19.06.2009

Schriftliche Abiturprüfung

Mathematik

Hinweise und Beispiele zu den
zentralen schriftlichen Prüfungsaufgaben

Teil 3: Stochastik

Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung

Impressum

Herausgeber:
Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung
Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung
Hamburger Straße 31, 22083 Hamburg

Referat:	Mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Unterricht
Referatsleitung:	Werner Renz
Fachreferent Mathematik:	Winfried Euba

Redaktion:
Waltraut Barthel, Gymnasium Tonndorf
Manfred Dabelstein, Wirtschaftsgymnasium Harburg (H 10)
Dr. Janina Fehrmann, Hansa-Gymnasium Bergedorf
Stefan Gottuk, Gymnasium Hamm
Jochen W. Griese, Wirtschaftsgymnasium Harburg (H 10)
Ulrike Gutschner, Gelehrtenschule des Johanneums
Dr. Klaus Henning, Christianeum
Thea Hufschmidt, Sophie-Barat-Schule
Reinhard Janz, Technisches Gymnasium (G 16)
Gerd Johänning, Wirtschaftsgymnasium (H 2)
Dr. Ulrich Kotzott, Gymnasium Willhöden
Dr. Wolfgang Löding, LIQ
Antje Loose, Charlotte-Paulsen-Gymnasium
Ursula Mersiowsky, Gymnasium Oberalster
Gerd Muhra, Gesamtschule Mümmelmannsberg
Kerstin Ottenberg, Gymnasium Kirchdorf/Wilhelmsburg
Renate Otter, Peter-Petersen-Schule
Annelies Paulitsch, LIA und Gymnasium Osdorf
Helmut Springstein, LIF und Gymnasium Othmarschen
Monika Thomas-Tschirschnitz, Hansa-Kolleg
Dieter Stahl, Alexander-von-Humboldt-Gymnasium
Karl-Heinz Wischnewski, Technisches Gymnasium (G 17)

Internet: http://www.mint-hamburg.de/abitur/

5. überarbeitete Auflage

Hamburg 2009

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 4

1 Regelungen für die schriftliche Abiturprüfung 5

2 Anforderungsbereiche 5

3 Liste der Operatoren 7

4 Aufgaben 10

4.1 Kurs auf grundlegendem Niveau 11

4.2 Kurs auf erhöhtem Niveau 39

5 Erwartungshorizonte und Bewertung 69

5.1 Kurs auf grundlegendem Niveau 69

5.2 Kurs auf erhöhtem Niveau 113

6 Anhang: Tabellen 160

Vorwort

Sehr geehrte Kolleginnen und Kollegen,

mit der zum August 2003 in Kraft tretenden *Ausbildungs- und Prüfungsordnung zum Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife* (APOAH) wurden zentrale Elemente in der schriftlichen Abiturprüfung eingeführt.

Die Abituraufgaben beziehen sich im Fach Mathematik auf Schwerpunkte, die den Schulen jeweils am Ende der Vorstufe für das Abitur dieses Jahrgangs von der Behörde für Bildung und Sport in einer eigenen Verwaltungsvorschrift zur Kenntnis gegeben werden.

In der Ihnen hier vorgelegten ergänzenden Handreichung, die die entsprechende Verwaltungsvorschrift ausführt, werden Ihnen Beispiele gezeigt, wie die Aufgaben für die schriftlichen Abiturprüfungen ab dem Jahre 2007 formuliert werden.

Die Aufgabenbeispiele entsprechen in den meisten Fällen der Ihnen bekannten Hamburger *Richtlinie für die Aufgabenstellung und Bewertung der Leistungen in der Abiturprüfung*. Die Arbeitsgruppe, die die Handreichung erstellte, hatte den Auftrag, Aufgabenbeispiele auf der Grundlage des neuen Rahmenplans Mathematik für die gymnasiale Oberstufe 2004 zu formulieren.

Die Aufgaben enthalten verbindlich definierte Arbeitsaufträge („Operatoren“); in den Erwartungshorizonten werden die Kriterien und die Anforderungen u. a. für eine „gute“ und für eine „ausreichende“ Leistung beschrieben. Beides dient dem Ziel, mehr Verbindlichkeit und Vergleichbarkeit zu schaffen.

Hinzu kommt, dass die *Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung* (EPA) für alle Prüfungsfächer derzeit überarbeitet werden. Für Mathematik liegen sie bereits vor. Wenn alle neuen EPA als KMK-Beschlüsse vorliegen, wird die oben genannte Hamburger Richtlinie überarbeitet und den jeweiligen EPA angepasst werden. Erst dann wird es für die Aufgabenarten und die Anforderungen vermutlich Veränderungen geben.

In der Hoffnung, dass die vorliegende Handreichung hilfreich für Sie und Ihre Unterrichtsarbeit ist, wünsche ich Ihnen und Ihren Schülerinnen und Schülern eine erfolgreiche Vorbereitung auf das Abitur.

Den Mitgliedern der Arbeitsgruppe, die diese Handreichung erstellte, möchte ich sehr herzlich für die geleistete intensive und zeitaufwendige Arbeit danken.

Werner Renz

1 Regelungen für die schriftliche Abiturprüfung

Die Fachlehrerin, der Fachlehrer

- erhält **sechs** Aufgaben – **I.1, I.2** (Schwerpunkt Analysis) und **II.1, II.2** (Schwerpunkt Lineare Algebra /Analytische Geometrie) und **III.1, III.2** (Schwerpunkt Stochastik),
- wählt aus genau zwei Bereichen **I und II** *oder* **I und III** genau **zwei** Aufgaben aus.

Die Abiturientin, der Abiturient

- erhält **die beiden** Aufgaben und bearbeitet diese,
- vermerkt auf der Reinschrift, welche Aufgabe sie/er bearbeitet hat,
- ist verpflichtet, die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben vor Bearbeitungsbeginn zu überprüfen (Anzahl der Blätter, Anlagen usw.).

Bearbeitungszeit:	Kurs auf grundlegendem Niveau: **240** Minuten Kurs auf erhöhtem Niveau: **300** Minuten Eine Vorbereitungs-, Lese- und Auswahlzeit von maximal 30 Minuten kann der Arbeitszeit vorgeschaltet werden. In dieser Zeit darf noch nicht mit der Lösung der Aufgaben begonnen werden.
Hilfsmittel:	Taschenrechner (nicht programmierbar und nicht grafikfähig), Formelsammlung, Rechtschreiblexikon

Die in den zentralen schriftlichen Abituraufgaben verwendeten **Operatoren** (Arbeitsaufträge) werden im Anhang genannt und erläutert.

Grundlage der schriftlichen Abiturprüfung ist der geltende Rahmenplan in der Fassung von 2009. **Der inhaltliche Rahmen für die schriftliche Abiturprüfung wird durch die *Hinweise und Beispiele zu den zentralen schriftlichen Prüfungsaufgaben* festgelegt und konkretisiert**. Die wechselnden curricularen Vorgaben, Konkretisierungen und Schwerpunktsetzungen werden den Schulen jeweils im zweiten Semester der Vorstufe bekannt gegeben. Für die schriftliche Abiturprüfung können sie dem Heft *Schriftliche Abiturprüfung - Regelungen für die zentralen schriftlichen Prüfungsaufgaben* entnommen werden.

2 Anforderungsbereiche

Die Anforderungen in der Abiturprüfung unterscheiden sich nach der Art, der Komplexität und dem Grad der Selbstständigkeit der geforderten Leistung; sie verlangen unterschiedliche Arbeitsweisen. Zur Erhöhung der Transparenz und Vergleichbarkeit lassen sich drei Anforderungsbereiche beschreiben, ohne dass in der Praxis der Aufgabenstellung die drei Anforderungsbereiche immer scharf voneinander getrennt werden können. Daher ergeben sich bei der Zuordnung der Teilaufgaben zu Anforderungsbereichen Überschneidungen.

Die zentralen Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung ermöglichen Leistungen in den folgenden drei Anforderungsbereichen mit einem Schwerpunkt im Anforderungsbereich II:

Anforderungsbereich I

Der Anforderungsbereich I umfasst die Wiedergabe von Sachverhalten und Kenntnissen im gelernten Zusammenhang sowie die Beschreibung und Anwendung geübter Arbeitstechniken und Verfahrensweisen in einem wiederholenden Zusammenhang.

Im Fach Mathematik kann zum Anforderungsbereich I gehören:

- Bereitstellen von Definitionen, Sätzen und einfachen Beweisen
- Beschreiben eines einfachen Sachverhalts, eines bekannten Verfahrens oder eines standardisierten Lösungsweges
- Anfertigen von Skizzen auf eine aus dem Unterricht bekannte Weise; Skizzieren der Graphen von Grundfunktionen
- Ausführen von geübten Algorithmen wie z.B. Ableiten und Integrieren in einfachen Fällen, Lösen von einfachen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen nach eingeübten Verfahren
- Verwenden des Rechners als Werkzeug z.B. zum Zeichnen eines geeigneten Ausschnitts des Graphen einer Funktion, beim Lösen von Gleichungssystemen, beim Berechnen von Ableitungen und von Integralen
- Bestimmen der Extremwerte einer Funktion in Fällen, in denen das eingeübte Verfahren unmittelbar zum Ziel führt
- Feststellen der Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden oder Ebenen mit Hilfe eines durch Übung vertrauten Verfahrens
- Bestimmen von Geraden- und Ebenengleichungen bei Vorgabe einfacher und gewohnter Bedingungen
- Darstellen statistischer Daten und Ermitteln statistischer Kenngrößen in einfachen Fällen
- Bestimmen und Berechnen von Wahrscheinlichkeiten in einfachen, vom Unterricht her vertrauten Zusammenhängen

Anforderungsbereich II

Der Anforderungsbereich II umfasst das selbstständige Auswählen, Anordnen, Verarbeiten und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Übung bekannten Zusammenhang und das selbstständige Übertragen und Anwenden des Gelernten auf vergleichbare neue Zusammenhänge und Sachverhalte.

Im Fach Mathematik kann zum Anforderungsbereich II gehören:

- Veranschaulichen und Beschreiben von Zusammenhängen bei bekannten Sachverhalten mit Hilfe von Bildern, Texten und Symbolen
- Dokumentieren eines Lösungsweges in sachgerechter mathematischer Form
- Verfassen eines mathematischen Kurzaufsatzes in bekannten Zusammenhängen
- Ausführen von Beweisen, deren Beweisstruktur aus dem Unterricht bekannt ist
- Anwenden von zentralen Begriffen in Beispielen, die in ihrer Struktur einfach sind
- Interpretieren charakteristischer Eigenschaften einer Funktion anhand ihres Graphen
- Übersetzen eines Schaubildes in einen Funktionsterm oder eines Funktionsterms in eine Skizze
- Anpassen von Funktionen an vorgegebene Bedingungen, wenn ähnliche Vorgehensweisen aus dem Unterricht bekannt sind
- Durchführen vollständiger Fallunterscheidungen in überschaubaren Situationen
- gezieltes Verwenden des Rechners bei der Lösung komplexerer Probleme
- Übersetzen einer Ausgangssituation in ein geeignetes mathematisches Modell (z.B. Koordinatensystem, Funktionsterm, Gleichungssystem, Wahrscheinlichkeitsverteilung), wenn ähnliche Modellierungen aus dem Unterricht bekannt sind

- sachgerechtes und begründetes Argumentieren bei der Darstellung eines Modellansatzes oder bei der Auswahl eines Lösungsweges
- verständiges Anwenden der Beziehung zwischen Änderungsrate und Gesamtänderung in bekannten Situationen
- analytisches Beschreiben von geometrischen Objekten, wobei die sie bestimmenden Parameter erst aus anderen Bedingungen erschlossen werden müssen
- Vergleichen und Bewerten verschiedener Lösungsansätze in einem durch Übung bekannten Zusammenhang
- Analysieren und Modellieren stochastischer Prozesse in aus dem Unterricht bekannter Weise
- Durchführen eines aus dem Unterricht bekannten Verfahrens der beurteilenden Statistik
- Beschaffen, Strukturieren, Auswählen und Auswerten von Informationen zu einer überschaubaren Problemstellung in einer im Unterricht vorbereiteten Vorgehensweise
- Präsentieren von Arbeitsergebnissen in übersichtlicher, gut strukturierter Form

Anforderungsbereich III

Der Anforderungsbereich III umfasst das zielgerichtete Verarbeiten komplexer Sachverhalte mit dem Ziel, zu selbstständigen Lösungen, Gestaltungen oder Deutungen, Folgerungen, Begründungen und Wertungen zu gelangen. Dabei wählen die Schülerinnen und Schüler aus den gelernten Arbeitstechniken und Verfahren die zur Bewältigung der Aufgabe geeigneten selbstständig aus, wenden sie in einer neuen Problemstellung an und beurteilen das eigene Vorgehen kritisch.

Im Fach Mathematik kann zum Anforderungsbereich III gehören:

- kreatives Übersetzen einer komplexeren Ausgangssituation in ein geeignetes mathematisches Modell, ohne dass dies in vergleichbaren Zusammenhängen geübt wurde
- planvolles, begründetes Nutzen und Bewerten von Informationen bei komplexeren oder offeneren Problemstellungen
- Auffinden eines Lösungsansatzes für Probleme, bei denen Kenntnisse aus verschiedenen Teilgebieten der Mathematik verbunden werden müssen, ohne dass dies in vergleichbaren Zusammenhängen geübt wurde
- Überprüfen und Bewerten der Vorgehensweise sowie Interpretieren und Beurteilen der Ergebnisse z.B. bei einer Modellierung oder beim Umgang mit Informationen
- Anwenden zentraler Begriffe und Vorgehensweisen in komplexeren Zusammenhängen
- Verallgemeinern eines Sachverhalts, der nur von Beispielen her bekannt ist
- Ausführen eines Beweises, zu dem eigenständige Beweisgedanken erforderlich sind

3 Liste der Operatoren

Mehr noch als bei dezentralen Aufgaben, die immer im Kontext gemeinsamer Erfahrungen der Lehrkräfte und Schüler mit vorherigen Klausuren stehen, müssen zentrale Prüfungsaufgaben für die Abiturientinnen und Abiturienten eindeutig hinsichtlich des Arbeitsauftrages und der erwarteten Leistung formuliert sein. Die in den zentralen schriftlichen Abituraufgaben verwendeten Operatoren (Arbeitsaufträge) werden in der folgenden Tabelle definiert und inhaltlich gefüllt. Entsprechende Formulierungen in den Klausuren der Studienstufe sind ein wichtiger Teil der Vorbereitung der Schülerinnen und Schüler auf das Abitur.

Neben Definitionen und Beispielen enthält die Tabelle auch Zuordnungen zu den Anforderungsbereichen **I**, **II** und **III** (vgl. die *Richtlinie für die Aufgabenstellung und Bewertung der Leistungen in der Abiturprüfung*), wobei die konkrete Zuordnung auch vom Kontext der Aufgabenstellung abhängen kann und eine scharfe Trennung der Anforderungsbereiche nicht immer möglich ist.

Operatoren	Definitionen	Beispiele
Angeben, nennen **I**	Ohne nähere Erläuterungen und Begründungen, ohne Lösungsweg aufzählen	Geben Sie drei Punkte an, die in der Ebene liegen. Nennen Sie drei weitere Beispiele zu ...
Anwenden **I – II**	Einen bekannten Sachverhalt oder eine Handlungsanweisung, Formel, Vorschrift auf Elemente ihres jeweiligen Definitionsbereichs anwenden.	Wenden Sie das in Matrix L gegebene Populationsmodell auch auf den Bestand B an. Wenden Sie die Funktionsgleichung auch auf die gegebenen Zahlen an.
Begründen **II–III**	Einen angegebenen Sachverhalt auf Gesetzmäßigkeiten bzw. kausale Zusammenhänge zurückführen. Hierbei sind Regeln und mathematische Beziehungen zu nutzen.	Begründen Sie, dass die Funktion nicht mehr als drei Wendestellen aufweisen kann. Begründen Sie die Zurückweisung der Hypothese.
Berechnen **I**	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses.
Beschreiben **I–II**	Sachverhalt oder Verfahren in Textform unter Verwendung der Fachsprache in vollständigen Sätzen darstellen (hier sind auch Einschränkungen möglich: „Beschreiben Sie in Stichworten“)	Beschreiben Sie den Bereich möglicher Ergebnisse. Beschreiben Sie, wie Sie dieses Problem lösen wollen, und führen Sie danach Ihre Lösung durch.
Bestätigen **I–II**	Eine Aussage oder einen Sachverhalt durch Anwendung einfacher Mittel (rechnerischer wie argumentativer) sichern. Der Anspruch liegt deswegen unterhalb von „Zeigen“ oder „Beweisen“.	Bestätigen Sie, dass die gegebene Funktion eine Stammfunktion zur Ursprungsfunktion ist. Bestätigen Sie die Parallelität der beiden Ebenen. Bestätigen Sie, dass in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit unter 0,1 liegt.
Bestimmen, ermitteln **II–III**	Einen Lösungsweg darstellen und das Ergebnis formulieren (die Wahl der Mittel kann unter Umständen eingeschränkt sein)	Ermitteln Sie grafisch den Schnittpunkt. Bestimmen Sie aus diesen Werten die Koordinaten der beiden Punkte.
Beurteilen **III**	Zu einem Sachverhalt ein selbstständiges Urteil unter Verwendung von Fachwissen und Fachmethoden formulieren	Beurteilen Sie, welche der beiden vorgeschlagenen modellierenden Funktionen das ursprüngliche Problem besser darstellt.
Beweisen, widerlegen **III**	Beweisführung im mathematischen Sinne unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischer Schlüsse und Äquivalenzumformungen, ggf. unter Verwendung von Gegenbeispielen	Beweisen Sie, dass die Gerade auf sich selbst abgebildet wird.
Entscheiden **II**	Bei Alternativen sich begründet und eindeutig auf eine Möglichkeit festlegen	Entscheiden Sie, für welchen der beiden Beobachter der Aufschlagpunkt näher ist. Entscheiden Sie, welche der Ihnen bekannten Verteilungen auf die Problemstellung passt.

Operatoren	Definitionen	Beispiele
Ergänzen, vervollständigen **I**	Tabellen, Ausdrücke oder Aussagen nach bereits vorliegenden Kriterien, Formeln oder Mustern füllen.	Ergänzen Sie die Tabelle der Funktionswerte. Vervollständigen Sie die Zeichnung mit den in der Aufgabestellung gegebenen Punkten.
Erstellen **I**	Einen Sachverhalt in übersichtlicher, meist fachlich üblicher oder vorgegebener Form darstellen	Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Funktion.
Herleiten **II**	Die Entstehung oder Ableitung eines gegebenen oder beschriebenen Sachverhalts oder einer Gleichung aus anderen oder aus allgemeineren Sachverhalten darstellen	Leiten Sie die gegebene Formel für die Stammfunktion her.
(Re-) Interpretieren **II–III**	Die Ergebnisse einer mathematischen Überlegung rückübersetzen auf das ursprüngliche Problem	Interpretieren Sie: Was bedeutet Ihre Lösung für die ursprüngliche Frage?
Skizzieren **I–II**	Die wesentlichen Eigenschaften eines Objektes grafisch darstellen (auch Freihandskizze möglich)	Skizzieren Sie die gegenseitige Lage der drei Körper.
Untersuchen **II**	Sachverhalte nach bestimmten, fachlich üblichen bzw. sinnvollen Kriterien darstellen	Untersuchen Sie die Funktion … Untersuchen Sie, ob die Verbindungskurve ohne Knick in die Gerade einmündet.
Vergleichen **II–III**	Nach vorgegebenen oder selbst gewählten Gesichtspunkten Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede ermitteln und darstellen	Vergleichen Sie die beiden Vorschläge … nach der von den Kurven eingeschlossenen Fläche.
Zeichnen, grafisch darstellen **I–II**	Eine hinreichend exakte grafische Darstellung anfertigen	Zeichnen Sie den Graphen der Funktion. Stellen Sie die Punkte und Geraden im Koordinatensystem mit den gegebenen Achsen dar.
Zeigen, nachweisen **II–III**	Eine Aussage, einen Sachverhalt nach gültigen Schlussregeln, Berechnungen, Herleitungen oder logischen Begründungen bestätigen	Zeigen Sie, dass das betrachtete Viereck ein Drachenviereck ist.
Zuordnen **I–II**	Ohne tiefer gehende Erläuterung eine Verbindung zwischen zwei Listen herstellen	Ordnen Sie die Graphen den gegebenen Gleichungen zu.

4 Aufgaben

Die folgenden Aufgaben sind Beispiele für zentrale schriftliche Abiturprüfungen im Fach Mathematik zu den oben genannten curricularen Vorgaben, Konkretisierungen und Schwerpunktsetzungen.

Außer der Aufgabenstellung enthalten die Beispiele den Erwartungshorizont, Hinweise zu den Operatoren mit Bezug zu den drei Anforderungsbereichen und Bewertungshinweise:

Für die Bewertung der Gesamtleistung der schriftlichen Abiturprüfung gilt die folgende Zuordnungstabelle:

Erreichte Gesamtpunktzahl	Erreichte Gesamtleitung in Prozent	Bewertung in Punkten
≥ 190 BWE	≥ 95 %	15
≥ 180 BWE	≥ 90 %	14
≥ 170 BWE	≥ 85 %	13
≥ 160 BWE	≥ 80 %	12
≥ 150 BWE	≥ 75 %	11
≥ 140 BWE	≥ 70 %	10
≥ 130 BWE	≥ 65 %	9
≥ 120 BWE	≥ 60 %	8
≥ 110 BWE	≥ 55 %	7
≥ 100 BWE	≥ 50 %	6
≥ 90 BWE	≥ 45 %	5
≥ 80 BWE	≥ 40 %	4
≥ 66 BWE	≥ 33 %	3
≥ 52 BWE	≥ 26 %	2
≥ 38 BWE	≥ 19 %	1
< 38 BWE	< 19 %	0

Bewertungskriterien für die Noten „gut“ und „ausreichend“

Die Note „gut“ (11 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss die Prüfungsleistung in ihrer Gliederung, in der Gedankenführung, in der Anwendung fachmethodischer Verfahren sowie in der fachsprachlichen Artikulation den Anforderungen voll entsprechen. Ein mit „gut“ beurteiltes Prüfungsergebnis setzt voraus, dass neben Leistungen in den Anforderungsbereichen I und II auch Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht wurden.

Die Note „ausreichend“ (5 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss mindestens eine Teilaufgabe, die Anforderungen im Bereich II aufweist, vollständig und weitgehend richtig bearbeitet worden sein.

4.1 Kurs auf grundlegendem Niveau

Aufgabe 1 Sicherheitssystem

In der Firma Gammamobil sollen die Produktionsabläufe automatisch überwacht werden.

Zuerst betrachten wir die Firma Betasecure, die die Überwachungsgeräte herstellt und gleichzeitig ihre Zulieferfirma Alfatronic, die die verwendeten elektronischen Bauteile herstellt.

a) Ein Überwachungsgerät besteht aus 30 Bauteilen ($T_1, \ldots, T_{30}$). Das Überwachungsgerät ist nur dann funktionstüchtig, wenn alle 30 Bauteile einwandfrei arbeiten. Die Wahrscheinlichkeit, dass es nicht funktioniert, beträgt nach dem Zusammenbau für jedes einzelne Bauteil 2 %. Diese 30 Ausfallereignisse werden dabei als stochastisch unabhängig voneinander betrachtet.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eines solches Überwachungsgerät nicht funktioniert. **10 P**

b) Das Ergebnis von a) ist sehr unbefriedigend, deshalb wird ein verbessertes Überwachungsgerät entwickelt. Dabei werden die 30 Teile doppelt eingebaut und zwar so miteinander verschaltet, dass dann, wenn ein Teil ausfällt, das zweite baugleiche Teil dessen Funktion noch übernehmen kann.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes zusammen geschaltetes Teilepaar seine Funktion nicht erfüllt
(Ausfallwahrscheinlichkeit eines jeden Teils wie in a)).
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das neue Überwachungsgerät nach dem Zusammenbau nicht funktioniert. **10 P**

c) Die Fehler der Überwachungsgeräte entstehen in der Firma Betasecure beim Zusammenbau der Bauteile, aber auch, weil die Zulieferfirma Alfatronic fehlerhafte Bauteile liefert. Alfatronic sichert zwar zu, dass der Ausschussanteil (Anteil an unbrauchbaren Teilen) höchstens 1 % beträgt, doch die belieferte Firma Betasecure richtet trotzdem eine eigene Qualitätskontrolle ein.
Da es zu teuer ist, bei jeder Lieferung alle Bauteile zu überprüfen, soll immer nur ein Hypothesentest durchgeführt werden. Dabei ist geplant, jeweils nur eine Stichprobe von 50 Stück zu prüfen. Da es Betasecure vor allem darauf ankommt sicherzustellen, dass die zugesicherte Ausschussquote von höchstens 1 % eingehalten wird, wählt sie als Nullhypothese die Annahme, dass diese Zusicherung ***nicht erfüllt*** *ist, um diese dann möglichst mit einem signifikanten Ergebnis (5 % -Niveau) zu verwerfen. Wenn dies der Fall ist, soll die Lieferung akzeptiert werden.*

- *Begründen Sie, dass so für die Anzahl* X *der unbrauchbaren Teile kein passender Verwerfungsbereich angegeben werden kann, weil die Stichprobengröße dazu zu klein ist.*
- *Bestimmen Sie die Mindestgröße der Stichprobe mit dem dann zugehörigen Verwerfungsbereich, damit das Verfahren doch – wie geplant – durchgeführt werden kann.* ***10 P***

d) Nach dem Zusammenbau wird bei Betasecure jedes Überwachungsgerät noch dreimal unabhängig voneinander kontrolliert. Ein fehlerhaftes Gerät wird bei jeder Einzelkontrolle mit der Wahrscheinlichkeit 0,9 entdeckt.

- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein fehlerhaftes Gerät bei der Gesamtkontrolle nicht entdeckt wird.
- Bestimmen Sie auch die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 fehlerhaften Geräten alle entdeckt werden. **20 P**

Betrachten Sie jetzt den eigentlichen Produktionsablauf in der Firma Gammamobil, den die Überwachungsgeräte überwachen sollen. Unterstellen Sie dabei, dass die Überwachungsgeräte funktionstüchtig sind.

e) Erfahrungen haben gezeigt, dass bei 1000 Produktionsabläufen durchschnittlich 20 Störungen auftreten.
Bei den Überwachungsgeräten kann es dennoch mit Wahrscheinlichkeit 0,5 % vorkommen, dass ein Produktionsablauf ein Warnsignal erzeugt, wenn gar keine Störung vorliegt.
Es kann auch mit Wahrscheinlichkeit 1% vorkommen, dass kein Warnsignal erzeugt wird, wenn eine Störung vorliegt.

Bestätigen Sie (z.B. mit Hilfe eines Baumdiagramms), dass die Wahrscheinlichkeit,

i) dass ein Produktionsablauf durch ein Alarmsignal unterbrochen wird, ungefähr 2,5 % beträgt,

ii) dass im Falle eines Alarms gar keine Störung im Produktionsablauf vorliegt, ungefähr 20 % beträgt,

iii) dass ein Produktionsablauf gestört abläuft und das Überwachungsgerät diese Störung nicht entdeckt, ungefähr $\frac{1}{5000}$ beträgt. **30 P**

Die drei Ergebnisse geben Anlass zum Nachdenken: Sehr erfreulich ist das Ergebnis von iii), sehr unerfreulich das Ergebnis von ii). Bei Alarm wird nämlich der ganze Produktionsablauf gestoppt, was aufwendig und kostenintensiv ist. Das passiert zwar relativ selten (2,5 %), bedeutet aber dann ziemlich oft Fehlalarm (20 %).

Deshalb werden versuchsweise drei der Überwachungsgeräte gleichzeitig eingesetzt, und es wird nur dann Alarm ausgelöst, wenn mindestens zwei der Geräte eine Störung anzeigen.

f) Bestimmen Sie die beiden in e) betrachteten Wahrscheinlichkeiten ii) und iii) erneut und zwar

- einerseits unter der Annahme, dass das „Fehlverhalten“ der Überwachungsgeräte seine Ursachen nur in Besonderheiten der Produktionsabläufe bei Gammamobil hat und
- andererseits unter der Annahme, dass das „Fehlverhalten“ der Überwachungsgeräte nur durch zufällig und unabhängig auftretende interne Eigenschaften der Überwachungsgeräte verursacht wird. **20 P**

Aufgabe 2 „Schwarzfahrer“

Nach Angaben des HVV beträgt der Anteil der „Schwarzfahrer“, das sind Fahrgäste, die keinen gültigen Fahrschein vorzeigen können, am gesamten Fahrgastaufkommen etwa 3 %.

