \cdot \left\{ E_0^{env}(\tau) + j\frac{\beta''}{8\pi^2}\Delta z \frac{d^2 E_0^{env}(\tau)}{d\tau^2} \right\} \quad (11.14)$$

– kann auch vernachlässigt werden

Probe: $\beta'' = 0$ und $E_{\Delta z}^{env}(\tau) = E_0^{env}(\tau)$ stimmt. (Hat sich nicht verändert.)

Jetzt ausrechnen bei $z = \Delta z$, Ausbreitung mit $n_2 \neq 0$ (NL steht für nichtlinear); die maximale Pulsänderung ist im Pulsmaximum groß und am Rand ist sie klein.

$$E_{\Delta z}^{env}(\tau) \cong e^{-jk\Delta n_{NL}(\tau)\Delta z} \left\{ E_0^{env}(\tau) + j\frac{\beta''}{8\pi^2}\Delta z \frac{d^2 E_0^{env}(\tau)}{d\tau^2} \right\} \quad (11.15)$$

¹Zitat der Vorlesung: „Jetzt möchte ich eine andere Zeit einführen.“ – E. BRINKMEYER

mit

$$\Delta n_{NL}(\tau) = n_2 \cdot \underbrace{|E_0^{env}(\tau)|^2}_{\text{Maß für die Intensität des Impulses}} \quad (11.16)$$

Δz ist eine kleine Strecke, damit:

$$E_{\Delta z}^{env}(\tau) \cong (1 - jk\Delta n_{NL}(\tau)\Delta z) \cdot E_0^{env}(\tau) \cdot \left\{ 1 + j \frac{\beta''}{8\pi^2} \Delta z \frac{d^2 E_0^{env}}{d\tau^2} \right\} \quad (11.17)$$

$$\cong E_0^{env}(\tau) + j \frac{\beta''}{8\pi^2} \delta z \frac{d^2 E_0^{env}}{d\tau^2} - jk\Delta n_{NL}(\tau)\delta z E_0^{env}(\tau) \quad (11.18)$$

$$\frac{E_{\Delta z}^{env}(\tau) - E_0^{env}(\tau)}{\Delta z} = j \frac{\beta''}{8\pi^2} \frac{d^2 E_0^{env}}{d\tau^2} - jk\delta n(\tau) E_0^{env} \quad (11.19)$$

$$\frac{\partial E^{env}(z, \tau)}{\partial z} - j \frac{\beta''}{8\pi^2} \frac{\partial^2 E^{env}}{\partial \tau^2} = -jk n_2 |E^{env}(z, \tau)|^2 E^{env} \quad (11.20)$$

Das ist die nichtlineare SCHRÖDINGER-Gleichung.

Geschrieben in z und t :

$$\frac{\partial E^{env}(z, t)}{\partial z} + \frac{\beta'}{2\pi} \frac{\partial E^{env}(z, t)}{\partial t} - j \frac{\beta''}{8\pi^2} \frac{\partial^2 E^{env}(z, t)}{\partial t^2} = -jk n_2 |E^{env}|^2 E^{env} \quad (11.21)$$

Lösungen:

- (i) für $\beta'' = 0, n_2 = 0$ d.h. jede Funktion $E^{env}(z, t) = G(t - \frac{\beta'}{2\pi}z)$ also z.B.

$$E^{env}(z, t) = \hat{E} e^{-\frac{(t - \frac{\beta'}{2\pi}z)^2}{(\Delta t)^2}} \quad (11.22)$$

- (ii) für $\beta'' \neq 0, n_2 = 0$

Es kommt zur Pulsverbreiterung (siehe Kap. chromatische Dispersion).

- (iii) für $\beta'' = 0, n_2 \neq 0$: Es liegt keine Dispersion vor, aber eine Nichtlinearität: Der Puls sieht immer gleich aus.

$$E^{env}(z, t) = G(t - \frac{\beta'}{2\pi}z) \cdot \exp[-jk n_2 |G(t - \frac{\beta'}{2\pi}z)|^2] \quad (11.23)$$

Der Faktor im Exponenten wird *Selbstphasenmodulation* genannt.

