

**HAMBURGER BEITRÄGE
ZUR MATHEMATIK**

Heft 150

**Die Erdős-Menger-Vermutung
für abzählbare Graphen
mit diskretem Endenraum**

Maya Stein

JUNI 2002

1. Einleitung

Will man den für endliche Graphen wohlbekannten Satz von Menger auf unendliche Graphen ausdehnen, so wird man zunächst versuchen, ihn in seiner gewohnten Formulierung zu erweitern. Das sieht dann so aus:

Satz von Menger für unendliche Graphen. *In einem unendlichen Graphen G ist die größte Mächtigkeit einer Familie disjunkter Wege zwischen zwei Mengen $A, B \subseteq V(G)$ gleich der kleinsten Mächtigkeit eines A – B -Trenners.*

Dadurch, daß unendliche Mächtigkeiten auftauchen, bleibt die Aussage des Satzes von Menger nicht in ihrer vollen Stärke erhalten. Das erkennt man auch am leichten Beweis in dem Fall, daß es ein disjunktes A – B -Wegesystem unendlicher Mächtigkeit gibt. Dann erklärt man nämlich einfach die Menge aller Ecken eines maximalen Wegesystems $\mathcal{P}$ zum Trenner T . Das funktioniert, weil **a)** die Wege aus $\mathcal{P}$ endliche Länge und damit T und $\mathcal{P}$ die gleiche Mächtigkeit haben, und **b)** T wirklich trennt, denn nach Wahl von $\mathcal{P}$ müssen alle A – B -Wege T treffen. In dem Fall, daß es nur endlich viele disjunkte A – B -Wege gibt, läuft der Beweis des Satzes von Menger für unendliche Graphen analog zu dem für endliche Graphen. Nachzulesen ist er in diesem Text in Abschnitt 4 (nur für abzählbare Graphen, aber mit Enden).

Einer stärkeren Version des Satzes von Menger für unendliche Graphen begegnet man in einer Vermutung von Erdős. Sie läßt im Trenner nur eine Ecke aus jedem Weg zu.

Erdős'sche Vermutung. *In einem unendlichen Graphen G findet man zu beliebigen Mengen $A, B \subseteq V(G)$ eine Familie disjunkter A – B -Wege $\mathcal{P}$ und einen A – B -Trenner $T \subseteq V[\mathcal{P}]$, der genau eine Ecke aus jedem Weg aus $\mathcal{P}$ enthält.*

Wie man sofort sieht, folgt aus dieser Vermutung der Satz von Menger für unendliche Graphen. In [1] beweist R. Aharoni die Erdős'sche Vermutung für abzählbare Graphen.

Nun scheint die Idee naheliegend, auch die Enden eines Graphen miteinzubeziehen. Betrachtet man dann disjunkte Wege als Wege, die sich auch "in den Enden" nicht treffen, und läßt man im Trenner außer den Ecken auch die entsprechenden Enden zu, so ist der Satz von Menger ebenso leicht zu beweisen wie oben.

Einen anderen Weg beschreiten R. Halin (in [3]) und N. Polat (in [4]), die mit anderen Definitionen von disjunkten Wegen und Trennern Erweiterungen des Satzes von Menger für unendliche Graphen mit Enden zeigen. Halin muß allerdings voraussetzen, daß diese Graphen lokal endlich sind und $|A| = |B| = 1$ gilt. Polat gelingt es, auf diese Bedingungen zu verzichten, jedoch setzt er voraus, daß jedes Ende von A durch eine endliche Eckenmenge von B trennbar ist (also topologisch gesprochen kein Ende aus A auf dem Rand von B liegt) und umgekehrt.

In diesem Text soll die Erdős'sche Vermutung für abzählbare Graphen mit Enden bewiesen werden. Dabei sollen in A und in B ebenso wie im gesuchten Trenner Enden zugelassen werden; die disjunkten A – B -Wege dürfen sich auch dort nicht treffen. Damit keine unangenehmen Situationen auftreten, wie z.B. die, daß A alle Ecken eines Strahls enthält, der zu einem Ende aus B gehört, wird zusätzlich gefordert, daß sich jedes Ende aus $A \cup B$ durch eine endliche Eckenmenge von den restlichen Enden aus $A \cup B$ trennen läßt, daß also $A \cup B$ diskret ist. Die wesentlichen Ideen zum Beweis stammen aus [1].

Es ist durchaus vorstellbar, daß man die Erdős'sche Vermutung für abzählbare Graphen mit Enden auch ohne die Voraussetzung der Diskretheit von $A \cup B$ beweisen kann. Auf dem hier eingeschlagenen Beweisweg wird man auf diese Bedingung allerdings nicht verzichten können.

2. Grundlegende Definitionen

Die hier betrachteten Graphen sind nicht gerichtet und besitzen weder Schleifen noch Mehrfachkanten. Wie gewohnt bezeichnen $V(G)$ und $E(G)$ die Ecken- und Kantenmenge eines Graphen G . Beide können hier abzählbar sein. Es kann in G also Strahlen (einseitig unendliche Wege) geben.

Zwei Strahlen in G heißen **äquivalent**, wenn es unendlich viele disjunkte Wege gibt, die eine Ecke des einen Strahls mit einer des anderen verbinden. Offensichtlich ist dies genau dann der Fall, wenn für jede endliche Eckenmenge $M \subseteq V(G)$ eine Komponente von $G - M$ unendlich viele Ecken aus jedem der beiden Strahlen enthält. Die durch diese Äquivalenzrelation bestimmten Äquivalenzklassen werden die **Enden** von G genannt. Intuitiv kann man sich die Enden als unendlich weit entfernte Ecken vorstellen.

Mit $\Omega(G)$ soll die Menge der Enden des Graphen G bezeichnet werden, mit $G_{V\Omega}$ die Menge aller Ecken und Enden von G , also $V(G) \cup \Omega(G)$. Die Elemente von $G_{V\Omega}$ werden oft **Punkte** von G genannt. Für $X \subseteq G_{V\Omega}$ seien $X_V := X \cap V(G)$ und $X_\Omega := X \cap \Omega(G)$.

Da Graphen hier eher als kombinatorische Objekte denn als topologische Räume betrachtet werden, soll auf die Topologie des Graphen samt seiner Enden nicht weiter eingegangen werden. Die topologischen Begriffe, die dennoch auftauchen, wie der der Diskretheit, entstammen der Standardtopologie auf $G \cup \Omega(G)$ und werden hier dementsprechend definiert.

Es war bereits von Strahlen als einseitig unendlichen Wegen im herkömmlichen Sinne die Rede. Damit aber die Enden eines Graphen tatsächlich durch Wege mit anderen Punkten verbunden werden können, sollen von nun an auch Enden auf einen Weg liegen können. Daher wird man die Definition des Weges leicht abändern und als (gerichtete) Wege endliche Wege, Strahlen oder Doppelstrahlen erlauben, und zwar die beiden letzteren mit oder ohne die entsprechenden Enden aus G .

Das bedeutet, Wege, die einen Strahl aus einem Ende ω aus G beinhalten, dürfen in ω starten bzw. enden oder auch keinen Start- bzw. Endpunkt haben. Endliche Wege haben dagegen immer einen Start- und einen Endpunkt. Auch unendliche Kreise, also Doppelstrahlen, deren Anfangs- und Endstück im selben Ende ω liegen, sind als Wege zugelassen, wenn sie keinen Anfangspunkt und/oder keinen Endpunkt besitzen, ω soll also nur als Anfangs- oder nur als Endpunkt oder gar nicht auf dem Weg liegen. Analog zum trivialen Weg auf einer Ecke soll es auch den trivialen (oder leeren) Weg auf einem Ende ω geben, dieser hat dann den Anfangs- und den Endpunkt ω , seine Eckenmenge ist leer.

Ein (**gerichteter**) **Weg** wird also durch ein Tupel der Form (P) , (a, P) , (P, b) oder (a, P, b) beschrieben, und zwar auf die folgende Weise:

- (P) ist der Weg, der auf dem Doppelstrahl P verläuft und weder Anfangs- noch Endpunkt besitzt.
- (a, P) ist der Weg auf dem (Doppel-)Strahl P , der keinen Endpunkt besitzt, aber die Anfangsecke a (wenn P ein Strahl ist, der in a startet) oder das Anfangsende a (wenn P ein Doppelstrahl ist, dessen Anfangsstück in a liegt).
- (P, b) entsprechend.
- (a, P, b) ist der Weg auf dem (Doppel-)Strahl, dem endlichen oder dem leeren Weg P mit den entsprechenden Anfangs- und Endpunkten a und b , dabei gilt $a = b$ genau dann, wenn $|V(P)| \leq 1$ gilt.

Kurz wird man auch vom Weg P sprechen. Um dabei zwischen dem Weg (a, P, b) , dem Weg (P, b) , usw. zu unterscheiden, sagt man dann, der Weg habe den Anfangspunkt a und den Endpunkt b oder keinen Anfangspunkt, aber den Endpunkt b , usf.

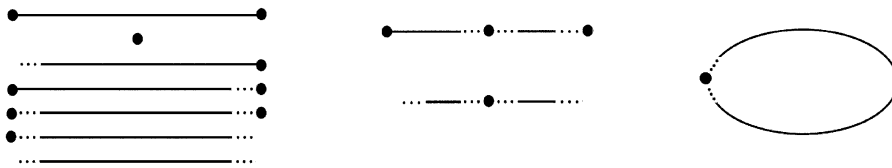


Abb. 2.1 a) Wege.

b) Keine Wege.

c) U.U. ein Weg.

Abb. 2.1. c) stellt genau dann einen Weg dar, wenn dieser Weg keinen Start- und/oder keinen Endpunkt hat. (v, v, v) oder kurz (v) ist der triviale Weg auf der Ecke v , $(\omega) := (\omega, \emptyset, \omega)$ der triviale Weg auf dem Ende ω . Mit $\mathcal{P}^{triv}$ ist die Teilmenge der trivialen Wege einer Familie von Wegen $\mathcal{P}$ gemeint. $\overleftarrow{P}$ bezeichnet den rückwärts durchlaufenen Weg P . (D.h., $\overleftarrow{(a, P, b)} = (b, \overleftarrow{P}, a)$, usw.) Manchmal soll ein Weg (a, P, b) an einem bestimmten Punkt $x \in V(P) \cup a \cup b$ abgeschnitten werden. Dann bezeichnet Px für $x = a$ den Weg (a) , für $x \in V(P)$ den Weg (a, Px, x) und für $x = b$ den ursprünglichen Weg (a, P, b) . Für $x \in V(G)$ ist $P\hat{x}$ der Weg (a, Py, y) , wenn y die Ecke vor x auf P ist. xP und $\hat{x}P$ definieren sich analog. Sind P und Q Wege mit $v \in V(P) \cap V(Q)$ und $V(Pv) \cap V(vQ) = v$, so ist PvQ der Weg, der bis v auf P und ab v auf Q verläuft.

Ein **A - B -Weg** ist ein Weg (a, P, b) mit $(V(P) \cup a \cup b) \cap A = a$ und $(V(P) \cup a \cup b) \cap B = b$. Insbesondere ist der triviale Weg (x) mit $x \in A \cap B$ ein A - B -Weg. Ist $\mathcal{P}$ ein A - B -Wegesystem, so bezeichnet $A_{\mathcal{P}}$ die Menge der Anfangspunkte von Wegen aus $\mathcal{P}$, $B_{\mathcal{P}}$ die Menge der Endpunkte von Wegen aus $\mathcal{P}$.

Ein Wegesystem $\mathcal{P}$ ist ein **disjunktes Wegesystem**, wenn zwei verschiedene Wege aus $\mathcal{P}$ keine gemeinsamen Punkte besitzen. Es können also verschiedene Wege aus $\mathcal{P}$ durchaus auf Strahlen aus demselben Ende ω liegen, jedoch unter der Voraussetzung, daß höchstens einer dieser Wege den Anfangs- oder Endpunkt ω besitzt. Meist wird man es hier mit disjunkten Familien von Wegen zu tun haben.

Der Begriff des Trenners soll hier ganz in seinem gewohnten Sinn verwendet werden, es werden lediglich die Enden des Graphen mit einbezogen. Würde man nur Ecken im Trenner erlauben, so käme man bereits bei den einfachen Beispielen in Abb. 2.2 mit der Erdős-Menger-Vermutung in die Bredouille. Wie man sofort sieht, ist dort die Anzahl disjunkter Wege geringer als die Anzahl der Ecken, die zum Trennen von A und B nötig sind. Selbst wenn man den Begriff der Disjunktheit erweitern und auch Wege, die keine gemeinsamen *Ecken*, wohl aber gemeinsame *Enden* besitzen, disjunkt nennen würde, käme man in Abb. 2.2 rechts nicht weiter.



Abb. 2.2 Die unendliche Leiter und ein Doppelstrahl mit angehängter Ecke unendlichen Grades.

Außer Ecken sollen also auch Enden im Trenner erlaubt sein, und zwar nur Enden aus den beiden Mengen, die voneinander getrennt werden. Es würde zwar kaum schaden, in der folgenden Definition auch andere Enden im Trenner zuzulassen; da diese Enden zum Trennen aber nicht gebraucht werden, wären sie sowieso nur überflüssiger Ballast.

Sind $A, B, T \in G_{V\Omega}$ und ist $T_{\Omega} \subseteq (A \cup B)_{\Omega}$, so ist T ein **A - B -Trenner**, wenn $(V(P) \cup a \cup b) \cap T \neq \emptyset$ für jeden A - B -Weg (a, P, b) gilt, d.h., wenn jeder A - B -Weg T trifft. Aus der Definition folgt sofort, daß T genau dann A und B trennt, wenn $C_{G-T_V}(B \setminus T)$ (das ist die Vereinigung derjenigen Komponenten von $G - T_V$, die Strahlen aus Enden

aus $(B \setminus T)_\Omega$ oder Ecken aus $(B \setminus T)_V$ enthalten) weder Strahlen, die zu einem Ende aus $(A \setminus T)_\Omega$ gehören, noch Ecken aus $(A \setminus T)_V$ enthält.

Vereinbarung: Sollte an einer Stelle, wo man eigentlich eine Menge erwartet, einmal stattdessen ein Punkt stehen, z.B. in $G - v$, α - B -Weg, A - β -Trenner, dann ist damit stets die Menge, die nur diesen Punkt enthält, gemeint (also $G - \{v\}$, usw).

Eine Menge $D \subseteq G_{V\Omega}$ heißt **diskret**, wenn zu jedem $\chi \in D_\Omega$ ein endlicher und nur aus Ecken bestehender χ -($D - \chi$)-Trenner existiert. Zu jedem Ende χ aus einer diskreten Menge wähle man einen solchen Trenner S_χ fest. (Natürlich darf S_χ Ecken aus D enthalten.) Es sei dann G_χ der von S_χ und der eindeutig bestimmten Komponente von $G - S_\chi$, die Strahlen aus χ enthält, aufgespannte Untergraph von G . Es ist u.U. nicht möglich, für $\chi, \chi' \in D$ die zugehörigen Trenner S_χ und $S_{\chi'}$ disjunkt zu wählen.

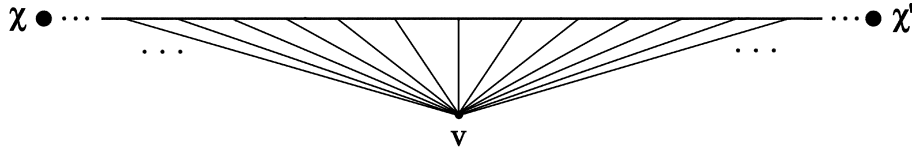


Abb. 2.3 v liegt in S_χ und in $S_{\chi'}$, egal wie man diese wählt.

Mit D sind selbstverständlich auch alle Teilmengen von D diskret. Die Diskretheit einer Menge D garantiert, daß ein Weg R , der in einem Ende $\omega \in D$ startet oder endet, nicht unendlich viele Ecken aus D treffen kann, ja, es können nicht einmal unendlich viele disjunkte $V(R)$ - D -Wege existieren. (Sonst gäbe es keine endliche Eckenmenge, die ω und $D - \omega$ voneinander trennt.) Dieser Umstand wird schon bald im Umgang mit Wellen von großem Nutzen sein.

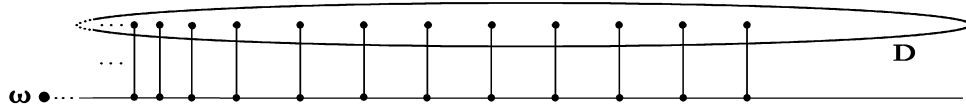


Abb. 2.4 Weil ω durch keine endliche Eckenmenge von D abgetrennt wird, kann $D \cup \omega$ nicht diskret sein.

Gleich hier soll bewiesen werden, daß in einem abzählbaren Graphen auch diskrete Mengen von Enden abzählbar sind. Das ist für beliebige Endenmengen nicht unbedingt der Fall, z.B. gibt es den 2^ω -Baum auf abzählbar vielen Ecken, aber mit überabzählbar vielen Enden.

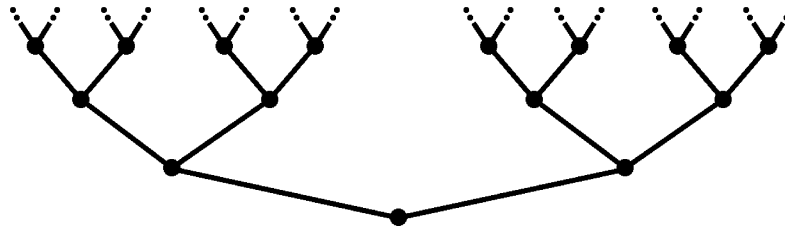


Abb. 2.5 Der 2^ω -Baum.