Zwei Kontrolleure steigen an der Haltestelle „Berliner Tor“ in eine Bahn der Linie U3 und kontrollieren alle 25 Fahrgäste im Wagen.

An der Haltestelle „Hauptbahnhof Süd“ steigen sie um in einen Zug der Linie U1, in dem sie weitere 18 Fahrgäste kontrollieren.

Es soll vereinfachend angenommen werden, dass die Anzahl der Schwarzfahrer bei den Kontrollen binomialverteilt ist.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
   - die Kontrolleure bei beiden Kontrollen zusammen genau 2 Schwarzfahrer ermitteln.
   - die Kontrolleure bei den Kontrollen mindestens einen Schwarzfahrer ermitteln.

   Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kontrolleure erst in der Linie U1 auf den ersten Schwarzfahrer treffen. **20 P**

b) Berechnen Sie, wie viele Schwarzfahrer die Kontrolleure bei ihrer oben beschriebenen Kontrolle erwarten können. **5 P**

c) Bestimmen Sie, wie viele Fahrgäste überprüft werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % mindestens ein Schwarzfahrer ermittelt wird. **15 P**

Genaue Untersuchungen zeigen, dass die Anteile der Schwarzfahrer in den verschiedenen Linien deutlich unterschiedlich sind. In der Linie U3 sind 2 % Schwarzfahrer zu erwarten, in der Linie U1 dagegen 4 %.

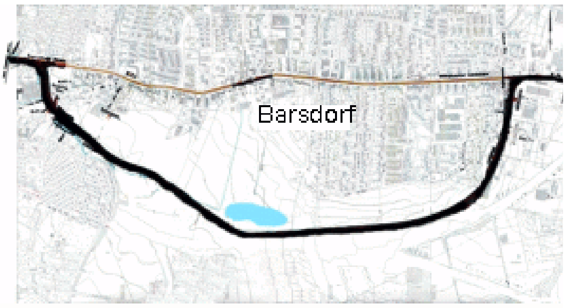
d) Berechnen Sie aufgrund dieser genaueren Informationen noch einmal die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kontrolleure bei der oben beschriebenen Kontrolle mindestens einen Schwarzfahrer ermitteln.
   Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil a) und geben Sie Gründe für die Abweichung an. **10 P**

e) Der HVV geht davon aus, dass 10 % der Schwarzfahrer erwischt werden. Ein erwischter Schwarzfahrer muss 40 € erhöhtes Beförderungsentgelt zahlen. Besitzt er eine Zeitkarte, die er nur zu Hause vergessen hat, muss er diese innerhalb einer Woche vorzeigen und zahlt dann nur eine Bearbeitungsgebühr von 5 €. Dieser Fall trifft etwa bei der Hälfte der erwischten Schwarzfahrer zu. Gehen Sie davon aus, dass jeder nicht erwischte Schwarzfahrer im Durchschnitt entgangene Einnahmen von 3 € verursacht.
Untersuchen Sie, ob das erhöhte Beförderungsentgelt angehoben werden muss, um die erwarteten Verluste, die durch die Schwarzfahrer entstehen, auszugleichen. Die Kosten, die die Entlohnung der Kontrolleure verursacht, sollen hier unberücksichtigt bleiben.
Berechnen Sie gegebenenfalls ein erhöhtes Beförderungsentgelt, bei dem Kostendeckung zu erwarten ist. **20 P**

f) Nach einer erheblichen Preiserhöhung befürchtet der HVV, dass der durchschnittliche Anteil der Schwarzfahrer deutlich über 3 % angestiegen ist. Um diese Vermutung zu untersuchen, wird eine Großkontrolle durchgeführt, bei der 10 000 Fahrgäste kontrolliert werden.
Der HVV ist unsicher, bei welchen Ergebnissen der Großkontrolle er die oben genannten Befürchtungen als statistisch begründet ansehen sollte. Geben Sie eine Entscheidungshilfe an und begründen Sie diese. **20 P**

g) Beurteilen Sie die oben gemachte Annahme, dass die Anzahl der Schwarzfahrer binomialverteilt ist. **10 P**

Aufgabe 3 Umgehungsstraße



Die Gemeinde Barsdorf plant eine Umgehungsstraße. Dieses Projekt ist bei den Barsdorfer Bürgern und Kommunalpolitikern gleichermaßen umstritten.
Bei der letzten Gemeinderatswahl erhielten die Parteien in Barsdorf folgende Stimmenanteile:
DCU 44,1 %, DPS 35,4 %, AFB 12,5 %, Sonstige 8 %.
Die Wahlbeteiligung betrug trotz des kontroversen Themas nur 75,5 %.
Eine Bürgerinitiative legt eine Umfrage vor, nach der in Barsdorf 47,5 % der DCU-Wähler, 75,3 % der DPS-Wähler und 94,5 % der AFB-Wähler gegen den Bau der Umgehungsstraße sind. Von den Wählern der restlichen Parteien und den Nichtwählern haben sich in der Umfrage jeweils 43,6 % gegen die Umgehungsstraße ausgesprochen.

a) Bestätigen Sie aus den Ergebnissen der Wahl und der Umfrage, dass ungefähr $p = 40\ \%$ der wahlberechtigten Bürger von Barsdorf die Umgehungsstraße befürworten. **20 P**

b) Stellen Sie die genannten Ergebnisse aus der Wahl und der Umfrage grafisch so dar, dass möglichst viele Informationen ablesbar sind. **15 P**

In den folgenden Aufgabenteilen sollen Sie mit $p = 60\ \%$ Gegnern der Umgehungsstraße und 40 % Befürwortern rechnen.

c) Aufgrund des Umfrageergebnisses fordert die Bürgerinitiative einen Volksentscheid über den Bau der Umgehungsstraße.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 50 zufällig ausgewählten Wahlberechtigten in Barsdorf mehr als die Hälfte gegen den Bau der Umgehungsstraße stimmen würden,
falls die Umfrageergebnisse der Bürgerinitiative richtig sind.. **15 P**

d) Die Bürgerinitiative führt eine Unterschriftensammlung gegen die Umgehungsstraße durch. Dabei gibt ein Bürger an, gegen die Umgehungsstraße zu sein. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei diesem Bürger um einen DCU-Wähler handelt. **15 P**

e) Auf einer Mitgliederversammlung der DCU haben sich 855 von 1298 Anwesenden gegen den Bau der Umgehungsstraße ausgesprochen.
In der nächsten Ausgabe des Wochenblatts wird von einem deutlichen Meinungswandel innerhalb der DCU gesprochen.
Ermitteln Sie, ob sich diese Behauptung der Zeitung statistisch rechtfertigen lässt. **20 P**

f) Trotz des Ergebnisses in e) hält der Bürgermeister von Barsdorf an der Umgehungsstraße fest. Er will mit Hilfe einer erneuten zufälligen Befragung von Barsdorfer Bürgern argumentieren, dass die Umgehungsstraße mehrheitsfähig ist. Er hofft, dass dann eine Mehrheit der Befragten für die Umgehungsstraße stimmt. Er kennt sich mit den Manipulationsmöglichkeiten statistischer Verfahren gut aus und überlegt, ob er bei einem Hypothesentest als Nullhypothese $p \leq 50\%$ oder $p \geq 50\%$ wählen sollte, und ob er eher eine größere ($n = 100$) oder eine kleinere ($n = 50$) Stichprobengröße wählen sollte, um sein Ziel zu erreichen.

Beurteilen Sie dieses Problemfeld, indem Sie einen möglichen Plan des Bürgermeisters bestimmen. **15 P**

Aufgabe 4 Sportschuhe

Eine Firma stellt Sportschuhe an zwei verschiedenen Standorten D und F her.

Die Schuhe werden paarweise in vier Arbeitsgängen gefertigt, die unabhängig voneinander sind.

In den Arbeitsgängen wird erfahrungsgemäß für ein Paar Sportschuhe die erforderliche Qualität mit folgenden Wahrscheinlichkeiten erreicht.

	Arbeitsgang 1	Arbeitsgang 2	Arbeitsgang 3	Arbeitsgang 4
	Zuschnitte	Sohlen pressen	Oberschuhe nähen	Zusammensetzen
Standort D	96,5 %	98 %	97 %	98 %
Standort F	94 %	93,5 %	83 %	96,5 %

a) Bestätigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit p_F, dass ein Paar Schuhe <u>nicht</u> dem Qualitätsstandard entspricht, für den Standort F mit $p_F \approx 0{,}30$ etwa dreimal so hoch ist wie für den Standort D. **(15P)**

Rechnen Sie deshalb mit $p_F = 0{,}3$ für den Anteil an produzierten Schuhen unzureichender Qualität am Standort F und mit $p_D = 0{,}1$ für den Anteil an produzierten Schuhen unzureichender Qualität am Standort D.

Für Qualitätssicherungsmaßnahmen sollen aus den Lieferungen fertiger Schuhe Stichproben entnommen werden. Nehmen Sie an, dass die Anzahl der Schuhe mit dem geforderten Qualitätsstandard jeweils <u>binomialverteilte</u> Zufallsgrößen sind.

Zunächst sollen die Lieferungen aus dem Standort F überprüft werden. Dazu werden einer Lieferung 50 Paare zufällig entnommen.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- <u>genau</u> 15 dieser Paare nicht dem Qualitätsstandard entsprechen,
- <u>mindestens</u> 12 dieser Paare nicht dem Qualitätsstandard entsprechen. **(15P)**

Vor der Auslieferung an den Handel werden im Zentrallager die Schuhe aus beiden Standorten D und F durchmischt und zu Lieferungen zusammengestellt. In jeder Lieferung sind 65 % der Schuhe aus dem Standort F, der andere Teil aus dem Standort D.
Es wird beschlossen, für alle Lieferungen eine Qualitätskontrolle durchzuführen. Dabei werden Schuhe mit unzureichender Qualität mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % entdeckt; diese entdeckten Paare werden aussortiert und vernichtet. Die Qualitätskontrolle ist so gut, dass keine fehlerfreien Paare aussortiert werden.

c) Bestätigen Sie, dass bei der Qualitätskontrolle ca. 20 % der insgesamt produzierten Paare aussortiert und vernichtet werden. **(15P)**

d) Ein Kunde kauft ein Paar Sportschuhe aus einer kontrollierten Lieferung.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Paar fehlerhaft ist.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Paar im Standort D gefertigt wurde. **(20P)**

Die Löhne sind im Standort F erheblich niedriger als im Standort D. Unter anderem deshalb sind die Kosten für die Produktion eines (noch nicht kontrollierten) Schuhpaares im Standort F mit 5 € nur halb so groß wie im Standort D (einschließlich der Transportkosten bis zum Zentrallager).
Da die aussortierten fehlerhaften Schuhe nicht verkauft werden können, erhöhen sich entsprechend die Kosten pro Paar, das in den Verkauf geht.

e) Bestätigen Sie, dass die Kosten für ein Paar Schuhe aus der Produktion des Standortes F, welches die Kontrolle erfolgreich passiert hat, sich auf einen Wert erhöhen, der mit folgendem Term berechnet werden kann:

$$K_F = \frac{5}{(1 - p_F \cdot 0{,}9)} \qquad (1)$$

(10P)

Entsprechend gilt für Schuhe aus der Produktion des Standortes D:

$$K_D = \frac{10}{(1 - p_D \cdot 0{,}9)} \qquad (2)$$

Hinweis: Diese Gleichung (2) können Sie als bereits bestätigt ansehen.

f) Beurteilen Sie, ob sich unter diesen Bedingungen die Produktion im Standort F ökonomisch lohnt.
Bestimmen Sie den Wert der Ausschusswahrscheinlichkeit p_F, mit dem die Kosten eines zum Verkauf bereiten Schuhpaares für beide Produktionsstandorte (bei fester Ausschusswahrscheinlichkeit von $p_D = 0{,}1$) gleich sind. **(15P)**

g) Trotz aller Qualitätskontrollen gelangen auch fehlerhafte Schuhe in den Verkauf. Solche Schuhe werden in der Regel für den Kunden kostenlos umgetauscht. Beurteilen Sie, ob die beiden Kostenterme (1) und (2) aus der Sicht der Herstellerfirma wirklich sinnvoll sind.
Bestimmen Sie einen Weg, wie diese Kosten kalkuliert werden könnten.
Eine Rechnung wird nicht erwartet. **(10P)**

Aufgabe 5 Screening

Für einige Krankheiten, die erst relativ spät zutage treten, gleichwohl aber im Körper vorhanden sind, gibt es Diagnosetests. Wenn diese Tests für eine große Gruppe angewendet werden, spricht man von Screening.

So wird zur Früherkennung einer Hörstörung bei Neugeborenen standardmäßig für alle ein Test angeboten. Fast alle Eltern haben bei einer Studie dieses Angebot für ihre Kinder angenommen. Es waren 100 000 Neugeborene.

Dieser Test hat eine hohe Qualität:

Bei 98,9 % der schwerhörigen Kinder wird die Schwerhörigkeit auch erkannt.
Man sagt auch, die Sensitivität des Testes beträgt 0,989.

Bei 10 % der gesunden Kinder wird fälschlicherweise eine Schwerhörigkeit angezeigt.
Man sagt auch, die Spezifität des Testes beträgt 1 – 0,1, also 0,9.

Die relative Häufigkeit der Erkrankung unter allen Neugeborenen in der untersuchten Gruppe – die Prävalenz – beträgt 0,002.

Fassen Sie in dieser Aufgabe die genannten drei relativen Häufigkeiten (Sensitivität, Spezifität, Prävalenz) als Schätzwerte für Wahrscheinlichkeiten auf.

a) Erstellen Sie für dieses Screening ein Baumdiagramm oder mit den entsprechenden Werten für die 100 000 Neugeborenen eine Vierfeldertafel mit erwarteten Anzahlen. **(10P)**

b) Bestätigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein als schwerhörig getestetes Neugeborenes auch tatsächlich schwerhörig ist, knapp 2 % beträgt. **(10P)**

c) Einige der untersuchten 100 000 Neugeborenen haben eine Hörstörung und werden aber nach der Untersuchung als gesund betrachtet. Berechnen Sie deren erwartete Anzahl. **(10P)**

An Neugeborenen, bei denen das Testergebnis auf eine Hörstörung hinweist, wird ein zweiter andersartiger, aber kostenintensiver Test durchgeführt.
Dabei geht man von der nicht unproblematischen Annahme aus, dass sowohl bei hörgestörten als auch bei gesunden Säuglingen die Testergebnisse der ersten und der zweiten Testung stochastisch unabhängig voneinander sind.
Erst wenn beide Testergebnisse auf eine Hörstörung hinweisen, wird der Gesamttest als deutlicher Hinweis auf eine Hörstörung gewertet.

Für den zweiten Test gilt:
Die Sensitivität ist 0,99 und die Spezifität ist 0,985.

d) Ein Neugeborenes, bei dem beide Tests auf Schwerhörigkeit hinweisen, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 57 % auch wirklich schwerhörig. Bestätigen Sie diesen Wert. **(20P)**

e) Bestimmen Sie die erwartete Anzahl der Säuglinge, bei denen beide Tests auf Schwerhörigkeit hinweisen. **(15P)**

f) Der erste Test kostet 18 € und der zweite 25 € pro Kind.
Bestimmen Sie den Erwartungswert der Kosten für die gesamte Durchführung des Screenings.
Vergleichen Sie diesen Wert mit den Kosten, die für die Behandlung von Schwerhörigkeit entstehen: Nehmen Sie dafür an, dass bei jedem rechtzeitig behandelten Kind die Schwerhörigkeit mit geringen Kosten geheilt oder zumindest deutlich gemindert wird, so dass nach der Therapie durchschnittlich 5000 € pro Jahr und pro Kind für viele Jahre eingespart werden. **(15P)**

g) Beurteilen Sie, ob die erwartete Anzahl der Kinder, die eingehender untersucht werden müssen, von der Reihenfolge der Untersuchungen abhängt, indem Sie auch auf die Sensitivität und Spezifität des Doppeltests eingehen. **(20P)**

Anlage zur Aufgabe „Screening“

Auf ganze Zahlen gerundete Erwartungswerte der betreffenden Anzahlen bei 100 000 Neugeborenen:

	Kind hat Hörstörung	Kind hat keine Hörstörung	Summen
Test weist auf eine Hörstörung hin			
Test weist auf keine Hörstörung hin			
Summen			100 000

Aufgabe 6 Passierschein A38

An einem Mittwoch auf ihrem Weg zur Eroberung Roms müssen die beiden Gallier Asterix und Obelix in eine Behörde, um den Passierschein A38 zu besorgen.

Die mathematisch angepasste Sichtweise auf den Verlauf der Geschichte sieht folgendermaßen aus: Der Portier gibt Asterix und Obelix einen Laufzettel und schickt sie in Zimmer 100, da er nicht einschätzen kann, welcher Sachbearbeiter zuständig ist. Niemand in dieser Behörde kann einschätzen, wer zuständig ist. In dem gesamten Verlauf hält sich kein Sachbearbeiter für zuständig.
Jeder Sachbearbeiter, auch der in Zimmer 100, macht einen Stempel auf den Laufzettel und schickt die beiden Gallier mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ nach rechts (eine Zimmernummer größer) und mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ nach links (eine Zimmernummer kleiner). Ein solcher Vorgang des Prüfens und Weiterschickens dauert jedes Mal 10 Minuten. Das bedeutet zum Beispiel, dass die beiden Gallier das vierte Zimmer nach 30 Minuten betreten. Alle Zimmer liegen durchnummeriert nebeneinander in einem Gang.

Wenn Asterix und Obelix ein Zimmer wiederholt betreten, so wird genauso geprüft und weitergeschickt, als ob sie noch nie in diesem Zimmer gewesen wären.

a) Ergänzen Sie das Baumdiagramm (Anlage), das den Aufenthalt der beiden Gallier in den einzelnen Zimmern des Flures während der ersten Stunde nach dem Eintreffen in Zimmer 100 beschreibt, um die folgenden Angaben:
   - alle fehlenden Zimmernummern,
   - Angaben, die den Zeitablauf deutlich machen,
   - Angaben zu den Wahrscheinlichkeiten an mindestens sechs Pfadstücken des Baumdiagramms. **(15P)**

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

- Asterix und Obelix 40 Minuten nach Eintritt in die Behörde wieder Zimmer Nr. 100 betreten,
- Asterix und Obelix 50 Minuten nach Eintritt in die Behörde Zimmer Nr. 99 betreten,
- Asterix und Obelix 60 Minuten nach Eintritt in die Behörde Zimmer Nr. 106 betreten.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Asterix und Obelix 50 Minuten nach Eintritt in die Behörde wieder Zimmer Nr. 100 betreten. **(20P)**

c) Bestimmen Sie den erwarteten Aufenthaltsort der beiden Gallier 60 Minuten nach Eintritt in die Behörde. **(15P)**

d) Asterix und Obelix betreten nach einiger Zeit wieder Zimmer Nr. 100. Zwischenzeitlich ist der Sachbearbeiter abgelöst worden, er weiß also nicht, in welches Zimmer die beiden Gallier beim ersten Mal geschickt wurden. Er sieht aber am Laufzettel, dass Asterix und Obelix bisher nur in Zimmer 100 und einem weiteren Zimmer gewesen sein können, weil es nur zwei Stempel auf dem Laufzettel gibt.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der neue Mitarbeiter (mathematisch korrekt) einschätzt, dass die beiden Gallier aus Zimmer 101 kamen.
- Zeigen Sie, in welcher Weise diese Wahrscheinlichkeit von dem Wert der Wahrscheinlichkeiten „nach rechts“ und „nach links“ abhängt. **(20P)**

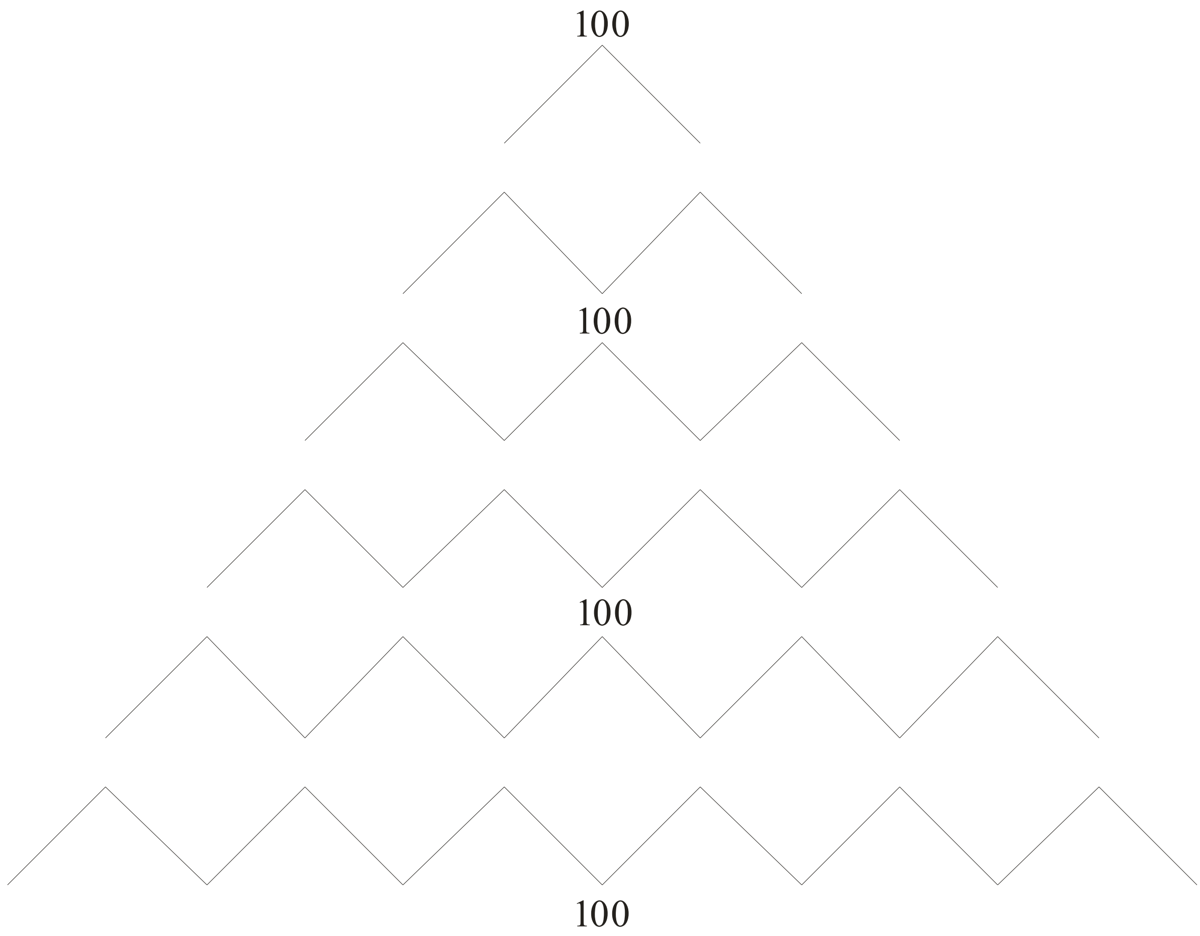
e) Der Behördenleiter überlegt selbst Passierscheine auszugeben. Kein Mitarbeiter soll das erfahren. Er will dienstags von 10:30 Uhr bis 11:40 Uhr in Zimmer 104 Dienst tun. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Antragsteller, der am Dienstag um 10:30 Uhr Zimmer 100 betritt, den Passierschein A38 bekommt. **(10P)**

f) Nach 160 Minuten, es ist Mittwoch und nicht Dienstag, betreten Asterix und Obelix Zimmer Nr. 104. Sie bemerken an der Wand ein Plakat mit der abgebildeten Darstellung, die sie als Anspielung auf ihren Weg durch die Behörde verstehen.

e	s	i	s	t	e	i	n	l	a	n
s	i	s	t	e	i	n	l	a	n	g
i	s	t	e	i	n	l	a	n	g	e
s	t	e	i	n	l	**a**	n	g	e	r
t	e	i	n	l	a	n	g	e	r	W
e	i	n	l	a	n	g	e	r	W	e
i	n	l	a	n	g	e	r	W	e	g

- Sie stellen fest, dass sie, wenn sie immer nur nach rechts oder nach unten lesen, den Satz „*es ist ein langer Weg*“ auf vielen verschiedenen Pfaden lesen können.
  Zeichnen Sie einen Beispielpfad ein, der durch das fett gedruckte „**a**“ verläuft.
- Begründen Sie, dass sich die Anzahl der verschiedenen Pfade, auf denen man den Text lesen kann, aus einem Binomialkoeffizienten ergibt.
  Bestimmen Sie diesen und die Anzahl möglicher Pfade.
- Interpretieren Sie die Tatsache, dass sich das Plakat ausgerechnet in Zimmer Nr. 104 befindet. **(20P)**

Anlage zur Aufgabe „Passierschein A38“



Aufgabe 7 Biathlon

Biathlon ist eine der Sportarten bei den nordischen Skiwettbewerben. Neben einer Langlaufstrecke, die zurückgelegt werden muss, müssen die Athleten auch mehrfach auf Zielscheiben schießen. Wenn sie nicht treffen, dürfen sie nachladen und es nochmals versuchen. Sollten sie wiederum nicht treffen, müssen sie für jede nicht getroffene Scheibe eine Strafrunde laufen.

Es zählt die Gesamtzeit.

Zur Vereinfachung werden in dieser Aufgabe vom internationalen Regelwerk leicht abweichende Regeln verwendet, und zwar:

- Man hat drei Schüsse, um drei Zielscheiben zu treffen. Hat man alle drei Zielscheiben getroffen, darf man auf der normalen Route weiterlaufen.
- Hat man nicht alle drei Scheiben getroffen, darf man *genau einmal* nachladen und diesen einen Schuss auf eine der noch nicht getroffenen Zielscheiben abgeben. Wenn nun alle Scheiben getroffen sind, darf man auf der normalen Route weiterlaufen.
- Sind jetzt immer noch nicht alle Scheiben getroffen, muss man für jede nicht getroffene Scheibe eine Strafrunde laufen, bevor man auf der normalen Route weiterlaufen darf.

Bei einem Wettbewerb über 3 km mit einmaligem Stopp am Schießstand vergleichen Paula und Susanne ihre Leistungen.

Erfahrungsgemäß benötigt Paula, die diesen Sport betreibt, für das Nachladen und erneute Schießen 10 Sekunden und für eine Strafrunde 30 Sekunden. Sie ist eine mittelmäßige, aber sehr nervenstarke Schützin, die mit jedem Schuss mit der Wahrscheinlichkeit 0,9 die Scheibe trifft.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Paula alle drei Scheiben ohne Nachladen trifft. **(10P)**

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit,

- dass Paula alle drei Scheiben mit einmaligem Nachladen trifft.
- dass Paula genau eine Strafrunde laufen muss. **(20P)**

c) Die nachfolgende Tabelle beschreibt den Zeitverlust, den Paula durch Fehlschüsse erleidet.