- (iv) $\beta'' < 0, n_2 > 0$ (der interessantere Fall)

Es gibt eine stabile Lösung:

$$E^{env}(\tau, z) = \frac{\hat{E}^{env}}{\cosh(\frac{2\tau}{\tau_0})} e^{-jk \frac{\Delta \hat{n}}{2} z} \quad (11.24)$$

τ_0 ist die Breite des Pulses,

$$\Delta n_{NL} = \frac{\Delta n}{\cosh^2(\frac{2\tau}{\tau_0})}, \quad \Delta \hat{n} = n_2 |\hat{E}^{env}|^2 \quad (11.25)$$

mit / falls

$$\hat{E}^{env} \cdot \tau_0 = \frac{1}{\pi \sqrt{2\pi n_2}} \sqrt{-\lambda_0 \beta''} \quad (11.26)$$

λ_0 ist die Mittenwellenlänge. Falls der Puls also eine bestimmte Form hat, nämlich den *cosh*, dann bleibt diese Form unverändert: *Soliton*.

Beispiel:

$$\lambda_0 = 1500 \text{ nm}; D \approx 2 \text{ ps/km} \cdot \text{nm} \Rightarrow \beta'' \approx -10^{-25} \frac{\text{s}^2}{\text{m}}, n_2 = 6 \cdot 10^{-23} \frac{\text{m}^2}{\text{V}^2}, \tau_0 = 10 \text{ ps}$$

$$\text{d.h. } \hat{E}^{env} = 0,6 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{M}} \Rightarrow \hat{I} = 7 \cdot 10^8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (11.27)$$

$$\Rightarrow \hat{P} \approx 35 \text{ mW} \quad (\text{falls } A_{\text{eff}} = 50 (\mu\text{m})^2) \quad (11.28)$$

(v) Allgemein

Berechne $E^{env}(\tau, z)$ schrittweise (in Schritten Δz):

$$E^{env}(\tau, z + \Delta z) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-\frac{\alpha}{2} \Delta z} e^{-j \frac{\beta''}{2} \nu_s^2 \Delta z} \mathcal{F} \{ E^{env}(\tau, z) \} \right\} \cdot e^{-j k n_2 |E^{env}(\tau, z)|^2 \Delta z} \quad (11.29)$$

Δz z.B. 100 m

„Split-Step Fourier Method“

Kapitel 12

Faseroptische Übertragungssysteme

12.1 Binäre Intensitätsmodulation und Bitfehlerrate

Ausgeteiltes Bild: BER als Funktion von SNR

Rauschen, siehe Abbildung 12.1, *Bit Error Ratio*: $BER = f(SNR, \dots)$. Um die

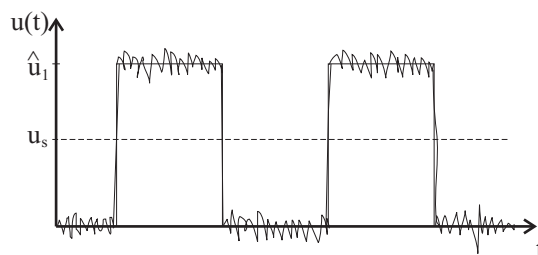


Abbildung 12.1: Pulsmuster am Empfänger

Wahrscheinlichkeit für einen Bitfehler p_E auszurechnen, werden die bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(0|1)$ betrachtet, daß eine Null am Empfänger erkannt wurde, aber eine Eins gesendet wurde und umgekehrt. Die Wahrscheinlichkeit für diese Fälle hängt außerdem ab von der Wahrscheinlichkeit p_Q , daß überhaupt eine Eins bzw. Null gesendet wird (Quellenwahrscheinlichkeit).

$$BER \quad p_E = p(0|1)p_Q(1) + p(1|0)p_Q(0) \quad (12.1)$$

Typische Werte für die bit error ratio sind $10^{-8} \dots -9 \dots -12 \dots$, mitunter geht das bis zu der Aussage „Ein Fehler pro Urknall“...