Die Diskretheit ermöglicht aber, doch das Gewünschte zu zeigen.

Lemma 2.1. In einem abzählbaren Graphen G ist eine diskrete Menge $D \subseteq \Omega(G)$ abzählbar.

Beweis: Es gibt nur abzählbar viele Möglichkeiten, aus einer abzählbaren Menge endlich viele Elemente auszuwählen. Da $V(G)$ abzählbar ist, bedeutet das, daß auch $\bigcup_{\omega \in D} \{S_\omega\}$ höchstens abzählbare Größe hat.

Nehme man nun an, daß D überabzählbar ist. Dann gibt es eine ebenfalls überabzählbare Teilmenge D' von D und eine endliche Eckenmenge S , so daß $S_\omega = S$ für alle $\omega \in D'$ gilt. S trennt jedes Element von D' vom Rest von D , daher besteht $G - S$ aus überabzählbar vielen Komponenten. Im Widerspruch zur Annahme ist dann mit $G - S$ auch G ein Graph auf überabzählbar vielen Ecken. $\square$

Nachdem nun alle dazu benötigten Definitionen klar sind, soll an dieser Stelle der Satz vorgestellt werden, den es im weiteren Verlauf des Textes zu beweisen gilt.

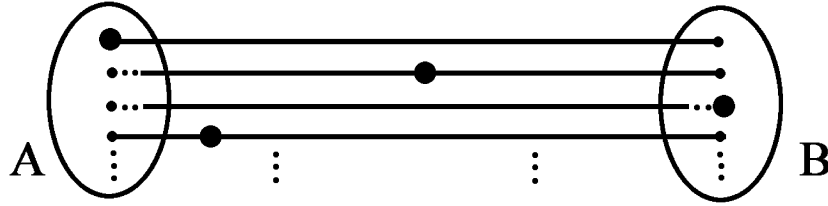


Abb. 2.6 Die Erdős-Menger'sche Vermutung für abzählbare Graphen mit Enden.

Satz 1. Sei G ein Graph und seien $A, B \subseteq G_{V\Omega}$. Ist $A \cup B$ diskret, dann gibt es in G eine Familie disjunkter A - B -Wege $\mathcal{P}$ und einen A - B -Trenner $T \subseteq V[\mathcal{P}] \cup A_{\mathcal{P}} \cup B_{\mathcal{P}}$, der genau einen Punkt aus jedem Weg aus $\mathcal{P}$ enthält.

3. Wellen

Nun soll der Begriff der $A \rightarrow B$ -Welle eingeführt werden: grob gesagt sind $A \rightarrow B$ -Wellen disjunkte Wegesysteme, die aus Wegen bestehen, deren Anfangspunkte ganz A ausmachen und deren Endpunkte A und B voneinander trennen. Mit einer Welle hat man also von A aus schon den ersten Schritt in Richtung B getan. Durch immer längere Wellen versucht man dann, sich noch näher an B heranzupirschen. Dabei ist eine Welle länger als eine andere, wenn ihre Wege die der anderen beinhalten. Die Frage, ob der Limes einer in diesem Sinne aufsteigenden Folge von Wellen ebenfalls eine Welle ist, wird am Ende dieses Abschnitts geklärt. Wellen sind das wichtigste Werkzeug im gesamten Beweis.

Seien $A, B \subseteq G_{V\Omega}$ und sei $A \cup B$ diskret. Eine Familie disjunkter Wege $\mathcal{W} = \{W_a : a \in A\}$ heißt **$A \rightarrow B$ -Welle** in G (auch kurz Welle), wenn für alle $a \in A$ der Weg W_a in a startet und Z , die Menge der Endpunkte von Wegen aus A , ein A - B -Trenner ist. Alle Wege aus $\mathcal{W}$ haben einen Anfangspunkt, sie müssen allerdings keinen Endpunkt besitzen. Wege ohne Endpunkt steuern zu Z nichts bei. Die **triviale Welle** $\mathcal{A} := \{(a) : a \in A\}$ existiert immer.

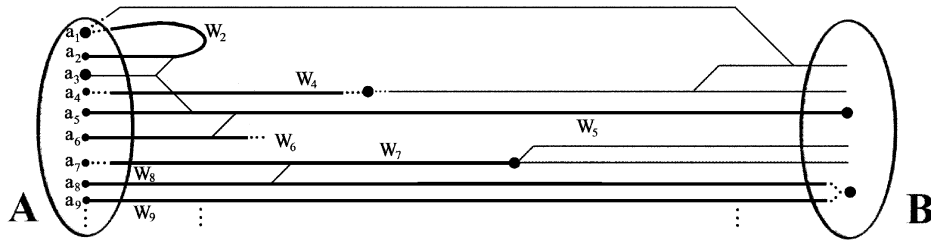


Abb. 3.1 Eine $A \rightarrow B$ -Welle (mit $W_i = W_{a_i}$).

Abb. 3.1 zeigt eine Welle $\{W_1, W_2, W_3, \dots\}$ mit den entsprechenden Anfangspunkten in A . Die Endpunkte dieser Welle sind als dickere Punkte dargestellt. W_1 und W_3 sind triviale Wege, die Wege W_2 und W_6 sowie einer der beiden Wege W_8 und W_9 besitzen keinen Endpunkt. Wege wie W_2 wirken unschön; man kann sie allerdings nicht ausschließen, wenn man nicht auf die Limesbildung bei Wellen verzichten möchte.

Unter den Endpunkten einer Welle können sich Punkte befinden, die zum Trennen von A und B überhaupt nicht benötigt werden. In Abb. 3.1 sind z.B. die Endpunkte von W_3 und W_4 überflüssig. Es wäre also auch Z ohne diese Punkte ein A - B -Trenner. Ist es immer möglich, eine minimale Teilmenge von Z zu finden, die nur aus den wirklich wichtigen Punkten besteht?

Sei $X := \{z \in Z_V \cup (Z_\Omega \cap (A \cup B)) : \text{In } z \text{ startet ein } Z\text{-}B\text{-Weg.}\}$. Jeder A - B -Weg P trifft Z , und muß wegen der Diskretheit von $A \cup B$ und der Tatsache, daß Z durch disjunkte Wege aus $\mathcal{W}$ mit A verbunden ist, sogar einen letzten Punkt z in Z haben. (Sonst wäre das Endende von P , das ja zweifellos in B liegt, nicht endlich von A trennbar.) Da z auf P liegt, kann es sich bei z um kein Ende außerhalb von $A \cup B$ handeln. z ist der Startpunkt des Z - B -Wegs zP (wenn $z \in B$ gilt, ist zP trivial) und liegt daher in X . Also wird X von jedem A - B -Weg getroffen und ist damit ein A - B -Trenner. Offensichtlich ist jeder Punkt aus X zum Trennen nötig, daher ist X sogar ein minimaler A - B -Trenner. In der Schreibweise $(\mathcal{W}, X)$ wird die Welle zusammen mit ihren relevanten Endecken genannt.

Wege aus $\mathcal{W}$, die in $Z \setminus X$ enden, sind genauso überflüssig wie Wege ohne Endpunkt. Nun sollen solche Wellen ausgezeichnet werden, in denen jeder Weg wichtig ist, weil er einen Endpunkt hat und dieser unbedingt zum Trennen von A und B nötig ist. Eine $A \rightarrow B$ -Welle $(\mathcal{W}, X)$ heißt **voll**, wenn alle Wege aus $\mathcal{W}$ in X enden, andernfalls heißt sie **klein**.

Man betrachte nun eine beliebige Eckenmenge M in G . Was geschieht in $G - M$ mit den Enden von G ? Enthält M unendlich viele Ecken, so kann es passieren, daß einige Enden von G in $G - M$ verschwunden sind. Das wäre der Fall, wenn M eine Umgebung von einem Ende von G enthält. Andere Enden von G könnten aufgespalten werden. Das heißt, es könnte Strahlen in $G - M$ geben, die in G zum selben Ende gehören, in $G - M$ aber zu verschiedenen. Dazu müßte M die unendlich vielen Verbindungen zwischen diesen Strahlen kappen.

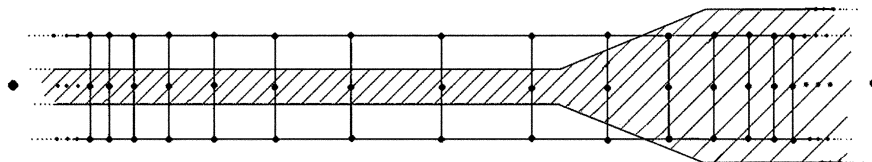


Abb. 3.2 Die schraffierte Menge spaltet das linke Ende und verschluckt das rechte.

Es gibt aber auch gutartige Eckenmengen, die zumindest einige Enden verschonen. Besitzen $D \subseteq \Omega(G)$ und $M \subseteq V(G)$ die Eigenschaft, daß es zu jedem Ende ω von G mit $\omega \in D$ genau ein Ende von $G - M$ gibt, das Strahlen aus ω enthält, so heißt M **D-endentreu** in G . Da jedes Ende aus D in $G - M$ durch genau ein Ende repräsentiert wird, wird man auch in $G - M$ von der Endenmenge D sprechen. Damit ist dann die Menge $\{\omega \in \Omega(G - M) : \omega \text{ enthält Strahlen, die in } G \text{ in einem Ende aus } D \text{ liegen.}\}$ gemeint.

Trenner X , die einer Welle entstammen, sind ein Beispiel für $(A \cup B)_\Omega$ -endentreue Mengen, wie das folgende Lemma unter Benutzung der Diskretheit von $A \cup B$ zeigt.

Lemma 3.1. *Sind $A, B \subseteq G_V$ und ist $(\mathcal{W}, X)$ eine $A \rightarrow B$ -Welle, so ist X_V eine $(A \cup B)_\Omega$ -endentreue Eckenmenge.*

Beweis: Sei $\omega \in (A \cup B)_\Omega$. Ein Weg aus $\mathcal{W}$, der in einer Ecke aus G_ω endet, muß, wenn er nicht in ω beginnt, S_ω treffen, daher ist $|X_V \cap V(G_\omega)| \leq |S_\omega| + 1$. In G_ω sind jedoch je zwei Strahlen aus ω durch unendlich viele disjunkte Wege verbunden, können also durch X_V nicht voneinander getrennt werden (d.h. ω spaltet sich in $G - X_V$ nicht auf), und es kann auch kein ganzer Strahl aus ω in X_V enthalten sein (also verschwindet ω in $G - X_V$ nicht). Es gibt daher genau ein Ende von $G - X_V$, das Strahlen aus ω enthält. Da dies für alle $\omega \in (A \cup B)_\Omega$ gilt, ist Lemma 3.1 bewiesen. $\square$

Ist $(\mathcal{W}, X)$ eine $A \rightarrow B$ -Welle, so zerfällt $G - X_V$ in interessante und weniger interessante Komponenten, nämlich solche, die $B \setminus X$ treffen, und solche, die das nicht tun. Die unwichtigen Komponenten von $G - X_V$ könnte man gut weglassen, da auf dem Weg zum gesuchten disjunkten Wegesystem nur noch das interessiert, was sich zwischen X und B abspielt. Aus diesem Grund soll ein Untergraph von G definiert werden, der nur diese Bereiche von G umfaßt.

Sei $\mathbf{G}_{X \rightarrow B}$ der durch X_V und die Komponenten von $G - X_V$, die B_V treffen oder einen Strahl aus einem Ende aus $(B \setminus X)_\Omega$ enthalten, induzierte Untergraph von G . $G_{X \rightarrow B}$ ist also gewissermaßen der Graph zwischen X und B .

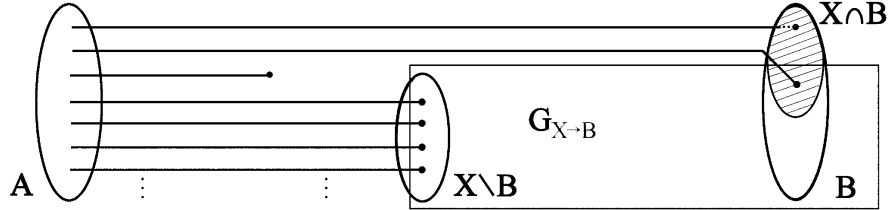


Abb. 3.3 Der Graph $G_{X \rightarrow B}$.

Alle Ecken aus $(X \cup B)_V$ liegen in $G_{X \rightarrow B}$. Was aber wird aus den Enden von G in $G_{X \rightarrow B}$? Aus Lemma 3.1 weiß man, daß in $G_{G - X_V}(B \setminus X)$ und damit auch in $G_{X \rightarrow B}$ keines der Enden aus $(A \cup B)_\Omega$ aufgespalten wurde und zumindest keins aus $(B \setminus X)_\Omega$ verschwunden ist. Außerdem ist aus der Definition von X klar, daß hier Enden aus $(X \setminus B)_\Omega$ nicht zerstört worden sein können. Enden aus $(X \cup B)_\Omega$, die in $G_{X \rightarrow B}$ verschwunden sind, müssen also aus $(X \cap B)_\Omega$ stammen. Man kann sich jetzt weiter überlegen, welche der Enden aus $(X \cap B)_\Omega$ auch verschwinden *müssen* (nämlich die aus $(X \cap B)_\Omega \setminus A$), aber letztendlich ist das im weiteren Beweis vollkommen unwichtig, deshalb wird man sich hier mit Korollar 1 begnügen:

Korollar 1. *Ist $(\mathcal{W}, X)$ eine $A \rightarrow B$ -Welle, so gibt es zu jedem Ende $\omega \in (X \setminus B)_\Omega \cup (B \setminus X)_\Omega$ genau ein Ende von $G_{X \rightarrow B}$, das Strahlen aus ω enthält.* $\square$

Auch hier ist also klar, welche Mengen gemeint sind, wenn man in $G_{X \rightarrow B}$ von den Mengen $X \setminus B_\Omega$ und $B \setminus X_\Omega$ spricht.

Um das in Satz 1 gewünschte Wegesystem zu erhalten, muß praktisch nur noch $X \setminus B$ durch disjunkte Wege mit $B \setminus X$ verbunden werden. Diese Wege werden in $G_{X \rightarrow B}$ liegen. Vielleicht kann man dort zunächst Wellen finden, die man an $\mathcal{W}$ ankleben kann, um so evtl. eine längere $A \rightarrow B$ -Welle in G zu erhalten. Solche Verlängerungswellen müßten auf jeden Fall in $X \setminus B_\Omega$ starten. Daher die folgende Definition:

Die **Verlängerung** einer $A \rightarrow B$ -Welle $(\mathcal{W}, X)$ in G ist eine $(X \setminus B_\Omega) \rightarrow (B \setminus X_\Omega)$ -Welle $(\mathcal{V}, Y)$ in $G_{X \rightarrow B}$. In G kann man jetzt die Wege aus der Verlängerung $\mathcal{V}$ an die entsprechenden aus $\mathcal{W}$ anhängen und erhält so $\mathcal{W} + \mathcal{V}$. Es soll also $\mathcal{W} + \mathcal{V} = \{W \in \mathcal{W} : W \text{ endet nicht in } X \setminus B_\Omega\} \cup \{WxV : W \in \mathcal{W}, V \in \mathcal{V}, x \in X \text{ ist der Endpunkt von } W \text{ und der Anfangspunkt von } V\}$ sein. Jeder Weg aus $\mathcal{W}$ oder $\mathcal{V}$ ist in einem Weg aus $\mathcal{W} + \mathcal{V}$ als Teilweg enthalten.

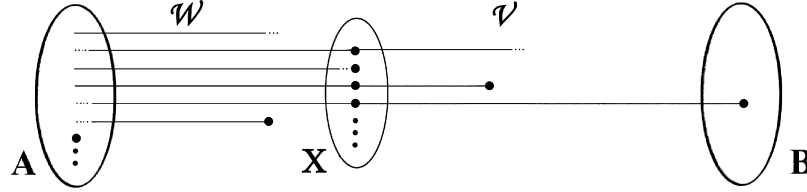


Abb. 3.4 $\mathcal{V}$ verlängert $\mathcal{W}$.

Lemma 3.2. $\mathcal{W} + \mathcal{V}$ ist eine $A \rightarrow B$ -Welle in G .

Beweis: Weil es für alle $v \in V(G_{X \rightarrow B}) \setminus X_V$ einen v - B -Weg P_v in G gibt, der X nicht trifft, würde mit einem $v \in (V[\mathcal{W}] \cap V(G_{X \rightarrow B})) \setminus X_V$ auch ein A - B -Weg in G existieren, der X nicht trifft. (Nämlich WvP_v , wenn W der Weg aus $\mathcal{W}$ ist, auf dem v liegt.) Das geht nicht, weil X ein A - B -Trenner ist. Also gilt $V[\mathcal{W}] \cap V(G_{X \rightarrow B}) \subseteq X_V$, mit $X_V \subseteq V[\mathcal{W}] \cap V[\mathcal{V}] \subseteq V[\mathcal{W}] \cap V(G_{X \rightarrow B})$ folgt daraus $V[\mathcal{W}] \cap V[\mathcal{V}] = X_V$. Gibt es Enden von G , die Anfangs- oder Endpunkt sowohl eines Wegs aus $\mathcal{W}$ als auch eines Wegs aus $\mathcal{V}$ (der letztere in G betrachtet) sind, so müssen diese nach allen bisherigen Feststellungen in X und damit in A liegen. Darum ist $\mathcal{W} + \mathcal{V}$ eine Familie disjunkter Wege in G , ferner startet in jedem Punkt aus A genau ein Weg aus $\mathcal{W} + \mathcal{V}$. Es gilt $Y_\Omega \subseteq (X \cup B)_\Omega \subseteq (A \cup B)_\Omega$.