Zeitverlust in s	0	10	40	70	100
Wahrscheinlichkeit	0,729	0,2187	0,0486	0,0036	0,0001

- Geben Sie an, wie man auf die möglichen Zeitverluste kommt.
- Bestätigen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten für 70 s und 100 s.
- Berechnen Sie anschließend den erwarteten Zeitverlust für Paula. **(15P)**

Susanne ist eine etwas bessere Skiläuferin, hat aber eine viel geringere Nervenstärke als Paula. Beim ersten Schuss trifft auch sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 die Scheibe. Immer wenn sie vorher getroffen hat, trifft sie die Scheibe ebenfalls mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9. Wenn aber ein Schuss ein Fehlschuss war, so trifft sie beim nächsten Schuss nur noch mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8.

d) Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm für die ersten drei Schüsse. **(20P)**

e) Paula hat nur gesehen, dass Susanne den dritten Schuss verfehlt hat. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auch Susannes erster Schuss ein Fehlschuss war. **(10P)**

Zum Schießen und Nachladen benötigen beide Läuferinnen die gleiche Zeit, allerdings schafft Susanne die Strafrunde in 29 Sekunden.

f) Bestimmen Sie die fehlenden Werte in Susannes Tabelle. **(15P)**

Zeitverlust in s	0	10			97
Wahrscheinlichkeit			0,0658	0,01	0,0008

g) Aufgrund der Werte hat sich Susannes Trainer eine Strategie überlegt:
„Susanne muss mindestens 1 Sekunde schneller auf der 3 km-Strecke sein als Paula."
Beurteilen Sie die Strategie des Trainers und Susannes Gewinnchancen in <u>diesem</u> Rennen. **(10P)**

Aufgabe 8 Batterien

Die Aufgabe entspricht verändert einer Aufgabe aus dem Abitur 1999/2000 aus Sachsen.

Ein Betrieb stellt Batterien für grafikfähige Taschenrechner her. Der Ausschussanteil beträgt 2 %. Die einzelnen Ausschussstücke treten stochastisch unabhängig voneinander auf.

a) Margret kauft 4 Batterien.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei dieser Batterien Ausschuss sind.

Margret behauptet, die Wahrscheinlichkeit, dass alle vier Batterien Ausschuss sind, sei kleiner als die Wahrscheinlichkeit, im Lotto „6 aus 49" sechs richtige Zahlen zu tippen.
Rechnen Sie nach, ob Margrets Behauptung richtig ist.

b) Batterien werden für den Versand an Einzelhändler in Kartons zu je 100 Stück verpackt.

Berechnen Sie die durchschnittliche Anzahl von Ausschussstücken in einem Karton und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Durchschnittszahl nicht überschritten wird.

Begründen Sie, warum Sie hier die Binomialverteilung benutzen müssen und die Normalverteilung als Näherung nicht geeignet ist.

c) Nach Angaben des Betriebes ist die Lebensdauer der Batterien normalverteilt mit einem Erwartungswert von 300 Betriebsstunden und einer Standardabweichung von 15 Betriebsstunden.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine für Prüfzwecke zufällig der laufenden Produktion entnommene Batterie mindestens 250 Betriebsstunden erreicht.

Beurteilen Sie, ob eine entsprechende Garantie der Firma sinnvoll erscheint.

d) Die Herstellung einer Batterie kostet 1 €. Um wirtschaftlich zu arbeiten, muss der Betrieb je Batterie einen Reingewinn von mindestens 0,10 € erzielen. Um konkurrenzfähig zu bleiben, sollte der Abgabepreis einer Batterie maximal 1,32 € betragen.
Der Reingewinn wird dadurch gemindert, dass der Betrieb sich verpflichtet hat, Ausschussstücke zurückzunehmen und durch extra geprüfte, funktionierende Batterien zu ersetzen. Die Kosten für diesen Umtausch und die zusätzliche Prüfung betragen 3 € je defekter Batterie.

Ermitteln Sie, ob unter diesen Bedingungen eine wirtschaftliche Produktion möglich ist.

Aufgabe 9 Fahrstrecke

Die Aufgabenteile a) und c) basieren auf einer Examensaufgabe von Wiskunde B (2003-II).

Ein Transportunternehmen bringt jeden Tag frisch die berühmten Limburger Fladenkuchen von Limburg nach Twente und fährt dabei immer dieselbe Strecke. Die dafür nötige Zeit ist normalverteilt mit einem Mittelwert von zweieinhalb Stunden und einer Standardabweichung von einer Viertelstunde. Die Kuchen müssen spätestens um halb neun abgeliefert sein.
Einerseits möchte der Chef der Firma die Lohnkosten des Fahrers beschränken, indem er ihn nicht zu früh abfahren lässt. Andererseits kann der Chef es sich nicht erlauben, an mehr als 5 % der Tage die Kuchen verspätet anzuliefern.

a) Berechnen Sie die Uhrzeit, bei welcher der Fahrer losfahren muss.

b) In dieser Teilaufgabe betrachten Sie ein 2. Modell, um die Fahrzeit zu ermitteln:
Die Fahrzeit wird mit einem Random Walk (Zufallspfad) simuliert:
Dazu gebe es auf der Strecke von Limburg nach Twente 100 Stellen, an denen durch verschiedene Umstände, die ausschließlich mit dieser Stelle zusammenhängen, der Fahrer entweder 30 s zusätzlich braucht oder aber 30 s an Zeit einspart im Vergleich zur üblichen Zeit von zweieinhalb Stunden. Diese beiden Möglichkeiten seien gleichwahrscheinlich.

Bestimmen Sie für ein von Ihnen erdachtes Beispiel die Fahrzeit mit diesem Modell.
Beschreiben Sie ein Beispiel für die ersten 10 Stellen und zeichnen Sie den zugehörigen Graphen des Zufallspfades.
Vergleichen Sie die beiden Modelle aus den Aufgabenteilen a) und b).

c) Auf seinen täglichen Fahrten ist dem Fahrer aufgefallen, dass viele Autofahrer auf den Strecken mit einer Geschwindigkeitsbegrenzung auf 120 km/h viel zu schnell fahren. Darum ist er auch nicht verwundert über das Ergebnis einer Kontrolle, dass 13 % der Autofahrer schneller als 137 km/h fahren.
(Diese Kontrolle wurde mit vielen Fahrzeugen unter gleichen Verkehrsbedingungen durchgeführt. Fahrzeuge, die schneller als 137 km/h gefahren sind, wurden auf den nächsten Parkplatz geleitet und angehalten.)

Setzen Sie voraus, dass die gefahrene Geschwindigkeit normalverteilt ist mit einem Mittelwert von 126 km/h, und bestimmen Sie unter dieser Annahme, wie viel Prozent der Autofahrer sich dann an die vorgeschriebene Geschwindigkeit halten, also nicht schneller als 120 km/h fahren.

d) Beschreiben Sie, wie sich die Wahl der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung auswirkt, und interpretieren Sie die mathematischen Auswirkungen im Kontext der Aufgabenteile a) und c).

Aufgabe 10 Billigflüge

Wovon leben Billigfluganbieter?

Hamburg – New York hin und zurück 300 € !

Für diesen Flug kann eine Agentur z.B. 35 Plätze anbieten. Diese sind immer kurz nach dem Erscheinen im Internet ausgebucht und bezahlt.

Allerdings werden vor Abflug im Mittel ca. 20 % der gebuchten Reservierungen kurzfristig abgesagt (storniert). Verwenden Sie für Ihre Lösungen den exakten Wert 20 %. Da es sich um ein Sonderangebot handelt, bekommen die Kunden bei Stornierung kein Geld zurück. Die Agentur aber kann all diese Plätze leicht als „Last-Minute-Angebote" für 250 € zum zweiten Mal verkaufen.

Für die Agentur ist deshalb die Anzahl der Kunden von großem Interesse, die pro Flugtermin stornieren. Es soll dazu angenommen werden, dass pro Termin die mögliche Anzahl von Stornierungen
binomialverteilt ist.

a) Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass für den nächsten Flugtermin bei dieser Agentur
   - genau 7 Plätze (durch Rechnung)
   - höchstens 5 Plätze (Sie können die Tabelle in der Anlage verwenden)
   - mindestens 6 Plätze

   storniert werden.

b) Begründen Sie, dass der Erwartungswert für die Einnahmen der Agentur wegen der wieder verkaufbaren stornierten Plätze 12.250 € anstatt 10.500 € beträgt.

Die Stornierungen mit Doppeleinnahmen sind für die Agentur attraktiv, und sie lässt deshalb 40 Buchungen zu, also 5 Buchungen mehr als Plätze verfügbar sind. Diese 40 Angebote sind auch immer sofort ausgebucht und bezahlt**.** Wenn allerdings mehr als 35 gebuchte Kunden die Reise tatsächlich antreten wollen – im so genannten **Überbuchungsfall** – , muss die Agentur für die überzähligen Kunden dann sehr kurzfristig teure Ersatzplätze beschaffen. Insgesamt entstehen dem Reisebüro für jeden überzähligen Kunden zusätzliche Ausgaben von 400 €.

c) Bestimmen Sie, wie die Agentur einen Reisetermin mit 40 ursprünglich verkauften Plätzen abrechnet (Einnahmen minus zusätzliche Ausgaben),
   - wenn nur 30 regulär gebuchte Personen zum Abreisetermin erschienen sind, also noch 5 „Last-Minute-Tickets" verkauft wurden
   - wenn alle 40 Bucher zum Abreisetermin erschienen sind.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
   - alle 40 regulären Kunden erscheinen zum Abreisetermin, keiner storniert (durch Rechnung)
   - es kommt zum Überbuchungsfall (Sie können die Tabelle in der Anlage verwenden).

e) Die Agentur möchte überprüfen, ob sich das Geschäft mit den Überbuchungen eigentlich lohnt. Dazu berechnet sie den Erwartungswert der Abrechnung (Einnahmen minus zusätzliche Ausgaben) und erhält als Ergebnis 12.733 €.
   Nennen Sie die Größen, die die Agentur dabei berücksichtigt hat und beschreiben Sie, wie diese Berechnung prinzipiell erfolgen kann. Interpretieren Sie dann dieses Ergebnis der Agentur.

Aufgabe 11 Gefälschter Würfel

Ein Würfel sieht äußerlich genau so aus wie ein normaler Spielwürfel, steht aber im Verdacht, in der Weise gefälscht zu sein, dass die Sechs mit größerer Wahrscheinlichkeit als $\frac{1}{6}$ geworfen wird.

a) Anna, Bernd und Claudia kommen zu diesem Verdacht, weil sie bei 12 Würfen mit diesem Würfel viermal eine Sechs geworfen haben.
Berechnen Sie deshalb zunächst die Wahrscheinlichkeit, dass bei 12 Würfen mit einem fairen (ungefälschten) Würfel
- genau viermal eine Sechs geworfen wird.
- mehr als drei Sechsen geworfen werden.

b) Anna möchte den Fälschungsverdacht mit einem Hypothesentest auf der Basis der Ergebnisse von 50 Würfen belegen.
Erläutern Sie, wie so ein Test konzipiert werden kann, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art kleiner als 5 % sein soll?

c) Das Versuchsergebnis für den Test aus b) ergab 13 Sechsen. Anna kann also in ihrer Logik kein signifikantes Ergebnis vorlegen und nicht behaupten, dass der Würfel gefälscht ist. Bernd sagt, dass sei auch ganz klar, denn selbst, wenn die Wahrscheinlichkeit für die Sechs z.B. 25 % sei, dann sei die Wahrscheinlichkeit „13 oder weniger Sechsen zu werfen" dennoch ziemlich hoch.
Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit.
Erläutern Sie, was Bernd damit vor dem Hintergrund von Annas Testlogik bemerkt hat und was man in einem zweiten Testversuch prinzipiell tun kann, um seinen Einwand zu entkräften.

d) Claudia hat in ihrer Ausbildung gelernt, dass man auch mit Hilfe des Satzes von Bayes der Frage, ob der Würfel gefälscht sei, zu Leibe rücken kann. Sie beginnt ihre Argumentation wie folgt:

"Ich schließe anhand des Vorversuchs aus, dass die wahre Wahrscheinlichkeit p für die Sechs kleiner als $\frac{1}{6}$ *ist und ich schließe auch aus – vgl. a), dass sie gleich Eins ist. Dann muss sie in folgendem Bereich liegen* $\frac{1}{6} \le p < 1$. *Vereinfachend lasse ich nur folgende vier Näherungswerte für p zu:*

$$p = \frac{1}{6}\ ,\ p = \frac{1}{4}\ ,\ p = \frac{1}{2}\ ,\ p = \frac{3}{4}\ .$$

Da ich wenig über diesen Würfel weiß und neutral herangehen möchte, nehme ich vor dem Versuch für diese vier Fälle gleiche Wahrscheinlichkeiten an."

Welche Verteilung für die vier Fälle wird Claudia im Anschluss an die aus den in c) beobachteten 13 Sechsen bei 50 Würfen berechnen?
Interpretieren Sie das Ergebnis in Bezug auf die Frage, ob der Würfel gefälscht ist.

Aufgabe 12 Mikrochips

Herkunft der Aufgabe: Zentralabitur Bayern 2001, Grundkurs.

Der Konzern „Electronix“ stellt Mikrochips in Massenproduktion her. Jeder hergestellte Chip ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % fehlerhaft.

a) Entscheiden Sie, mit welchem mathematischen Modell sich das Ziehen einer Stichprobe von 100 Chips beschreiben lässt?

Verwenden Sie das Modell aus a) für die weiteren Aufgabenteile.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 100 Chips genau 20 fehlerhaft sind.

c) Bestimmen Sie das kleinstmögliche Intervall mit dem Mittelpunkt 20, in dem bei insgesamt 100 Chips die Anzahl der fehlerhaften Chips mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 85 % liegt.

d) Bestimmen Sie, wie viele Chips der Produktion mindestens entnommen werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % wenigstens ein fehlerhafter dabei ist.

Zur Aussonderung fehlerhafter Chips wird ein Prüfgerät eingesetzt, von dem Folgendes bekannt ist: Unter allen geprüften Chips beträgt der Anteil der Chips, die einwandfrei sind und dennoch ausgesondert werden, 3 %. Insgesamt werden 83 % aller Chips nicht ausgesondert.

e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Chip fehlerhaft ist und ausgesondert wird. Ermitteln Sie den Anteil der fehlerhaften Chips, der demnach ausgesondert wird.

Der Konzern beauftragt ein Expertenteam mit Maßnahmen zur Qualitätsverbesserung. Falls der Anteil der fehlerhaften Chips deutlich gesenkt werden kann, wird dem Team eine großzügige Prämie gezahlt. Nach Abschluss der Verbesserungsmaßnahmen wird der Produktion eine Stichprobe von 100 Chips entnommen.
Eine erste Überlegung der Konzernleitung sieht vor, dass die Prämie gezahlt wird, wenn sich unter diesen 100 Chips höchstens 11 fehlerhafte befinden.

f) Geben Sie an, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Team dann die Prämie erhält, obwohl keine Qualitätsverbesserung eingetreten ist.

g) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der dann dem Team die Prämie verweigert wird, obwohl der Anteil der fehlerhaften Chips auf 10 % gesunken ist.

h) Beurteilen Sie die Entscheidungsregel.

Aufgabe 13 Glasschüsseln

In einer Glasmanufaktur werden Glasschüsseln teilmaschinell hergestellt. Die Schüsseln werden in fünf Arbeitsgängen gefertigt, die unabhängig voneinander erfolgen. Erfahrungsgemäß wird in den einzelnen Arbeitsgängen unabhängig voneinander die erwünschte Qualität (I. Wahl) mit folgenden Wahrscheinlichkeiten **nicht** erreicht:

Arbeitsgang 1	Arbeitsgang 2	Arbeitsgang 3	Arbeitsgang 4	Arbeitsgang 5
0,08	0,05	0,02	0,04	0,03

a) Zeigen Sie, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $p \approx 0{,}20$ eine fertige Schüssel **nicht** „I. Wahl“ ist.

b) Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Glasschüsseln, die nicht I. Wahl sind, in einer Produktionsserie vom Umfang n.
Begründen Sie, dass man X als binomialverteilt ansehen kann, und geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X, ihren Erwartungswert, ihre Varianz und Standardabweichung als Funktion von n an.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 15 hergestellten Schüsseln höchstens 3 nicht I. Wahl sind. Beurteilen Sie, ob Ihr Ergebnis stimmen kann.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 100 gefertigten Schüsseln 30 oder mehr nicht I. Wahl sind. Schätzen Sie zunächst diese Wahrscheinlichkeit ab unter Verwendung des Erwartungswertes und der Standardabweichung der Zufallsvariablen X (vgl. b)).
Berechnen Sie anschließend diese Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Anlage.

e) Bevor die Schüsseln in die Geschäfte verschickt werden, findet eine Qualitätskontrolle statt. Auf Bändern laufen die gefertigten Schüsseln an Kontrollpunkten vorbei. Man kann davon ausgehen, dass alle Schüsseln mit groben Mängeln aussortiert werden.
Kleinere Mängel, die dazu führen, dass man eine Schüssel nur als II. Wahl verkaufen kann, werden jedoch erfahrungsgemäß insgesamt bei 3 % aller fehlerhaften Schüsseln übersehen, andererseits werden 1 % der Schüsseln beanstandet, die noch den Anforderungen der I. Wahl entsprechen. (Kleine Abweichungen sind bei Glas kaum zu vermeiden und werden von den Kunden auch akzeptiert.)
Es werden nur Schüsseln an die Geschäfte verschickt, die nach der Qualitätskontrolle für I. Wahl gehalten werden. Die aussortierten Schüsseln II. Wahl werden auf dem Gelände der Manufaktur zu günstigen Preisen verkauft.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schüssel, die verschickt wird, den Qualitätsanforderungen für die I. Wahl nicht genügt.

f) Da der Preisdruck aus dem Ausland hoch ist, kalkuliert die Glasmanufaktur bei einer Glasschüssel als Gewinn nur einen Aufschlag von 4 % auf ihre Herstellungskosten H. Wird eine solche Glasschüssel in einem Geschäft zu Recht als „nur II. Wahl“ eingestuft, gewährt der Vertreter der Glasmanufaktur dem Geschäft einen Nachlass von 25 % auf deren Einkaufspreis.

Bestimmen Sie den Prozentsatz an gerechtfertigten Reklamationen, von dem an die Manufaktur Verluste macht. Beurteilen Sie das Ergebnis.

Aufgabe 14 Flaschenabfüllautomat

Der Abfüllautomat einer Getränkefirma weist eine gewisse Streuung hinsichtlich der abgefüllten Menge von „Sprudelfix“ auf. Viele Messungen haben gezeigt, dass die Füllhöhe in 5 % aller Fälle so niedrig ausfällt (Flaschentyp 0), dass der Kunde meinen könnte, eine Mindermenge zu kaufen, obwohl sichergestellt ist, dass immer mindestens die angegebene Menge abgefüllt ist.
Flaschen mit zufrieden stellender Abfüllhöhe werden „Flaschentyp 1“ genannt.

a) Bestimmen Sie ein beim Abpacken der Flaschen in 12er-Kästen zugrunde gelegtes stochastisches Modell, wenn das Abpacken als Zufallsexperiment aufgefasst wird.

b) Ein Kunde behauptet im Getränkemarkt, dass in seiner Kiste „schon wieder“ 3 Flaschen mit einer geringeren Füllhöhe waren. Beurteilen Sie die Glaubwürdigkeit dieses Kunden, indem Sie die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall berechnen.

c) Aufgrund der Rückmeldung des Getränkemarktes will die Geschäftsleitung der Getränkefirma wissen, wie sich die Flaschentypen 0 und 1 in einem Kasten verteilen. Es soll auf die Anschaffung eines neuen Abfüllautomaten verzichtet werden, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kasten höchstens eine Flasche des Typs 0 aufweist, mindestens 95 % beträgt.
Ermitteln Sie, ob die Getränkefirma einen neuen Abfüllautomaten kaufen muss.

Die Herstellerfirma des Abfüllautomaten behauptet, dass eine neue Abfüllanlage nur in höchstens 2 % aller Fälle Flaschen des Typs 0 erzeugt und gibt 20 % Preisnachlass, wenn dies nicht zutrifft. Es wird folgendes Testverfahren vereinbart: 100 zufällig ausgewählte Flaschen werden untersucht. Befinden sich darunter höchstens 4 Flaschen des Typs 0, so gilt die Behauptung als bestätigt.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Herstellerfirma bei dieser Entscheidungsregel irrtümlicherweise den Preisnachlass gewähren muss, obwohl die 2 %-Behauptung zutrifft.

e) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit unter Beibehaltung dieser Entscheidungsregel, dass es nicht entdeckt wird, falls die Wahrscheinlichkeit für Flaschentyp 0 auch bei dieser neuen Anlage immer noch bei 5 % liegt.

f) Die Wahrscheinlichkeit, dass bei dem 12er-Kasten und dem 5 %-Abfüllautomat keine Flasche vom Typ 0 im Kasten ist, beträgt ca. 54 %. Da der Umsatz von „Sprudelfix“ steigt, plant die Getränkefirma, größere Kästen einzusetzen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fall „keine Flasche vom Typ 0 in einem 20er-Kasten“ bei dem 2 %-Abfüllautomat.
Bestimmen Sie die maximale Kastengröße, wenn für den Fall „keine Flasche vom Typ 0 in dem Kasten“ der Prozentsatz von 54 % bei dem 2 %-Abfüllautomaten nicht unterschritten werden soll.
Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 15 Urnentest

Drei Urnen enthalten jeweils 6 Kugeln.

- In der Urne 1 sind fünf rote Kugeln und eine schwarze Kugel
- in der Urne 2 sind vier rote und zwei schwarze Kugeln
- in der Urne 3 sind drei rote und drei schwarze Kugeln

a) Betrachten Sie zunächst nur die Urne 1.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beim 10-maligen Ziehen mit Zurücklegen

- genau viermal eine schwarze Kugel gezogen wird.
- mehr als vier schwarze Kugeln gezogen werden.

Es wird zufällig eine Urne ausgewählt. Nun soll mit Hilfe von Ziehungen einer Kugel aus dieser Urne und dem anschließenden Zurücklegen herausgefunden werden, um welche Urne es sich handelt.

b) Zuerst wird die Methode des zweiseitigen Hypothesentests angewendet.
Bestimmen Sie für jede Urne einzeln die Ablehnungsbereiche auf dem 5 % Signifikanzniveau, wenn man von 10 Ziehungen ausgeht.

c) Beim Ziehen von 10 Kugeln hat man 3 schwarze und 7 rote Kugeln gezogen.
Begründen Sie mithilfe des im Aufgabenteil b) benutzten Tests, welche Urne vorgelegen haben könnte.

d) Beim Ziehen von 10 Kugeln (wieder mit Zurücklegen) sind insgesamt wieder 3 schwarze und 7 rote Kugeln gezogen worden. Die erste Kugel war rot, die zweite schwarz.
Erläutern Sie an diesem Beispiel das Zusammenspiel von a-priori- und a-posterio-Wahrscheinlichkeiten.
Bestimmen Sie die a priori und a-posteriori Wahrscheinlichkeiten für die ersten beiden Ziehungen.

e) Nach 10-maligem Ziehen mit Zurücklegen erhält man die folgenden a posteriori-Wahrscheinlichkeiten:

Zug	Kugelart	Urne 1	Urne 2	Urne 2
1	rot	41,7 %	33,3 %	25,0 %
2	schwarz	22,7 %	36,3 %	40,9 %
3	schwarz	10,4 %	33,3 %	56,3 %
4	rot	14,7 %	37,6 %	47,6 %
5	rot	20,0 %	41,0 %	38,9 %
6	rot	26,3 %	43,1 %	30,7 %
7	rot	33,2 %	43,5 %	23,2 %
8	schwarz	17,5 %	45,8 %	36,7 %
9	rot	23,0 %	48,1 %	28,9 %
10	rot	29,1 %	48,9 %	22,0 %

Untersuchen Sie nun die Entscheidungsmöglichkeiten, die man aufgrund dieser Tabelle hat.
Interpretieren sie den Unterschied zum Aufgabenteil c).

Aufgabe 16 Doping

Bei internationalen Sportwettkämpfen winkt den Siegern bekanntlich nicht nur die Ehre, sondern z. T. auch das große Geld in Form von Werbeverträgen. Es ist daher nicht verwunderlich, dass ehrgeizige Sportler und ihre Trainer mitunter zu unerlaubten Mitteln greifen, um sich Vorteile gegenüber den Konkurrenten zu verschaffen.

Um möglichst faire Bedingungen zu gewährleisten, werden deshalb unmittelbar nach wichtigen Wettkämpfen, aber auch während der Trainingszeit, Kontrollen nach genau festgelegten Regeln durchgeführt. Die Sportler geben einen Becher Urin ab, der in zwei Teilen, einer so genannten A-Probe und einer B-Probe, versiegelt und gekennzeichnet wird.

Während die internationalen Sportverbände an möglichst aussagekräftigen Dopingtests interessiert sind, arbeiten gewisse Labore an der Entwicklung neuer Dopingwirkstoffe, deren Verabreichung bei den Kontrollen möglichst nicht im Urin festgestellt werden kann.

Gehen Sie in den Aufgabenteilen a) und d) davon aus, dass bei einem Sportwettkampf von 2200 Teilnehmern, die eine Urinprobe abgeben müssen, 55 mit einem speziellen Wirkstoff gedopt sind.

Es werden alle 2200 A-Proben kontrolliert. Für den Test gelte:

- Ist ein Sportler mit diesem Wirkstoff gedopt, so zeigt der Test dies mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_e = 80\ \%$ an. Man spricht dann von einem **positiven** Befund und bezeichnet p_e auch als Sensitivität des Tests.
- Hat ein Sportler sich korrekt verhalten, so bestätigt dies der Test mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_a = 95\ \%$. p_a heißt auch Spezifität des Tests.

Liegt ein positiver Befund der A-Probe vor, wird die B-Probe analysiert.
Nehmen Sie an, dass für nicht gedopte Personen die Ergebnisse von mehrfachen Dopingtests stochastisch unabhängig sind und dass dies ebenso für gedopte Personen gilt, dass also Fehler nur beim Testen und nicht durch irgendwelche besonderen Eigenschaften der Personen auftreten.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass über eine zufällig ausgewählte Person nach der A-Probe ein falsches Urteil abgegeben wird.

b) Begründen Sie, weshalb die Wahrscheinlichkeit, dass ein nach der A-Probe des Dopings bezichtigter Sportler zu Unrecht verdächtigt wird, so erschreckend groß ist.

c) Weisen Sie nach, dass ein Sportler, bei dem beide Tests positiv waren (also auf Doping hinwiesen) mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 13 % dennoch nicht gedopt war.

d) Da die Ergebnisse des Tests für Sportler, die sich an die Regeln halten, unzumutbar sind, muss der Test verbessert werden. Dazu soll zunächst untersucht werden, wie sich die Wahrscheinlichkeiten aus b) und c) dann verändern, wenn sich p_a bzw. p_e verändern:
Ermitteln Sie zunächst eine Wertetabelle für die Wahrscheinlichkeiten, dass ein nichtgedopter Sportler nach der A-Probe bzw. nach der B-Probe positiv getestet wird, wenn sich

   - p_e von 80 % bis 100 % in 5 %-Schritten ändert und $p_a = 0{,}95$ unverändert bleibt.
   - p_a in 1 %-Schritten von 95 % auf 100 % erhöht und $p_e = 0{,}8$ unverändert bleibt.

   Interpretieren Sie diese Tabellen.
   Ermitteln Sie weiterhin für die beiden Wertetabellen nach der B-Probe entsprechende Funktionsterme $f(p_e)$ bzw. $g(p_a)$, mit denen sich beliebige Werte ausrechnen lassen.

Aufgabe 17 Alkoholsünder

In einer bestimmten Stadt an einer bestimmten Stelle führt die Polizei in regelmäßigen Abständen in der Nacht von Sonnabend auf Sonntag zwischen 1 Uhr und 4 Uhr Verkehrskontrollen durch. Dabei muss der Fahrer „in die Röhre pusten, um festzustellen, ob der Alkoholgehalt im Blut im gesetzlich erlaubten Rahmen liegt oder nicht. Aus mehrjähriger Erfahrung weiß die Polizei, dass ungefähr 10 % der Fahrer um diese Zeit an dieser Stelle die „Promillegrenze“ überschreiten. Wir nennen diese Personen hier kurz „Alkoholsünder“. Es soll angenommen werden, dass die Anzahl der Alkoholsünder in den Verkehrskontrollen einer Binomialverteilung genügt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Nacht bei 20 Kontrollen

- genau zwei Alkoholsünder ermittelt werden
- nicht mehr als zwei Alkoholsünder ermittelt werden
- mindestens drei Alkoholsünder ermittelt werden
- der erste ermittelte Alkoholsünder im letzten oder vorletzten kontrollierten Auto sitzt
- genau zwei Alkoholsünder ermittelt werden und diese beiden auch noch in zwei aufeinander folgenden Kontrollen erfasst werden.

b) Um die Quote der Alkoholsünder zu senken, werden probeweise Warnschilder der Verkehrswacht aufgestellt. Nach einigen Wochen soll nun an Hand einer Messung von 100 Autofahrern ermittelt werden, ob diese Maßnahme auf dem 5 % Niveau ($\alpha \le \alpha_0 = 5\%$) zu einer signifikanten Senkung der bisherigen Quote der Alkoholsünder geführt hat (Nullhypothese: $p \ge 10\%$).
Sie können zur Berechnung die Tabelle in der Anlage verwenden.