Bei isolierten Impulsen

$$u(t) = \begin{cases} u_{N0}(t) & \text{„0“ gesendet} \\ u_{N1}(t) + \hat{u}_1 s(t) & \text{„1“ gesendet} \end{cases} \quad (12.2)$$

Annahmen: Die Rauschspannungen $u_{N0}(t)$, $u_{N1}(t)$ seien gaußverteilt (was mindestens bei u_{N1} nicht stimmt, denn Schrotrauschen ist nicht GAUSS- sondern POISSON-verteilt) und $\bar{u}_{N0,1} = 0$ mittelwertfrei.

$$\text{„0“:} \quad w_0(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_0^2}} \quad (12.3)$$

mit $\bar{u} = 0$, $\overline{(u - \bar{u})^2} = \overline{u_{N0}^2} = \sigma_0^2$;

$$\text{„1“: } w_1(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(u - \hat{u}_1)^2}{2\sigma_1^2}} \quad (12.4)$$

mit $\bar{u} = \hat{u}_1$ und $\overline{(u - \bar{u})^2} = \sigma_1^2$. Das Schrotrauschen ist signalabhängig, es gilt deshalb $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$.

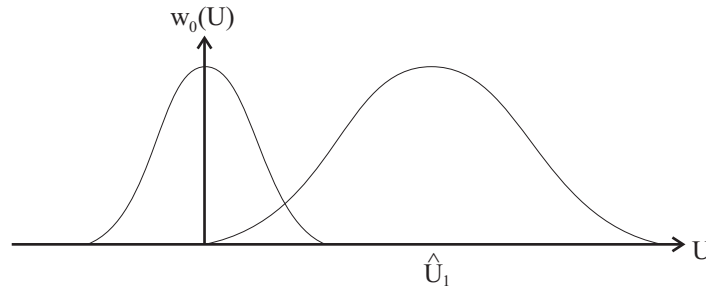


Abbildung 12.2: Verteilungen w_0, w_1

Nun wird eine Entscheidungsschwelle u_s festgesetzt, Abbildung 12.2:

$$u > u_s \rightarrow 1 \quad (12.5)$$

$$u > u_s \rightarrow 0 \quad (12.6)$$

Daraus sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten abzulesen:

$$p(1|0) = \int_{u_2}^{\infty} w_0(u) du = \dots = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{u_s}{\sqrt{2}\sigma_0} \right) \quad (12.7)$$

$$p(0|1) = \int_{-\infty}^{u_s} w_1(u) du = \dots = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\hat{u}_1 - u_s}{\sqrt{2}\sigma_1} \right) \quad (12.8)$$

und für die Bitfehlerrate ergibt sich

$$p_E = \frac{1}{2} [\operatorname{erfc}(\dots)p_Q(0) + \operatorname{erfc}(\dots)p_Q(1)] \quad (12.9)$$

Die optimale Entscheidungsschwelle wird bestimmt aus $\frac{dp_E}{du_s} \stackrel{!}{=} 0$.

Nun sei vereinfachend angenommen $p_Q(0) = p_Q(1) = 0,5$, $\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma$, also als Entscheidungsschwelle $u_s = \frac{1}{2}\hat{u}_1$. Dies ergibt

$$p_E = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\hat{u}_1}{2\sqrt{2}\sigma} \right) \quad (12.10)$$

und unter Verwendung der *Signal-to-Noise Ratio*

$$SNR = \frac{\hat{u}_1^2}{2u_N^2} = \frac{\hat{u}_1^2}{2\sigma^2} \quad (12.11)$$

$$p_E = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{SNR} \right) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{SNR}{4}}}{\sqrt{SNR}} \quad (12.12)$$

Die letzte Näherung gilt insbesondere bei großem SNR.

Zahlenbeispiel: Um eine BER $p_E < 10^{-9}$ zu erreichen, ist ein SNR von mindestens 19dB nötig.