Die Menge der Endpunkte von $\mathcal{W} + \mathcal{V}$ beinhaltet offensichtlich ganz $(X \cap B) \cup Y$. Kann man zeigen, daß diese Menge in G ein A - B -Trenner ist, dann ist dort auch $\mathcal{W} + \mathcal{V}$ eine $A \rightarrow B$ -Welle.

Ein Strahl in G , der X in unendlich vielen Ecken trifft, kann nicht in einem Ende $\beta \in B$ enden, da X_V durch disjunkte Wege mit A verbunden ist und deshalb keine endliche A - β -trennende Eckenmenge existieren könnte. (Die gibt es aber aufgrund der Diskretheit von $A \cup \beta$.) Daher hat jeder A - B -Weg P in G einen letzten Punkt in X . Ist dies der Endpunkt von P , so trifft P die Menge $X \cap B$, handelt es sich aber um einen Punkt außerhalb von B , so enthält P einen $(X \setminus B) - (B \setminus X)$ -Weg in $G_{X \rightarrow B}$, der dort Y treffen muß. In G trifft P daher Y . Also ist $(X \cap B) \cup Y$ in G ein A - B -Trenner, und $\mathcal{W} + \mathcal{V}$ eine $A \rightarrow B$ -Welle in G . $\square$

Sind $(\mathcal{W}, X)$ und $(\mathcal{V}, Y)$ volle Wellen, so ist auch $\mathcal{W} + \mathcal{V}$ voll, denn jeder Weg aus $\mathcal{W} + \mathcal{V}$ endet in einem Punkt z aus $(B \cap X) \cup Y$, darum startet in z ein Z - B -Weg in G (wobei Z die Menge der Endpunkte von Wegen aus $\mathcal{W} + \mathcal{V}$ bezeichnet). Ist $\mathcal{V}$ (oder $\mathcal{W}$) aber klein, so kann man sich ebenso leicht überlegen, daß dann auch $\mathcal{W} + \mathcal{V}$ klein sein muß.

Für festes $A, B \subseteq G_{V\Omega}$ gibt es in der Menge der $A \rightarrow B$ -Wellen in G eine natürliche **Ordnung**: Sind $(\mathcal{W}, X)$ und $(\mathcal{W}', X')$ $A \rightarrow B$ -Wellen in G , so ist $\mathcal{W} \leq \mathcal{W}'$ genau dann, wenn jeder Weg aus $\mathcal{W}$ Anfangstück eines Wegs aus $\mathcal{W}'$ ist. $\mathcal{W}'$ ist dann **länger** als $\mathcal{W}$.

Wenn $\mathcal{V}$ die Welle $\mathcal{W}$ verlängert, gilt $\mathcal{W} \leq \mathcal{W} + \mathcal{V}$ (mit Gleichheit genau dann, wenn $\mathcal{V}$ trivial ist).

Ist $S \subseteq V(G)$ eine $(A \cup B)_\Omega$ -endentreue Menge, $\mathcal{W}$ eine $A \rightarrow B$ -Welle in G , $\mathcal{W}'$ eine $A \rightarrow B$ -Welle in $G - S$ und gilt $V[\mathcal{W}] \cap S = \emptyset$, so sind die Wege aus $\mathcal{W}'$ auch Wege in G . Der Begriff der Ordnung soll folgendermaßen auch auf diese Situation ausgedehnt werden: Es ist $\mathcal{W} \leq \mathcal{W}'$ genau dann, wenn jeder Weg aus $\mathcal{W}$ Anfangstück eines Wegs aus $\mathcal{W}'$ ist, und $\mathcal{W}' \leq \mathcal{W}$ genau dann, wenn jeder Weg aus $\mathcal{W}'$ Anfangstück eines Wegs aus $\mathcal{W}$ ist. (Keine Sorge: Von einer solcherart aufsteigenden Folge von Wellen soll kein Limes gebildet werden. Es ist eher eine abkürzende Schreibweise.)

Schließlich soll für eine aufsteigende Kette von $A \rightarrow B$ -Wellen $(\mathcal{W}^i)_{i \in \mathbb{N}}$ in G und eine fest gewählte Aufzählung von A (nach Lemma 2.1 ist A abzählbar) der **Limes** $\mathcal{W}^*$ definiert werden. Dazu sei zunächst $\mathcal{W}$ die Familie von Wegen, die durch $E[\mathcal{W}] := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E[\mathcal{W}_i]$ und $\mathcal{W}^{triv} := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_i^{triv}$ definiert ist. Nun sollen an einige der Wege aus $\mathcal{W}$ noch Endpunkte angehängt werden. Gibt es eine nichtleere Menge von Wegen $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{W}$, die auf Strahlen aus einem Ende ω von G verlaufen, das auf keinem Weg aus $\mathcal{W}$ liegt, so soll einer der Wege aus $\mathcal{R}$ in $\mathcal{W}^*$ den Endpunkt ω haben, und zwar der Weg aus $\mathcal{R}$, dessen Anfangspunkt der erste in der vorher fest gewählten Aufzählung von A ist. So entsteht $\mathcal{W}^*$ aus $\mathcal{W}$. $\mathcal{W}^*$ ist eine Familie disjunkter Wege, denn sonst wäre bereits $\mathcal{W}_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$ keine solche gewesen. (D.h., es ist insbesondere auch kein “Weg” entstanden, der durch ein Ende durchläuft.) Jeder Punkt aus A ist Startpunkt eines Wegs aus $\mathcal{W}^*$. Außerdem gibt es für alle $i \in \mathbb{N}$ zu jedem Weg aus $\mathcal{W}^i$ genau einen Weg aus $\mathcal{W}^*$, der ihn als Teilweg enthält.

Lemma 3.3. *Der so definierte Limes $\mathcal{W}^*$ ist eine $A \rightarrow B$ -Welle in G .*

Beweis: Es bleibt nur zu zeigen, daß Z^* , die Menge der Endpunkte von $\mathcal{W}^*$, A und B trennt. Sei (a, P, b) ein A - B -Weg in G . Für alle $i \in \mathbb{N}$ trifft P Z^i , die Menge der Endpunkte von $\mathcal{W}^i$.

Gibt es einen Punkt x aus $V(P) \cup a \cup b$, der für unendlich viele $i \in \mathbb{N}$ in Z^i liegt, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß x sogar in allen Z^i mit $i > n$ liegt (denn liegt x in Z^i , aber nicht in Z^{i+1} , so liegt x wegen der Disjunktheit der Wege aus $\mathcal{W}$ in keinem Z^j mit $j > i$), und damit gilt $x \in Z^*$.

Gibt es keinen solchen Punkt, so liegt jeder einzelne Punkt aus $V(P) \cup a \cup b$ nur für endlich viele $i \in \mathbb{N}$ in Z^i , dagegen gilt $(V(P) \cup a \cup b) \cap Z^i \neq \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Also gilt auch $V(P) \cap Z^i \neq \emptyset$ für unendlich viele i . Es existieren also ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $z \in V(P) \cap Z^n$, so daß z für $i \geq n$ nicht in Z^i liegt. Sei W der Weg aus $\mathcal{W}^n$, der in z endet und w der letzte Punkt auf zP , der auch auf W liegt. (w existiert, weil zP in B endet und W in A startet. Außerdem ist w eine Ecke.) Für alle $i \geq n$ liegt kein Punkt aus Z^i auf Ww . Der A - B -Weg WwP muß aber Z^i treffen, d.h., $\hat{w}P$ muß Z^i treffen (für alle $i \geq n$).

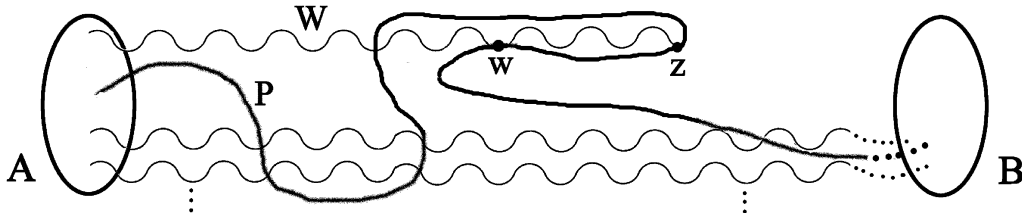


Abb. 3.5 $\hat{w}P$ trifft $\mathcal{W}^*$ unendlich oft.

Jeder einzelne Punkt auf $\hat{w}P$ liegt nur für endlich viele i in Z^i , also ist $b \in B_\Omega$ und unendlich viele Ecken aus $V(\hat{w}P)$ liegen in $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} Z^i$. Wegen $V(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} Z^i) \subseteq V[\mathcal{W}^*]$ und der Tatsache, daß nur endlich viele Ecken aus $V(\hat{w}P)$ außerhalb von G_b liegen, haben also $V[\mathcal{W}^*]$ und $V(P) \cap V(G_b)$ unendlich viele Ecken gemeinsam. Da höchstens $|S_b|$ Wege

aus $\mathcal{W}^*$ durch G_b laufen können, gibt es einen Weg aus $\mathcal{W}^*$, der durch unendlich viele Ecken von $V(P) \cap V(G_b)$ läuft. Dieser Weg kann nur in b enden, also liegt b in Z^* . $\square$

Der Limes einer Folge voller Wellen muß allerdings nicht voll sein. Beispiele hierzu sieht man in Abb. 3.5. Auf der rechten Seite soll die Menge der Endpunkte der Welle $\mathcal{W}^i$ jeweils $\{a, x_i\}$ sein.

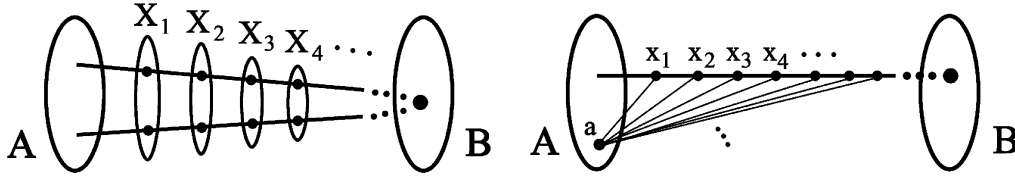


Abb. 3.6 Kleine Limeswellen.

Lemma 3.3 hat eine wichtige Konsequenz: Da zu festem $A, B \subseteq G_{V\Omega}$ jede echt aufsteigende Folge von $A \rightarrow B$ -Wellen abzählbar ist, findet man mit dem Zorn'schen Lemma eine maximale Welle in G . Und mit einer maximalen Welle stehen die Chancen auf ein disjunktes Wegesystem inklusive Trenner gut: Befinden sich alle Endpunkte der Welle bereits in B , ist nichts mehr zu zeigen, befinden sich einige nicht in B , so muß zwischen ihnen und B eine breite Auswahl an Wegen liegen, die eine Verlängerung der maximalen Welle verhindert.

4. Die Erdős–Menger'sche Vermutung bei endlichen maximalen disjunkten Wegesystemen

Ist G ein abzählbarer Graph mit $A, B \subseteq G_{V\Omega}$ und der Eigenschaft, daß $A \cup B$ diskret ist, und gibt es ein maximales disjunktes A – B -Wegesystem in G , das aus nur endlich vielen Wegen besteht, so kann man Satz 1 mit dem folgenden Lemma beweisen.

Lemma 4.1. *Seien $A, B \subseteq G_{V\Omega}$, $A \cup B$ diskret und $\mathcal{P}$ ein disjunktes A – B -Wegesystem. Dann gibt es entweder einen A – B -Trenner $T \subseteq V[\mathcal{P}] \cup A_{\mathcal{P}} \cup B_{\mathcal{P}}$, der genau einen Punkt aus jedem Weg aus $\mathcal{P}$ enthält, oder ein disjunktes A – B -Wegesystem $\mathcal{Q}$ mit $A_{\mathcal{P}} \subsetneq A_{\mathcal{Q}}$ und $B_{\mathcal{P}} \subsetneq B_{\mathcal{Q}}$.*

Der Beweis lehnt sich stark an einen bekannten Beweis des Satzes von Menger für endliche Graphen an, den man z.B. in [2] nachlesen kann. Er wurde hier nur ein wenig ausgedehnt, so daß G abzählbar ist und auch Enden in A und B vorkommen dürfen. Dazu mußten ferner der Begriff des alternierenden Kantenzugs und ein kleines Lemma über alternierende Kantenzüge erweitert werden.

Ein **alternierender Kantenzug** K bzgl. eines A – B -Wegesystems $\mathcal{P}$ ist eine endliche Verkettung nichttrivialer Wege $(x_0, P_1, x_1), (x_1, P_2, x_2), \dots, (x_{k-1}, P_k, x_k)$, der Form $K = x_0 P_1 x_1 P_2 x_2 \dots x_{k-1} P_k x_k$ (dabei ist $k \in \mathbb{N}_+$) mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) P_1 trifft $\mathcal{P}$ nur in x_1 .
- (ii) Für ungerade $i < k, i > 1$ trifft P_i das Wegesystem $\mathcal{P}$ nur in x_{i-1} und x_i .
- (iii) Ist $k > 1$ ungerade, so trifft P_k das Wegesystem $\mathcal{P}$ entweder nur in x_{k-1} oder nur in x_{k-1} und x_k .
- (iv) Für ungerade $i \leq k$ ist P_i Teilweg von $\overleftarrow{\mathcal{P}}$ für einen Weg $P \in \mathcal{P}$.

(v) Für $i, j \leq k, i \neq j$ gilt $V(P_i) \cap V(P_j) \subseteq \{x_{i-1}, x_i\} \cap \{x_{j-1}, x_j\}$.

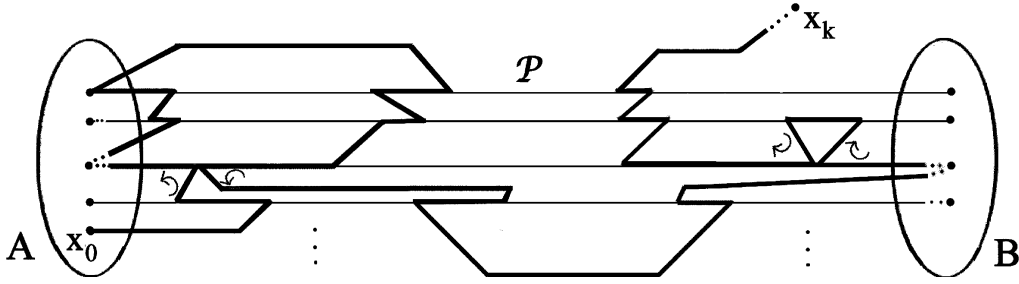


Abb. 4.1 Ein bzgl. $\mathcal{P}$ alternierender Kantenzug, der in $A \setminus A_{\mathcal{P}}$ startet.

Die Kantenmenge von K ist $E(K) = \bigcup_{i=1}^k E(P_i)$, die Eckenmenge ist $V(K) = \bigcup_{i=1}^k V(P_i)$. Zu jedem Punkt $x \in V(K) \cup \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ gibt es ein $j \in \mathbb{N}$, so daß $x \in (V(P_j) \cup x_{j-1} \cup x_j)$ gilt. Dann ist $Kx := x_0 P_1 x_1 P_2 x_2 \dots x_{j-1} P_j x$ ein Anfangsstück von K und ebenfalls ein alternierender Kantenzug bzgl. $\mathcal{P}$. Kann man den Kantenzug $K = x_0 P_1 x_1 P_2 x_2 \dots x_{k-1} P_k x_k$ durch Anhängen eines passenden Weges (x_k, P, x) zu einem Kantenzug $x_0 P_1 x_1 P_2 x_2 \dots x_{k-1} P_k x_k P x$ erweitern, so bezeichnet man den erweiterten Kantenzug kurz mit $Kx_k P$. (Passend ist P dann, wenn $Kx_k P$ die Eigenschaften (i)-(v) erfüllt.) Nun wird man sehen, wie ein Kantenzug dazu beitragen kann, das Wegesystem $\mathcal{P}$ zu vergrößern.

Lemma 4.2. Seien $A, B \subseteq G_{V\Omega}$, $A \cup B$ diskret, $\mathcal{P}$ ein disjunktes A - B -Wegesystem in G und K ein bzgl. $\mathcal{P}$ alternierender Kantenzug, der in $A' := A \setminus A_{\mathcal{P}}$ startet und in $B' := B \setminus B_{\mathcal{P}}$ endet. Dann gibt es ein A - B -Wegesystem $\mathcal{Q}$ in G , für das $A_{\mathcal{P}} \subsetneq A_{\mathcal{Q}}$ und $B_{\mathcal{P}} \subsetneq B_{\mathcal{Q}}$ gilt.