- Begründen Sie, dass man genau dann auf dem 5 % Niveau von einer signifikanten Senkung der Alkoholsünderquote sprechen sollte, wenn höchstens 4 Alkoholsünder ermittelt werden.
- Falls durch die Warnschilder die Alkoholsünderquote tatsächlich auf 5 % gesenkt worden wäre, wie groß wäre dann bei dem Test die Wahrscheinlichkeit β für den Fehler 2. Art ?
  Berechnen Sie den Wert und interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Es wird nun angenommen, dass bei dem Test aus b) unter den 100 Autofahrern nur 3 Alkoholsünder ermittelt werden. Es liegt also ein signifikantes Ergebnis vor und eine Bürgerinitiative tritt deshalb dafür ein, auf vielen weiteren Straßenabschnitten die Schilder aufzustellen. Darauf argumentieren einige Haushaltspolitiker, dass dies wegen der hohen Kosten erst zu vertreten wäre, wenn die Alkoholsünderquote dadurch von 10 % auf unter 5 % gesenkt würde. Beurteilen Sie das Testergebnis im Hinblick auf diesen Anspruch.

d) Beurteilen Sie die oben gemachte Annahme, dass die Anzahl der Alkoholsünder in den Verkehrskontrollen binomialverteilt ist.

Aufgabe 18 Krankenhaus

Bei Krankenhauspatienten werden in der Regel eine Vielzahl von medizinischen Parametern (z. B. Blutdruck, Leberwerte, ...) gemessen, besonders auch zum Zeitpunkt ihrer Entlassung.
Es wird für die gesamte Aufgabe angenommen, dass sowohl für verschiedene Patienten als auch für verschiedene Parameter die Messergebnisse stochastisch unabhängig sind.

a) Bei einem speziellen Leberwert erwartet man, dass der Testwert bei 70 % der Patienten bei der Entlassung aus dem Krankenhaus zufrieden stellend ist, d. h., dass der Gesundheitszustand dieser 70 % bezogen auf den Leberwert als gut bezeichnet werden kann.

In einer Woche werden aus der inneren Abteilung 50 Patienten entlassen und auch auf diesen Leberwert getestet.

- Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der entlassenen Patienten mit einem guten Gesundheitszustand (bezogen auf den Leberwert).
- Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass genau 35 der entlassenen Patienten einen guten Gesundheitszustand (bezogen auf den Leberwert) haben.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 45 der entlassenen Patienten einen guten Gesundheitszustand (bezogen auf den Leberwert) haben.
- Bestimmen Sie die Mindestanzahl der mit einem guten Gesundheitszustand (bezogen auf den Leberwert) entlassenen Patienten, damit das Ergebnis als signifikant besser als erwartet angesehen werden kann. Benutzen Sie das Signifikanzniveau 5 %.
  Begründen Sie, dass dann die tatsächliche Irrtumswahrscheinlichkeit ca. 4 % beträgt.

b) Ein Krankenhaus in A-Stadt hat erhebliche Auslastungsprobleme. Daher beschließt der Chefarzt, das Image des Hauses aufzupolieren und einen Hypothesentest durchzuführen. Dazu lässt er insgesamt 10 medizinische Parameter jeweils auf dem Signifikanzniveau 5 % testen. Bei der Auswertung stellt sich heraus, dass nur der Blutdruck signifikant besser als erwartet ist. Wenige Tage später findet sich in der Lokalpresse die folgende Überschrift: „Krankenhauspatienten aus A-Stadt haben deutliche bessere Blutdruckwerte“.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei den 10 medizinischen Parametern, die ja als unabhängig angesehen werden sollen, zufällig mindestens einer signifikant besser als erwartet ausfällt, obwohl dies bei keiner der 10 Testreihen begründet ist.
Fassen Sie dazu die Folge der Testreihen als Bernoullikette auf. Gehen Sie vereinfachend aus von der Unabhängigkeit der 10 Parameter und bei jeder Testreihe von genau 4 % für den Fehler 1.Art.

c) Den Chefarzt des Krankenhauses von B-Stadt ärgert die Pressemitteilung, und er hofft, sein Krankenhaus ebenfalls als besonders gut darstellen zu können. Dazu soll an seinem Krankenhaus ebenfalls eine entsprechende Protokollierung von Messergebnissen medizinischer Parameter durchgeführt werden. Wie viele unabhängige Parameter muss er testen lassen, damit ohne das Vorliegen von Besonderheiten die Wahrscheinlichkeit größer als 0,6 ist, dass auch er mindestens einen Parameter findet, der signifikant nach oben von den erwarteten Werten abweicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Begründen Sie, dass das Vorgehen der Chefärzte unter stochastischen Gesichtspunkten sehr problematisch ist.

Aufgabe 19 Thermoschalter

Der Konzern „Thermosicherheit" stellt Thermoschalter in Massenproduktion her. Jeder Thermoschalter ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % fehlerhaft. Der Fehler besteht darin, dass der Thermoschalter erst bei einer zu hohen Temperatur auslöst, also die Stromzufuhr zu spät unterbricht.

Es wird eine Stichprobe von 50 Schaltern aus der laufenden Produktion entnommen.
Dabei soll angenommen werden, dass die Anzahl der fehlerhaften Schalter in der Stichprobe binomialverteilt ist ($n = 50$, $p = 0{,}1$).

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl fehlerhafter Schalter in der Stichprobe.
Berechnen Sie (ohne Tafelwerk) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 50 Schaltern genau 5 fehlerhaft sind.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 50 Schaltern höchstens 5 fehlerhaft sind.

b) Nennen Sie Gründe, warum man annehmen kann, dass die Anzahl der fehlerhaften Schalter in der Stichprobe binomialverteilt ist ($n = 50$, $p = 0{,}1$).

Die Firma „Maschinenfix" ist Kunde des Konzerns „Thermosicherheit". Sie stellt Maschinen her, die sie vor Überhitzung schützen möchte. In jede dieser Maschinen baut sie 2 Thermoschalter in Reihe ein, d. h. die Stromzufuhr wird genau dann von dieser Thermosicherung rechtzeitig unterbrochen, wenn einer der Schalter oder auch beide zugleich fehlerfrei auslösen.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer neu gebauten Maschine der Firma „Maschinenfix" im Falle einer Überhitzung die Stromzufuhr rechtzeitig unterbrochen wird.

d) Bei jeder neu gebauten Maschine ist die Thermosicherung ja mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % defekt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei hundert neu gebauten Maschinen in mindestens einer Maschine die Thermosicherung defekt ist.

e) Der Konzern „Thermosicherheit" möchte die Qualität der Schalterproduktion erhöhen. Dazu wird ein Team beauftragt, entsprechende Maßnahmen zu ergreifen. Falls der Anteil der fehlerhaften Schalter deutlich gesenkt werden kann, soll das Team eine großzügige Prämie erhalten. Zur Überprüfung der Qualitätsverbesserung wird eine Stichprobe vom Umfang 50 der neuen Produktion entnommen. Wenn sich unter diesen 50 Schaltern höchstens 3 fehlerhafte befinden, soll das Team die Prämie erhalten.
   - Nehmen Sie an, dass überhaupt keine Qualitätsverbesserung eingetreten ist und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Team die Prämie erhält.
   - Nehmen Sie andererseits an, dass eine große Qualitätsverbesserung eingetreten ist und der Anteil der fehlerhaften Schalter auf 5 % gesunken ist und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dem Team die Prämie verweigert wird.

Die Firma „Maschinenfix" produziert die Maschinen mit den eingebauten Thermoschaltern in großer Stückzahl. Überhitzungen ihrer Maschinen treten leider häufiger auf. Die Thermoschalter lassen sich auch nicht vorher testen. Überhitzungen der Maschinen, die nicht durch die Thermoschalter verhindert werden, führen zu Maschinenschäden und sind sehr teuer.

f) Begründen Sie, dass auch eine bessere Produktionsqualität des Konzerns „Thermosicherheit" mit nur 5 % fehlerhaften Schaltern die Probleme der Firma „Maschinenfix" nicht lösen kann.
Geben Sie begründet eine bessere Möglichkeit an, den Schutz vor einem Maschinenschaden durch Überhitzung zu erhöhen.

Aufgabe 20 Welche Urne ist das?

Betrachten Sie zwei Urnen.
Die Urne U_1 enthält 6 schwarze und 4 weiße Kugeln.
Die Urne U_2 enthält 3 schwarze und 7 weiße Kugeln.
In den folgenden Aufgabenteilen werden immer einzelne Kugeln **mit Zurücklegen** gezogen.

a) Aus der Urne U_1 soll 10-mal mit Zurücklegen gezogen werden.
Berechnen Sie (ohne Tafelwerk) die Wahrscheinlichkeit, dass
- nur schwarze Kugeln gezogen werden
- genau 5 schwarze Kugeln gezogen werden
- höchstens 2 schwarze Kugeln gezogen werden
- mindestens 3 schwarze Kugeln gezogen werden.

Es muss bei jeder Rechnung nicht nur das Ergebnis, sondern auch der Rechenweg erkennbar sein.

b) Betrachten Sie nun folgendes Stufenexperiment:
Mithilfe eines Münzwurfs wird eine der beiden äußerlich nicht unterscheidbaren Urnen ausgewählt. Anschließend wird 10-mal mit Zurücklegen aus dieser Urne gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
- genau 5 schwarze Kugeln gezogen werden
- höchstens 2 schwarze Kugeln gezogen werden
- mindestens 3 schwarze Kugeln gezogen werden.

Jetzt wird Ihnen folgendes Spiel angeboten: Der Spielanbieter wählt mithilfe eines Münzwurfs eine der beiden äußerlich nicht unterscheidbaren Urnen aus. Sie dürfen dann zu Testzwecken 10-mal mit Zurücklegen eine Kugel aus dieser Urne ziehen.

Anschließend müssen Sie sich entscheiden, ob Sie für einen Spieleinsatz von 70 € an dem Spiel teilnehmen. Wenn Sie teilnehmen, erhalten Sie eine Auszahlung von 15 € für jede schwarze Kugel, die sich in der ausgewählten Urne befindet.

c) Natürlich lohnt sich nur die Urne U_1. Wenn Sie wüssten, dass die Urne U_2 ausgewählt wurde, würden Sie wohl nicht spielen. Viele schwarze Kugeln beim Testen sprechen für U_1.
Ein Statistiker berät Sie: Er schlägt vor, nur dann zu spielen, wenn mehr als 5 schwarze Kugeln gezogen werden.
- Nehmen Sie an, dass die Urne U_2 vorliegt, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie dennoch den Rat bekommen zu spielen.
- Nehmen Sie andererseits an, dass die Urne U_1 vorliegt, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie dennoch den Rat bekommen nicht zu spielen.
- Interpretieren Sie die beiden Ergebnisse vor dem Hintergrund der Methode des „Testens von Hypothesen".

d) Nachdem Sie 10-mal gezogen haben, stellen Sie fest, dass genau 5 Kugeln schwarz waren.
Nach dem Rat des Statistikers sollten Sie nun die Finger von der Urne lassen.
Aber irgendwie reizt es Sie doch, auf das Spiel einzugehen. Sie beschließen deshalb, die (durch das Versuchsergebnis bedingte) Wahrscheinlichkeit dafür auszurechnen, dass die angebotene Urne doch die Urne U_1 ist.
Zeigen Sie, dass diese Wahrscheinlichkeit ungefähr 66 % beträgt.

e) Bei einer Entscheidung für das Spiel würden Sie also – bei genau 5 gezogenen schwarzen Kugeln – mit 66 % Wahrscheinlichkeit 90 € einnehmen. Führen Sie diesen Gedanken zu Ende und berechnen Sie dazu den (durch das Testergebnis bedingten) Erwartungswert Ihrer Spieleinnahmen. Begründen Sie dann eine Entscheidung für oder gegen die Teilnahme am Spiel.

4.2 Kurs auf erhöhtem Niveau

Aufgabe 1 Falschparker

Der Berliner Senat überlegt, ob er die Parkgebühren (1 € / h) erhöhen muss, damit die Einnahmeverluste durch Parken ohne gültigen Parkschein (so genanntes „Falschparken“) ausgeglichen werden können.
Nach Angabe des Senats beträgt der Anteil der Falschparker gemäß einer Studie aus dem Frühjahr ca. 15 %. Die mittlere Parkdauer beträgt zwei Stunden.

a) Zwei Politessen überprüfen zunächst den Parkplatz „Kudamm-Karree“ mit 34 Autos, dann den Parkplatz „Wertheim Kurfürstendamm“ mit 48 Autos.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Politessen auf dem Parkplatz „Kudamm-Karree“ genau drei Falschparker aufschreiben.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Politessen auf beiden Parkplätzen zusammen mindestens vier Falschparker aufschreiben.
- Geben Sie an, mit wie vielen Falschparkern die Politessen auf beiden Parkplätzen zusammen rechnen sollten.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Politessen beim Kudamm-Karree genau fünf und bei Wertheim genau sechs Falschparker finden. **25 P**

b) In der Senatsverwaltung wird überlegt und anschließend eine Stichprobe von 500 überprüften Autos ausgewertet.

- Berechnen Sie zunächst, wie viele parkende Autos hätten überprüft werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99 % mindestens einen Falschparker zu erwischen.
- Bestimmen Sie für die Stichprobe den kleinstmöglichen Bereich für die Zahl an Falschparkern symmetrisch zum Erwartungswert, in dem diese Zahl mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % liegt. Verwenden Sie dabei die Normalverteilungs-Näherung. **15 P**

c) Es gibt nicht überall und jederzeit Politessen. Deswegen kann man davon ausgehen, dass nur etwa 10 % von allen Falschparkern durch Kontrollen von Politessen gefunden werden. Etwa die Hälfte davon kehrt nach wenigen Minuten zum Wagen zurück. Diese Falschparker werden verwarnt und müssen jeweils 1 € Parkgebühr nachträglich entrichten. Die andere Hälfte muss ein Bußgeld von 15 € pro Falschparker bezahlen.

- Zeigen Sie, dass ein Falschparker durch sein Verhalten im Mittel 1,15 € Mindereinnahmen für die Stadt Berlin verursacht.
- Bestimmen Sie den Betrag, auf den der Berliner Senat das Bußgeld erhöhen müsste, damit Falschparker keine Mindereinnahmen verursachen. **15 P**

d) Der Senat entschloss sich stattdessen zu einer drastischen Erhöhung der Parkgebühren. Im Gegensatz zum Senat befürchten die Medien, dass (deswegen) der Anteil der Falschparker deutlich angestiegen sein könnte.

- Leiten Sie ein Testverfahren für eine Kontrolle von 2400 Fahrzeugen her, mit dem man die Befürchtung der Medien gegebenenfalls statistisch (auf dem 5 %-Niveau) begründen kann.

- Nehmen Sie an, dass der Falschparkeranteil nach der Gebührenerhöhung tatsächlich bei (etwa) 17 % liegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der obige Test trotzdem kein signifikantes Ergebnis liefert. Kann sich in einem solchen Falle der Senat in seiner Ansicht bestätigt fühlen? Begründen Sie Ihre Antwort. **20 P**

e) Die Falschparker-Daten der Frühjahrs-Studie wurden vom Verwaltungsreferat Touristik ausgewertet. Die beobachteten Merkmale waren

B := Auto mit Berliner Kennzeichen
$\overline{B}$:= Auto mit einem Kennzeichen außerhalb Berlins („Tourist“)
F := Falschparker
$\overline{F}$:= Richtigparker.

- Geben Sie die fehlenden Werte in folgender Vierfeldertafel an:

	B	$\overline{B}$	Summe
F	5 %		15 %
$\overline{F}$			
Summe	70 %		

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein erwischter Falschparker ein „Tourist“ ist. **15 P**

f) Aus der Sommer-Studie ist auch bekannt, dass die Anzahl der Fahrzeuge mit einem Kennzeichen außerhalb Berlins im Sommer um 20 % angestiegen ist. Gleichzeitig ist der Anteil der Falschparker auf 18 % gestiegen (vgl. Teil d). Das Parkverhalten der „Touristen“ hat sich dabei im Vergleich zum Frühjahr nicht verändert.

- Bestimmen Sie für die neue Situation im Sommer eine vollständige Vierfeldertafel.

- Interpretieren Sie die beiden Vierfeldertafeln im Hinblick auf das Parkverhalten der Berliner Autofahrer. **10 P**

Aufgabe 2 Rund um den HSV

e) Der Hamburger SV trägt seine Heimspiele in der 57 000 Zuschauer fassenden Arena im Volkspark aus (siehe nebenstehende Abbildung).

a) In der ersten Reihe eines Sitzbereichs befinden sich 31 Plätze, von denen im letzten Saisonspiel 29 besetzt werden.

- Berechnen Sie die Anzahl aller Möglichkeiten, wie sich die 29 (unterscheidbaren) Personen auf die 31 Plätze verteilen können.
- Berechnen Sie die Anzahl aller Möglichkeiten, wie sich die freien Plätze verteilen könnten. **15**

b) Die Bundesligastatistik über viele Jahre weist aus, dass im Mittel etwa 3 Tore pro Spiel (Spieldauer: 90 Minuten) fallen.

f)

g) *Arena des HSV*

h) Ein Zuschauer verlässt während der Spielzeit für 3 Minuten seinen Sitzplatz, um die Toilette aufzusuchen. Auf dem Weg überlegt er sich, ob er bis zu seiner Rückkehr ein Tor „verpasst" haben wird. Sie sollen deshalb gleich die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass ausgerechnet in diesen 3 Minuten mindestens ein Tor fällt. Bitte lesen Sie aber vorher den folgenden Hinweis:

i) *Hinweis: Nehmen Sie an, dass der Erwartungswert μ der Anzahl T der in einem fest ausgewählten Zeitintervall fallenden Tore während eines Bundesligaspiels nur von der Länge dieses Zeitintervalls abhängig ist und zu dieser proportional ist.*

Dann kann man für T die Poissonverteilung verwenden: $P(\{T=k\}) = \frac{1}{e^{\mu}} \cdot \frac{\mu^k}{k!}$.

- Bestimmen Sie das hier passende μ und ermitteln Sie nun damit die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass ausgerechnet in der Toilettenpause mindestens ein Tor fällt.
- Untersuchen Sie auch, ob die Annahmen aus dem Hinweis realistisch sind. **15 P**

Ein Busunternehmen aus Flensburg bietet den Transport zum Stadion an. Es setzt dazu zwei Busse mit insgesamt 92 Plätzen ein. Man kann einen Busplatz telefonisch oder per Internet buchen, braucht aber erst beim Fahrtantritt zu zahlen. Der Andrang bei Fußballspielen ist erfahrungsgemäß groß, und das Angebot ist stets ausgebucht. Allerdings werden im Mittel nur 90 % der gebuchten Plätze tatsächlich wahrgenommen. Wegen des Nichtwahrnehmens von gebuchten Fahrten bietet das Unternehmen deshalb 101 Plätze – also mehr als vorhanden – zur Buchung an. Nehmen Sie an, dass die Anzahlen der nicht kommenden bzw. kommenden Bucher binomialverteilt sind.

Für die folgenden Teile c) und d) können Sie die Tabelle in der Anlage 1 zur Hilfe nehmen oder näherungsweise mit der Normalverteilung rechnen.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei Fahrtantritt mehr als 92 Fahrgäste erscheinen, dass also mindestens eine Person mit gebuchten Plätzen abgewiesen werden muss. **10 P**

d) Bestimmen Sie die Maximalzahl der Buchungen, die das Unternehmen zulassen kann, so dass es mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % zu keinen Überbuchungen kommt. **15 P**

Das Busunternehmen will erreichen, dass der Anteil der Absagen sinkt. Deshalb ändert es seine Vertragsbedingungen dahingehend, dass schon gleich bei der Buchung eine Anzahlung von 5 € zu zahlen ist, die bei Nichterscheinen nicht zurückgezahlt wird.

e) Während der nächsten 1000 Buchungen soll untersucht werden, ob die neue Regelung zu einer Senkung der Absagerquote führt.
Leiten Sie dazu eine Entscheidungsregel her. (Ermitteln Sie die Anzahl K von Absagen so, dass man gerade noch – statistisch begründet – behaupten kann, dass die Maßnahme erfolgreich war. Gehen Sie dabei von einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$ aus, d.h. die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art soll höchstens 5 % sein). **15 P**

Für die Aufgabenteile f) und g) gehen Sie nun von folgenden Daten aus:

- Tatsächlich werden im Mittel nur noch **6 %** der gebuchten Plätze nicht in Anspruch genommen.
- Der Fahrpreis beträgt 20 €. Ein gebuchter Kunde, der nicht kommt, bringt dem Unternehmer also eine Einnahme von 5 € ein, ein gebuchter Kunde, der mitfährt, bringt eine Einnahme von 20 €.

f) Berechnen Sie die erwarteten Einnahmen, wenn das Busunternehmen keine Überbuchungen zulässt. **10 P**

g) Das Unternehmen lässt nun immerhin 5 Überbuchungen zu, nimmt also immer 97 Buchungen an. Kunden, welche die gebuchte Fahrt wegen Überbuchung nicht antreten können, bekommen die Anzahlung zurückerstattet und verursachen zusätzliche Entschädigungskosten von 25 €.

- Ermitteln Sie – je nachdem wie viele Absagen anfallen – die maximal mögliche und die minimal mögliche Einnahme des Unternehmens für eine Fahrt zu einem HSV-Spiel.
- Um eine Bilanz aufzustellen, begründen Sie die folgenden Aussagen:
  - Das Unternehmen hat sichere Einnahmen E_1 von 485 €.
  - Stellen Sie sich vor, dass alle Bucher, die zur Fahrt erscheinen, zunächst die fehlenden 15 € bezahlen.
    Der Erwartungswert E_2 für diese Einnahmen beträgt dann 1367,70 €.
  - Erst kurz vor der Abfahrt erhalten diejenigen Kunden, die wegen Überbuchung nicht mitfahren können, ihre Fahrtkosten von 20 € zurück und außerdem 25 € Entschädigung. Der Erwartungswert dieser Auszahlungen beträgt:
$$K = 45€ \cdot \begin{pmatrix} 5 \cdot B(97;0{,}06\,;\,0) + 4 \cdot B(97;0{,}06\,;\,1) + 3 \cdot B(97;0{,}06\,;\,2) \\ +2 \cdot B(97;0{,}06\,;\,3) + 1 \cdot B(97;0{,}06\,;\,4) \end{pmatrix}$$

    Dennoch lohnt es sich finanziell für das Unternehmen, die 5 Überbuchungen zuzulassen. **20 P**

Anlage 1 zur Aufgabe „Rund um den HSV“, Aufgabenteile c) und d)

Tabellenauszug für <u>akkumulierte</u> Binomialverteilungswerte

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i}$$

$p = 0{,}1$

k \ n	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
0	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0007	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
2	0,0039	0,0036	0,0033	0,0030	0,0028	0,0025	0,0023	0,0021	0,0019	0,0018	0,0016	0,0015
3	0,0145	0,0134	0,0125	0,0115	0,0107	0,0099	0,0092	0,0085	0,0078	0,0072	0,0067	0,0062
4	0,0408	0,0382	0,0357	0,0334	0,0312	0,0291	0,0272	0,0254	0,0237	0,0221	0,0206	0,0192
5	0,0922	0,0870	0,0821	0,0775	0,0731	0,0689	0,0649	0,0612	0,0576	0,0542	0,0510	0,0479
6	0,1750	0,1667	0,1587	0,1511	0,1437	0,1366	0,1299	0,1234	0,1172	0,1112	0,1055	0,1000
7	0,2880	0,2767	0,2657	0,2550	0,2446	0,2345	0,2247	0,2152	0,2061	0,1972	0,1886	0,1803
8	0,4214	0,4081	0,3949	0,3820	0,3693	0,3568	0,3446	0,3326	0,3209	0,3094	0,2982	0,2872
9	0,5598	0,5459	0,5321	0,5184	0,5048	0,4912	0,4778	0,4645	0,4513	0,4382	0,4254	0,4126
10	0,6874	0,6746	0,6617	0,6488	0,6358	0,6227	0,6095	0,5963	0,5832	0,5700	0,5568	0,5437
11	0,7931	0,7825	0,7717	0,7607	0,7495	0,7381	0,7266	0,7149	0,7030	0,6910	0,6789	0,6667
12	0,8723	0,8644	0,8562	0,8478	0,8391	0,8301	0,8209	0,8115	0,8018	0,7919	0,7819	0,7716
13	0,9265	0,9211	0,9154	0,9095	0,9033	0,8969	0,8902	0,8833	0,8761	0,8687	0,8610	0,8531

Anlage 2 zur Aufgabe „Rund um den HSV“, Aufgabenteil g)

Tabellenauszug für Binomialverteilungswerte

$$\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

$p = 0{,}06$

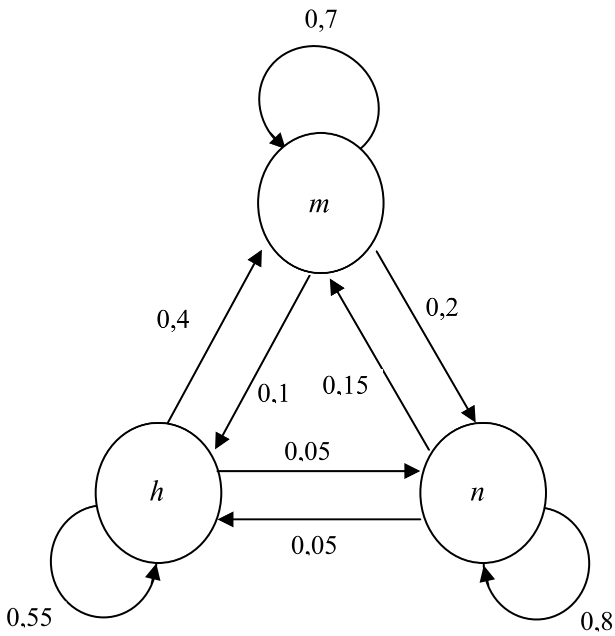
k \ n	92	93	94	95	96	97	98	99	100
0	0,0034	0,0032	0,0030	0,0028	0,0026	0,0025	0,0023	0,0022	0,0021
1	0,0198	0,0188	0,0179	0,0170	0,0161	0,0153	0,0145	0,0138	0,0131
2	0,0575	0,0552	0,0530	0,0509	0,0489	0,0469	0,0450	0,0432	0,0414
3	0,1101	0,1069	0,1038	0,1008	0,0978	0,0949	0,0920	0,0892	0,0864
4	0,1564	0,1536	0,1508	0,1480	0,1451	0,1423	0,1394	0,1366	0,1338
5	0,1756	0,1745	0,1732	0,1719	0,1705	0,1689	0,1673	0,1657	0,1639
6	0,1626	0,1634	0,1640	0,1646	0,1650	0,1653	0,1656	0,1657	0,1657
7	0,1275	0,1296	0,1316	0,1336	0,1354	0,1372	0,1389	0,1405	0,1420
8	0,0865	0,0889	0,0914	0,0938	0,0962	0,0985	0,1008	0,1031	0,1054
9	0,0515	0,0536	0,0557	0,0579	0,0600	0,0622	0,0644	0,0666	0,0687
10	0,0273	0,0287	0,0302	0,0318	0,0333	0,0349	0,0366	0,0382	0,0399
11	0,0130	0,0138	0,0147	0,0157	0,0166	0,0176	0,0187	0,0197	0,0209
12	0,0056	0,0060	0,0065	0,0070	0,0075	0,0081	0,0086	0,0092	0,0099
13	0,0022	0,0024	0,0026	0,0029	0,0031	0,0034	0,0036	0,0039	0,0043

Aufgabe 3 Einkommensgruppen

Die Familien eines fiktiven Landes werden einer der drei angegebenen Einkommensgruppen zugeordnet. In statistischen Erhebungen hat man festgestellt, dass Kinder der Eltern einer bestimmten Einkommensgruppe nach ihrer Ausbildung auch einer anderen Einkommensgruppe angehören können. Es wird angenommen, dass 10 % der Einkommensgruppe hoch (h), 60 % der Einkommensgruppe mittel (m) und 30 % der Einkommensgruppe niedrig (n) angehören. Vereinfachend wird angenommen, dass jede Familie genau zwei Kinder hat und in der nächsten Generation jedes Kind mit einem Kind einer anderen Familie wieder eine Familie gegründet hat.

a) Es werden 4200 Familien nach repräsentativen Grundsätzen ausgewählt.
Berechnen Sie die Anfangsverteilung $\vec{p}_0$ der ausgewählten Bevölkerungsgruppe. **5 P**

Die nachfolgende Abbildung gibt für jede Einkommensgruppe an, welche Anteile dieser Gruppe von einer Generation zur nächsten die Gruppe wechseln bzw. in der Gruppe bleiben.



$$P = \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 8 & 14 & 3 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

b) Begründen Sie anhand des Graphen, dass dieser Prozess durch die Übergangsmatrix P beschrieben werden kann und berechnen Sie die Einkommensverteilung $\vec{p}_1$ in der nächsten Generation.
20 P

c) Ermitteln Sie die Einkommensverteilung $\vec{p}_{-1}$ der Elterngeneration der ersten Gruppe.
Setzen Sie dabei voraus, dass obiges Modell auch schon bei dieser Generation galt. **20 P**

Nach einigen Jahren stellt man fest, dass Eltern der hohen Einkommensgruppe durchschnittlich nur ein Kind bekommen, in der mittleren Einkommensgruppe dagegen zwei Kinder und in der niedrigen Einkommensgruppe drei Kinder geboren werden.

d) Ermitteln Sie die modifizierte Übergangsmatrix und begründen Sie Ihre Vorgehensweise. **15 P**

(*Hinweise:*
Überlegen Sie, welche Matrixelemente jeweils die Entwicklung einer Gruppe repräsentieren.