12.2 Leistungsbilanz und Anstiegszeitenbilanz

Leistungs-Budget: Die Bitrate ist vorgegeben; die Frage ist: wie lang darf die Strecke sein?

ausgeteiltes Bild bzw. Tabelle: Power budgets

Anstiegszeitenbudget (*raise time budget*): Die Bitrate B ist gegeben; je größer sie ist, um so kürzer müssen die Anstiegszeiten T_r sein.

$$T_r \sim \frac{1}{\Delta f} \quad (12.13)$$

$$\text{Richtwert } T_r \approx \frac{0,35}{\Delta f} \quad (12.14)$$

$$T_r \cdot B \approx \begin{cases} 0,35 & \text{für RZ-Signale} \\ 0,7 & \text{für NRZ-Signale} \end{cases} \quad (12.15)$$

RZ steht für *return to zero*, NRZ für *non return to zero*, Abbildung 12.3; RZ braucht eine größere Bandbreite.

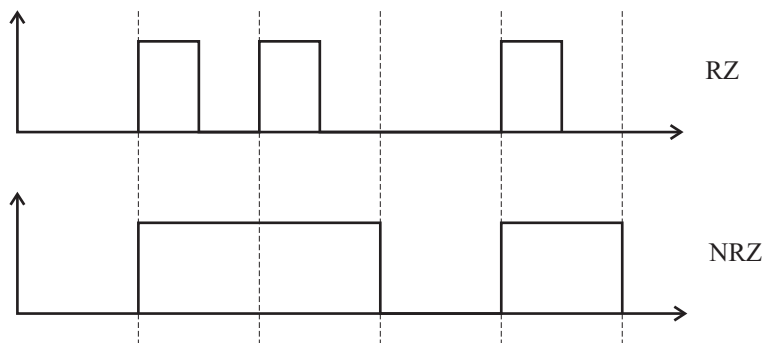


Abbildung 12.3: RZ- und NRZ-Signale

$$\Delta f \approx \begin{cases} B & \text{für RZ} \\ B/2 & \text{NRZ} \end{cases} \quad (12.16)$$

Die Anstiegszeit setzt sich zusammen aus der des Senders (*transmitter*), der Faser und des Empfängers (*receiver*):

$$T_r^2 \cong T_{tr}^2 + T_{fiber}^2 + T_{rec}^2 \quad (12.17)$$

$$T_{fiber}^2 = T_{intermodal}^2 + T_{GVD}^2 \quad (12.18)$$

GVD bedeutet *group velocity dispersion*; intermodale Dispersion tritt nur bei Multimodefasern auf.

$$T_{intermodal} \cong \begin{cases} \frac{n_1 L}{c} \Delta & \text{Stufenindexfaser} \\ \frac{n_1 L}{c} \frac{\Delta^2}{2} & \text{Gradientenfaser} \end{cases} \quad (12.19)$$

$$T_{GVD} \cong |D| L \Delta \lambda_{eff} \quad (12.20)$$

12.3 Dämpfungs- und dispersionsbegrenzte Übertragungssysteme

ausgeteiltes Bild desselben Titels

Dämpfungsbegrenzung d.h. Längenbegrenzung durch Dämpfung

$$L = \frac{10}{\alpha_f} \log_{10} \frac{P_{tr}}{P_{rec}} \quad (12.21)$$

α_f ist angegeben in dB/km ; P_{tr} Sendeleistung; P_{rec} benötigte Empfangsleistung für gegebene BER

Dispersionsbegrenzung (gestrichelt), d.h. Längenbegrenzung, weil die Pulse sonst durch Dispersion zu breit werden. Für Singlemodefaser

$$L < \frac{0,35}{B|D|\Delta\lambda_{eff}} \quad (12.22)$$

Es liegt eine deutliche Abhängigkeit von der Bitrate vor.