Beweis: Der Untergraph H von G sei definiert durch $V(H) = V[\mathcal{P}] \cup V(K)$ und $E(H) = E[\mathcal{P}] + E(K)$, die symmetrische Differenz von $E[\mathcal{P}]$ und $E(K)$. Sei $a \in A'$ der Anfangspunkt von K , $b \in B'$ der Endpunkt. Die Ecken aus $V(H) \setminus (A \cup B)$ haben in H den Grad 2, die Ecken aus $(A \cup B)_V \setminus (A \cap B)$ haben in H den Grad 1, die aus $(A \cap B)_V$ den Grad 0. Außerdem existiert für jeden Punkt x aus $(A_{\mathcal{P}} \cup B_{\mathcal{P}} \cup a \cup b) \setminus (A \cap B)$ genau eine Komponente von H , die einen Strahl aus x bzw. einen in x startenden Weg enthält, und diese Komponente ist ein Weg. Sei nun $\mathcal{Q}$ das Wegesystem in G , das aus allen trivialen Wegen aus $\mathcal{P}$ und den durch $V(H)$ in G induzierten Wegen besteht.

$\mathcal{Q}$ ist eine Familie disjunkter $(A \cup B)$ - $(A \cup B)$ -Wege in G . Ist $\mathcal{Q}$ sogar ein A - B -Wegesystem? Ein Weg aus $\mathcal{Q}$ beinhaltet nur Teilwege von Wegen aus $\mathcal{P}$, die in der "richtigen" Richtung durchlaufen werden, und endlich viele Wegstücke, die in K lagen. Diese Wegstücke beginnen alle in A oder auf $\mathcal{P}$ und enden in B oder auf $\mathcal{P}$. Daher ist $\mathcal{Q}$ tatsächlich ein A - B -Wegesystem. Da K in A' startet und in B' endet und in allen Punkten aus $A_{\mathcal{P}}$ und $B_{\mathcal{P}}$ Wege aus $\mathcal{Q}$ starten bzw. enden, gilt außerdem $A_{\mathcal{P}} \subsetneq A_{\mathcal{Q}}$ und $B_{\mathcal{P}} \subsetneq B_{\mathcal{Q}}$. $\square$

Um Lemma 4.1 zu beweisen, muß also nur noch ein entsprechender Kantenzug gefunden werden. Dies geschieht, indem auf jedem Weg des Wegesystems der letzte Punkt bestimmt wird, zu dem irgendein in $A \setminus A_{\mathcal{P}}$ startender Kantenzug führt. Ist die Menge dieser Punkte kein Trenner, so kann man aus einem A - B -Weg, der diese Punkte vermeidet, einen Kantenzug der gesuchten Art basteln.

Beweis von Lemma 4.1: Sei $A' := A \setminus A_{\mathcal{P}}$. Für einen Weg P aus $\mathcal{P}$ bezeichne x_P entweder den letzten Punkt auf P , zu dem ein in A' startender, bzgl. $\mathcal{P}$ alternierender Kantenzug führt, oder den Endpunkt von P , falls es auf P Punkte gibt, in denen ein solcher Kantenzug endet, aber keinen letzten, oder den Anfangspunkt von P , falls P von keinem solchen Kantenzug getroffen wird. Da immer genau einer der drei Fälle eintreten

muß, ist x_P für alle Wege wohldefiniert. Ist die Menge $X = \{x_P : P \in \mathcal{P}\}$ ein A - B -Trenner, ist nichts mehr zu zeigen, nehme man also an, daß dem nicht so ist. Es gibt dann einen A - B -Weg Q , der X nicht trifft.

Nun hat man entweder mit $\mathcal{P} \cup \{Q\}$ das gewünschte disjunkte Wegesystem und ist fertig, oder (wie man nun annehmen möchte) Q trifft $\mathcal{P}$. Würde es sich bei Q um einen trivialen Weg aus $\mathcal{P}$ handeln, träfe Q auch X , also ist Q nicht trivial. Q hat nur dann keine erste Ecke auf einem bestimmtem Weg aus $\mathcal{P}$, wenn Q in $A_{\mathcal{P}}$ startet, und wegen der Diskretheit von $A \cup B$ ist es nicht möglich, daß Q unendlich viele verschiedene Wege aus $\mathcal{P}$ trifft. Daher gibt einen ersten Punkt x von Q auf $\mathcal{P}$. x liegt auf $\mathcal{P}X := \{Px_P : P \in \mathcal{P}\}$, denn entweder startet Q in A' , dann ist Qx ein alternierender Kantenzug und x liegt nach Definition von X auf $\mathcal{P}X$, oder Q startet in $A_{\mathcal{P}}$, dann liegt x in $A_{\mathcal{P}}$.

Q trifft also $\mathcal{P}X$. Q hat sogar einen letzten Punkt y auf $\mathcal{P}X$, denn unendlich viele Wege aus $\mathcal{P}X$ kann Q wieder wegen der Diskretheit von $A \cup B$ nicht treffen und wenn es auf einen bestimmten Weg aus $\mathcal{P}X$ keine letzte Ecke von Q gibt, endet Q im Widerspruch zur Annahme in $X \cap B$.

Sei nun $P \in \mathcal{P}$ der Weg, auf dem y liegt. Es gibt einen in A' startenden, bezüglich $\mathcal{P}$ alternierenden Kantenzug K , der in x_P endet. Man möchte nun K zu einem alternierenden Kantenzug verlängern, der in y endet und dessen letztes Wegstück vor y auf $\overleftarrow{P}$ liegt. Dann kann man nämlich hoffen, daß dieser neue Kantenzug zusammen mit yQ ein alternierender Kantenzug ist, der mit Hilfe von Lemma 4.2 das gesuchte Wegesystem $\mathcal{Q}$ liefert. Mit $y \notin X$ gilt $y \neq x_P$, es gibt also immerhin einen nichttrivialen Teilweg von $\overleftarrow{P}$, der x_P und y verbindet. $Kx_P\overleftarrow{P}y$ muß aber noch kein alternierender Kantenzug bzgl. $\mathcal{P}$ sein, da zwischen y und x_P durchaus noch andere Punkte auf P liegen können, die auch auf K liegen. Entweder gibt es eine erste Ecke auf yP , die auch auf K liegt, oder es liegen unendlich viele Ecken aus jedem Anfangsstück von yP auf K . Im letzteren Fall ist $y \in A_{\Omega}$ und es gibt auch ein Anfangsstück von K , das in y endet. (Denn K besteht aus nur endlich vielen Wegen, einer von diesen muß daher $\overleftarrow{yP}$ unendlich oft treffen und in y enden.) Dann ist y der erste Punkt auf yP , der auch auf K liegt. Es existiert also in jedem Fall ein erster Punkt w auf yP , der auch auf K liegt. $K' := Kw\overleftarrow{P}y$ ist dann ein bzgl. $\mathcal{P}$ alternierender Kantenzug, der in A' startet und dessen letztes Wegstück auf $\overleftarrow{P}$ liegt.

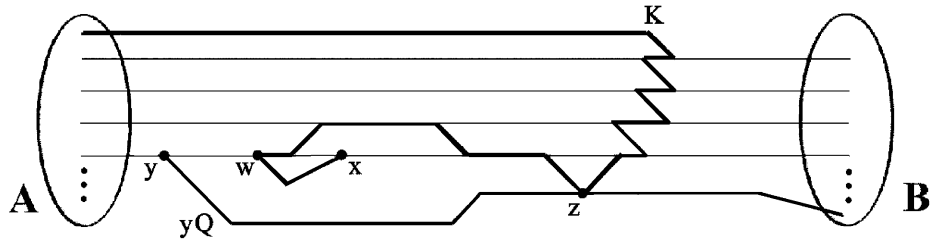


Abb. 4.2 Aus K und Q soll ein neuer alternierender Kantenzug entstehen.

Möglicherweise gibt es neben y noch mehr Punkte, die auf yQ und auf K' liegen, daher ist $K'yQ$ immernoch nicht der gesuchte Kantenzug. Gibt es keine letzte Ecke auf yQ , die auch auf K' liegt, so muß ein Anfangsstück von K' existieren, das im selben Punkt wie Q endet. (K' besteht aus endlich vielen Wegen.) Es gibt daher einen letzten Punkt z auf yQ , der auch auf K' liegt.

z kann nur dann auf $\mathcal{P}$ liegen, wenn $z = y$ gilt, da yQ nach Wahl von y $\mathcal{P}X$ umgeht und K' keinen Weg $P \in \mathcal{P}$ nach x_P treffen kann. Darum ist z ein passender Punkt zum Anhängen von Q und mit $K'zQ$ endlich der gesuchte alternierende Kantenzug gefunden. Weil Q die Menge X vermeidet, kann auch $K'zQ$ nicht in $X \cap B$ enden. Der alternierende, in A' startende Kantenzug $K'zQ$ kann also nach Definition von X nicht in $B_{\mathcal{P}}$ enden.

Daher endet $K'zQ$ in B' . Das bedeutet, $K'zQ$ ist ein Kantenzug, der mit Lemma 4.2 das gewünschte Wegesystem liefert. $\square$

Betrachte man nun einen Graphen G mit $A, B \subseteq G_{V\Omega}$ (und $A \cup B$ diskret). In dem Fall, daß ein maximales disjunktes A - B -Wegesystem in G aus nur endlich vielen Wegen besteht, also kein echt größeres A - B -Wegesystem existiert, gibt es nach Lemma 4.1 den gesuchten A - B -Trenner; Satz 1 ist für diesen Spezialfall damit bewiesen.

5. Graphen, in denen keine kleinen Wellen existieren

Sei G ein Graph, in dem es keine kleinen, also nur volle $A \rightarrow B$ -Wellen gibt. Was passiert mit G , wenn man eine Ecke $v \in V(G) \setminus (A \cup B)$ herausnimmt? Gibt es weiterhin nur volle $A \rightarrow B$ -Wellen? Oder wenn man irgendeinen Punkt b aus B herausnimmt, und in G (bzw. in $G - b$) die Menge der $A \rightarrow (B - b)$ -Wellen betrachtet? Sind diese Wellen alle voll?

Es könnte sein, daß auch in $G - v$ nur volle $A \rightarrow B$ -Wellen existieren, bzw. in G (oder in $G - b$) nur volle $A \rightarrow (B - b)$ -Wellen. Ist das aber nicht der Fall, gibt es also eine entsprechende kleine Welle, so wird man kaum erwarten können, auf den Wegen dieser kleinen Welle einen A - B -Trenner in G zu finden. Daher sollte man mit Lemma 4.1 in der Lage sein, einen Punkt aus A , in dem ein unnützer Weg aus der kleinen Welle startet, mit v bzw. b zu verbinden. Auf diese Weise erhält man dann in G eine volle $A \rightarrow B$ -Welle, die v bzw. b zu ihren Endpunkten zählt.

Vereinbarung: Ist ω ein Ende von G , so soll $G - \omega$ ganz einfach den Graphen G bezeichnen.

Lemma 5.1. *Seien $A, B \subseteq G_{V\Omega}$, $A \cup B$ diskret, $v \in G_{V\Omega} \setminus A$. Gibt es in G nur volle $A \rightarrow B$ -Wellen, in $G - v$ jedoch eine kleine $A \rightarrow (B - v)$ -Welle, so existiert in G eine $A \rightarrow B$ -Welle, die v als einen ihrer Endpunkte enthält.*

Beweis: Sei $(\mathcal{V}, X)$ die kleine $A \rightarrow (B - v)$ -Welle in $G - v$ und sei $\mathcal{V}' \subsetneq \mathcal{V}$ die Menge der Wege aus $\mathcal{V}$, die in X enden. Mit $X' := X \cup v$ ist $\mathcal{V}'$ in G eine Familie disjunkter A - X' -Wege. Gäbe es einen A - X' -Trenner $T \subseteq V[\mathcal{V}'] \cup A_{\mathcal{V}'} \cup B_{\mathcal{V}'}$ in G , der aus jedem Weg $V \in \mathcal{V}'$ genau einen Punkt t_V enthält, so wäre $(\mathcal{V}'', T)$ mit $\mathcal{V}'' := \{Vt_V : V \in \mathcal{V}'\} \cup \{(a) : a \in A \setminus A_{\mathcal{V}'}\}$ nicht nur eine kleine $A \rightarrow X'$ -Welle in G , sondern (weil jeder A - B -Weg in G einen A - X' -Weg enthält und damit T trifft) auch eine kleine $A \rightarrow B$ -Welle in G , was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Es gibt also keinen solchen Trenner T und daher nach Lemma 4.1 ein disjunktes A - X' -Wegesystem $\mathcal{W}$, so daß $X'_{\mathcal{V}'} \subsetneq X'_{\mathcal{W}}$ gilt. v ist also Endpunkt eines Weges aus $\mathcal{W}$. Da X' ein A - B -Trenner in G ist, ist dann $(\mathcal{W}, X')$ die gesuchte $A \rightarrow B$ -Welle in G . $\square$

Man stelle sich nun vor, v ist irgendein Punkt, so daß eine in G volle und nur voll verlängerbare $A \rightarrow B$ -Welle $\mathcal{W}$ in $G - v$ eine kleine oder klein verlängerbare $A \rightarrow (B - v)$ -Welle ist. (Dabei ist eine $A \rightarrow B$ -Welle $(\mathcal{W}, X)$ nur voll verlängerbar, wenn in $G_{X \rightarrow B}$ nur volle $(X \setminus B_\Omega) \rightarrow (B \setminus X_\Omega)$ -Wellen existieren.) Kann man in dieser Situation eine Verlängerung von $\mathcal{W}$ finden, die v als Endpunkt beinhaltet? Oder noch einfacher eine längere Welle als $\mathcal{W}$, die v in ihren Endpunkten trifft?

Auf den ersten Blick scheint diese Frage nicht viel komplizierter als die eben bewiesene Behauptung von Lemma 5.1 zu sein. Zu ihrer Beantwortung wird man aber ein wenig mit kleinen Verlängerungen herumjonglieren müssen und dazu wird die Hilfe von Lemma 5.2 benötigt.

Lemma 5.2. Seien $A, B \subseteq G_{V\Omega}$, $A \cup B$ diskret, $(\mathcal{W}, X)$ eine volle und nur voll verlängerbare $A \rightarrow B$ -Welle in G und $v \in G_{V\Omega} \setminus V[\mathcal{W}]$. Ist $\mathcal{W}$ in $G - v$ eine kleine oder klein verlängerbare $A \rightarrow (B - v)$ -Welle, so existiert in $G_{X \rightarrow B} - v$ eine kleine $(X \setminus B_\Omega) \rightarrow (B \setminus X_\Omega - v)$ -Welle.

Beweis: Wenn $\mathcal{W}$ in $G - v$ eine kleine $A \rightarrow (B - v)$ -Welle ist, muß es ein $x \in X$ geben, das zum Trennen von A und B in $G - v$ überflüssig ist, es müssen also alle X - B -Wege in G , die in x starten, v treffen. Es gilt daher $x \notin B$ und damit $x \in (G_{X \rightarrow B})_{V\Omega}$, außerdem müssen auch in $G_{X \rightarrow B}$ alle in x startenden $(X \setminus B_\Omega) - (B \setminus X_\Omega)$ -Wege v treffen. Deshalb ist in $G_{X \rightarrow B} - v$ die triviale $(X \setminus B_\Omega) \rightarrow (B \setminus X_\Omega)$ -Welle klein.

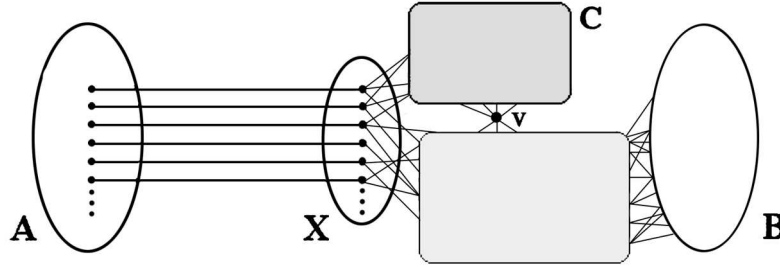


Abb. 5.1 Der Unterschied zwischen $G_{X \rightarrow B} - v$ und $(G - v)_{X \rightarrow (B - v)}$: einmal ist C dabei, einmal nicht.

Ist aber $\mathcal{W}$ in $G - v$ eine volle $A \rightarrow (B - v)$ -Welle, so ist $(G - v)_{X \rightarrow (B - v)}$ definiert. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{W}$ in $G - v$ klein verlängerbar, d.h. in $(G - v)_{X \rightarrow (B - v)}$ existiert eine kleine $(X \setminus B_\Omega) \rightarrow (B \setminus X_\Omega - v)$ -Welle $\mathcal{V}$. Da alle $(X \setminus B_\Omega) - (B \setminus X_\Omega)$ -Wege in $G_{X \rightarrow B}$, die $C := (G_{X \rightarrow (B - v)} - v) - (G - v)_{X \rightarrow (B - v)}$ treffen, auch v treffen müssen, ist $\mathcal{V}$ auch eine kleine $(X \setminus B_\Omega) \rightarrow (B \setminus X_\Omega - v)$ -Welle in $G_{X \rightarrow B} - v$. $\square$

Nun zurück zu der oben gestellten Frage, ob man Lemma 5.1 erweitern kann, indem man eine bereits im Graphen existierende Welle ins Spiel bringt, die dann entsprechend verlängert werden soll. Das ist nun so gut wie trivial.