Kontrollergebnis: $P_{Mod} = \begin{pmatrix} \frac{11}{40} & \frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & \frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 4 & 3 \\ 8 & 28 & 9 \\ 1 & 8 & 48 \end{pmatrix}$)

e) Berechnen Sie die Einkommensverteilung in den nächsten beiden Generationen.
Vergleichen Sie das modifizierte Modell hinsichtlich der Entwicklung der Gesamtzahl der Familien mit dem ursprünglichen Modell. **20 P**

Bei einigen Populationsmatrizen A erhält man die Einheitsmatrix E durch Mehrfachmultiplikation der Matrix A mit sich selbst, also $A^n = E$ *für bestimmte* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Die Einheitsmatrix E erhält man aber auch durch Multiplikation der Matrix A mit ihrer „inversen Matrix“ A^{-1}, sofern diese existiert, also $A \cdot A^{-1} = E$.

Gegeben ist nun die allgemeine Populationsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$.

f) Bestimmen Sie die Matrizen A^2 und A^3 und ermitteln Sie die Bedingungen für a, b und c, damit gilt: $A^3 = E$.
Interpretieren Sie für diesen Fall die Bedeutung der Matrix A^2. **15 P**

g) Interpretieren Sie dieses Phänomen für die Entwicklung einer zugehörigen Population. **5 P**

Aufgabe 4 „Handygefahren“

Um die Unfallgefahr zu verringern, ist in Deutschland die Benutzung eines Handys im Auto durch den Fahrer nur mit einer Freisprecheinrichtung erlaubt. Weil eine gut funktionierende Freisprecheinrichtung aber relativ teuer ist, telefonieren viele Fahrer trotzdem unerlaubt während der Fahrt mit dem Handy.
Im Folgenden soll stets unter „Ein Fahrer telefoniert“ verstanden werden: Dieser Fahrer telefoniert während der Fahrt mit seinem Handy, ohne eine Freisprechanlage zu verwenden (er begeht also eine Ordnungswidrigkeit).

Auf einer belebten Straße soll der Anteil p der Autofahrer untersucht werden, die zum Zeitpunkt einer Kontrolle telefonieren. Der Anteil p hängt von Ort und Zeitpunkt der Kontrolle ab. Dabei wird angenommen, dass die Fahrer sich in ihrem Telefonierverhalten gegenseitig nicht beeinflussen.

a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von p die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
- A: Bei 10 vorbeifahrenden Autos telefonieren genau die Fahrer des 3. und des 5. Autos.
- B: Bei 10 vorbeifahrenden Autos telefonieren die Fahrer der ersten vier Autos nicht, aber trotzdem telefonieren genau zwei Fahrer. **10 P**

b)
- Berechnen Sie, wie groß der Anteil p der telefonierenden Fahrer an einer bestimmten Kontrollstelle mindestens sein muss, wenn unter 100 vorbeifahrenden Autos mit mehr als 95 % Wahrscheinlichkeit mindestens eines von einem telefonierenden Fahrer gelenkt wird.
- Auf der Schlossallee wird an einem Mittwoch zwischen 15 Uhr und 16 Uhr eine Kontrolle durchgeführt. Während dieser Zeit gelte für den Anteil p jener Fahrer, die zu einem beliebigen Zeitpunkt während dieser Zeitspanne gerade telefonieren, $p = 3$ %.

  Bestimmen Sie die Anzahl der Autos, die mindestens kontrolliert werden müssen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80 % mindestens einen telefonierenden Fahrer erwischt. **20 P**

c) Nun kontrolliert man auf einer Zufahrt zu einer beliebten Diskothek zwischen 21 Uhr und 23 Uhr. Hier ist die Telefonierwahrscheinlichkeit außergewöhnlich hoch, nämlich $p = 20$ %. Die Polizisten wetten untereinander, beim wievielten Auto sie erstmals einen Telefonierer erwischen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass dieses
- beim sechsten,
- beim zehnten,
- nach dem zehnten Auto passiert.

Einer der Polizisten behauptet, dass im Mittel beim fünften Auto der erste Telefonierer zu erwarten ist.
- Beschreiben Sie diese Behauptung mit Begriffen der Stochastik und begründen Sie diese:

  (1) entweder unter Verwendung der Formel $1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + ... = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

  (2) oder indem Sie erkennen, dass nach dem ersten Auto entweder der erste Telefonierer aufgetreten ist oder die erwartete Anzahl der Autos bis zum ersten Telefonierer sich gegenüber der Situation am Anfang um 1 erhöht hat. **25 P**

d) Nach einigen Unfällen, bei denen Autofahrer telefoniert hatten, will die örtliche Polizei in ihrer Stadt verstärkte Kontrollen durchführen, wenn der Anteil der telefonierenden Autofahrer mehr als 15 % beträgt. Dazu überprüft sie in der Stadt 1000 fahrende Autos.

j) Bestimmen Sie mithilfe der Normalverteilung die Anzahl der telefonierenden Fahrer, die die Kontrolle mindestens passieren müssen, um auf einem Signifikanzniveau von 5 % gute Argumente für verstärkte Kontrollen zu haben. **20 P**

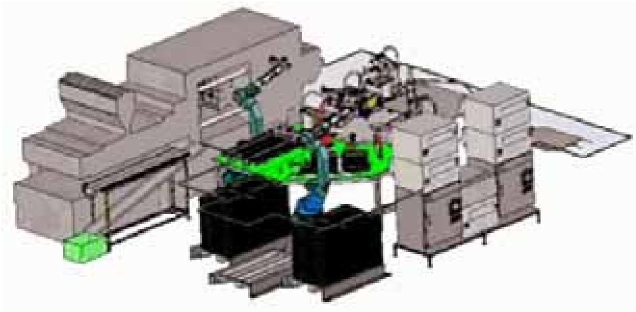
e) Wenn bei einer Umfrage 20 % der Befragten angeben, beim Fahren zu telefonieren, so ergeben sich bei einer Kontrolle dennoch viel geringere Anteile. Dieses liegt daran, dass die Telefonierer nicht ständig telefonieren. Um zu einem differenzierteren Bild zu gelangen, ist es erforderlich, Klasseneinteilungen nach der durchschnittlichen (nach wie vor illegalen) Telefonierdauer pro Stunde vorzunehmen. In sehr starker Vereinfachung ergibt sich bei einer Befragung von Autofahrern das folgende Bild, das als repräsentativ gelten möge:

	Wenig	Normal	Viel	Dauernd
Durchschnittliche Telefonierzeit pro Stunde [in Minuten]	5	10	15	30
Anteil der Autofahrer	7 %	10 %	2 %	1%

Ein Autofahrer passiert eine Kontrolle.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er bei der Kontrolle erwischt wird, wenn man weiß, dass er ein Wenigtelefonierer ist.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er gerade telefoniert, wenn man gar nichts über ihn weiß.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er gerade telefoniert, wenn man weiß, dass er ein Telefonierer ist (die Frage also nach der Wahrscheinlichkeit, ob ein Telefonierer erwischt wird).
- Der Autofahrer telefoniert gerade bei der Kontrolle. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei ihm um einen Wenigtelefonierer handelt. **25 P**

Aufgabe 5 Qualitätssicherung



Eine Firma fertigt elektronische Bauteile als Massenware. Von den Bauteilen sind durchschnittlich 14 % defekt. (Die Defekte entstehen stochastisch unabhängig voneinander.)

a) Der laufenden Produktion werden Bauteile entnommen.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter sechs entnommenen Bauteilen höchstens eines defekt ist.
- Berechnen Sie, wie viele Bauteile man der laufenden Produktion entnehmen muss, damit die Wahrscheinlichkeit, auf mindestens ein defektes Bauteil zu stoßen, größer als 99 % ist. **(15P)**

b) Ein defektes Bauteil wird von einem firmeneigenen Prüfgerät mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % als defekt erkannt. Das Prüfgerät zeigt allerdings auch einwandfreie Bauteile fälschlicherweise mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % als defekt an.

- Bestätigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der das Prüfgerät eine richtige Entscheidung trifft, größer als 97 % ist.
- Berechnen Sie auch die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil tatsächlich defekt ist, wenn das Prüfgerät einen Defekt anzeigt. Interpretieren Sie das Ergebnis. **(15P)**

c) Die Firma denkt über die Anschaffung eines neuen, verbesserten Prüfgerätes nach, das mit Sicherheit korrekte Entscheidungen anzeigt. Um entscheiden zu können, ob sich die Anschaffung lohnt, muss untersucht werden, ob sich mit dem neuen Gerät ein Prüfverfahren einrichten lässt, das die Anzahl der Prüfungen vermindert.
Die Firma überlegt, das Prüfverfahren wie folgt zu ändern:
Zehn Bauteile werden hintereinandergeschaltet und gleichzeitig in einem Durchgang geprüft. Nur dann, wenn bei dieser Gruppenuntersuchung eine Defektanzeige erfolgt (mindestens ein Bauteil ist dann defekt), wird zusätzlich jedes Bauteil einer Einzelprüfung unterzogen.

- Begründen Sie, dass nach diesem Verfahren pro Durchgang entweder genau 1 Prüfung oder genau 11 Prüfungen erforderlich sind.
- Ermitteln Sie, wie viele Prüfungen im Durchschnitt für die Überprüfung von 10 Bauteilen bei diesem Verfahren zu erwarten sind.
  Zur Kontrolle: $E = 8{,}7870$. **(10P)**

d) Die Kostenprüfer sind enttäuscht, dass das neue Verfahren lediglich eine relative Einsparung R von etwa 12 % gegenüber dem ursprünglichen Verfahren mit den einzelnen Prüfungen bedeutet. Die Frage taucht auf, ob sich diese Einsparung verbessern lässt, wenn man in einem Durchgang eine andere Anzahl als 10 Bauteile hintereinanderschaltet.

- Bestimmen Sie die Erwartungswerte $R(n)$ der relativen Einsparungen auch für Hintereinanderschaltungen von $n = 7$ und $n = 13$ Bauteilen.

- Weisen Sie für eine allgemeine Länge n der Hintereinanderschaltung die Gültigkeit der Formel $R(n)=\dfrac{n\cdot 0{,}86^n-1}{n}=0{,}86^n-\dfrac{1}{n}$ $(n\neq 1)$ für die relative Einsparung $R(n)$ nach. Begründen Sie die Einschränkung $n\neq 1$ und bestimmen Sie für $n<8$ die Anzahl n mit der größten Einsparung. **(20P)**

e) Die sorgfältig geprüften Bauteile sollten natürlich auch fehlerfrei bei den Kunden der Firma ankommen. Eventuelle Schäden während des Versands können jedoch nicht ganz ausgeschlossen werden. Laut Angaben der beauftragten Versandfirma beträgt jedoch die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil beim Versand beschädigt wird, nur 0,3%.

Falls bei einer Lieferung von 1000 Bauteilen mehr als 7 Bauteile durch den Versand Schäden erleiden, muss die Versandfirma eine hohe Entschädigungssumme von 1000 € zahlen.
Für eine Kalkulation des finanziellen Risikos ist es für die Versandfirma natürlich von großem Interesse, die Wahrscheinlichkeit eines Entschädigungsfalles zu kennen.

Die Anzahl der beschädigten Bauteile soll als binomialverteilt angesehen werden.

Für die Berechnung solcher Wahrscheinlichkeiten existieren Näherungsverfahren.

Begründen Sie mithilfe der Laplace-Bedingung, dass die Näherungsformel von Moivre/Laplace nicht geeignet ist. Für kleine Werte von p ist die Poisson-Verteilung für Näherungswerte besser geeignet. Die Näherungsformel von Poisson lautet:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}\approx\frac{\mu^k}{k!}\cdot e^{-\mu}\quad\text{mit}\quad \mu=n\cdot p$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Poisson-Näherung die Wahrscheinlichkeit eines Entschädigungsfalles. **(20P)**

Zur Kontrolle: Der mit der Binomialverteilung berechnete Wert beträgt gerundet $P\approx 0{,}0118$.

f) Das Versandunternehmen setzt 1040 Lieferungen mit je 1000 Bauteilen pro Jahr an. Ermitteln Sie die Höhe der durchschnittlichen Entschädigungszahlungen im Jahr. **(10P)**

g) Die Abnehmerfirma denkt über ihre Nachteile beim Modell „7+“ (pauschale Entschädigungszahlungen erst bei mehr als 7 defekten Bauteilen pro Lieferung) nach.

Begründen Sie, warum Modell „7+“ für die Abnehmerfirma tatsächlich Nachteile im Vergleich zu einem Entschädigungsverfahren aufweisen kann, das Entschädigungszahlungen für jedes einzelne defekte Bauteil vorsieht.

Ermitteln Sie den Entschädigungswert pro Bauteil so, dass der Erwartungswert der Zahlungen in einem Jahr dem in (f) ermittelten Erwartungswert des Modells 7+ entspricht. **(10P)**

Aufgabe 6 Wetter auf den Färöer-Inseln

Im Nordatlantik liegt die Inselgruppe der Färöer-Inseln. Aufgrund ihrer geografischen Position (einerseits noch im Golfstrom, andererseits mitten in der Zugstraße der subarktischen Tiefdruckgebiete) sind die Inseln für ihr ständig wechselndes Wetter bekannt. „Jedes Wetter an einem Tag", könnte ein touristischer Werbespruch sein, wenn dies denn für Touristen attraktiv wäre; die Fischer auf der Insel sprechen gar davon, dass sich das Wetter vier Mal am Tag ändern würde.

An der Nordspitze der Hauptinsel Streymoy befindet sich auf einem Felsen bei Tjornuvik eine Wetterstation. Unter anderem wird hier die *Veränderlichkeit* des Wetters durch die Angabe der *Änderungswahrscheinlichkeit* $P_{\text{Änd}}$ bestimmt.

Dazu wird der Tag in vier Zeitabschnitte à 6 Stunden geteilt (diese Abschnitte heißen Perioden); eine Periode heißt „trocken", wenn während dieser Zeit höchstens 1 mm Niederschlag fällt; die Periode heißt „regnerisch", wenn mehr als 1 mm Niederschlag fällt. Die *Änderungswahrscheinlichkeit* $P_{\text{Änd}}$ gibt nun an, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich das Wetter von einer Periode zur nächsten zwischen den beiden Typen ändert.

Langfristige Messungen ergaben $P_{\text{Änd}} = 0{,}38$.

a) Bestätigen Sie, dass man nach diesen Angaben eine zweitägige Wetterbeobachtung als siebenstufiges Bernoulli-Experiment mit $p = P_{\text{Änd}}$ betrachten könnte. **(5P)**

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
- Das Wetter bleibt für einen ganzen Tag gleich.
- Nach einer trockenen Periode bleibt es zwei weitere Perioden trocken.
- Während eines Tages ändert sich das Wetter von jeder Periode zur nächsten.
- Nachdem ab Mitternacht die ersten sechs Stunden regnerisch gewesen sind, kann man aber den Tag über – also während der nächsten beiden Perioden – auf den Regenschirm verzichten. **(15P)**

c) Jetzt geht es um die Prognosefähigkeit des bisherigen Modells.
- Nehmen wir an, die jetzige Periode sei „regnerisch". Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dann die Periode 18 Stunden später ebenfalls „regnerisch" sein wird.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für „regnerisch" in der Periode 18 Stunden später, wenn die jetzige Periode „trocken" ist.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Periode 24 Stunden später
  – vom gleichen Typ
  – vom anderen Typ
  sein wird wie die jetzige. **(15P)**

d) • Begründen Sie, dass der folgende Funktionsterm *k(n)* angibt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass sich das Wetter in Bezug auf die beiden Eigenschaften „trocken“ oder „regnerisch“ nach *n* Übergängen nicht geändert haben wird:

$$k(n) = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2i} \cdot P_{Änd}^{\,2i} \cdot \left(1 - P_{Änd}\right)^{(n-2i)}$$

Hinweis: Die eckige Klammer $\lfloor ... \rfloor$ bedeutet Abrunden auf die nächste natürliche Zahl.

• Erstellen Sie eine Wertetabelle dieser Funktion mit dem gegebenen Wert von $P_{\text{Änd}}$ für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

• Interpretieren Sie die bisherigen Ergebnisse in Hinblick auf mögliche Wetterprognosen in Tjornuvik. **(20P)**

Die Beobachtungen in Tjornuvik ergaben außerdem, dass 35 % der Perioden „trocken“ waren und 65 % „regnerisch“. Es soll jetzt untersucht werden, welche Änderungswahrscheinlichkeit sich aus **diesen Zahlen** ergibt, wenn man eine stochastische Unabhängigkeit von „trockenen“ und „regnerischen“ Perioden annimmt. Wir nennen diese Änderungswahrscheinlichkeit die *unabhängige Änderungswahrscheinlichkeit* $P_{\text{Änd, unabh.}}$.

e) Zeigen Sie, dass diese *unabhängige Änderungswahrscheinlichkeit* $P_{\text{Änd, unabh.}}$ bei den ermittelten Wahrscheinlichkeiten $p_t = 0{,}35$ für „trockenes“ Wetter und $p_r = 0{,}65$ für „regnerisches“ Wetter den Wert $P_{Änd,unabh.} = 0{,}455$ aufweist.

Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Vergleich mit dem ermittelten $P_{\text{Änd}} = 0{,}38$. **(20P)**

Im Folgenden gehen wir davon aus, dass die Änderungsrate für das Wetter **nicht** unabhängig davon ist, welches Wetter gerade herrscht. Wir rechnen also mit bedingten Wahrscheinlichkeiten für die Wetteränderung.
Wir nennen die Wahrscheinlichkeit einer Wetteränderung unter der Voraussetzung, dass die gegenwärtige Periode „trocken“ ist, $P(r|t)$, und entsprechend die Wahrscheinlichkeit einer Wetteränderung unter der Voraussetzung, dass die gegenwärtige Periode „regnerisch“ ist, $P(t|r)$.

f) Zeigen Sie, dass aus diesem Ansatz das Gleichungssystem

(1) $0{,}35 \cdot \left(1 - P(r \mid t)\right) + 0{,}65 \cdot P(t \mid r) = 0{,}35$ bzw. $0{,}65 \cdot \left(1 - P(t \mid r)\right) + 0{,}35 \cdot P(r \mid t) = 0{,}65$

(2) $0{,}65 \cdot P(t \mid r) + 0{,}35 \cdot P(r \mid t) = 0{,}38$

folgt, und bestimmen Sie $P(r|t)$ und $P(t|r)$.

Hinweis: Sie können die Situation durch ein Baumdiagramm darstellen.

Ermitteln Sie, welche Werte sich für $P(r|t)$ und $P(t|r)$ ergäben, wenn in Gleichung (2) nicht der Wert 0,38 (also $P_{\text{Änd}}$), sondern 0,455 (also $P_{\text{Änd, unabh.}}$) eingesetzt wird, und begründen Sie, warum dieses Resultat nicht überraschend ist. **(25P)**

Aufgabe 7 Flughafen

Am Hamburger Flughafen wird für weitere Umbauplanungen das Gepäck bezüglich des Zielflughafens und des Gewichtes statistisch erfasst.

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gepäckstück den Zielflughafen Frankfurt hat, sei p. Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei zufällig herausgegriffenen Gepäckstücken mindestens eines nicht den Zielflughafen Frankfurt hat, ist 90 %.

   Berechnen Sie p.

b) Das Handgepäck wird wie folgt kontrolliert:
   Bei Kontrolle 1 wird das Gepäck mit einem Spezialgerät durchleuchtet. Nur wenn dieser Vorgang kein eindeutiges Ergebnis liefert, wird er ein zweites Mal durchgeführt (Kontrolle 2). Liegt dann immer noch kein eindeutiges Ergebnis vor, wird das Gepäckstück geöffnet und durch einen Mitarbeiter geprüft (Kontrolle 3). Kontrolle 1 und Kontrolle 2 dauern je 10 Sekunden, Kontrolle 3 dauert 5 Minuten. Zwischen zwei Kontrollvorgängen bei einem Gepäckstück vergehen 30 Sekunden.
   Kontrolle 1 liefert zu 90 % ein eindeutiges Ergebnis, Kontrolle 2 zu 60 %.

   Ermitteln Sie die durchschnittlich für die Gepäckkontrolle eines Handgepäckstückes benötigte Zeit.

c) Bei den aufgegebenen Gepäckstücken wird das Gewicht x kg als Realisierung einer Zufallsvariablen X bestimmt. Aus langer Erfahrung kennt man den Mittelwert von 15 kg und die Standardabweichung von 6,45 kg.

   Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig herausgegriffenes Gepäckstück ein Gewicht von mindestens 14 kg und höchstens 16 kg hat, wenn man von einer Normalverteilung ausgeht?

d) Ein Statistiker hält an einem Tag ganz genau alle Gewichte der aufgegebenen Gepäckstücke fest. Bei der graphischen Darstellung sieht er, dass die Wahrscheinlichkeitsfunktion (Dichtefunktion) f der Gewichtsverteilung eher einem Trapez als einer Glockenkurve entspricht:

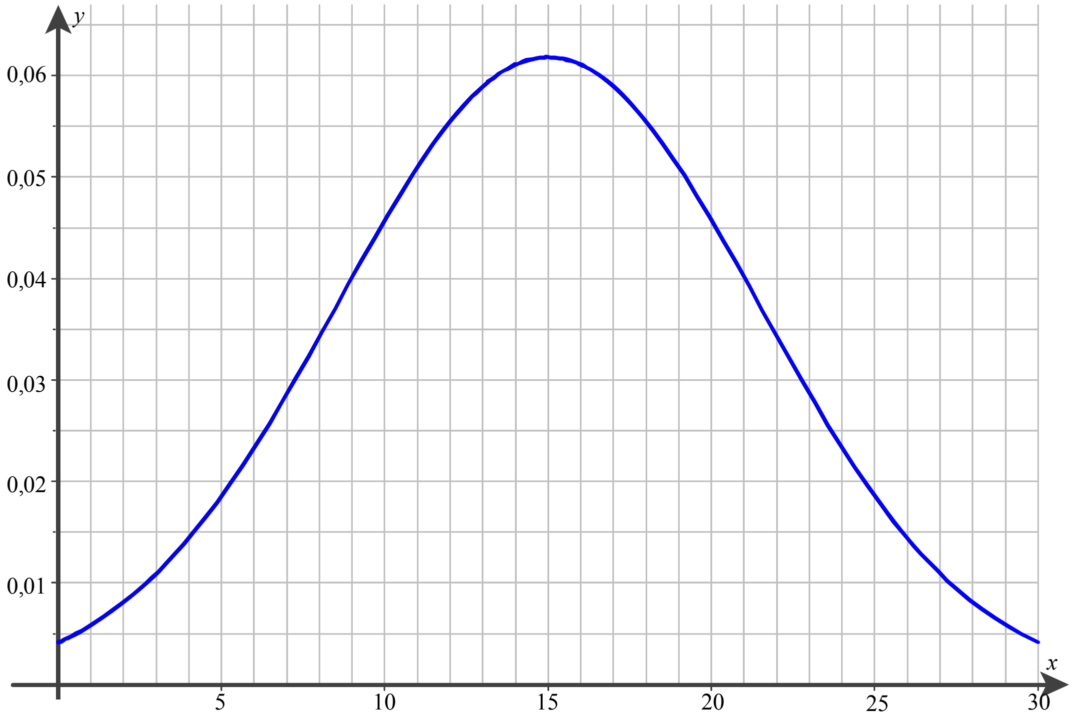
$$f : x \to \begin{cases} 0{,}005x & \text{für} \quad 0 \le x < 10 \\ 0{,}05 & \text{für} \quad 10 \le x < 20 \\ 0{,}005 \cdot (30 - x) & \text{für} \quad 20 \le x \le 30 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   Beschreiben Sie, warum f tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellt.

e) Bestimmen Sie den Erwartungswert dieser Verteilung.

Fortsetzung nächste Seite →

f) Auch bei dieser Verteilung ist die Standardabweichung 6,45 kg, Lösen Sie die Aufgabe c) für diese Verteilung und begründen Sie mit Blick auf die Normalverteilung, warum das Ergebnis jetzt kleiner als das in c) erhaltene ist.
Sie können dazu nachstehende Abbildung verwenden, welche die Wahrscheinlichkeitsfunktion zur Normalverteilung aus Teil c) zwischen 0 und 30 zeigt.



Aufgabe 8 Fahrtstrecke

Die Aufgabenteile a) und c) basieren auf einer Examensaufgabe von Wiskunde B (2003-II).

Ein Transportunternehmen bringt jeden Tag frisch die berühmten Limburger Fladenkuchen von Limburg nach Twente und fährt dabei immer dieselbe Strecke. Die dafür nötige Zeit ist normalverteilt mit einem Mittelwert von zweieinhalb Stunden und einer Standardabweichung von einer viertel Stunde. Die Torten müssen spätestens um halb neun abgeliefert sein.
Einerseits möchte der Chef der Firma die Lohnkosten des Fahrers beschränken, indem er ihn nicht zu früh abfahren lässt. Andererseits kann der Chef es sich nicht erlauben, an mehr als 5 % der Tage die Torten verspätet anzuliefern.

a) Berechnen Sie die Uhrzeit, bei welcher der Fahrer losfahren muss.

b) Diese Teilaufgabe betrachtet ein weiteres Modell für die Fahrtdauer aus Teil a).
Stellen Sie sich vor, dass die Strecke von Limburg nach Twente in 100 vergleichbare Bereiche aufgeteilt ist. Jeder der Bereiche wird
- mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % in 75 Sekunden durchfahren
- mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % in 90 Sekunden durchfahren
- mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % in 105 Sekunden durchfahren.

Die Gründe für die jeweils gefahrene Zeit liegen allein im jeweiligen Teilstück begründet.

Ermitteln Sie mit Hilfe einer Zufallsziffern-Tabelle in Ihrer Formelsammlung eine simulierte Fahrzeit in Sekunden nach den ersten 10 Bereichen.
Bestimmen Sie damit ein Simulationsmodell für die gesamte Strecke.

c) Auf seinen täglichen Fahrten ist dem Fahrer aufgefallen, dass viele Autofahrer auf den Strecken mit einer Geschwindigkeitsbegrenzung auf 120 km/h viel zu schnell fahren. Darum ist er auch nicht verwundert, dass eine Kontrolle ergibt, dass 13 % der Autofahrer schneller als 137 km/h fährt.
(Diese Kontrolle wurde mit vielen Fahrzeugen unter gleichen Verkehrsbedingungen durchgeführt. Fahrzeuge, die schneller als 137 km/h gefahren sind, wurden auf den nächsten Parkplatz gleitet und angehalten.)