Aber: wie können trotzdem längere Übertragungsstrecken erreicht werden? Änderungen sind möglich durch:

- optische Verstärker
- Einfluß nichtlinearer Effekte (z.B. KERR-Effekt)
- (hier nicht betrachtet) Dispersionskompensation (DCF, kompensierende Fasern, gechirpte BRAGG-Gitter)

12.4 WDM-Systeme

Steigerung von Bitrate·Länge durch $B \cdot L = (B_1 + B_2 + \dots B_N) \cdot L$, d.h. viele Übertragungswellenlängen („Farben“) in derselben Faser.

Index

- * , 8, 10, 12, 21, 23, 26, 27, 33, 34, 38, 40, 41, 43, 46–49, 51–53, 55, 56, 61, 62, 73–77, 79–83, 86, 93, 95–100
- Anstiegszeitenbilanz, 99
- Binäre Intensitätsmodulation, 97
- Bitfehlerrate, 97
- BRAGG-Reflexion, 83
- BREWSTER-Winkel, 17
- Chirp, 45
- confinement-Faktor, 80
- Cut off, 24
- Dämpfungsbegrenzung, 100
- DBR-Laserdiode, 83
- DFB-Laserdiode, 83
- Dispersion
 - chromatische, 42
 - intermodale, 99
 - Material-, 46
 - Polarisationsmoden-, 48
 - Wellenleiter-, 42
- Effektive Quelle, 39
- EINSTEIN-Koeffizient, 76
- Elektrolumineszenz, 57
- Emission
 - spontane, 75
 - stimulierte, 76
- Evaneszentes Feld, 18
- FABRY-PEROT Laserdiode, 78
- Faseranregung, 61
- Filmwellen, 28
- Filmwellenleiter, 21, 27
- Geführte Leistung, 25
- Gradientenprofil, 25
- Hauptzustände, 49
- Injektionsladungsträgerdichte, 77
- Inkohärente Quellen, 61
- Innerer Photoeffekt, 51
- Intensität, 8
- Intensitätsmodulation
 - Binäre, 97
- Ionisierungskoeffizient, 56
- KERR-Effekt, 93
- Konversionsfaktor, 53
- Krümmungsverluste, 41
- LAMBERT'scher Strahler, 62
- Laserdiode
 - Übertragungsfunktion, 82
 - DBR-, 83
 - DFB-, 83
 - FABRY-PEROT-, 78
 - Modulationsverhalten, 82
 - Spektrum, 81
- Leckwellen, 35
- LED, 57
 - Ausgangsleistung, 59
 - Bandbreite, 59
 - Edge-emitting, 60
 - Heterostruktur-, 60
 - Leistungsdichtespektrum, 57, 58
 - Modulation, 60
- Leistungsbilanz, 99
- MAXWELLSche Gleichungen, 7
- Moden
 - geführte, 35
 - Nomenklatur, 29
 - TE-, 21
- normierte Frequenz, 23
- Numerische Apertur, 13
- Optische Leistung, 52
- Paraxiale Näherung, 12
- Phasengeschwindigkeit, 9
- Photodiode, 51
 - Avalanche-, 55
 - Kennlinie, 53
 - Lawinen-, 55
 - PIN-, 53
 - PN-, 51

- Übertragungsfunktion, 54
- Polarisation, 10
- Poynting-Vektor, 8
- Pulsausbreitung, 93

- Quantenwirkungsgrad
 - externer, 59
 - interner, 59

- Ratengleichung, 79
- Rauschspannung, 97
- RAYLEIGH-Streuung, 38
- Resonator
 - optischer, 78
- return to zero-Signale, 99

- SCHAWLOW-TOWNES-Beziehung, 81
- Schichtwellenleiter, 21
- SCHRÖDINGER-Gleichung nichtlinear, 95
- Selbstphasenmodulation, 93
- Sperrschichtkapazität, 52
- Spleissverbindungen, 61
- Steckverbindungen, 61
- Strahlungsmoden, 35
- Streifenwellen, 28
- Streuung, 38

- Totalreflexion, 28

- WDM-Systeme, 100
- Wellen
 - ebene, 8
 - homogene, 8
 - quergedämpfte, 18
 - stehende, 29
- Wellenwiderstand, 9