Lemma 5.3. Seien $A, B \subseteq G_{V\Omega}$, $A \cup B$ diskret, $(\mathcal{W}, X)$ eine volle und nur voll verlängerbare $A \rightarrow B$ -Welle in G und $v \in G_{V\Omega} \setminus V[\mathcal{W}]$, so daß $\mathcal{W}$ in $G - v$ eine kleine oder klein verlängerbare $A \rightarrow (B - v)$ -Welle ist. Dann gibt es in G eine volle $A \rightarrow B$ -Welle $(\mathcal{V}, Y)$ mit $v \in Y$ und $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$.

Beweis: Nach Lemma 5.2 gibt es in $G_{X \rightarrow B} - v$ eine kleine $(X \setminus B_\Omega) \rightarrow (B \setminus X_\Omega - v)$ -Welle. In $G_{X \rightarrow B}$ dagegen gibt es nach Voraussetzung nur volle $(X \setminus B_\Omega) \rightarrow (B \setminus X_\Omega)$ -Wellen. Mit Lemma 5.1 folgt also, daß in $G_{X \rightarrow B}$ eine (volle) $(X \setminus B_\Omega) \rightarrow (B \setminus X_\Omega)$ -Welle $(\mathcal{W}', X')$ mit $v \in X'$ existiert. Gäbe es eine kleine Verlängerung $\mathcal{W}''$ von $\mathcal{W}'$, so wäre $\mathcal{W}' + \mathcal{W}''$ eine kleine $(X \setminus B_\Omega) \rightarrow (B \setminus X_\Omega)$ -Welle in $G_{X \rightarrow B}$. Dort gibt es aber keine kleinen Wellen. $\mathcal{V} := \mathcal{W} + \mathcal{W}'$ ist also eine volle und nur voll verlängerbare $A \rightarrow B$ -Welle in G , für die $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$ gilt. $\square$

Aus dem, was bis zu diesem Zeitpunkt bekannt ist, kann man auf die folgende Beweisidee kommen: Nehme man für den Moment an, daß $B \subseteq \Omega(G)$ gilt und daß es in G nur volle $A \rightarrow B$ -Wellen gibt. (Später wird man sehen, daß der allgemeine Fall sehr leicht auf diesen zu reduzieren ist.)

Für ein beliebiges Ende $\beta \in B$ existiert in G entweder eine kleine $A \rightarrow (B - \beta)$ -Welle oder nicht. Existiert eine, so gibt es nach Lemma 5.1 auch eine volle $A \rightarrow B$ -Welle in G , die β in ihren Endpunkten trifft. Nun ist B diskret und deshalb nach Lemma 2.1 abzählbar, sei also $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots\}$. Nach den gerade gemachten Feststellungen gibt es in G nur volle $A \rightarrow (B - \beta_1)$ -Wellen, oder es existiert eine volle und nur voll verlängerbare

$A \rightarrow B$ -Welle in G , die β_1 als Endpunkt enthält. Bezeichnet B_1 im ersten Fall die Menge $B - \beta_1$ und im zweiten B , so kann man zusammenfassend sagen, daß in G eine volle und nur voll verlängerbare $A \rightarrow B_1$ -Welle existiert (dabei handelt es sich im ersten Fall um die triviale).

Auf die gleiche Weise findet man mit Hilfe von Lemma 5.3 auch eine volle und nur voll verlängerbare $A \rightarrow B_2$ -Welle in G , die länger als die erste Welle ist, wobei B_2 entweder B_1 oder $B_1 - \beta_2$ ist. Führt man so mit allen $\beta \in B$ fort, hat man nach abzählbar vielen Schritten jedes Ende aus B entweder mit A verbunden oder aus B herausgenommen. Es wurde nur mit vollen Wellen gearbeitet – müßte nun nicht auch ganz A mit B verbunden sein?

Leider könnten sehr wohl Punkte aus A am Ende dieser Konstruktion nicht mit B verbunden sein. Dies kann einem Punkt aus A aber nur passieren, wenn er in unendlich vielen Schritten die Gelegenheit hatte, mit dem entsprechenden $\beta \in B$ verbunden zu werden, dieses β aber jedesmal stattdessen aus B gelöscht wurde (Abb. 5.2).

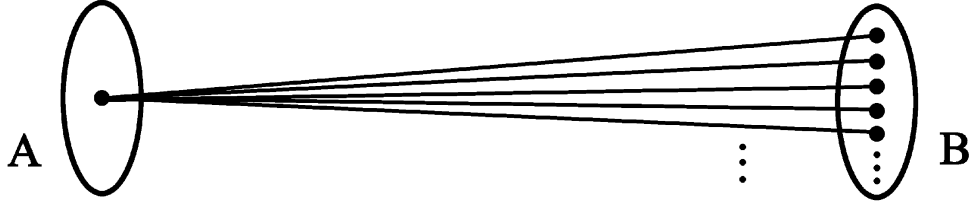


Abb. 5.2 In jedem Schritt gibt es nur volle $A \rightarrow B_i$ -Wellen.

Man wird sich also doch auf größere Umwege begeben müssen, um die Erdős'sche Vermutung für abzählbare Graphen mit Enden zu beweisen.

6. Fast disjunkte Wegesysteme

Im Folgenden wird man es mit Familien von Wegen zu tun haben, die außer in einer Menge $M \subseteq V(G)$ disjunkt sind, das soll bedeuten, daß Wege aus dieser Familie außer in M keine gemeinsamen Punkte haben dürfen. Solche Wegesysteme sind zwar nicht ganz so schön wie disjunkte Wegesysteme, aber in Situationen, wo man nicht erwarten kann, eine Familie disjunkter Wege einer gewissen Größe zu finden, immer noch besser als gar kein Wegesystem. Je mehr man nun über die Menge M weiß, desto mehr Nutzen wird man aus den außer in M disjunkten Wegen ziehen können.

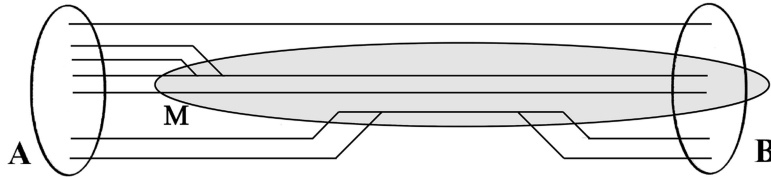


Abb. 6.1 Ein außer in M disjunktes A - B -Wegesystem, bestehend aus 7 Wegen.

Lemma 6.1. Seien $D \subseteq G_{V\Omega}$ diskret, $\omega \in D_\Omega$ und $k \in \mathbb{N}$. Es existiert dann eine endliche Eckenmenge $S_\omega^k \subseteq V(G_\omega)$ mit $S_\omega \subseteq S_\omega^k$, so daß zu jedem S_ω - S_ω -Weg (s_1, P, s_2)

in G_ω , der $G_\omega - S_\omega^k$ trifft, ein außer in $V(P)$ disjunktes s_1 - s_2 -Wegesystem $\mathcal{P}$ der Größe k mit $V[\mathcal{P}] \subseteq S_\omega^k$ existiert.

Beweis: Für gegebenes ω soll das Lemma durch Induktion nach k bewiesen werden. Der Anfang wird mit $S_\omega^0 := S_\omega$ gemacht.

Im Induktionsschritt soll nun S_ω^{k+1} aus S_ω^k konstruiert werden, indem für jedes Eckenpaar $(s, s') \in V(S_\omega^k) \times V(S_\omega^k)$ die Ecken eines s - s' -Wegs in G_ω , der S_ω^k nur in $\{s, s'\}$ trifft, in S_ω^{k+1} hereingenommen werden, falls so ein Weg überhaupt existiert. Es sei also S die Menge aller Eckenpaare $(s, s') \in V(S_\omega^k) \times V(S_\omega^k)$, für die ein s - s' -Weg $P^{(s, s')}$ in G_ω existiert, der S_ω^k nur in $\{s, s'\}$ trifft. Nun setze man $S_\omega^{k+1} := S_\omega^k \cup \bigcup_{(s, s') \in S} V(P^{(s, s')})$. Mit S_ω^k ist auch S_ω^{k+1} endlich.

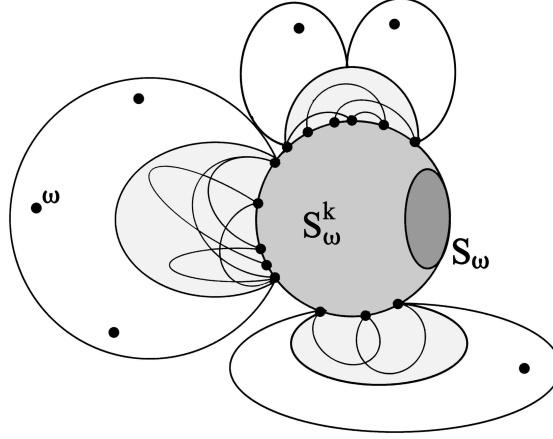


Abb. 6.2 So entsteht S_ω^{k+1} aus S_ω^k .

Sei nun (s_1, P, s_2) ein beliebiger S_ω - S_ω -Weg in G_ω , der $G_\omega - S_\omega^{k+1}$ trifft. P trifft dann auch Komponenten von $G_\omega - S_\omega^k$. Nun soll gezeigt werden, daß das gesuchte Wegesystem auf Ecken aus S_ω^{k+1} existiert.

Ist C_1 die erste Komponente von $G_\omega - S_\omega^k$, die von P getroffen wird, so gibt es eine letzte Ecke $v_1 \in S_\omega^k$ von P vor C_1 und eine erste $v'_1 \in S_\omega^k$ nach C_1 . Weil C_1 zusammenhängend ist, existiert ein v_1 - v'_1 -Weg, der mit Ausnahme von v_1 und v'_1 ganz in C_1 liegt, und damit auch (nach Wahl von S_ω^{k+1}) ein v_1 - v'_1 -Weg P_1 , der mit Ausnahme von v_1 und v'_1 ganz auf Ecken aus $(S_\omega^{k+1} \cap V(C_1)) \setminus S_\omega^k$ liegt. Trifft dann $v'_1 P$ weitere Komponenten von $G_\omega - S_\omega^k$, so sei C_2 die erste dieser Komponenten, v_2 die letzte Ecke von $v'_1 P$ in S_ω^k vor C_2 , v'_2 die erste danach. Es findet sich wie eben ein v_2 - v'_2 -Weg P_2 , der mit Ausnahme von v_2 und v'_2 ganz auf Ecken aus $(S_\omega^{k+1} \cap V(C_2)) \setminus S_\omega^k$ liegt und P_1 höchstens in v_2 trifft. Sollte P nun noch eine weitere Komponente von $G_\omega - S_\omega^k$ treffen, sucht man nach dem gleichen Muster v_3, v'_3 und $P_3 \dots$

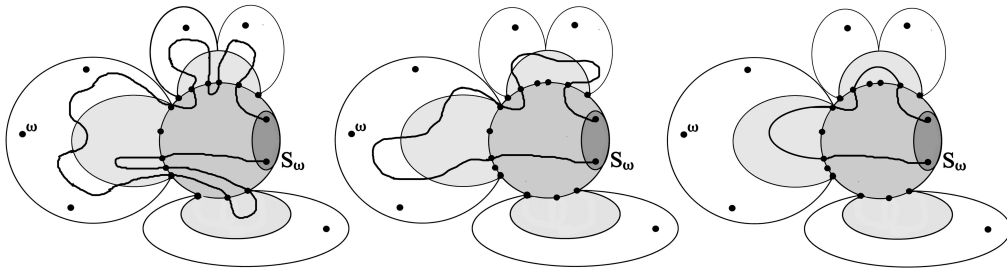


Abb. 6.3 Aus P entsteht P' .

P ist endlich, daher gibt es eine natürliche Zahl n , so daß $C_1, C_2, \dots, C_n$ Komponenten von $G_\omega - S_\omega^k$, $v_1, v'_1, v_2, v'_2, \dots, v_n, v'_n$ Ecken aus S_ω^k und $P_1, P_2, \dots, P_n$ die entsprechenden Wege sind, und außerdem $P' := Pv_1P_1v'_1Pv_2P_2v'_2 \dots v_nP_nv'_nP$ ein s_1 - s_2 -Weg mit $V(P') \setminus V(P) \subseteq S_\omega^{k+1} \setminus S_\omega^k$ ist.

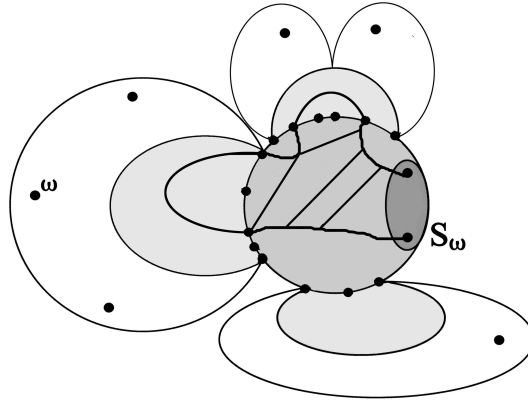


Abb. 6.4 P' und das Wegesystem $\mathcal{P}$.

Nach der Induktionsannahme existiert ein s_1 - s_2 -Wegesystem $\mathcal{P}$ der Größe k mit $V[\mathcal{P}] \subseteq S_\omega^k$, dessen Wege außer in $V(P)$ disjunkt sind. Es gilt $V(P') \cap V[\mathcal{P}] \subseteq V(P)$. $\mathcal{P}' := \mathcal{P} \cup \{P'\}$ ist daher das zu dem Weg P gesuchte Wegesystem der Größe $k+1$. Damit ist das Lemma bewiesen. $\square$

Für jedes Ende ω aus einer diskreten Menge und $k = |S_\omega| + 1$ betrachte man nun die Eckenmenge S_ω^k aus Lemma 6.1 als fest gewählt. Sie soll mit S'_ω bezeichnet werden. G'_ω sei dann die Komponente von $G_\omega - S'_\omega$, in der Strahlen aus ω liegen.

Vorsicht: Es gilt $S_\omega \subseteq V(G_\omega)$, aber $S'_\omega \not\subseteq V(G'_\omega)$.

Gibt es in einem Graphen nur volle $A \rightarrow B$ -Wellen, und ist $a \in A$, so existieren auch in $G - a$ nur volle $(A - a) \rightarrow B$ -Wellen, denn eine kleine $(A - a) \rightarrow B$ -Welle in $G - a$ wäre, um den trivialen Weg (a) ergänzt, auch eine kleine $A \rightarrow B$ -Welle in G . Nur in dem Fall, daß a eine Ecke ist, wird aus G wirklich etwas herausgenommen.

Kann man auch eine Umgebung von einem Ende $\alpha \in A$ mit dem gleichen Ergebnis herausnehmen? Gibt es also eine endliche Eckenmenge S , die α von $A \cup B - \alpha$ trennt, so daß C die Komponente von $G - S$ ist, in der Strahlen aus α liegen, und es in $G - C$ nur volle $(A - \alpha) \rightarrow B$ -Wellen gibt? Es sollen in $G - V(C)$ keine kleinen Wellen existieren, S darf daher keinesfalls so gewählt werden, daß $V(C)$ einen Punkt aus $A - \alpha$ von B abschneidet. $V(C)$ darf auch keinen Endpunkt einer vollen $(A - \alpha) \rightarrow B$ -Welle in G von B abschneiden, oder überhaupt den $(A - \alpha) - B$ -Wegen in G allzusehr in die Quere kommen. Gute Chancen hätte man also mit einem relativ kleinen Untergraphen C von G , der eng um α herum liegt, und weitab vom Großteil der Wege zwischen $A - \alpha$ und B .

Vielleicht können hier S'_α und G'_α weiterhelfen, denn zu jedem $(A - \alpha) - B$ -Weg, der durch G'_α läuft, gibt es eine große Anzahl von sehr ähnlichen Wegen, die G'_α umgehen. Daher besteht Anlaß zur Hoffnung, daß auch in G ohne G'_α nur volle Wellen existieren. Nun wird man sehen, daß dieser Plan tatsächlich aufgeht.

Lemma 6.2. Seien $A, B \subseteq G_{V\Omega}$, so daß $A \cup B$ diskret ist, und sei $\alpha \in A_\Omega$. Gibt es in G nur volle $A \rightarrow B$ -Wellen, so existieren auch in $G - G'_\alpha$ nur volle $(A - \alpha) \rightarrow B$ -Wellen.

Beweis: Angenommen, in $G - G'_\alpha$ existiert eine kleine $(A - \alpha) \rightarrow B$ -Welle $(\mathcal{W}, X)$. In G gibt es nur volle $A \rightarrow B$ -Wellen, nach dem, was oben festgestellt wurde, ist klar, daß dann in G auch nur volle $(A - \alpha) \rightarrow B$ -Wellen existieren. $\mathcal{W}$ ist also in G keine

kleine $(A - \alpha) \rightarrow B$ -Welle. Es muß daher ein $(A - \alpha)$ - B -Weg Q in G existieren, der X vermeidet. Natürlich trifft Q G'_α . Sei v die erste Ecke auf Q in G'_α , v' die letzte. Sei weiter s die letzte Ecke auf Pv in S_α , s' die erste Ecke auf $v'P$ in S_α . (Es ist möglich, daß vQv' weitere Ecken aus S_α trifft.)