Setzen Sie voraus, dass die gefahrene Geschwindigkeit normalverteilt ist mit einem Mittelwert von 126 km/h, und bestimmen Sie unter dieser Annahme, wie viel Prozent der Autofahrer sich dann an die vorgeschriebene Geschwindigkeit halten, also nicht schneller als 120 km/h fahren.

Die folgenden Aufgabenteile beleuchten eher theoretische Aspekte der Stochastik, es geht dabei aber auch um Bezüge zu den Aufgabenteilen a) und c).

d) Beschreiben Sie, wie sich die Wahl der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung auswirkt, und interpretieren Sie die mathematischen Auswirkungen im Kontext der Aufgabenteile a) und c).

e) Beschreiben Sie den Inhalt des Zentralen Grenzwertsatzes und seine Bedeutung für die Modellierung.

Aufgabe 9 Motorenhersteller

Ein Motorenhersteller verbaut in seinen Motoren Kolben von einem Zulieferer. Er benötigt 1 000 dieser Kolben für einen Produktionstag.

Brauchbar sind für ihn Kolben mit einem Durchmesser zwischen 88,4 und 89,4 (Angaben in Millimeter). Werden diese Richtmaße nicht eingehalten, so ist es möglich Kolben mit einem um höchstens 0,4 größeren Durchmesser nachzuarbeiten. Die Kosten für die Nacharbeit betragen 80 €. Ist die Abweichung größer, so gilt der betreffende Kolben als Ausschuss.

Nehmen Sie an, dass die Maße der gelieferten Kolben normalverteilt sind. Eine Stichprobe hat ergeben, dass der Mittelwert 88,90 und die Standardabweichung 0,57 beträgt. Der Preis beträgt bei dieser Fertigungsgenauigkeit 60 € für einen einzelnen Kolben (inkl. Verpackung). Für den Transport müssen pro Lieferung unabhängig von der Zahl der gelieferten Kolben insgesamt 130 € angesetzt werden.

a) Ermitteln Sie, wie viele von 1 000 Kolben einer Lieferung auf Anhieb brauchbar sind?

b) Berechnen Sie die Bestellmenge, damit wenigstens 1 000 Kolben in der Lieferung enthalten sind, die mit und ohne Nacharbeit verbaut werden können?

c) Untersuchen Sie, ob die Nacharbeit der Kolben lohnt.

d) Diese Teilaufgabe soll die möglichen Berechnungen in Teilaufgabe e) etwas vereinfachen:

- Zeigen Sie, dass zwischen der Liefermenge n aus Teilaufgabe b) und der Standardabweichung σ folgender Zusammenhang gilt: $n(\sigma) = \dfrac{1000}{\Phi\left(\dfrac{0,9}{\sigma}\right) + \Phi\left(\dfrac{0,5}{\sigma}\right) - 1}$.
- Bestimmen Sie eine analoge Beziehung zwischen der Wahrscheinlichkeit, dass ein Kolben ohne Nachbearbeitung brauchbar ist, und der Standardabweichung.

e) Eine Verringerung der Standardabweichung führt zu einer Erhöhung der Fertigungsgenauigkeit, jedoch steigt dabei auch der Preis: eine Verringerung von σ um 0,1 hat jeweils eine Preissteigerung von 10 % zur Folge.
Interessant ist jetzt die Frage, ob der Weg der Erhöhung der Fertigungsqualität der Kolben hinsichtlich einer Kostensenkung lohnt und wenn ja, in welchen Grenzen.
Ermitteln Sie zur Untersuchung dieser Frage ein mögliches Verfahren.

Aufgabe 10 Buchungsrisiken

Das Reisebüro „KONTAKTE“ vermittelt Pauschalreisen für Alleinreisende in das Hotel „CLUB FROHSINN“. In der Hauptsaison steht dem Reisebüro ein Kontingent von 100 Plätzen zu, die immer ausgebucht sind. Erfahrungsgemäß werden kurz vor Reisebeginn 5 % der gebuchten Plätze abgesagt.

a) Beschreiben Sie, unter welchen Umständen es sinnvoll ist, die Anzahl X der in der Hauptsaison kurzfristig absagenden Reisekunden als binomialverteilt anzunehmen? Diskutieren Sie diese Frage auch für den Fall, dass das Reisebüro Plätze für Gruppen und Familien anbietet.

Im Weiteren soll angenommen werden, dass die in a) genannte Zufallsgröße X binomialverteilt ist.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der Hauptsaison für einen bestimmten Termin
   - genau 5 Reisegäste,
   - mindestens 3 Reisegäste,
   - höchstens 4 Reisegäste,
   - 3 oder 4 Reisegäste kurzfristig absagen?

Das Reisebüro lässt Überbuchungen zu. In der Hauptsaison nimmt es pro Reise 102 Buchungen an und geht das Risiko ein, dass es bei zu wenigen Absagen großen Ärger gibt.

c) Ermitteln Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass mindestens ein Reisegast seine gebuchte und auch wirklich gewünschte Reise nicht antreten kann?

d) Nehmen Sie an, dass alle buchenden und nicht absagenden Kunden jeweils 200 € Gewinn einbringen, dass aber Kunden, welche die gebuchte Reise antreten wollen und nicht können, für das Reisebüro einen Verlust von 1 200 € bedeuten.
   Welche Gewinnerwartung hat das Reisebüro pro Reisetermin in der Hauptsaison an der Vermittlung von Plätzen im „CLUB FROHSINN“?
   Beurteilen Sie, ob es sich für das Reisebüro lohnt, Überbuchungen zuzulassen?

e) Begründen Sie, dass das Reisebüro pro Reisetermin in der Hauptsaison 103 Buchungen zulassen sollte, wenn die Gewinnerwartung maximal sein soll.

Wird die Tabelle zur Binomialverteilung im Anhang verwendet, dann sollte dargestellt werden, wie die abgelesenen Werte prinzipiell zu berechnen sind.

Aufgabe 11 Bogenschießen

Dieter ist von seinen Fähigkeiten als Bogenschütze sehr überzeugt. Er prahlt herum, dass er nur ganz selten mehr als 1 dm neben den Mittelpunkt der Zielscheibe trifft. Sein Freund Herbert – auch ein Mathematiker – meint, er solle doch mal eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (Wahrscheinlichkeitsdichte) für die Entfernung x der Einschüsse zum Mittelpunkt bei seinen Bogenschüssen angeben.

Dieter behauptet: Nehmen wir die 1 dm als eine Längeneinheit, so treffe ich in einem Abstandsintervall von 0 bis 1 Längeneinheiten mit konstanter Wahrscheinlichkeit, für die Einschüsse mit einem größeren Abstand x vom Mittelpunkt der Schießscheibe nimmt die Wahrscheinlichkeit mit x^{-4} bezogen auf den Abstand x ab.

a) Vergleichen Sie die Funktion g mit den gemachten Angaben und bestimmen Sie a so, dass g wirklich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung beschreibt (g wird dann auch Dichtefunktion genannt).

$$g : x \to \begin{cases} a & \text{für} \quad 0 \le x \le 1 \\ a \cdot x^{-4} & \text{für} \quad 1 < x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Streuung für den Abstand der Einschüsse vom Mittelpunkt der Zielscheibe.

c) Nachdem dies nun alles berechnet ist, fordert Herbert Dieter auf, seine Bogenkünste zu zeigen. Sie verabreden, dass Herbert ihn nur auslacht, wenn Dieter mindestens 2 Längeneinheiten daneben schießt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis unter den von Dieter gemachten Angaben.

d) Die beiden haben verabredet, dass Dieter zum Beweis seiner Künste 4-mal schießt.

Bestimmen Sie unter den von Dieter gemachten Angaben die Wahrscheinlichkeit, dass Herbert keinen Anlass zum Lachen bekommt.

e) Dieter schießt nun viermal mit dem Ergebnis, dass der Pfeil dreimal derart weit weg vom Mittelpunkt der Scheibe landet, dass Herbert sich jedes Mal vor Lachen ausschüttet.

Beurteilen Sie unter Beachtung dieser Schießleistung die von Dieter gemachten Angaben.

Aufgabe 12 Blutspenden

Zentrale schriftliche Abiturprüfung, Hamburg 2005

Jeder Mensch hat Blut einer bestimmten Blutgruppe. Die folgende Tabelle zeigt die Häufigkeit des Auftretens von drei Blutgruppen in einer Bevölkerung:

Blutgruppe	AB rh–	B Rh+	A Rh+
Anteil	$\frac{1}{100}$	$\frac{11}{100}$	$\frac{1}{3}$

a) Es werde eine feste Anzahl von zufällig herausgegriffenen Blutspendern betrachtet.

- Unter welchen Umständen ist es sinnvoll, die Anzahl X der Personen unter den Blutspendern, die eine bestimmte Blutgruppe haben, als binomialverteilt anzunehmen?
- Beschreiben Sie eine Situation, in der die Voraussetzungen einer Binomialverteilung nicht erfüllt sind.

Im Folgenden soll angenommen werden, dass die in a) genannten Zufallsgrößen X tatsächlich binomialverteilt ist.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter
- 100 Blutspendern genau 11 Blutspender mit der Blutgruppe B Rh+ sind,
- 100 Blutspendern höchstens einer mit der Blutgruppe AB rh– ist,
- 50 Blutspendern mindestens 15 Blutspender mit der Blutgruppe A Rh+ sind,
- 2500 Blutspendern mindestens 800 Blutspender und höchstens 900 Blutspender mit der Blutgruppe A Rh+ sind.

c) Berechnen Sie, wie viele Spender man mindestens benötigt, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens einen Spender mit der Blutgruppe AB rh– zu finden.

Man kann davon ausgehen, dass in Deutschland ein Anteil von 1 ‰ unter den möglichen Blutspendern mit Präcortal-Retroviren infiziert ist.

Jede Blutspende wird auf die Präcortal-Retroviren getestet. Der dafür verwendete Test erkennt eine vorhandene Infektion mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 %. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % zeigt der Test eine Infektion auch bei nicht infiziertem Blut an.

d) Blutspender werden nach der Spende üblicherweise über den Ausgang des Tests informiert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem zufällig ausgewählten Spender das Testergebnis fehlerhaft ist.

e) Bei einer Person weist der Test auf eine Infektion hin. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person dennoch nicht infiziert ist. Interpretieren Sie diesen Wert.

f) Die Testentwickler wollen den Test verbessern im Hinblick auf das erstaunliche Resultat von e).
Da bisher der Test bei 2 % der nicht infizierten Personen dennoch auf eine Infektion hinweist, versuchen sie, diesen Prozentsatz zu senken.
Ermitteln Sie den Wert, auf den er gesenkt werden müsste, damit die in e) bestimmte Wahrscheinlichkeit immerhin bei 50 % liegt.

Aufgabe 13 HIV-Test

Erschienen und diskutiert in der Zeitschrift Stochastik in der Schule, Bd.21 (2001), Heft 1, S.8 ff. in einem Aufsatz von Achim Quermann, von der AEG bearbeitet und verändert.

Man geht davon aus, dass in der BRD von den ca. 40 Millionen sexuell aktiven Personen im Alter von 18 Jahren bis 60 Jahren etwa 50 000 mit HIV infiziert sind.

a) In einem Labor werden Blutproben auf das HIV-Virus untersucht. Die Proben entstammen einer repräsentativen, sehr großen Stichprobe.
Unterstellen Sie, dass es einen 100 % sicheren Test zum Nachweis einer HIV-Infektion gibt. Ein **positives** Testergebnis bezeichnet eine HIV-Infektion.
Berechnen Sie die nötige Anzahl von Proben, um mit mindestens 99 %-iger Wahrscheinlichkeit wenigstens ein positives Testergebnis zu erhalten?

b) Für einen tatsächlich vorhandenen Test gilt Folgendes:
- Eine infizierte Person wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,8 % positiv getestet.
- Eine nicht infizierte Person wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % negativ getestet.

Rechnen Sie nach, dass eine als positiv getestete Person nur mit ca. 11 % Wahrscheinlichkeit tatsächlich infiziert ist.

c) Lösen sie den Aufgabenteil a) erneut. Legen Sie dabei den in b) beschriebenen Test zu Grunde. Beurteilen Sie den deutlichen Unterschied zwischen den Ergebnissen.

d) „Der Test aus Aufgabenteil b) hat kaum eine diagnostische Aussagekraft.“ Interpretieren Sie diese Aussage, indem Sie die a-priori- und a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten für einen Infizierten vergleichen.

e) Erläutern Sie, welche Schlussfolgerungen eine Person für sich ziehen kann, die positiv getestet worden ist. Berücksichtigen Sie dabei auch den persönlichen Lebenswandel der Person.

f) Ein neues Medikament lindert angeblich den Krankheitsverlauf bei mindestens 40 % der Aids-Erkrankten, d.h. er wird positiv beeinflusst. Die Behandlung von 100 Aids-Patienten soll als Nachweis dienen.
Bestimmen Sie eine Entscheidungsregel für einen stochastischen Signifikanztest auf dem 5 %-Niveau, mit dem versucht werden kann, diese Behauptung zu untermauern.
Bestimmen Sie für „wahre Werte der Linderungsquote“ des Medikaments den Fehler 2. Art für die gefundene Entscheidungsregel. Legen Sie dazu im Bereich von 40 % bis 60 % in 10 %-Schritten eine Wertetabelle für die Linderungsquoten mit den zugehörigen Fehlern 2. Art an. Interpretieren Sie diese Tabelle.
Benutzen Sie dabei die Integral-Näherungsformel von De Moivre/Laplace.

g) Welche Entscheidungsregel für die Untersuchung in f) werden Zweifler an der Wirksamkeit des Medikaments festlegen? Begründen Sie Ihre Antwort.
Benutzen Sie auch hier die Integral-Näherungsformel von De Moivre/Laplace.

Aufgabe 14 Kugelschreiberproduktion

Zentrale schriftliche Abiturprüfung, Hamburg 2005

Eine Firma stellt Kugelschreiber her, die die Abnehmer als Werbegeschenke für ihre Kunden nutzen. Bei der Produktion treten zwei voneinander unabhängige Fehler auf: defekte Mechanik (3 %) und defekte Mine (2 %).

a) Ein Kugelschreiber wird zufällig der laufenden Produktion entnommen.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Kugelschreiber sowohl eine defekte Mechanik als auch eine defekte Mine hat.
- Zeigen Sie, dass der Kugelschreiber mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % fehlerfrei ist.
- Ein Qualitätsprüfer prüft zehn zufällig der Produktion entnommene Kugelschreiber. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Kugelschreiber fehlerhaft ist.
- Aus langer beruflicher Erfahrung meint der Qualitätsprüfer, dass er mindestens 100 Kugelschreiber prüfen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % auch mindestens einen defekten Kugelschreiber zu finden.
  Beurteilen Sie die Aussage des Qualitätsprüfers.

b) Die Kugelschreiber werden zu je 50 Stück in Schachteln verpackt.
- Bestimmen Sie die durchschnittliche Anzahl defekter Kugelschreiber in einer Schachtel.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Durchschnittszahl nicht überschritten wird.

An einen Abnehmer liefert die Herstellerfirma Sendungen zu je 20 Schachteln.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Sendung genau 50 defekte Kugelschreiber enthält.
- Interpretieren Sie Ihr Ergebnis unter Berücksichtigung der Bemerkung eines „stochastischen Laien“, dass die berechnete Wahrscheinlichkeit ihm sehr niedrig vorkommt (unter 10 %).

c) Die Herstellungskosten eines Kugelschreibers betragen 0,30 €. Der Herstellerbetrieb strebt einen Reingewinn von 10 % an. Die Abgabe der Kugelschreiber erfolgt für 0,40 €. Allerdings wird der Reingewinn dadurch verringert, dass sich der Betrieb den Abnehmern gegenüber verpflichtet hat, defekte Kugelschreiber zurück zu nehmen und durch extra geprüfte zu ersetzen. Pro Ersatz entsteht 1 € an zusätzlichen Kosten.

Beurteilen Sie, ob unter diesen Bedingungen der angestrebte Gewinn voraussichtlich erwirtschaftet werden kann.

d) Ein Großabnehmer dieses Herstellerbetriebes erhält ein Angebot eines Konkurrenten. Dieser beziffert den Anteil fehlerfreier Kugelschreiber in seiner Produktion auf mindestens 98 %. Da es sehr ärgerlich ist, defekte Werbegeschenke zu verteilen, beschließt der Großabnehmer mit einem Signifikanztest auf dem 5 % Niveau, das Angebot des Konkurrenten zu prüfen, indem eine Probelieferung von 50 Kugelschreibern auf Fehlerfreiheit untersucht wird. Bei der Frage, wie das Ergebnis nach Durchführung des Tests auszuwerten sei, kommt es zu einem Streit zwischen zwei Mitgliedern der Geschäftsleitung:
- A hat hohes Vertrauen in das Angebot des Konkurrenten und meint, man solle es nur ablehnen, wenn signifikant deutlich wird, dass das Versprechen des Konkurrenten nicht stimmt.
- B hält den Konkurrenten für unsolide und schlägt vor, das Angebot nur anzunehmen, wenn signifikant deutlich wird, dass der Konkurrent wirklich besser ist als die alte Lieferfirma.

Beurteilen Sie, bei welchen Prüfergebnissen A und bei welchen Prüfergebnissen B den Hersteller wechseln würde.

Aufgabe 15 Modegeschäfte

Die Aufgabenteile a) und c) basieren auf Station 15 in „Lernen an Stationen, Matrizenrechnung" (www.learn-line.nrw.de/angebote/selma/foyer/projekte/dinslakenproj3/).

In der Innenstadt sind drei Modegeschäfte mit ähnlichem Angebot: *BlueBlack*, *Goldie X* und *JeansHouse*. Die Geschäftsführerin von *BlueBlack* gibt eine Untersuchung über die Kundenwanderung zwischen diesen drei Geschäften in Auftrag.

Das beauftragte Institut macht eine Umfrage, die ergibt:

- 60 % der Kunden von *BlueBlack*, die dort innerhalb eines Monats eingekauft haben, kaufen dort auch im Folgemonat, während 25 % zu *Goldie X* und 15 % zum *JeansHouse* abwandern.
- *Goldie X* bleiben 55 % der Kunden im Folgemonat treu, 20 % wandern jedoch zu *BlueBlack* ab und 25 % zum *JeansHouse*.
- Das *JeansHouse* schaffte es, sogar 70 % seiner Kunden an sich zu binden, verliert aber jeweils 15 % an *BlueBlack* und *Goldie X*.

Im untersuchten Monat kauften bei *BlueBlack* 2 700 Personen, bei *Goldie X* 2 000 und im *JeansHouse* 3 200.

a) Stellen Sie die Kundenwanderung in einer Tabelle oder mit einem Graphen dar.

Die Geschäftsführerin interessiert die in diesem Modell zu erwartende Kundenverteilung in den nächsten 6 Monaten, um über geeignete Werbemaßnahmen entscheiden zu können.

b) Berechnen Sie die zu erwartende Kundenverteilung nach 1 Monat. Geben Sie zwei Berechnungsmöglichkeiten für die zu erwartende Verteilung nach 2 Monaten.
Ermitteln Sie, welche Auswirkungen auf die Berechnung und die Kundenzahlen hat die Annahme, dass das oben beschriebene Modell in den nachfolgenden 6 Monaten weiter gelten soll.

   Hinweis: Das Ergebnis nach 2 Monaten ist [2423, 2337, 3140] (in der Reihenfolge *B, G, J*), nach 6 Monaten [2372, 2371, 3157], jeweils auf ganze Zahlen gerundet.

c) Zeigen Sie unter der Annahme, das Modell von a) gelte weiterhin, dass die Kundenbewegung zum Stillstand kommt und bestimmen Sie die dann gegebene Anzahl von Kunden in den drei Geschäften.
Interpretieren Sie die Ergebnisse aus der Sicht der Geschäftsführerin von *BlueBlack*.

d) Mit der Werbekampagne von *BlueBlack* gelingt der Geschäftsführerin ein Cup, da es nach folgendem System als Prämie ein ausgefallenes Kleidungsstück von *Carotti* gibt:
Bei jedem Kauf darf die Kundin bzw. der Kunde aus einer großen, gut gefüllten Schale für je 50 € Umsatz einen kleinen Umschlag ziehen, der ein Puzzle-Teil enthält (bei einem Einkauf zu 120 € zum Beispiel darf man dann 2-mal einen Umschlag ziehen). Es gibt 5 verschiedene Puzzle-Teile, die zusammengelegt ein Rechteck ergeben und die Prämie!

   Wie viele Umschläge man sammeln muss, bis ein Puzzle fertig ist, hängt vom Zufall ab. Die Anzahl der Umschläge kann also als Zufallsvariable aufgefasst werden.

   Ermitteln Sie den Erwartungswert der nötigen Umschläge, und interpretieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf die Frage, wie „teuer" das ausgefallene Kleidungsstück von *Carotti*, für einen Kunden denn nun eigentlich ist.

Aufgabe 16 Gepäckaufgabe

Zentrale schriftliche Abiturprüfung, Hamburg 2005

Auf einem bestimmten Flughafen geben die Passagiere an den Schaltern Gepäck auf. Die Gepäckstücke bekommen jeweils einen Anhänger mit einem Strichcode auf Papieraufklebern, der den Zielflughafen angibt. Alle an den verschiedenen Schaltern aufgegebenen Gepäckstücke laufen über viele Förderbänder und schließlich zum Code-Lesegerät, durch das dann die Stücke einzeln auf die richtigen Flugzeuge verteilt werden sollen. Auf dem Weg zum Lesegerät werden aber einige Anhänger verknickt oder verschmutzt, so dass dann diese Gepäckstücke vom Lesegerät nicht der richtigen Maschine zum Zielflughafen zugewiesen werden. Der Anteil der fehlgeleiteten Gepäckstücke hat sich über lange Zeit im Mittel als stabil gezeigt und beträgt ca. 3,5 %.

Rechnen Sie in dieser Aufgabe mit exakt 3,5 % .

a) Begründen Sie, warum man die Zufallsgröße X, die die Anzahl der vom Code-Lesegerät fehlgeleiteten Gepäckstücke zählt, als binomialverteilt annehmen kann.

b) Für eine Fokker F27 werden 45 Gepäckstücke aufgegeben.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

- Alle 45 Gepäckstücke finden durch das Lesegerät ihre richtige Maschine.
- Genau 2 der 45 Gepäckstücke werden fehlgeleitet.
- Höchstens 4 der 45 Gepäckstücke werden fehlgeleitet.
- Es werden mehr als 4 der 45 Gepäckstücke fehlgeleitet.

c) Die Flughafengesellschaft rechnet mit Kosten von 70 € pro fehlgeleitetem Gepäckstück.

Um ihre Gesamtkosten in diesem Bereich zu vermindern, werden die Anhänger verbessert. Dadurch werden nur noch 0,5 % der Gepäckstücke vom Code-Leser fehlgeleitet. 3 % der Gepäckstücke werden als unleserlich ausgesondert. Diese ausgesonderten Stücke werden dann von einem Angestellten weiter bearbeitet. Dieser kann 80 % der ausgesonderten Stücke richtig zuordnen. Die restlichen Stücke bleiben am Startflughafen und werden erst auf Suchantrag zugestellt.

Eine Prüfung durch den Angestellten kostet 10 €, eine Zustellung nach Suchantrag insgesamt 100 €.

Berechnen Sie die dadurch erreichte Minderung der erwarteten Kosten pro Koffer.

Fortsetzung nächste Seite →

d) Ein fehlgeleitetes Gepäckstück, das innerhalb eines Monats nicht wieder auffindbar ist, nennen wir "Verlustkoffer". Im Mittel sind 0,02 % aller Gepäckstücke Verlustkoffer.

Monatlich fliegen von dem Flughafen im Schnitt 8 000 Passagiere mit ca. 12 000 aufgegebenen Gepäckstücken nach Boston.

Die folgenden Fragen beziehen sich nur auf diese Flugstrecke.

Bei großem n und kleinem p ist die Poisson-Verteilung eine gute Näherung für die Binomial-Verteilung. Dabei ist $P(Z=k) \approx \frac{1}{e^{\mu}} \cdot \frac{\mu^k}{k!}$, wobei in dieser Aufgabe Z die Anzahl der Verlustkoffer unter den innerhalb eines Jahres aufgegebenen Koffern beschreibt.

Verwenden Sie, wo möglich, die anliegende Tabelle.

- Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert $\mu = 28{,}8$ gilt, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den in einem Jahr aufgegebenen Gepäckstücken tatsächlich genau 29 Verlustkoffer auftreten.
- Da für jeden Verlustkoffer Entschädigungszahlungen in (mittlerer) Höhe von 400 € geleistet werden müssen, möchte sich die Flughafengesellschaft gegen hohe Entschädigungssummen versichern. Um die Versicherungsprämie gering zu halten, wird die Entschädigungssumme eines Jahres nur dann versichert, wenn Sie 12 000 € übersteigt.
  Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Fall eintritt?
- Bei einem Gesamtschaden im Jahr von über 12 000 € zahlt die Versicherungsgesellschaft den Betrag, der 12 000 € übersteigt.
  Mit welchem Betrag an Schadenszahlung pro Jahr muss die Versicherungsgesellschaft im Durchschnitt rechnen?

Anlage zur Aufgabe „Gepäckaufgabe“:

Daten zur Poisson-Verteilung

$\mu = 28{,}8$

	k	$e^{-\mu} \cdot \sum_{i=0}^{k} \frac{\mu^i}{i!}$	$e^{-\mu} \cdot \sum_{i=0}^{k} i \cdot \frac{\mu^i}{i!}$
	23	0,1615	3,3776
	24	0,2146	4,6518
	25	0,2758	6,1809
	26	0,3435	7,9424
	27	0,4158	9,8936
	28	0,4901	11,9748
	29	0,5639	14,1156
	30	0,6348	16,2415
	31	0,7006	18,2824
k	32	0,7599	20,1785
	33	0,8116	21,8850
	34	0,8554	23,3743
	35	0,8915	24,6358
	36	0,9203	25,6738
	37	0,9427	26,5043
	38	0,9597	27,1507
	39	0,9723	27,6405
	40	0,9813	28,0023
	41	0,9877	28,2628
	42	0,9921	28,4458

Aufgabe 17 Wahlen

Zentrale schriftliche Abiturprüfung, Hamburg 2005

Eine Großstadt hat 523 740 wahlberechtigte Einwohner.

a) Nach der letzten Stadtratswahl wurde die Wahlbeteiligung analysiert. Dabei wurde die wahlberechtigte Bevölkerung in drei Gruppen eingeteilt:

Gruppe I: 157 122 Wahlberechtigte, die jünger als 35 Jahre sind,

Gruppe II: 235 683 Wahlberechtigte im Alter von 35 Jahren bis 65 Jahren,

Gruppe III: 130 935 Wahlberechtigte, die älter als 65 Jahre sind.

Die Wahlbeteiligung betrug 87 % in der Gruppe I, 82 % in Gruppe II und 65 % in Gruppe III. Bestimmen Sie die Wahlbeteiligung insgesamt.

b) Ermitteln Sie Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei einer zufälligen Auswahl von 100 Personen aus dem Personenkreis der über 65-jährigen mehr als 30 und weniger als 40 Personen findet, die nicht an der Wahl teilgenommen haben.
(Sie können eine Binomialverteilung annehmen, weil die Zahl 100 sehr klein gegenüber der Gesamtzahl in dieser Gruppe ist.)

c) Bei der bevorstehenden Wahl erhofft sich die Partei G die absolute Mehrheit. Um nicht unnötig einen teuren Wahlkampf zu führen, beschließt sie, ihre Chancen durch eine repräsentative Umfrage untersuchen zu lassen. Falls man aufgrund des Ergebnisses einen Stimmenanteil von mehr als 55 % aller Wahlberechtigten erwarten kann, will sich die Partei einen aufwändigen Wahlkampf sparen.