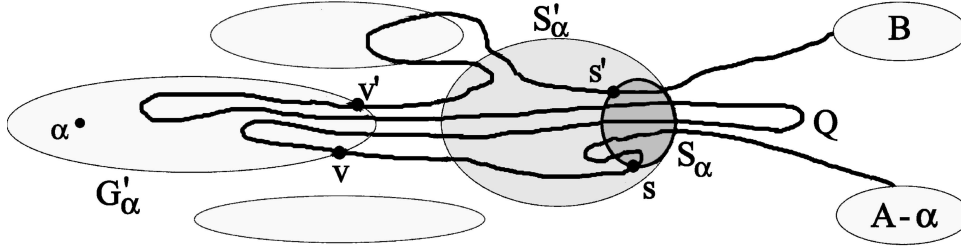


Abb. 6.5 Der $(A - \alpha)$ - B -Weg Q mit den Ecken v , v' , s und s' .

G'_α ist zusammenhängend, daher gibt es einen v - v' -Weg R mit $V(R) \subseteq V(G'_\alpha)$. Wie Q ist dann auch $Q' := QvRv'Q$ ein $(A - \alpha)$ - B -Weg, der X vermeidet. Und $sQ's'$ ist ein S_α - S'_α -Weg, der $G_\alpha - S'_\alpha$ trifft, d.h. nach Lemma 6.1 existiert ein s - s' -Wegesystem $\mathcal{P}$ der Größe $|S_\alpha| + 1$ mit $V[\mathcal{P}] \subseteq S'_\alpha$, dessen Wege außer in $V(sQ's')$ disjunkt sind. Wegen $|V(G_\alpha) \cap X_V| < |S_\alpha| + 1$ und $V(Q') \cap X_V = \emptyset$ gibt es also einen Weg P aus $\mathcal{P}$, der X nicht trifft. Damit ist $QsPs'Q$ ein $(A - \alpha)$ - B -Weg in $G - G'_\alpha$, der X vermeidet. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme, daß $(\mathcal{W}, X)$ eine $(A - \alpha) \rightarrow B$ -Welle in $G - G'_\alpha$ ist. $\square$

Das nun folgende Lemma ist sozusagen maßgeschneidert für eine Wellenkonstruktion im Beweis der Erdős-Menger'schen Vermutung im nächsten Abschnitt. Es geht im Grunde darum, eine volle und nur voll verlängerbare Welle in einem Graphen G nach Herausnehmen einer Eckenmenge so zu verlängern, daß die Wege der verlängerten Welle eine bestimmte Art von A - B -Wegen treffen, nämlich solche, die ein festes Anfangsstück gemeinsam haben.

Lemma 6.3. Seien $A, B \subseteq \Omega(G)$, $A \cup B$ diskret, $M \subseteq V(G)$ zusammenhängend und $(A \cup B)_\Omega$ -endentreu, $(\mathcal{W}, X)$ eine volle und nur voll verlängerbare $A \rightarrow B$ -Welle in $G - M$, $\beta \in B \setminus X$ und $v \in M \cap S_\beta$. Ist für jeden v - β -Weg R jede $A \rightarrow (B - \beta)$ -Welle in $G - M - V(R)$ klein oder klein verlängerbar, dann gibt es eine zusammenhängende Eckenmenge $S \subseteq V(G) \setminus V[\mathcal{W}]$ mit $M \subseteq S$ und eine volle und nur voll verlängerbare $A \rightarrow B$ -Welle $(\mathcal{V}, Y)$ in $G - S$, so daß $S \setminus M$ endlich ist, jeder v - β -Weg in $G_\beta - (S_\beta - v)$ $V[\mathcal{V}] \cup Y$ trifft und $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$ gilt.

Beweis: Man wähle $S \subseteq M \cup S'_\beta$ zusammenhängend und maximal mit der Eigenschaft, daß $M \subseteq S$ gilt und in $G - S$ eine volle und nur voll verlängerbare $A \rightarrow B$ -Welle $\mathcal{W}'$ mit $\mathcal{W} \leq \mathcal{W}'$ existiert. $S \setminus M$ ist endlich. Nun sei $(\mathcal{V}, Y)$ die Summe von $\mathcal{W}'$ und einer maximalen Verlängerung von $\mathcal{W}'$. $\mathcal{V}$ ist eine maximale und volle $A \rightarrow B$ -Welle mit $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$ in $G - S$.

Trifft in G_β jeder v - β -Weg $V[\mathcal{V}] \cup Y$, so ist Lemma 6.3 bewiesen. Nehme man also an, daß es einen v - β -Weg R in $G_\beta - (S_\beta - v)$ gibt, der $V[\mathcal{V}] \cup Y$ vermeidet. Insbesondere liegt dann β nicht in Y .

$\mathcal{V}$ ist auch eine $A \rightarrow (B - \beta)$ -Welle in $G - S$. Ist $\mathcal{V}$ als solche klein oder klein verlängerbar, so existiert in $G - S$ nach Lemma 5.3 auch eine volle $A \rightarrow B$ -Welle $(\mathcal{V}_\beta, Y_\beta)$ mit $\mathcal{V} \leq \mathcal{V}_\beta$ und $\beta \in Y_\beta$. Wegen $\beta \notin Y$ gilt dann sogar $\mathcal{V} < \mathcal{V}_\beta$, im Widerspruch zur Wahl von $\mathcal{V}$. Daher ist $\mathcal{V}$ eine volle und nur voll verlängerbare $A \rightarrow (B - \beta)$ -Welle in $G - S$.

Eine Ecke $v \in S'_\beta$, die zu einer Ecke benachbart ist, die in S liegt, liegt selbst nur dann nicht in S , wenn in $G - S - v$ alle vollen Wellen, die länger als $\mathcal{W}$ sind, eine kleine Verlängerung besitzen. Für $v \in S'_\beta \setminus S$ mit $v \notin V[\mathcal{V}]$ ist daher $(\mathcal{V}, Y)$ in $G - S - v$ eine

kleine oder klein verlängerbare Welle, nach Lemma 5.3 gibt es dann eine $A \rightarrow B$ -Welle $\mathcal{V}_v$ mit $\mathcal{V} \leq \mathcal{V}_v$ in $G - S$, die v zu ihren Entdecken zählt. Wegen $v \notin V[\mathcal{V}]$ ist $\mathcal{V}$ sogar echt kleiner als $\mathcal{V}_v$, dies steht aber im Widerspruch zur maximalen Wahl von $\mathcal{V}$.

Es gilt also:

(*) Jeder Nachbar von S in S'_β liegt in $V[\mathcal{V}]$.

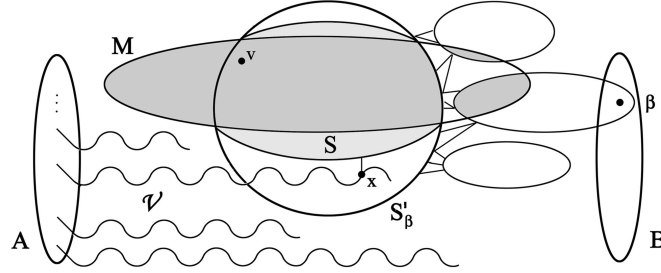


Abb. 6.6 x liegt in $V[\mathcal{V}]$.

Aus (*) folgt eine weitere Tatsache, nämlich, daß jeder $V(R)-(B-\beta)$ -Weg in $G - S$ die Eckenmenge $V[\mathcal{V}]$ trifft. Um dies zu zeigen, nehme man an, es gäbe einen $V(R)-(B-\beta)$ -Weg Q in $G - S$, der $V[\mathcal{V}]$ vermeidet. Ist dann q die Anfangsecke von Q und s die erste Ecke von Q in S_β , so beinhaltet RqQ den $S_\beta-S_\beta$ -Weg $R' := vRqQs$ in G_β . Nach Lemma 6.1 gibt es ein außer in $V(R')$ disjunktes $v-s$ -Wegesystem $\mathcal{P}$ mit $V[\mathcal{P}] \subseteq S'_\beta$, das aus $k := |S_\beta| + 1$ Wegen besteht. Wegen $v \in S$ hat jeder Weg aus $\mathcal{P}$ eine letzte Ecke in S . Da Q ein Weg in $G - S$ ist, kann diese letzte Ecke nicht s sein, mit (*) folgt dann, daß jeder Weg aus $\mathcal{P}$ nach seiner letzten Ecke in S $V[\mathcal{V}]$ trifft. Jeder Weg P aus $\mathcal{P}$ hat also eine letzte Ecke v_P in $V[\mathcal{V}]$, nach der er S nicht mehr trifft.

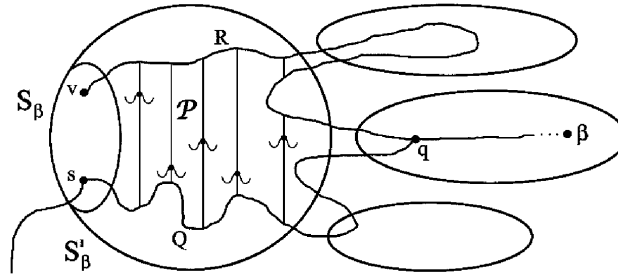


Abb. 6.7 Jeder Weg aus $\mathcal{P}$ trifft nach S die Welle $\mathcal{V}$.

Nach Wahl von R und Q liegt keine Ecke aus der "Menge der letzten Ecken" $V_{\mathcal{P}} := \{v_P : P \in \mathcal{P}\}$ auf R' , daher liegen k verschiedene Ecken in $V_{\mathcal{P}}$, wegen $|V(G_\beta) \cap Y| < k$ liegt eine dieser Ecken sogar in $V[\mathcal{V}] \setminus Y$. Sei x diese Ecke, P der Weg aus $\mathcal{P}$, V der Weg aus $\mathcal{V}$, auf dem x liegt, und sei y die erste Ecke von Vx auf dem Weg $Q' := xPsQ$. Weder Vx noch Q' treffen Y , aus diesem Grund ist VyQ' ein $A-(B-\beta)$ -Weg in $G - S$, der Y vermeidet, im Widerspruch dazu, daß $(\mathcal{V}, Y)$ eine $A \rightarrow (B-\beta)$ -Welle in $G - S$ ist. Daher kann es einen Weg wie Q nicht geben und es gilt:

(**) Jeder $V(R)-(B-\beta)$ -Weg in $G - S$ trifft $V[\mathcal{V}]$.

Nun ist $(\mathcal{V}, Y)$ auch in $G - S - V(R)$ eine $A \rightarrow (B-\beta)$ -Welle. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{V}$ in $G - S - V(R)$ klein oder klein verlängerbar. D.h., in $G - S - V(R)$ existiert eine kleine $A \rightarrow (B-\beta)$ -Welle $(\mathcal{V}', Y')$ mit $\mathcal{V} \leq \mathcal{V}'$. (Dabei ist $\mathcal{V}'$ entweder $\mathcal{V}$ oder die Summe von $\mathcal{V}$ und der kleinen Verlängerung.) In $G - S$ dagegen ist $\mathcal{V}$ eine volle und nur voll

verlängerbare $A \rightarrow (B - \beta)$ -Welle, $\mathcal{V}'$ kann also dort keine kleine $A \rightarrow (B - \beta)$ -Welle sein, das bedeutet, Y' ist in $G - S$ kein $A - (B - \beta)$ -Trenner. Es muß also in $G - S$ einen $A - (B - \beta)$ -Weg W geben, der Y' vermeidet. Offensichtlich muß W $V(R)$ treffen und, da R in β endet, auch eine letzte Ecke in $V(R)$ haben. Darum enthält W einen $V(R) - (B - \beta)$ -Weg W' . Wegen $(**)$ trifft W' aber $V[\mathcal{V}]$. Es gibt sogar eine Ecke w (auf einem Weg $V_w \in \mathcal{V}$), in der W die Menge $V[\mathcal{V}]$ zum letzten Mal trifft, da W nach Annahme Y' und damit auch $B_{\mathcal{V}}$ vermeidet und deswegen keinen Weg aus $\mathcal{V}$ unendlich oft trifft, und wegen der Diskretheit von $A \cup B$ auch nicht unendlich viele verschiedene Wege aus $\mathcal{V}$ treffen kann.

Da nach Wahl von R die Ecke w nicht auf R liegt, ist $V_w w W$ ein $A - (B - \beta)$ -Weg in $G - S - V(R)$. $V_w w W$ umgeht Y' , was im Widerspruch dazu steht, daß $\mathcal{V}'$ in $G - S - V(R)$ eine $A \rightarrow (B - \beta)$ -Welle ist. Das bedeutet, es existiert kein $v - \beta$ -Weg in G_{β} , der $V[\mathcal{V}]$ vermeidet, und $\mathcal{V}$ und S erfüllen tatsächlich die Aussage des Lemmas. $\square$

Nun sind endlich alle Vorarbeiten abgeschlossen und der eigentliche Beweis der Erdős–Menger’schen Vermutung für abzählbare Graphen mit Enden kann losgehen.

7. Beweis von Satz 1

Seien nun $A, B \subseteq G_{V\Omega}$ gegeben und sei $(\mathcal{W}, X)$ eine maximale $A \rightarrow B$ -Welle in G . In $G_{X \rightarrow B}$ kann nur die triviale $(X \setminus B_{\Omega}) \rightarrow (B \setminus X_{\Omega})$ -Welle existieren. Aus Korollar 1 weiß man, daß sich in $G_{X \rightarrow B}$ kein Ende aus $B \setminus X$ aufspaltet und kein Ende aus $X \setminus B$ verschwindet. Deshalb braucht man nur noch $X \setminus B_{\Omega}$ in $G_{X \rightarrow B}$ durch ein disjunktes Wegesystem $\mathcal{P}$ mit $B \setminus X_{\Omega}$ zu verbinden, um ein $A - B$ -Wegesystem $\mathcal{P}'$ (in dem für jeden Punkt x aus X der Weg aus $\mathcal{W}$ liegt, der in x endet, ggf. verlängert durch den Weg aus $\mathcal{P}$, der in x startet) in G zu erhalten. Der $A - B$ -Trenner X enthält genau einen Punkt aus jedem Weg aus $\mathcal{P}'$.

Die triviale $(X \setminus B_{\Omega}) \rightarrow (B \setminus X_{\Omega})$ -Welle in $G_{X \rightarrow B}$ ist (nach Definition von X und $G_{X \rightarrow B}$) voll. In $G_{X \rightarrow B}$ existiert nur die triviale Welle, daher ist auch die schwächere Aussage, daß in $G_{X \rightarrow B}$ nur volle $(X \setminus B_{\Omega}) \rightarrow (B \setminus X_{\Omega})$ -Wellen existieren, wahr. Welchen entscheidenden Vorteil die stärkere Aussage für einen anderen als den hier aufgezeichneten Beweisweg haben könnte, ist unklar. Hier wird man sich mit der schwächeren Version begnügen, da sie ausreicht. Das Ziel ist nun, die folgende Aussage zu zeigen:

($\star$) *In einem Graphen G , in dem es zu $A, B \subseteq G_{V\Omega}$ (mit diskretem $A \cup B$) nur volle $A \rightarrow B$ -Wellen gibt, kann man A vollständig durch disjunkte Wege mit B verbinden.*

Die gesuchten $A - B$ -Wege versucht man zu finden, indem man die Punkte aus A aufzählt und der Reihe nach so mit B verbindet, daß es für die übriggebliebenen Punkte aus A noch möglich bleibt, durch disjunkte Wege mit B verbunden zu werden. Dazu wird das folgende Lemma benötigt:

Lemma 7.1. *Ist G ein Graph mit $A, B \subseteq G_{V\Omega}$, ist $A \cup B$ diskret und gibt es in G nur volle $A \rightarrow B$ -Wellen, so läßt sich zu einem gegebenen Punkt $a \in A$ ein Punkt $b \in B$, ein $A - B$ -Weg der Form (a, P, b) und eine $(A \cup B)_{\Omega}$ -endentreue Eckenmenge $M \subseteq V(G) \setminus (A \cup B)$ finden, so daß in $G - M - V(P)$ eine volle und nur voll verlängerbare $(A - a) \rightarrow (B - b)$ -Welle existiert.*

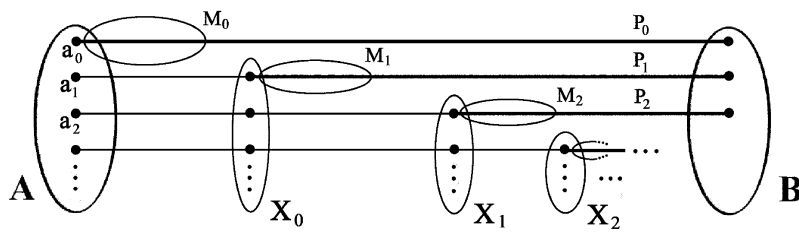


Abb. 7.1 Lemma 7.1 liefert das gesuchte Wegesystem.

Wiederholtes Anwenden liefert das in $(\star)$ gesuchte disjunkte Wegesystem: Weil A diskret und deshalb nach Lemma 2.1 abzählbar ist, kann man jedem Punkt aus A einen Index aus $\mathbb{N}$ zuordnen. Sei also $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$. In G gibt es nach Lemma 7.1 einen Punkt $b_0 \in B$, einen A - B -Weg der Form (a_0, P_0, b_0) und eine $(A \cup B - a_0 - b_0)_\Omega$ -endentreue Eckenmenge $M_0 \subseteq V(G) \setminus (A \cup B)$. Desweiteren existiert eine volle $(A - a_0) \rightarrow (B - b_0)$ -Welle $(\mathcal{W}_0, X_0)$ in $G - M_0 - V(P_0)$, die nur voll verlängert werden kann. In $G_1 := (G - M_0 - V(P_0))_{X_0 \rightarrow (B - b_0)}$ gibt es also nur volle $(X_0 \setminus (B - b_0)_\Omega) \rightarrow ((B - b_0) \setminus (X_0)_\Omega)$ -Wellen. Der Punkt a_1 ist in G durch einen Weg W_0 aus $\mathcal{W}_0$ mit einem Punkt x_0 aus X_0 verbunden. Entweder liegt x_0 in $(B - b_0)$ oder in $X_0 \setminus (B - b_0)$. Im ersten Fall ist also a_1 bereits durch W_0 mit $(B - b_0)$ verbunden, und man fährt mit dem Punkt aus X_1 fort, dessen $\mathcal{W}_0$ -Weg in a_2 beginnt; im zweiten liegt x_0 in $V(G_1)$, dann findet man mit Lemma 7.1 einen Punkt $b_1 \in B - b_0$, einen $X_0 - (B - b_0)$ -Weg der Form (x_0, P_1, b_1) in G_1 (sowie eine Eckenmenge M_1 und eine Welle $(\mathcal{W}_1, X_1)$), so daß in G der in a_1 startende $A - (B - b_0)$ -Weg $W_0 x_0 P_1$ existiert, der P_0 nicht trifft. In $G_2 := (G_1 - M_1 - V(W_0 x_0 P_1))_{X_1 \rightarrow (B - b_0 - b_1)}$ gibt es dann wieder nur volle Wellen, und man kann mit dem Punkt aus X_1 fortfahren, dessen $\mathcal{W}_0 - \mathcal{W}_1$ -Weg in a_2 beginnt...

In höchstens abzählbar vielen Schritten wird auf diese Weise ein disjunktes Wegesystem in G gefunden, das ganz A disjunkt mit B verbindet. Satz 1 ist also bewiesen, wenn Lemma 7.1 gilt.

Beweis von Lemma 7.1: Zur Vereinfachung des Beweises kann man annehmen, daß $A, B \subseteq \Omega(G)$ gilt, denn ist Lemma 7.1 für solche A, B bewiesen, so folgt es mit dem Antennenargument sofort für alle $A, B \subseteq G_{V\Omega}$: Man hänge an alle $a \in A_V$ und an alle $b \in B_V$ einen Strahl, dessen Ende a in A bzw. b in B ersetzt. Auf diese Weise entsteht aus A die reine Endenmenge A^{ant} und aus B die reine Endenmenge B^{ant} . So entsteht aus G der Graph G^{ant} . Existiert nun in G^{ant} eine kleine $A^{ant} \rightarrow B^{ant}$ -Welle $\mathcal{W}$, so ist auch die durch $V[\mathcal{V}] := V[\mathcal{W}] \cap V(G)$ und die entsprechenden trivialen Wege definierte $A \rightarrow B$ -Welle $\mathcal{V}$ in G klein.

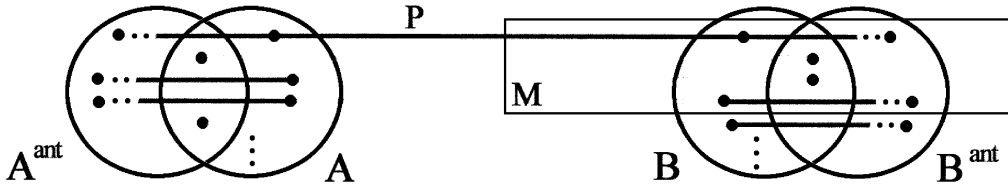


Abb. 7.2 Der Antennengraph.

Gibt es in G nur volle Wellen, so ist das also auch in G^{ant} der Fall. Sei nun $a \in A$ gegeben. In G^{ant} gibt es ein Ende α , das an der Antenne von a hängt oder selbst a ist. Da angenommen wird, daß Lemma 7.1 für A^{ant} und B^{ant} in G^{ant} gilt, gibt es also dort zu α ein Ende $\beta \in B^{ant}$, einen α - β -Weg P und eine Eckenmenge M , so daß in $G^{ant} - M - V(P)$ die Enden aus $A^{ant} \cup B^{ant} - \alpha - \beta$ erhalten bleiben und eine volle und nur voll verlängerbare $(A^{ant} - \alpha) \rightarrow (B^{ant} - \beta)$ -Welle $\mathcal{W}$ existiert. M kann keine Ecken aus A_V enthalten (oder solche, die es in G gar nicht gibt, weil sie in den

Antennen von A liegen), weil sonst offensichtlich in $G^{ant} - M - V(P)$ keine vollen Wellen existieren könnten. Seien nun P' , M' und $\mathcal{W}'$ definiert durch $V(P') := V(P) \cap V(G)$, $M' := M \cap V(G)$ und $V[\mathcal{W}'] := V[\mathcal{W}] \cap V(G)$ und die entsprechenden trivialen Wege, und sei b der Endpunkt von P' . b , P' , M' und $\mathcal{W}'$ sind dann der Punkt aus B , der a - B -Weg und die Eckenmenge in G sowie die $(A - a) \rightarrow (B - b)$ -Welle in $G - M' - V(P')$, die gesucht waren. (Es liegt auf der Hand, daß auch $\mathcal{W}'$ voll und nur voll verlängerbar ist.) Es reicht also, Lemma 7.1 nur für den Spezialfall $A, B \subseteq \Omega(G)$ zu zeigen.

Seien nun $A, B \subseteq \Omega(G)$ und $\alpha \in A$ gegeben. Angenommen, es existieren kein α - B -Weg und keine Eckenmenge mit den geforderten Eigenschaften, dann gilt für alle α - B -Wege (α, P, β) und alle $(A \cup B)_\Omega$ -endentreuen Eckenmengen $M \subseteq V(G)$: Jede $(A - \alpha) \rightarrow (B - \beta)$ -Welle in $G - M - V(P)$ ist klein oder besitzt eine kleine Verlängerung.

Diese Aussage soll zum Widerspruch geführt werden, indem eine aufsteigende Folge von Wellen $(\mathcal{W}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in immer kleineren Untergraphen von G konstruiert wird, deren Limes man zu einer kleinen $A \rightarrow B$ -Welle in G ausbauen kann. Da es in G nach Voraussetzung nur volle Wellen gibt, wäre dann Lemma 7.1 bewiesen.

Wenn α in $A \cap B$ liegt, ist nicht viel zu zeigen. Eine kleine $(A - \alpha) \rightarrow (B - \alpha)$ -Welle in G wäre, um den trivialen Weg (α) ergänzt, auch eine kleine $A \rightarrow B$ -Welle in G , die nach Voraussetzung nicht existiert. Daher darf man davon ausgehen, daß $\alpha \notin B$ gilt.

Die Konstruktion der kleinen Welle in G soll ungefähr so vor sich gehen:

Man beginnt mit der trivialen Welle in G . Nun werden nacheinander Anfangsstücke von α - B -Wegen aus G herausgenommen. Dabei wird jedesmal im Restgraphen, d.h. in G ohne alle bisher herausgenommenen Wegstücke, die bis dahin konstruierte Welle mit Hilfe von Lemma 5.3 oder Lemma 6.3 so verlängert, daß sie den im Restgraphen verbleibenden Restweg trifft. In jedem Schritt wird ein α - B -Weg verbraucht, außerdem werden möglicherweise mehrere für immer disqualifiziert (wenn ein Weg die Welle im Schritt i trifft, so auch in jedem weiteren Schritt). Vielleicht kann man so in abzählbar vielen Schritten alle α - B -Wege verbrauchen oder disqualifizieren. In G ohne die Menge der gewegeworfenen Weganfangsstücke M müßte der Limes der konstruierten Wellen eine $(A - \alpha) \rightarrow B$ -Welle sein. Weil jeder α - B -Weg diese Welle trifft, ist vorstellbar, daß sie auch in G eine $(A - \alpha) \rightarrow B$ -Welle ist. Nimmt man nun noch den trivialen Weg (α) hinzu, hat man gute Chancen, nun eine kleine $A \rightarrow B$ -Welle in G vor sich zu haben.

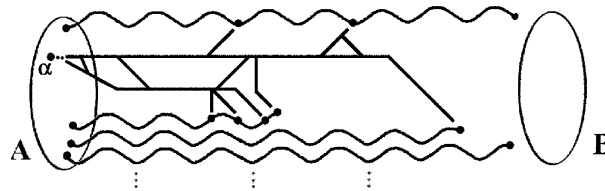


Abb. 7.3 Die Welle wird nacheinander durch alle α - B -Wege gelegt.

Was könnte hierbei schiefgehen? Zunächst einmal ist es sehr gut möglich, daß überabzählbar viele α - B -Wege in G existieren (Abb. 7.4). Es könnten Schwierigkeiten auftauchen, in abzählbar vielen Schritten überabzählbar viele α - B -Wege zu verbrauchen und zu disqualifizieren. Deshalb wird man ähnliche Wege zu Wegklassen zusammenfassen, und dann in jedem Schritt eine ganze Klasse von Wegen verbrauchen und disqualifizieren. Ein weiteres Problem ist die Menge der herausgenommenen Wegstücke. Selbst wenn diese in jedem Schritt noch so gutartig ist, in dem Sinne, daß sie keine Enden aus $A \cup B$ spaltet oder zerstört, wird man kaum verhindern können, daß in unendlich vielen Schritten diesen Enden doch etwas passiert. Daher wird man auch den Limes der konstruierten Wellen nicht ohne weiteres bilden können. Denn jede Welle ist dann nur in G ohne alle bis dahin herausgenommenen Wegstücke eine $A \rightarrow B$ -Welle, in G ohne die

gesamte Menge der Wegstücke sind aber A und B verstümmelt, so daß man von $A \rightarrow B$ -Wellen nicht unbedingt sprechen kann. Diese Schwierigkeit wird man umgehen können, indem man dort eine ähnliche Folge von Wellen heranzieht und deren Limes bildet.



Abb. 7.4 Hier gibt es überabzählbar viele α - β -Wege.

Nun also zur Wellenkonstruktion:

Das Problem der überabzählbar vielen α - B -Wege kann nur nah an den Enden von G auftreten, d.h. wenn es in der Nähe von α oder in der Nähe eines Endes $\beta \in B$ viele Möglichkeiten für Wege gibt. Von α nach S_α oder von S_β nach β könnte es überabzählbar viele Wege geben, nicht aber von S_α nach S_β (denn S_α - S_β -Wege haben endliche Länge).

Der Teil des Problems, der durch α verursacht wird, kann dadurch behoben werden, daß man eine Umgebung von α findet, die von vorneherein herausgenommen werden kann. Nach Lemma 6.2 existieren auch in $G - G'_\alpha$ nur volle $(A - \alpha) \rightarrow B$ -Wellen. (Daß in $G - G'_\alpha$ Enden aus $A \cup B - \alpha$ weder gespalten noch zerstört werden, versteht sich von selbst.) Nun kann immernoch eine überabzählbare Menge von α - B -Wegen existieren, die außer in G'_α verschieden sind. Daher soll eine abzählbare Menge von Wegklassen definiert werden, und zwar derart, daß jeder α - B -Weg in einer dieser Klassen liegt und die Wege einer Klasse ein wesentliches gemeinsames Teilstück besitzen.

Sei N_α die Menge der Nachbarn von G'_α in G (das sind alle Ecken aus $V(G)$, die in G zu einer Ecke aus $V(G'_\alpha)$ benachbart sind, aber selbst nicht in $V(G'_\alpha)$ liegen). Wegen $N_\alpha \subseteq S'_\alpha$ ist N_α endlich. Nun sei $S_B = \bigcup_{\beta \in B} (S_\beta \setminus V(G'_\alpha)) \cup N_\alpha$. Da N_α und S_B reine Eckenmengen sind, haben alle N_α - S_B -Wege in $G - G'_\alpha$ endliche Länge. G ist ein Graph auf nur abzählbar vielen Ecken, daher gibt es für jedes $s \in S_B$ nur abzählbar viele N_α - s -Wege in $G - G'_\alpha$. Es ist also auch die Menge $\mathcal{P}$ der Wege in $G - G'_\alpha$, die in N_α starten und in einer Ecke aus S_B enden (und dazwischen evtl. noch andere Ecken aus S_B treffen), abzählbar. Schließlich sei $(\mathcal{P} \rightarrow B) := \{(P \rightarrow \beta)_1, (P \rightarrow \beta)_2, (P \rightarrow \beta)_3, \dots\}$ die Menge aller Wegklassen $(P \rightarrow \beta)$ mit $P \in \mathcal{P}$ und $\beta \in B$.

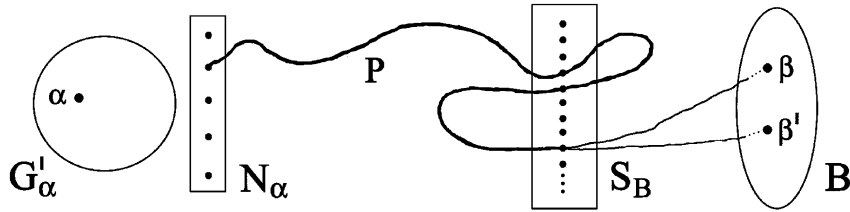


Abb. 7.5 $(P \rightarrow \beta_1)$ und $(P \rightarrow \beta_2)$ liegen in $(\mathcal{P} \rightarrow B)$.

Sei nun (α, P, β) ein α - B -Weg in G . P hat eine letzte Ecke v in N_α , enthält also den N_α - B -Weg vP in $G - G'_\alpha$. Es gibt auch eine letzte Ecke w auf vP in $S_\beta \cup N_\alpha$ (in S_β nicht unbedingt, da die letzte Ecke von P in S_β ja in G'_α liegen kann). Es gilt dann $(vPw \rightarrow \beta) \in (\mathcal{P} \rightarrow B)$. Außerdem liegt das Endstück $\dot{w}P$ von P ganz in $G_\beta - S_\beta$.

Um nach und nach alle α - B -Wege mit einer wachsenden Welle zu treffen, werden nun Folgen von Eckenmengen $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und von $(A - \alpha)$ - B -Wellen $((\mathcal{W}_i, X_i))_{i \in \mathbb{N}}$ in $G - M_i$ induktiv definiert, die die folgenden Eigenschaften für alle $i \in \mathbb{N}$ erfüllen:

- (i) M_i ist zusammenhängend und $M_i \setminus V(G'_\alpha)$ ist endlich.

- (ii) Es gelten $M_{i-1} \subseteq M_i$ und $\mathcal{W}_{i-1} \leq \mathcal{W}_i$ (für $i > 0$).
- (iii) $(\mathcal{W}_i, X_i)$ ist voll und kann nur voll verlängert werden.
- (iv) Gilt $(P \rightarrow \beta) = (P \rightarrow \beta)_j$ für ein $j \leq i, j > 0$, so trifft jeder N_α - β -Weg mit dem Anfangsstück P , der nach P ganz in $G_\beta - S_\beta$ liegt, $V[\mathcal{W}_i] \cup X_i$.

Daß dabei $M_i \setminus V(G'_\alpha)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ endlich ist, gewährleistet, daß in $G - M_i$ Enden aus $A \cup B - \alpha$ weder zerstört noch aufgespalten sind. Damit sind dort $(A - \alpha)$ - B -Wellen überhaupt definiert.

0.Schritt: Seien $M_0 := G'_\alpha$ und $\mathcal{W}_0 := \mathcal{A} - (\alpha)$. Die $(A - \alpha) \rightarrow B$ -Welle $\mathcal{W}_0$ in $G - M_0$ ist voll und nur voll verlängerbar. Damit gelten (i)-(iv) für $\mathcal{W}_0$ und M_0 .

i+1.Schritt: Es muß zuerst der “nächste Weg” gesucht werden: Wenn alle N_α - B -Wege $V[\mathcal{W}_i] \cup X_i$ treffen, setze man $M_{i+1} := M_i$ und $\mathcal{W}_{i+1} := \mathcal{W}_i$ (und beende damit den i+1. Schritt, (i)-(iv) gelten offensichtlich), sonst sei $(P \rightarrow \beta) := (P \rightarrow \beta)_k$ mit $k = \min\{j > i : (P \rightarrow \beta) = (P \rightarrow \beta)_j \text{ und es gibt einen } N_\alpha\text{-}\beta\text{-Weg mit dem Anfangsstück } P, \text{ der nach } P \text{ ganz in } G_\beta - S_\beta \text{ liegt.}\}$.

Wegen (iii) ist $\mathcal{W}_i$ in $G - M_i$ voll und nur voll verlängerbar. Fängt man nun an, die Ecken auf P der Reihe nach herauszunehmen, so ergeben sich die folgenden zwei Möglichkeiten:

- 1) Man findet eine Ecke v auf P , so daß $\mathcal{W}_i$ in $G - M_i - V(P\hat{v})$ voll und nur voll verlängerbar ist, und in $G - M_i - V(Pv)$ klein oder klein verlängerbar.
- 2) In $G - M_i - V(P)$ ist $\mathcal{W}_i$ voll und nur voll verlängerbar.

Im ersten Fall gibt es in $G - M_i - V(P\hat{v})$ nach Lemma 5.3 eine volle $(A - \alpha) \rightarrow B$ -Welle $(\mathcal{W}_{i+1}, X_{i+1})$, so daß $v \in X_{i+1}$ und $\mathcal{W}_i \leq \mathcal{W}_{i+1}$ gilt. Jeder N_α - B -Weg mit dem Anfangsstück P muß $V[\mathcal{W}_{i+1}]$ offensichtlich treffen, $\mathcal{W}_{i+1}$ ist nur voll verlängerbar und $V(P\hat{v})$ endlich. Mit $M_{i+1} := M_i \cup V(P\hat{v})$ sind also (i)-(iv) für M_{i+1} und $\mathcal{W}_{i+1}$ erfüllt.