Ein Amateurstatistiker erläutert den Parteistrategen:

„Wir befragen repräsentativ 200 wahlberechtigte Personen. Die Hypothese, dass Sie einen Stimmenanteil von höchstens 55 % erwarten können, wird mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 % erst dann abgelehnt, wenn sich unter den 200 Befragten mindestens 123 für Sie entscheiden, anderenfalls empfehle ich weitere Wahlkampfmaßnahmen.“

- Zeigen Sie, dass die Zahl von 123 Personen korrekt bestimmt ist.
- Bestimmen Sie unter der Annahme, dass die Partei G zu diesem Zeitpunkt einen Stimmenanteil von 60 % bekäme, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dennoch ein aufwändiger Wahlkampf geführt wird. Interpretieren Sie dieses Ergebnis.

d) In Deutschland gilt für Bundes- und Landtagswahlen die 5-Prozent-Klausel.
Die Partei Q erhofft den Einzug in den Landtag. Sie geht von höchstens 80 % Wahlbeteiligung aus, braucht also nur 4 % der Stimmen aller Wahlberechtigten. Um ihre Chancen einschätzen zu können, beauftragt sie deshalb ein Wahlforschungsinstitut.

Eine typische repräsentative Umfrage eines Wahlforschungsinstitutes umfasst 1 100 wahlberechtigte Personen.
Die Partei Q erhält vom Wahlforschungsinstitut das Ergebnis mitgeteilt, dass 5,4 % der befragten Personen die Partei Q wählen und auch zur Wahl gehen würden.

Ermitteln Sie: Kann die Partei Q aufgrund dieser Umfrage mit 95-prozentiger Sicherheit damit rechnen, ins Parlament einzuziehen?

Aufgabe 18 Qualitätskontrolle

Ein Unternehmen stellt Mikrochips in Massenproduktion auf zwei verschiedenen Produktionsanlagen her: 25 % der auf Anlage A produzierten Mikrochips sind mangelhaft, auf Anlage B sind es 50 %.
(Bei großen Stückzahlen können auftretende Qualitätsschwankungen vernachlässigt werden.)
Anlage A produziert gegenüber Anlage B etwa die vierfache Menge pro Tag.

Die Mikrochips werden jeweils zu mehreren tausend Stück in Kisten verpackt und entsprechend mit dem Prädikat „von Anlage A" bzw. „von Anlage B" versehen. Die Kisten werden zu unterschiedlichen Preisen verkauft.

In der Versandstelle werden versehentlich nicht gekennzeichnete Kisten aussortiert und nachträglich beschriftet, auch wenn die Herkunft des Inhalts nicht eindeutig ist.

Eine Kiste, die fälschlicherweise mit dem Prädikat „von Anlage A" verkauft wird, kann eine Schadenersatzforderung von 9 000 € nach sich ziehen.
Wird die Kiste irrtümlich mit dem Prädikat „von Anlage B" verkauft, entsteht ein Verlust von 1 000 €.

a) Welche Kosten entstehen langfristig pro Kiste, wenn nicht gekennzeichnete Kisten
(1) grundsätzlich mit der Aufschrift „von Anlage A"
(2) grundsätzlich mit der Aufschrift „von Anlage B" verkauft werden?
Berechnen Sie, welche dieser beiden Strategien vorzuziehen ist?

b) Um die Kosten zu senken, wurde ein *Bayesianer* (Statistiker) hinzugezogen. Er nahm eine Stichprobe von 20 Artikeln aus der Kiste und stellte fest, dass 15 Stück in Ordnung waren.
Ermitteln Sie, welche a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten er den beiden Ereignissen
„Die kritische Kiste stammt von Maschine A"
„Die kritische Kiste stammt von Maschine B"
zugeordnet, und wie er sich dann entschieden hat.

c) Begründen Sie, dass der Statistiker bei seiner Entscheidung ins Grübeln käme, falls bei einer Überprüfung einer solchen Kiste die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
„Die kritische Kiste stammt von Maschine B" genau $\frac{1}{10}$ wäre.

d) Ermitteln Sie aus dem Ergebnis von c) ein Entscheidungsverfahren, das angibt, für welche Realisierungen der Prüfgröße X = „Anzahl der Artikel, die bei 20 Ziehungen in Ordnung sind" die Firma die Kiste mit der Aufschrift „von Anlage A" verkaufen sollte.
(Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Bayes-Formel für $P(B \mid X = k)$ gerade den in c) betrachteten Wert geliefert hätte und lösen Sie nach k auf).

e) Ein anderer Statistiker entwickelt einen Hypothesentest mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 1$ %, wobei er als Irrtum 1. Art denjenigen wählt, der die gravierendere Konsequenz nach sich zieht.
Welches Entscheidungsverfahren schlägt der neue Statistiker vor? Begründen Sie Ihren Vorschlag.

f) Beurteilen Sie die unterschiedlichen Ergebnisse von d) und e).

Aufgabe 19 Amoral

Hinweis: Mit „Patienten“ sind im Folgenden stets „mit Amoral behandelte Patienten“ gemeint.

Laut Angabe des Arzneimittelherstellers treten nach der Einnahme von „Amoral“ in 6 % aller Fälle unerwünschte Nebenwirkungen auf.

a) Unter welchen Umständen ist es sinnvoll, die Anzahl X der Patienten, bei denen Nebenwirkungen auftreten, als binomialverteilt anzunehmen?

Beschreiben Sie Situationen, in denen die Voraussetzungen für eine Binomialverteilung nicht erfüllt sind.

Im Folgenden soll angenommen werden, dass die in a) genannte Zufallsgröße X tatsächlich binomialverteilt ist.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 50 Patienten höchstens bei einem diese Nebenwirkungen auftreten.

c) In einer Gruppe von zufällig ausgewählten Patienten behaupten alle, dass bei ihnen keinerlei Nebenwirkungen aufgetreten seien.

Berechnen Sie, bei welcher Gruppengröße die Wahrscheinlichkeit, dass wirklich keiner an Nebenwirkungen leidet, unter 1 % sinkt.

d) In einer internistischen Gemeinschaftspraxis wollen die Ärzte Fälle mit Nebenwirkungen genauer beobachten. Sie rechnen damit, dass sie innerhalb eines halben Jahres 200 Patienten „Amoral“ verschreiben werden und gehen davon aus, dass das Medikament dann auch eingenommen wird.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei mindestens 10 Patienten Nebenwirkungen auftreten werden?

Ein anderer Hersteller bringt ein Medikament mit der gleichen Wirksamkeit auf den Markt, das nicht nur preiswerter ist, sondern zudem nach seinen Angaben besser verträglich: Nur in höchstens 4 % aller Fälle sollen Nebenwirkungen auftreten.

e) Im Zuge der Bemühungen um Kostensenkungen muss entschieden werden, ob Ärzten empfohlen werden soll, nicht mehr „Amoral“, sondern das neue Medikament zu verschreiben. Vorher soll das neue Medikament an 500 Patienten getestet werden.

Geben Sie eine ausführlich begründete Entscheidungshilfe: Bei bis zu wie vielen Fällen von Nebenwirkungen in dieser Gruppe soll das neue Medikament empfohlen werden?

5 Erwartungshorizonte und Bewertung

5.1 Kurs auf grundlegendem Niveau

Aufgabe 1 Sicherheitssystem

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Ein Einzelgerät fällt aus, wenn mindestens ein Teil ausfällt.

Dies ist das Gegenereignis dazu, dass kein Teil ausfällt. Wegen der Unabhängigkeit fällt kein Teil mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}98^{30}$ aus.
Die Komplementärwahrscheinlichkeit ergibt

$p(A_E) = 1 - 0{,}98^{30} \approx 45\%$.</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>• Ein zusammengeschaltetes Zwillingsmodul funktioniert nicht, wenn die beiden baugleichen Einzelteile nicht funktionieren, also mit Wahrscheinlichkeit $0{,}02^2 = 0{,}0004 = \frac{1}{2500}$.

• Die gleiche Rechnung wie a) mit dem neuen Wert 0,0004 ergibt als Ausfallwahrscheinlichkeit für das neue Überwachungsgerät den Wert $1 - 0{,}9996^{30} \approx 1{,}2\%$, also eine deutliche Verbesserung.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>• Die Anzahl X der fehlerhaften Bauteile in der Stichprobe ist 50-p-binomialverteilt. Die Nullhypothese lautet: $p > 0{,}01$. Kleine Werte von X sprechen gegen die Nullhypothese. Es sei $\{X \le K\}$ der gesuchte Ablehnungsbereich. Für den Fehler erster Art gilt:

$$\alpha = P\left(X \le K \mid H_0\right) \le P(X \le K \mid p = 0{,}01) = \sum_{i=0}^{K} B(50;\ 0{,}01; i)\ .$$
Es ist also der größte Wert von K gesucht, für den der rechte Term und damit α noch ≤ 5 % ist.

Aber bereits für K = 0 erhält man: $B(50; 0{,}01; 0) = 0{,}99^{50} \approx 60\%$!
Das heißt: Selbst wenn man die Lieferung nur annehmen würde (H_0 ablehnen würde), wenn <u>alle</u> 50 geprüften Teile in Ordnung sind, kann man nur garantieren, dass $\alpha \le 60\%$.

• Man erkennt aus dieser Argumentation auch, was zu tun ist, nämlich die Stichprobengröße n so groß zu wählen, dass $0{,}99^n \le 5\%$. Dazu müsste n größer als 298 sein (das kann durch Probieren oder Logarithmieren gefunden werden), und man dürfte die Lieferung dann auch nur akzeptieren, wenn alle Bauteile in Ordnung sind, d.h. der Ablehnungsbereich ist $\{X = 0\}$.</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
</table>

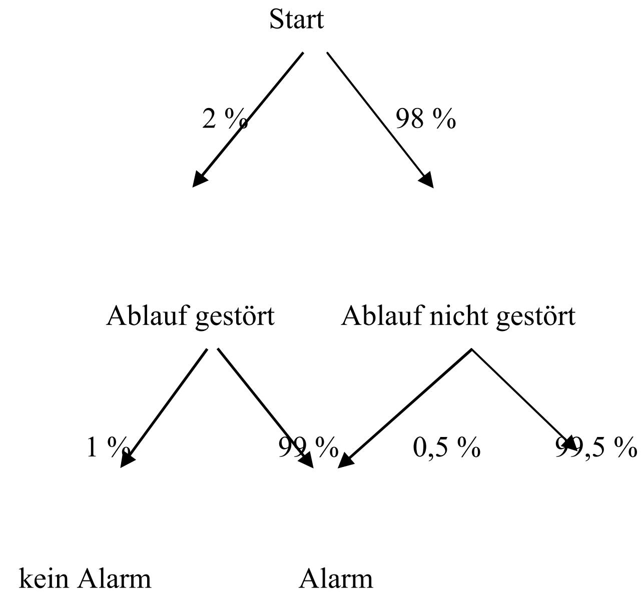
<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>

- Ein fehlerhaftes Gerät wird nicht entdeckt, wenn alle drei Testverfahren es nicht entdecken, also mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}1^3 = 0{,}001 = 0{,}1\%$.
- Ein fehlerhaftes Gerät wird also mit 99,9 % Wahrscheinlichkeit entdeckt, alle 100 fehlerhaften Geräte werden also mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}999^{100} \approx 0{,}904... \approx 90\,\%$ entdeckt.

</td><td></td><td>10

10</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

i) Mit einem Baumdiagramm oder dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet werden.



Es gilt also $P(„\text{Alarm}“) = 0{,}02 \cdot 0{,}99 + 0{,}98 \cdot 0{,}005 \approx 2{,}5\%$.

ii) Mit Hilfe des Satzes von Bayes lässt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit bestimmen (im Nenner steht dabei das Ergebnis aus i)):

St : = Störung im Ablauf.
A : = Alarmreaktion des Überwachungssystems.

$$p\left(\overline{St} \mid A\right) = \frac{p\left(\overline{St}\right) \cdot p\left(A \mid \overline{St}\right)}{p(A)} = \frac{0{,}98 \cdot 0{,}005}{0{,}02 \cdot 0{,}99 + 0{,}98 \cdot 0{,}005} \approx 20\%.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass keine Störung vorliegt, obwohl das Gerät Alarm gibt, beträgt tatsächlich ca. 20 %!

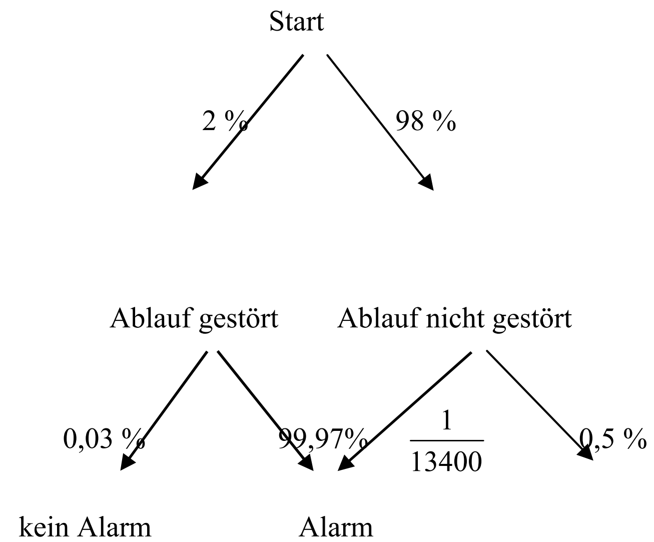
iii) $P(St \cap \overline{A}) = P(St) \cdot P(\overline{A} \mid St) = 0{,}02 \cdot 0{,}01 = 0{,}0002 = \dfrac{1}{5000}$.

(Im obigen Baumdiagramm ist das der Pfad „zweimal links“).

</td><td>10

10</td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
f)	Wenn der erste Fall vorliegt, wenn also das „Fehlverhalten“ der Überwachungsgeräte seine Ursachen nur in Besonderheiten der Produktionsabläufe bei Gammamobil hat, ändert sich gegenüber e) gar nichts, die drei Geräte werden entweder alle gleichzeitig oder gar nicht reagieren, und die Antworten auf die drei Fragen bleiben unverändert.			
	Wenn der zweite Fall vorliegt, wenn also das „Fehlverhalten“ der Überwachungsgeräte aus zufällig und unabhängig auftretenden internen Eigenschaften der Überwachungsgeräte herrührt, müssen die Werte auf der zweiten Stufe des Baumdiagramms aus e) mit Hilfe der Binomialverteilungen $B(3\,;0{,}99\,;2)+B(3\,;0{,}99\,;3)$ bzw. $B(3\,;0{,}005\,;2)+B(3\,;0{,}005\,;3)$ (Alarm bei mindestens zwei Reaktionen) geändert werden.			10
	Die erste Summe beträgt ungefähr 99,97 %. Die zweite Summe ist so klein ($7{,}465\cdot 10^{-5}$), dass man sie lieber – um eine Vorstellung zu gewinnen – durch einen Stammbruch annähern sollte, also etwa durch $\frac{1}{13400}$.			



	Mit diesen neuen Daten wiederholen wir die Rechnungen aus e, ii) :			
	ii) $p\left(\overline{St}\mid A\right)=\dfrac{0{,}98\cdot\frac{1}{13400}}{0{,}02\cdot 0{,}9997+0{,}98\cdot\frac{1}{13400}}\approx 0{,}4\,\%$.			
	iii) $P(St\cap\overline{A})=P(St)\cdot P(A\mid St)=0{,}02\cdot 0{,}0003=0{,}000006\approx\frac{1}{170000}$.			
	Das sind beides sehr zufriedenstellende Ergebnisse.			10
	Insgesamt 100 BWE	30	40	30

Aufgabe 2 „Schwarzfahrer“

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Zufallsgröße X: Anzahl der Schwarzfahrer unter den 43 kontrollierten Fahrgästen. X ist binomialverteilt mit $B_{n,p,k} = B_{43,\,0{,}03,\,x}$.

• Genau 2 Schwarzfahrer werden erwischt mit der Wahrscheinlichkeit
$B_{43,\,0{,}03,\,2} = \binom{43}{2} \cdot 0{,}03^2 \cdot 0{,}97^{41} \approx 0{,}233... \approx 23\,\%$.

• Mindestens 1 Schwarzfahrer wird erwischt mit der Wahrscheinlichkeit
$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}97^{43} \approx 0{,}73... \approx 73\,\%$.

Der erste ermittelte Schwarzfahrer sitzt in der Linie U1 mit der Wahrscheinlichkeit: $B_{25;0,03;0} \cdot \left(1 - B_{18;0,03;0}\right) \approx 0{,}197 \approx 20\,\%$.</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Der Erwartungswert ist $E = n \cdot p = 43 \cdot 0{,}03 = 1{,}29$.

Die Kontrolleure können mit ungefähr einem Schwarzfahrer rechnen.</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Hier gilt $1 - p(X = 0) \approx 0{,}9$. Einsetzen der Werte ergibt:

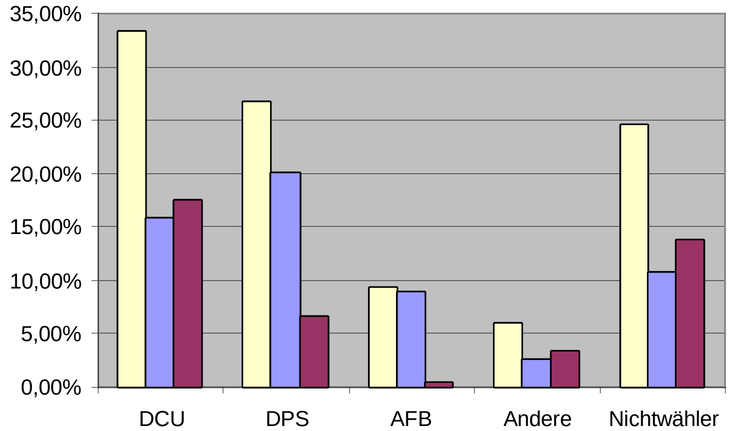
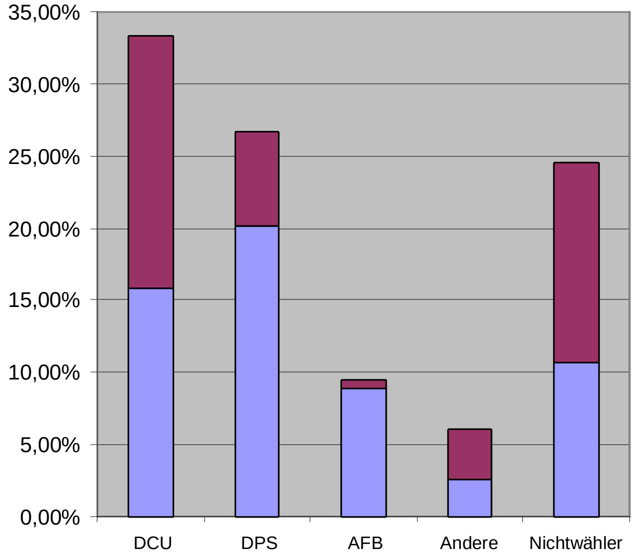
$1 - 0{,}97^n \geq 0{,}9$
$0{,}97^n \leq 0{,}1$
$n \cdot \lg 0{,}97 \leq \lg 0{,}1$
$n \geq \frac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}97}$
$n \geq 75{,}595...$

Um mit 90 %-iger Sicherheit einen Schwarzfahrer zu erwischen, müssen mindestens 76 Fahrgäste kontrolliert werden.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Hier hilft wie in a) das Gegenereignis: $1 - 0{,}98^{25} \cdot 0{,}96^{18} \approx 0{,}711$.

Diese Wahrscheinlichkeit ist deutlich niedriger als im Aufgabenteil a) (73 %). Der Grund liegt in der unterschiedlichen Anzahl der kontrollierten Fahrgäste in den beiden Linien. In der Linie U3 sind es ¼ mehr als in der Linie U1. Somit wirkt sich der geringere Anteil an Schwarzfahrern in der U3 stärker aus, als der höhere Anteil in der U1.</td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>G bezeichnet die zusätzlichen Einnahmen bzw. Kosten des HVV, die durch Schwarzfahrer entstehen. Die Situation wird durch folgende Tabelle dargestellt:
<table><tr><td>G in €</td><td>–3</td><td>5</td><td>37</td></tr><tr><td>$P(G)$</td><td>0,9</td><td>0,05</td><td>0,05</td></tr></table>Der Erwartungswert von G ist:
$E(G) = 0{,}05 \cdot 37\text{ €} + 0{,}05 \cdot 5\text{ €} - 0{,}9 \cdot 3\text{ €} = -0{,}60\text{ €}$.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Pro Schwarzfahrer entsteht dem HVV also durchschnittlich ein Verlust von 0,60 €. Keine Verluste entstehen, wenn $E(G) = 0$ ist. Um das zu erreichen, setzen wir für das erhöhte Beförderungsentgelt die Variable x ein und lösen die Gleichung: $0 = 0{,}05 \cdot (x-3) + 0{,}05 \cdot 5 - 0{,}9 \cdot 3$ $0{,}05 \cdot x = 2{,}6$ $x = 52$. Das erhöhte Beförderungsentgelt muss also auf 52 € erhöht werden, damit keine Verluste entstehen.	5	15	
f)	Getestet werden könnte die Nullhypothese: „Der Anteil der Schwarzfahrer liegt unverändert bei 3 % oder weniger." Bei einem Anteil der Schwarzfahrer von 3 % nehmen für die Kontrolle von 10000 Fahrgästen der Erwartungswert und die Standardabweichung folgende Werte an: $E = n \cdot p = 10000 \cdot 0{,}03 = 300$. $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{10000 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97} \approx 17$. Bei der Kontrolle wäre bei einem unveränderten Anteil an Schwarzfahrern mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98 % die Anzahl der Schwarzfahrer kleiner als 335. Liegt die erhobene Zahl der Schwarzfahrer über 334, so könnte man die Hypothese, dass auch nach der Fahrpreiserhöhung die Quote der Schwarzfahrer weniger oder gleich 3 % beträgt, auf dem 2 %-Niveau signifikant verwerfen. *Bemerkung: Natürlich können hier auch andere Signifikanzniveaus (z.B. 5 % oder 1 %)betrachtet werden.*		5	15
g)	Es geht um die Frage der stochastischen Unabhängigkeit des Schwarzfahrens der einzelnen Personen. Diese ist z. B. dann nicht gegeben, wenn Gruppen fahren. *Es wird eine „ergebnisoffene" zusammenhängende Darstellung erwartet.*			10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

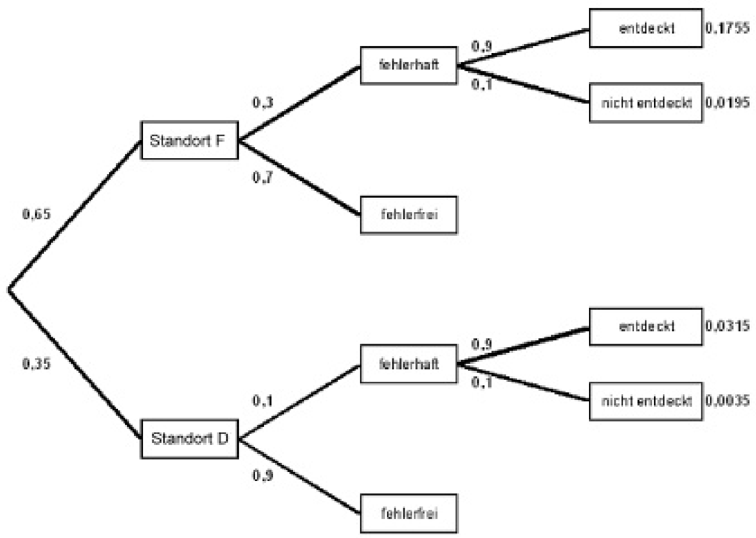
Aufgabe 3 Umgehungsstraße

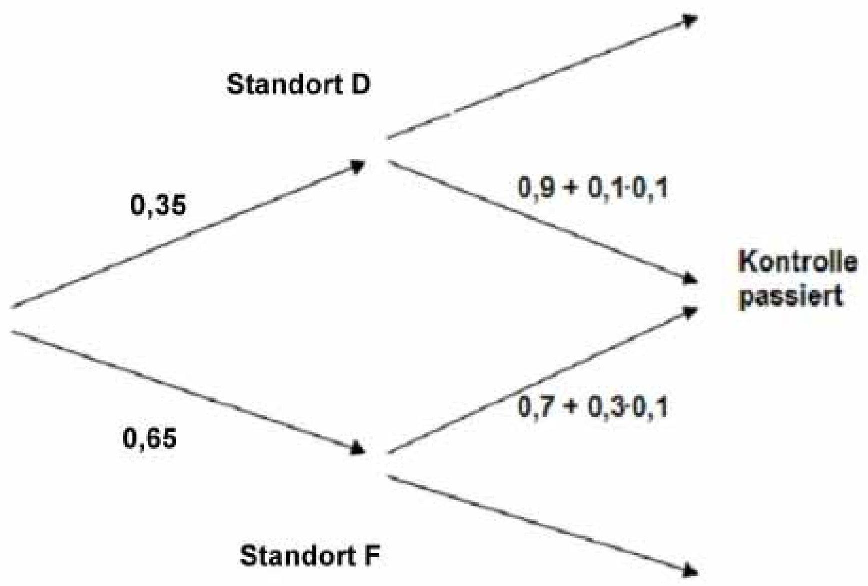
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Der Anteil der Gegner beträgt: $G = 0{,}755 \cdot (0{,}441 \cdot 0{,}475 + 0{,}354 \cdot 0{,}753 + 0{,}125 \cdot 0{,}945 + 0{,}436 \cdot 0{,}080)$ $\quad + 0{,}436 \cdot 0{,}245$ $\approx 0{,}582 \approx 60\,\%$. $B = 100\,\% - G = 40\,\%$ ist der Anteil der Befürworter der Umgehungsstraße.	20		
b)	Es gibt mehrere Möglichkeiten der grafischen Darstellung:  Die Säulen, die jeweils links stehen, beziehen sich auf die erwähnte Gemeinderatswahl und geben den Anteil aller Wahlberechtigten von Barsdorf an, die mittleren Säulen stehen jeweils für die Gegner, die Säulen rechts stehen jeweils für die Befürworter der Umgehungsstraße. Alternative: gestapeltes Säulendiagramm:  			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Unten sind die Gegner der Umgehungsstraße dargestellt, oben stehen die Befürworter. Die Gesamtsäule gibt den jeweiligen Anteil aller Wahlberechtigten bei der erwähnten Gemeinderatswahl an. *Anmerkung:* *Eine Darstellung, bei der die Verbindung des Wahlergebnisses mit der Umfrage nicht deutlich wird, führt nicht zur vollen Punktzahl.*	5	10	
c)	Da die Einwohnerzahl von Barsdorf groß ist im Verhältnis zur Stichprobe, kann hier vereinfachend die Binomialverteilung für die Anzahl G der Gegner verwendet werden. Mehr als die Hälfte der Befragten sind mindestens 26 Personen. Gesucht ist: $P(G \geq 26) = 1 - \sum_{i=0}^{25} B(50\,;0{,}6\,;i) = \sum_{i=0}^{24} B(50\,;0{,}4\,;i) \approx 0{,}90 = 90\,\%$. Der Wert ist aus der Tabelle der summierten Binomialverteilung entnommen.		15	
d)	Es ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit zu bestimmen. Man kann ein Baumdiagramm verwenden oder direkt den Satz von Bayes. Es gilt: $p_{Gegner}(DCU - Wähler) = \frac{0{,}755 \cdot 0{,}441 \cdot 0{,}475}{0{,}6} \approx \frac{0{,}158}{0{,}6} \approx 0{,}26$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Unterzeichner DCU-Wähler ist, beträgt 26 %.		15	
e)	*<u>Bemerkung:</u> je nach Unterrichtsverlauf sind hier mehr oder weniger scharfe Argumentationen zu erwarten, z.B.* In der Versammlung haben sich $\frac{855}{1298} \approx 0{,}66 = 66\%$. der Anwesenden gegen die Umgehungsstraße ausgesprochen. Das sind deutlich mehr als die 47,5 %, die vorher diese Meinung hatten. Zu untersuchen ist, ob es sich dabei um eine zufällige Schwankung aufgrund der Stichprobe handelt. Wenn kein Meinungswandel eingetreten wäre, hätte die obige Stichprobe folgenden Erwartungswert und folgende Standardabweichung: $E = n \cdot p = 1298 \cdot 0{,}475 = 616{,}6 \approx 617$, $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{1298 \cdot 0{,}475 \cdot 0{,}525} \approx 17{,}99 \approx 18$, $2 \cdot \sigma \approx 36$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Wenn die Anzahl der Gegner unter $E+2\cdot\sigma\approx 653$ bleibt, kann man noch von einer zufälligen Abweichung ausgehen. Die Wahrscheinlichkeit für Umfrageergebnisse mit mehr als 653 Gegnern unter den 1298 befragten DCU-Mitgliedern ist unter der Annahme, dass kein Meinungswandel eingetreten ist, dann nur ca. 2%. Die Behauptung der Zeitung ist also glaubhaft. *Hinter dieser- nicht ganz ausgeschärften - Argumentation steckt entweder eine Betrachtung über ein Vertrauensintervall oder ein Hypothesentest mit der Nullhypothese H_0: $p \leq 0{,}475$, die auf dem 5%-Niveau verworfen werden kann, wenn mehr als ca. 653 der 1298 anwesenden DCU-Wähler gegen die Umgehungsstraße votieren. Die Unschärfe liegt darin, dass nicht deutlich gemacht wird, ob hier über Abweichungen von 47,5 %* ***nach oben*** *oder* ***überhaupt*** *argumentiert wird. Statt von 2 % könnte also auch von 5 % gesprochen werden.*		5	15
f)	Wenn sich die Situation nicht grundlegend geändert hat, dürfte es dem Bürgermeister kaum gelingen, Umfragedaten so zu erhalten, dass statistisch solide argumentiert werden kann, dass eine Mehrheit für die Umgehungsstraße ist. Aber folgende „windige“ in den Medien nicht unübliche Manipulationsmöglichkeiten wären denkbar: • Er hofft auf eine Mehrheit für die Umgehungsstraße innerhalb seiner Stichprobe (das kann vor allem bei geringer Stichprobengröße leicht passieren) und argumentiert danach unsolide mit dieser „Mehrheit“, • oder noch raffinierter: er wählt einen Hypothesentest mit der Nullhypothese, dass die Bürger mehrheitlich für den Bau der Umgehungsstraße seien. Wenn er z. B. als Stichprobengröße $n = 50$ ($n = 100$) wählt, dann kann die Hypothese auf dem 5%-Niveau erst verworfen werden, wenn mehr als 31 (58) Bürger gegen den Bau stimmen. Diese beiden Tests hätten bei unverändert angenommenem $p = 0{,}6$ *ß*-Fehler-Wahrscheinlichkeiten von 66 % (bzw. 38 %). Vor allem bei einer kleinen Stichprobe ist diese also sehr hoch. Die unsolide Argumentation läge dann darin, dass behauptet werden würde, dass die Nullhypothese gilt, obwohl im Falle, dass keine Signifikanz vorliegt, gar kein Schluss aus den Umfragedaten gezogen werden kann.		10	5
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Aufgabe 4 Sportschuhe