Im zweiten Fall sei v die letzte Ecke von P in S_β . Dann ist nach der Annahme zum Widerspruch für jeden v - β -Weg R jede $(A - \alpha) \rightarrow (B - \beta)$ -Welle in $G - M_i - V(P) - V(R)$ klein oder klein verlängerbar. Darum gibt es nach Lemma 6.3 eine zusammenhängende Eckenmenge M_{i+1} mit $M_i \cup V(P) \subseteq M_{i+1}$ und eine volle und nur voll verlängerbare $(A - \alpha) \rightarrow B$ -Welle $\mathcal{W}_{i+1}$ in $G - M_{i+1}$, so daß $M_{i+1} \setminus (M_i \cup V(P))$ und damit auch $M_{i+1} \setminus V(G'_\alpha)$ endlich ist, $\mathcal{W}_i \leq \mathcal{W}_{i+1}$ gilt, und außerdem jeder v - β -Weg in $G_\beta - (S_\beta - v)$ die Menge $V[\mathcal{W}_{i+1}] \cup X_{i+1}$ trifft. Jeder N_α - B -Weg mit dem Anfangsstück P , der nach P ganz in $G_\beta - S_\beta$ liegt, beinhaltet einen v - β -Weg in $G_\beta - (S_\beta - v)$ und trifft deswegen $V[\mathcal{W}_{i+1}] \cup X_{i+1}$. Es gelten also (i)-(iv) für M_{i+1} und $\mathcal{W}_{i+1}$.

Auf diese Weise werden die Eckenmengen M_i und die Wellen $\mathcal{W}_i$ in $G - M_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ definiert. Leider gibt es keinen Limes dieser Wellen, denn $\mathcal{W}_i$ ist jeweils eine Welle in $G - M_i$, und die Untergraphen $G - M_i$ sind für verschiedene i nicht unbedingt dieselben. Aber wenn man nun die Vereinigung der M_i bildet, d.h. $M := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$ setzt, wie sieht es dann in $G - M$ aus? Eine Eigenschaft von M liegt bereits auf der Hand: M ist zusammenhängend. Wegen $V(G'_\alpha) \subseteq M$ gilt daher:

- (I) Zu jeder Ecke $m \in M$ existiert ein α - m -Weg in G , der ganz auf Ecken aus M verläuft.

Wegen $M_i \cap V[\mathcal{W}_i] = \emptyset$ und (ii) gilt außerdem $M \cap V[\mathcal{W}_i] = \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Sind also vielleicht die $\mathcal{W}_i$ Wellen in $G - M$? Unglücklicherweise weiß man zuwenig über die Menge M , um diese Frage zu bejahen. Obwohl für alle $i \in \mathbb{N}$ in $G - M_i$ kein Ende aus $(A - \alpha) \cup B$ zerstört oder aufgespalten wurde, kann dies in $G - M$ doch der Fall sein.

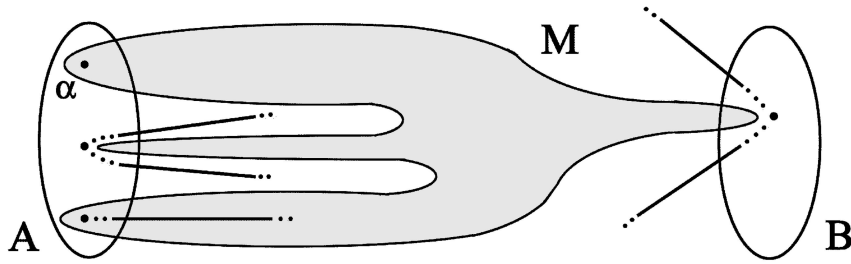


Abb. 7.6 M verschluckt und zerstört Enden aus A .

In $G - M$ ist aus der Menge $(A - \alpha)$ also die Menge $(A - \alpha)' := \{\omega \in \Omega(G - M) : \text{Es gibt einen Strahl aus } \omega, \text{ der in } G \text{ in einem Ende aus } (A - \alpha) \text{ liegt.}\}$ und aus B die Menge $B' := \{\omega \in \Omega(G - M) : \text{Es gibt einen Strahl aus } \omega, \text{ der in } G \text{ in einem Ende aus } B \text{ liegt.}\}$ geworden. (Man erinnere sich: $A \cup B \subseteq \Omega(G)$.) Für alle $i \in \mathbb{N}$ ist jeder nichttriviale Weg aus $\mathcal{W}_i$ in $G - M$ ein Weg, der dort in $(A - \alpha)'$ startet.

Gesucht sind nun Wellen in $G - M$, die den $\mathcal{W}_i$ möglichst ähnlich sind. $\mathcal{V}_i := \{W \in \mathcal{W}_i : W \text{ ist nichttrivial.}\} \cup \{(a) : a \in (A - \alpha)' \text{ und in } a \text{ startet kein nichttrivialer Weg aus } \mathcal{W}_i.\}$ ist ein disjunktes Wegesystem in $G - M$. In jedem Punkt aus $(A - \alpha)'$ startet ein Weg aus $\mathcal{V}_i$. Ein $(A - \alpha)' - B'$ -Weg P in $G - M$, der die Menge der Endpunkte von Wegen aus $\mathcal{V}_i$ vermeidet, wäre in $G - M_i$ ein $(A - \alpha) - B$ -Weg, der den $(A - \alpha) - B$ -Trenner X_i umgeht. Daher ist $\mathcal{V}_i$ tatsächlich eine (evtl. kleine) $(A - \alpha)' \rightarrow B'$ -Welle in $G - M$. Definiert man so für alle $i \in \mathbb{N}$ die Wellen $(\mathcal{V}_i, Y_i)$ in $G - M$, so ist $(\mathcal{V}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sogar eine aufsteigende Folge von Wellen, ihr Limes $(\mathcal{V}^*, Y^*)$ ist dann ebenfalls eine $(A - \alpha)' \rightarrow B'$ -Welle in $G - M$.

Nun sollte ja in G und nicht in $G - M$ eine kleine Welle gefunden werden. Dazu muß nun aus $\mathcal{V}^*$ wieder eine Welle in G gemacht werden. Das ist nicht weiter schwer. Alle nichttrivialen Wege aus $\mathcal{V}^*$ sind offensichtlich in G Wege, die in $A - \alpha$ starten. $\mathcal{W}^* := \{W \in \mathcal{V}^* : W \text{ ist nichttrivial}\} \cup \{(a) : a \in A - \alpha \text{ und in } a \text{ startet kein nichttrivialer Weg aus } \mathcal{V}^*\}$ ist also ein Wegesystem in G . Sei Z^* die Menge der Endpunkte von Wegen aus $\mathcal{W}^*$. Außer in $Z^* \cap B$ sind die Wege aus $\mathcal{W}^*$ disjunkt, denn sonst wäre bereits für ein $i \in \mathbb{N}$ die Welle $\mathcal{W}_i$ in G kein disjunktes Wegesystem gewesen. Allerdings könnten verschiedene nichttriviale Wege aus $\mathcal{W}^*$ dasselbe Endende in B haben, natürlich nur, wenn dieses Endende Strahlen in verschiedenen Enden von $G - M$ besitzt.

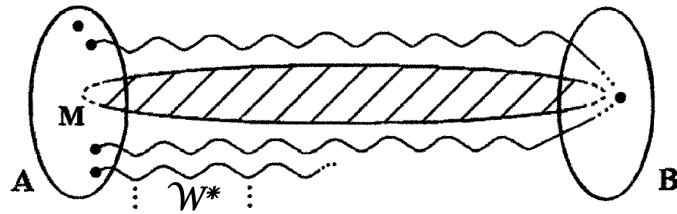


Abb. 7.7 Evtl. ist $\mathcal{W}^*$ kein disjunktes Wegesystem.

Aus jeder Menge von nichttrivialen Wegen aus $\mathcal{W}^*$ mit demselben Endende in B kann man nun alle Wege bis auf einen so verkürzen, daß sie zu unendlichen Wegen ohne Endpunkt werden; welchen Weg man nicht verkürzt, ist dabei egal. Dann ist das so entstandene Wegesystem $\mathcal{W}$ disjunkt. Die Menge seiner Endpunkte ist ebenfalls Z^* und es gilt $V[\mathcal{W}] = V[\mathcal{W}^*] = V[\mathcal{V}^*]$. Ferner startet in jedem Punkt aus $(A - \alpha)$ ein Weg aus $\mathcal{W}$. Da $\mathcal{V}^*$ eine Welle in $G - M$ ist, gilt:

$$(II) \quad M \cap V[\mathcal{W}] = \emptyset$$

Kann man nun noch zeigen, daß Z^* in G ein $A - B$ -Trenner ist, dann ist $\mathcal{W}^* \cup (\alpha)$ sogar eine kleine $A \rightarrow B$ -Welle in G . Dazu muß bewiesen werden, daß es keinen $A - B$ -Weg in G gibt, der Z^* umgeht. Betrachte man zunächst $\alpha - B$ -Wege in G , die Z^* vermeiden.

Sei (α, P, β) so ein α - B -Weg in G , und sei s die letzte Ecke auf P in $S_\beta \cup N_\alpha$. P trifft N_α , also enthält P einen N_α - s -Weg P' . Wegen $(P' \rightarrow \beta) \in (\mathcal{P} \rightarrow B)$ und wegen (iv) gibt es eine natürliche Zahl j , so daß $(V(P) \cup \beta) \cap (V[\mathcal{W}_j] \cup X_j) \neq \emptyset$ ist. Es gilt also $\beta \in X_j$ oder $V(P) \cap V[\mathcal{W}_j] \neq \emptyset$ (oder beides).

Liegt β in X_j , dann gibt es einen nichttrivialen Weg $\mathcal{W}_j$, der in β endet. In $G - M$ endet dieser Weg in einem Ende $\beta' \in Y_j$ von $G - M$, das Strahlen enthält, die in G in β liegen. Es ist klar, daß β' auch in der Menge Y^* und damit β in Z^* liegt. Da dies im Widerspruch zur Wahl von P steht, gilt $\beta \notin X_j$, d.h. P muß eine Ecke aus $V[\mathcal{W}_j]$ treffen. Diese Ecke liegt dann auch in $V[\mathcal{V}_j]$, in $V[\mathcal{V}^*]$, in $V[\mathcal{W}^*]$ und in $V[\mathcal{W}]$. Es gilt also:

(III) Jeder α - B -Weg in G , der Z^* vermeidet, trifft $V[\mathcal{W}]$.

Ist denn nun $\mathcal{W} \cup (\alpha)$ wie versprochen eine kleine $A \rightarrow B$ -Welle in G , bzw. ist Z^* ein A - B -Trenner in G ?

Angenommen, in G gibt es einen A - B -Weg Q , der Z^* vermeidet. Entweder gilt dann $V(Q) \cap M \neq \emptyset$ oder Q ist in $G - M$ ein $(A - \alpha)'$ - B' -Weg. Gibt es eine Ecke $m \in V(Q) \cap M$, so gibt es wegen (I) auch einen α - m -Weg R , der ganz in M liegt. RmQ ist dann ein α - B -Weg in G , der Z^* vermeidet.

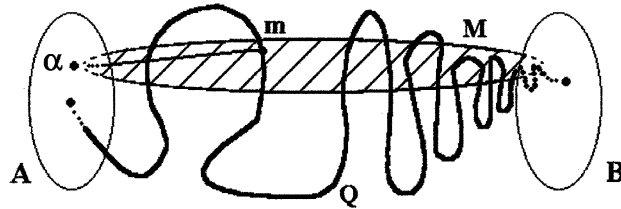


Abb. 7.8 Ein α - m -Weg, der ganz in M liegt.

Ist aber Q in $G - M$ ein $(A - \alpha)'$ - B' -Weg, so muß er dort Y^* treffen, es muß also in $G - M$ einen Punkt $y \in Y^* \cap V(Q)$ geben. Gilt $y \in Y_V^*$, so liegt y in G in Z^* , ist $y \in Y^* \cap B'_\Omega$, so liegt in G das Ende aus B , zu dem Strahlen aus y gehören, in Z^* . Da Q in G nach Annahme Z^* nicht trifft, muß also $y \in Y^* \cap (A - \alpha)'_\Omega$ gelten. In y beginnt daher ein trivialer Weg aus $\mathcal{V}^*$. Sei $y' \in \Omega(G)$ das Ende aus A , in dem Strahlen aus y liegen. Weil Q Z^* vermeidet, startet in y' ein nichttrivialer Weg W aus $\mathcal{W}$. In $G - M$ ist W ein Weg aus $\mathcal{V}^*$, startet aber nicht in y . y' wurde also in $G - M$ in wenigstens zwei Enden aufgespalten, das, in dem W startet, und y .

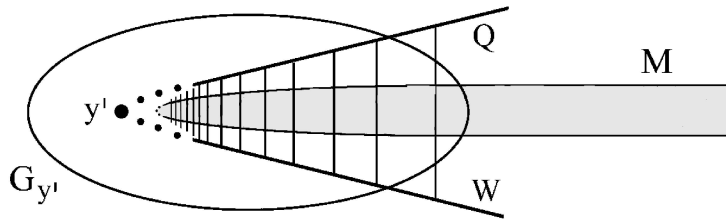


Abb. 7.9 Q und W sind durch unendlich viele Wege miteinander verbunden.

In $G_{y'}$ sind dann W und Q durch unendlich viele disjunkte Wege verbunden, die alle M treffen. D.h., Q ist in $G_{y'}$ durch unendlich viele disjunkte Wege mit M verbunden. Weil $|Z^* \cap V(G_{y'})| < |S_{y'}| + 1$ gilt, können höchstens $|S_{y'}| + 1$ dieser Wege Z^* treffen; es gibt also einen M - $V(Q)$ -Weg (m, P, q) in $G_{y'}$, der Z^* vermeidet. Wegen (I) gibt es auch einen α - m -Weg (α, P', m) , der ganz in M liegt. $P'mPqQ$ ist dann ein α - B -Weg in G , der Z^* umgeht.

Mit dem A - B -Weg Q , der Z^* vermeidet, existiert also auch ein α - B -Weg Q' in G , der Z^* nicht trifft. Q' trifft wegen (III) $V[\mathcal{W}]$. Q' besitzt sogar eine letzte Ecke w in $V[\mathcal{W}]$, denn Q' endet nicht in Z^* und kann deshalb keinen Weg aus $\mathcal{W}$ unendlich oft treffen, und wegen der Diskretheit von $A \cup B$ kann Q' auch nicht unendlich viele verschiedene Wege aus $\mathcal{W}$ treffen.

Angenommen, es gibt eine Ecke $m \in M$, die nach w auf Q' liegt. Dann existiert wegen (I) auch ein α - m -Weg R , der ganz in M liegt. RmQ' ist dann ein α - B -Weg in G , der wegen (III) eine Ecke w' mit $V[\mathcal{W}]$ gemeinsam haben muß. Wegen (II) muß w' auf $\dot{m}Q'$ liegen. Dies ist aber ein Widerspruch zur Wahl von w als letzter Ecke von Q' in $V[\mathcal{W}]$.

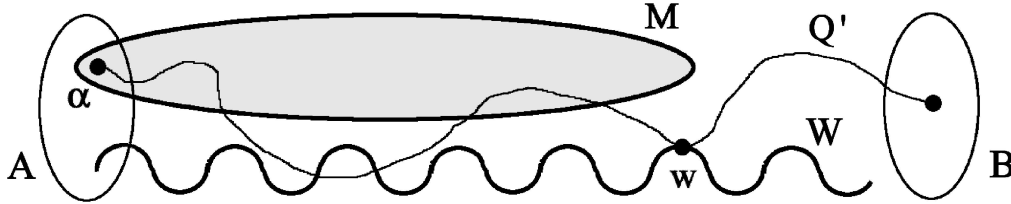


Abb. 7.10 WwQ' vermeidet Z^* .

Nun sei W der Weg aus $\mathcal{W}$, auf dem w liegt. Dann ist WwQ' ein $(A - \alpha)'$ - B' -Weg in $G - M$. Offensichtlich treffen sich $W\dot{w}$ und Y^* , auch wQ' umgeht Y^* , weil Q' in G die Menge Z^* nicht trifft. WwQ' vermeidet also Y^* , was im Widerspruch dazu steht, daß $(\mathcal{V}^*, Y^*)$ in $G - M$ eine $(A - \alpha)' \rightarrow B'$ -Welle ist.

Wenn man die Aussage von Lemma 7.1 negiert, existiert also in G eine kleine $A \rightarrow B$ -Welle, die es nach der Voraussetzung des Lemmas nicht geben darf. Damit ist Lemma 7.1 - und mit ihm Satz 1 - bewiesen. $\square$

Referenzen:

- [1] R. Aharoni: Menger's Theorem for Countable Graphs, J. Combin. Theory, Ser. **B** **31**, (1987) 303-313
- [2] R. Diestel: *Graphentheorie*, Springer, Berlin, 1996.
- [3] R. Halin: A Note on Menger's Theorem for Infinite Locally Finite Graphs, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **40**, (1974) 111-114
- [4] N. Polat: A Mengerian Theorem for Infinite Graphs with Ideal Points, J. Combin. Theory, Ser. **B** **51**, (1991) 248-255