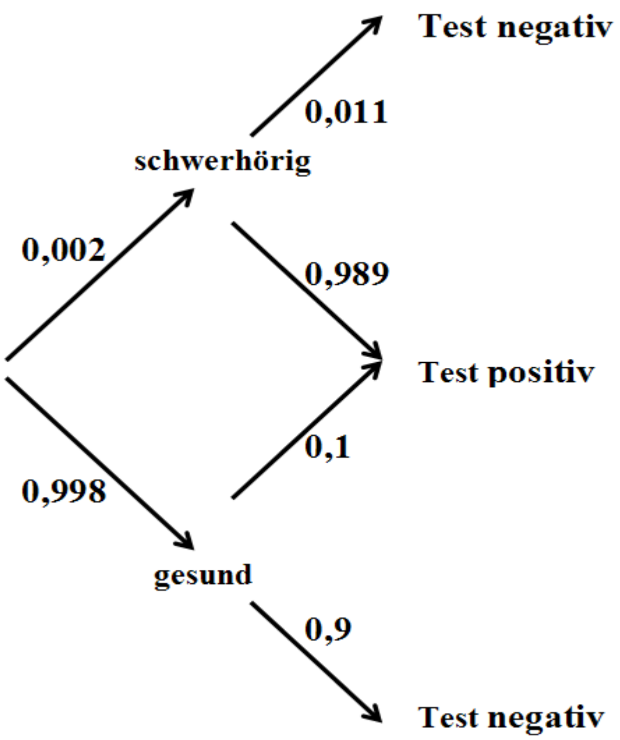
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	$p_F = 1 - 0{,}94 \cdot 0{,}935 \cdot 0{,}83 \cdot 0{,}965 \approx 0{,}296 = 29{,}6\%$. $p_D = 1 - 0{,}965 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}98 \approx 0{,}101 = 10{,}1\%$. Also ist die Wahrscheinlichkeit p_F etwa dreimal so hoch wie p_D.	10	5	
b)	• X sei 50-0,3-binomialverteilt. $P(X = 15) = \binom{50}{15} \cdot 0{,}3^{15} \cdot 0{,}7^{35} = 0{,}12235 \approx 12\ \%$. • Das Ergebnis kann aus der Formelsammlung abgelesen werden. $P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) \approx 1 - 0{,}1390 = 0{,}8610 \approx 86\ \%$.	15		
c)	 *P*(„Schuhpaar wird aussortiert") = $0{,}1755 + 0{,}0315 = 0{,}207 \approx 21\%$. Man kann natürlich auch direkt ohne Baumdiagramm rechnen: *P*(„Schuhpaar wird aussortiert") = $(0{,}65 \cdot p_F + 0{,}35 \cdot p_D) \cdot 0{,}9 = (0{,}65 \cdot 0{,}3 + 0{,}35 \cdot 0{,}1) \cdot 0{,}9 \approx 0{,}2$. 20 % der Lieferung werden also aussortiert.		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	• Es sei A das Ereignis, dass von den produzierten Schuhen ein herausgegriffenes Paar Ausschussware ist. Es sei K das Ereignis, dass von den produzierten Schuhen ein herausgegriffenes Paar die Kontrolle passiert. Gesucht $P(A\mid K)$. $P(A\mid K)=\dfrac{P(A)\cdot P(K\mid A)}{P(K)}$ $P(A)=0{,}65\cdot 0.3+0{,}35\cdot 0{,}1=0{,}23$ $P(K\mid A)=1-0{,}9=0{,}1$ (0,9 im Aufgabentext vorgegeben) Aus c) folgt $P(K)\approx 0{,}8$ oder genauer nach dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit: $P(K)=P(A)\cdot P(K\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(K\mid \overline{A})=0{,}23\cdot 0{,}1+0{,}77\cdot 1=0{,}793$. Insgesamt erhalten wir: $P(A\mid K)=\dfrac{P(A)\cdot P(K\mid A)}{P(K)}=\dfrac{0{,}23\cdot 0{,}1}{0{,}23\cdot 0{,}1+0{,}77\cdot 1}\approx 0{,}029\approx 3\,\%$. *<u>Bemerkung:</u> Man kann die ganze Rechnung natürlich auch als Anwendung des Satzes von Bayes auffassen.* • Man kommt am einfachsten zu einem Ergebnis, wenn man das Baumdiagramm aus c) zusammenfasst und das Wesentliche betrachtet:  Es sei D das Ereignis, dass von den produzierten Schuhen ein herausgegriffenes Paar die Kontrolle passiert. Gesucht wird $P(D\mid K)$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Auf die im Baumdiagramm dargestellte Situation kann man den Satz von Bayes anwenden: $P(D \mid K) = \frac{P(D) \cdot P(K \mid D)}{P(D) \cdot P(K \mid D) + P(\overline{D}) \cdot P(K \mid \overline{D})}$ $= \frac{0{,}35 \cdot (0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}1)}{0{,}35 \cdot (0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}1) + 0{,}65 \cdot (0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}1)}$ $\approx 0{,}41 \approx 40\,\%$. *<u>Bemerkung:</u> Das Ergebnis ist plausibel. Die 35 % Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Schuhpaar aus dem Standort D stammt, erhöht sich etwas, wenn man weiß, dass das Paar die Kontrolle passiert hat, da die Ausschussquote dieser Schuhe geringer ist als die der Schuhe aus dem Standort F.*		15	5
e)	Wenn *n* Schuhpaare im Standort F produziert werden, entstehen Kosten in Höhe von $n \cdot 5$ €. Von diesen *n* Paaren werden im Mittel $n \cdot p_F \cdot 0{,}9$ nach der Kontrolle aussortiert. Von den *n* Paaren kommen also $n \cdot (1 - p_F \cdot 0{,}9)$ in den Handel. Rechnet man die Kosten um auf diese Paare, erhält man „pro Paar im Handel" Kosten von $\frac{5 \cdot n \text{ €}}{n \cdot (1 - p_F \cdot 0{,}9)} = \frac{5}{(1 - p_F \cdot 0{,}9)}$ €. *Eine logisch schlüssige Argumentation, die weniger formal formuliert wurde, bekommt ebenfalls volle Punktzahl.*		10	
f)	• Setzt man die beiden bekannten Werte für p_F bzw. p_D in die beiden Formeln ein, erhält man: $K_F = \frac{5}{(1 - p_F \cdot 0{,}9)}$ € $= 6{,}85$ € $K_D = \frac{10}{(1 - p_D \cdot 0{,}9)}$ € $= 10{,}99$ € Die Produktion von „handelbaren" Sportschuhen ist also im Standort F kostengünstiger. • Der gesuchte Wert ergibt sich durch Gleichsetzen: $\frac{5}{1 - p_F \cdot 0{,}9} = \frac{10}{1 - 0{,}1 \cdot 0{,}9}$ $4{,}55 = 10 - 0{,}9 p_F$ $-5{,}45 = -0{,}9 p_F$ $p_F \approx 0{,}606 \approx 60{,}6\%$			15

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
g)	Die Formeln berücksichtigen u. a. nicht die Kosten für die Qualitätskontrolle und das Umtauschverfahren und sind aus diesem Grund zur Kalkulation nur bedingt geeignet. Um die Kalkulation zu verbessern, könnte man folgende Strategie wählen. • Kosten für die Qualitätskontrolle abschätzen bzw. ermitteln lassen (alle Schuhe auspacken, kontrollieren und wieder einpacken kostet viel Geld). • Kosten für den Umtausch abschätzen bzw. ermitteln lassen. • Anteil der Schuhe minderer Qualität im Verkauf bestimmen.		5	5
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 5 Screening

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Baumdiagramm: 			

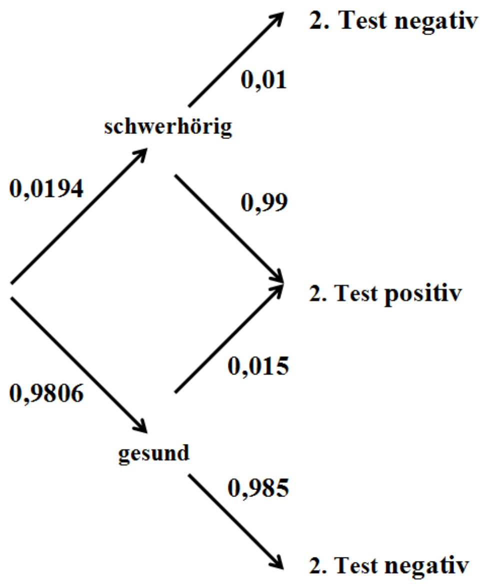
	Lösungsskizze	I	II	III
	oder Vierfeldertafel: (siehe Tabelle unten)	10		
b)	Mit der Vierfeldertafel lässt sich die gestellte Frage sofort beantworten: $p(S/P)=\frac{198}{10178}=0{,}01945...\approx 2\,\%$. Am Baumdiagramm kann man den „umgekehrten Baum“ auswerten: $p(S/P)=\frac{0{,}002\cdot 0{,}989}{0{,}002\cdot 0{,}989+0{,}998\cdot 0{,}1}=0{,}019434...\approx 2\,\%$. Hinter dieser Rechnung erkennt man den „Satz von Bayes“, den man natürlich auch abstrakt ansetzen kann: $p(S/P)=\frac{\textit{prävalenz}\cdot \textit{sensitivität}}{\textit{prävalenz}\cdot \textit{sensitivität}+(1-\textit{prävalenz})\cdot(1-\textit{spezifität})}$ $=0{,}019434...\approx 2\,\%$. Man erhält also das unbefriedigende Ergebnis, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind, dessen Testergebnis auf Schwerhörigkeit hinweist, auch tatsächlich schwerhörig ist, nur 2 % beträgt.	10		
c)	Aus der Vierfeldertafel sieht man direkt, dass der gesuchte Erwartungswert 2 ist. Beim Baumdiagramm muss noch 0,00002 mit 100 000 multipliziert werden, um dieses Ergebnis zu erhalten.	10		
d)	Bei der Doppeltestung werden alle Kinder, bei denen das Ergebnis der ersten Testung positiv war zum zweiten Mal getestet. Man kann deshalb die in b) berechnete Wahrscheinlichkeit 0,0194 als „revidierte bzw. Aposteriori-Prävalenz“ vor Beginn der zweiten Testung auffassen und ein zweites Mal mit den veränderten Daten genau so rechnen wie bei b). Hier werden auch wieder beide Methoden (Vierfeldertafel, Baumdiagramm) ausgeführt, wobei von den Schülern natürlich nur eine erwartet wird:			

Vierfeldertafel:

	Kind hat Hörstörung	Kind hat keine Hörstörung	Summen
Test weist auf eine Hörstörung hin	198	9 980	10 178
Test weist auf keine Hörstörung hin	2	89 820	89 822
Summen	200	99 800	100 000

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

Baumdiagramm:



Am Baumdiagramm kann man wieder den „umgekehrten Baum“ auswerten:

$$p(S/P)=\frac{0{,}0194\cdot 0{,}99}{0{,}0194\cdot 0{,}99+0{,}9806\cdot 0{,}015}\approx 0{,}5663\approx 57\,\%\,.$$

Vierfeldertafel:

Als Gesamtpopulation setzen wir aus der ersten Vierfeldertafel die erwarteten 10 178 positiv getesteten Säuglinge in die neue Vierfeldertafel ein.
(Man erhält diese erwarteten Anzahlen also aus der insgesamt getesteten Population von 100 000 Kindern. Man könnte zur Lösung der Aufgabenstellung hier auch einen willkürlichen Wert nehmen, z.B. wieder 100 000 oder auch nur 100 um Prozentwerte zu bekommen.)

	Kind hat Hörstörung	Kind hat keine Hörstörung	Summen
2. Test weist auf eine Hörstörung hin	195	150	345
2. Test weist auf keine Hörstörung hin	2	9 831	9 833
Summen	197	9 981	10 178

Die Auswertung der Tabelle ergibt:

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

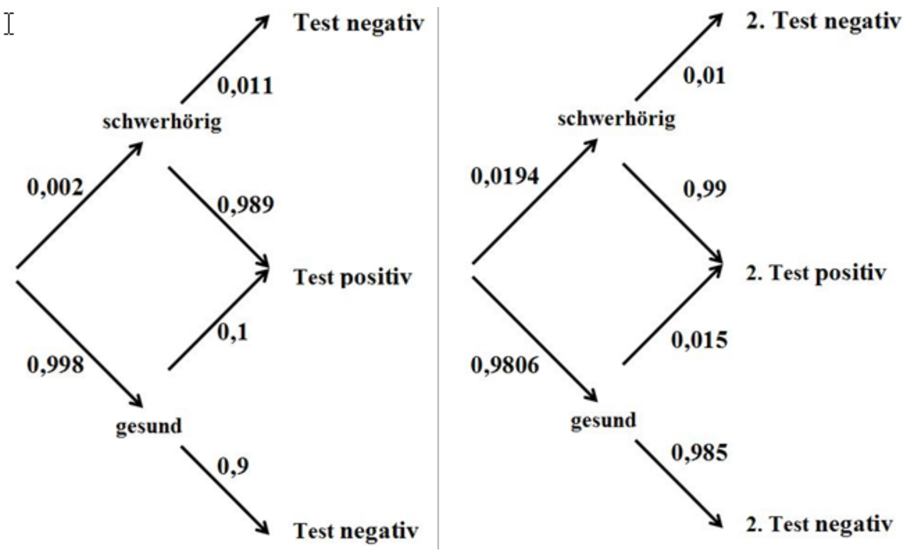
$p(S/P)=\frac{195}{345}=0{,}5652...\approx 57\,\%$.

Ein weiterer möglicher Lösungsweg kann auch mit Hilfe von g) begangen werden.

</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

Die zweite Vierfeldertafel ergibt direkt: Die erwartete Anzahl der Säuglinge, bei denen beide Tests auf Schwerhörigkeit hinweisen, beträgt 345.

Man kann auch die beiden Baumdiagramme nebeneinander legen und als ein einziges Baumdiagramm auffassen:



Dann erhält man:

$$\begin{aligned}&P(\textit{beide Tests positiv})\\&=(0{,}002\cdot 0{,}989+0{,}998\cdot 0{,}1)\cdot(0{,}0194\cdot 0{,}99+0{,}9806\cdot 0{,}015)\\&=0{,}00345180087\\&\approx 0{,}345\,\%.\end{aligned}$$

Bei 100 000 Kindern erhält man so auch die Anzahl 345.

</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>

Man erhält direkt aus der ersten Vierfeldertafel die (schon in d) betrachtete erwartete Anzahl von 10 178 Personen, die auch dem zweiten Test unterzogen werden.

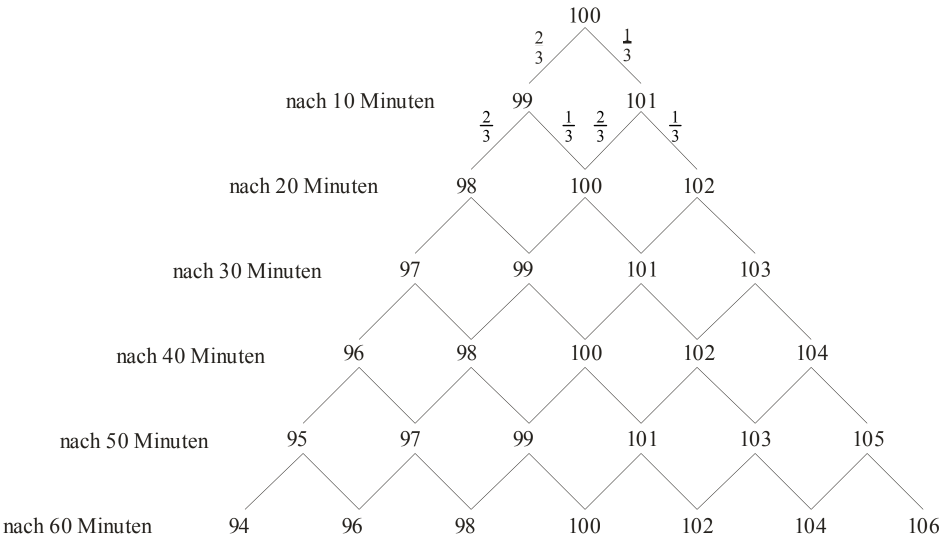
Man kann auch das erste Baumdiagramm verwenden und rechnen:

$(0{,}002\cdot 0{,}989+0{,}998\cdot 0{,}1)\cdot 100000\approx 10\,178.$

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Die erwarteten Testkosten lassen sich dann wie folgt berechnen: $100000 \cdot 18 + 10178 \cdot 25 = 2\,054\,450$. Der Erwartungswert für die Gesamtkosten beträgt also ca. 2 Millionen Euro. Von den erwarteten rund 350 weiter untersuchten Kindern sind nach d) rund 60 %, also gut 200, wirklich hörgestört. Bei 200 frühzeitig entdeckten schwerhörigen Kindern und 5 000 € Behandlungskosten pro Jahr ergeben sich langfristige (weit länger als zwei Jahre) Einsparungen von rund eine Million € pro Jahr, also lohnt sich das Screening auch finanziell.		10	5
g)	Es muss ein Kind zweimal ein positives Untersuchungsergebnis erhalten, um insgesamt positiv getestet zu werden. Wegen der angenommenen Unabhängigkeit ergibt sich die Sensitivität des Doppeltests aus dem Produkt der Sensitivitäten der Einzeltests. Damit ergibt sich ebenso die Spezifität des Doppeltests als Gegenwahrscheinlichkeit zum Produkt der Gegenwahrscheinlichkeiten der Spezifitäten der Einzeltests, also: $\mathit{Sensitivität} = 0{,}98 \cdot 0.99 = 0{,}97911$ $\mathit{Spezifität} = (1-(0{,}1 \cdot 0{,}015)) = 0{,}9985$. Diese Ergebnisse sind in Bezug auf die beiden Einzeltests kommutativ, also spielt die Reihenfolge der Testungen für die erwartete Anzahl der Kinder, die eingehender untersucht werden müssen, keine Rolle. *Bemerkung: Mit diesen Daten hätte man auch ab d) einfacher rechnen und argumentieren können.*			20
	Insgesamt 100 BWE	30	45	25

Aufgabe 6 Passierschein

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$P(\text{Zi.}100 \text{ nach } 40 \text{ min}) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$.

$P(\text{Zi.}99 \text{ nach } 50 \text{ min}) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$.

$P(\text{Zi.}106 \text{ nach } 60 \text{ min}) = \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$.

$P(\text{Zi.}100 \text{ nach } 50 \text{ min}) = 0$, da Asterix und Obelix nach 50 Minuten nicht in Zimmer 100 sein können.</td><td>15</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Der Erwartungswert für die Binomialverteilung ist mit $E(X) = n \cdot p = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$ zu berechnen. Dieses Ergebnis bedeutet, dass Asterix und Obelix durchschnittlich zwei Mal nach rechts und vier Mal nach links gehen, wir erwarten sie also in Zimmer 98.

Bemerkung: Erwartungswerte sind eigentlich nur sinnvoll, wenn die zugehörige Zufallsvariable Werte auf einer Intervallskala liefert. Hier werden Zimmernummern als Abstände vom Zimmer Nr. 000 gedeutet.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
</table>

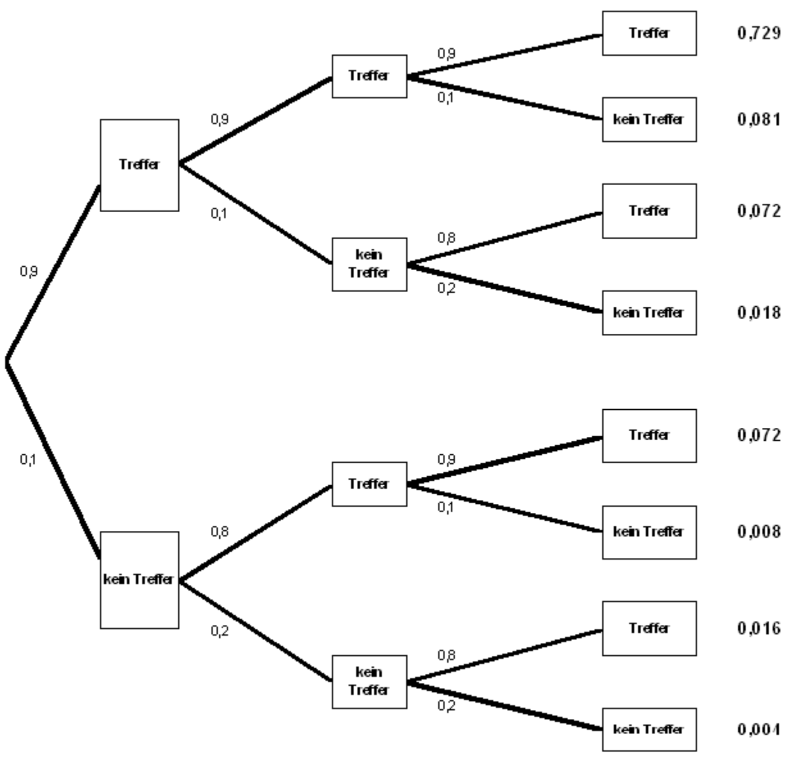
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	Satz von Bayes: $P(\text{Zi.101 nach 10 min} \mid \text{Zi. 100 nach 20 min}) = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}$, die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also 50%. Sei nun P(„nach rechts“) = p und damit P(„nach links“) = 1–p. Dann ist $P(\text{Zi.101 nach 10 min} \mid \text{Zi. 100 nach 20 min}) = \dfrac{p\cdot(1-p)}{p\cdot(1-p)+(1-p)\cdot p} = \dfrac{1}{2}$. Lösung ohne Satz von Bayes: Nach Aufgabenstellung haben Asterix und Obelix einen von zwei möglichen Wegen nehmen müssen: (1) Zi. 100 – Zi. 99 – Zi. 100 oder (2) Zi. 100 – Zi. 101 – Zi. 100. Beide Wege enthalten einen Teilweg nach rechts und einen nach links, sind also stets gleichwahrscheinlich. Daraus folgen obige Ergebnisse.		10	10
e)	Anhand des Baumdiagramms ergibt sich $p(Zimmer\ 104) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 + 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{17}{729}$. Die Wahrscheinlichkeit, den gewünschten Passierschein A38 unter den in der Aufgabe genannten Bedingungen zu erhalten, beträgt etwa 2,3%.		5	5

f)	Ein Beispiel ist:
	`e s i s t e i n l a n`
	`s i s t e i n l a n g`
	`i s t e i n l a n g e`
	`s t e i n l a n g e r`
	`t e i n l a n g e r W`
	`e i n l a n g e r W e`
	`i n l a n g e r W e g`
	Dreht man das Plakat um 45°, so ist die Struktur der Pfade identisch mit der des Baumdiagramms in Aufgabenteil a), des Galton-Bretts oder des Pascaldreiecks. Somit muss die Anzahl der Pfade wie dort ein Binomialkoeffizient sein.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Alternative: Beim Lesen sind vom Startbuchstaben aus 16 Entscheidungen zu treffen (nach rechts oder nach unten weiter lesen), davon 10 Mal die Entscheidung „rechts“ und 6 Mal die Entscheidung „unten“. Dies entspricht der Auswahl von 6 aus 16 bzw. 10 aus 16. Der Binomialkoeffizient lautet somit $\binom{16}{10} = \binom{16}{6} = 8008$. Weitere Begründungen, die sich auf die Sprachregelungen im Unterricht beziehen, sind ebenfalls möglich. Die Anspielung ist doppeldeutig. Die beiden Gallier sind schon lange in der Behörde unterwegs (Inhalt des Textes) und sie haben 16-mal das Zimmer gewechselt, nämlich 10-mal nach rechts und 6-mal nach links, und somit ist die Anzahl der möglichen Wege durch die Behörde, um nach 160 Minuten in Zimmer Nr. 104 zu sein, ebenfalls $\binom{16}{10} = \binom{16}{6} = 8008$.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	30	45	25

Aufgabe 7 Biathlon

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	$p(\text{alle drei Schüsse sind Treffer}) = 0{,}9^3 = 0{,}729$. Paula erzielt hintereinander drei Treffer mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 73 %.	10		
b)	• Zunächst muss Paula genau 2 der ersten 3 Schüsse erfolgreich absolvieren und dann mit dem nachgeladenen Schuss wiederum erfolgreich sein. $p = 3 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}2187$. Paula trifft also alle Scheiben mit einmaligem Nachladen mit der Wahrscheinlichkeit von etwa 22 %. • Hierbei muss Paula entweder genau 2 der ersten 3 Schüsse erfolgreich absolvieren und dann mit dem nachgeladenen Schuss nicht treffen oder genau 1 der ersten 3 Schüsse erfolgreich absolvieren und dann mit dem nachgeladenen Schuss treffen. Die ist gleichbedeutend damit, dass sie bei 4 Schüssen genau zweimal trifft.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	$p = 3 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 6 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^2 = B(4\,;\,0{,}9\,;\,2) = 0{,}0486$. Die Wahrscheinlichkeit, dass Paula genau eine Strafrunde laufen muss, beträgt also knapp 5 %.		15	5
c)	• Bei den angegebenen Werten für die Dauer des Nachladens und der Strafrunden ergeben sich die Zeiten, die Wahrscheinlichkeiten sind in den Teilen a) bis b) berechnet worden. • Wahrscheinlichkeit für 70 s Zeitverlust: Paula hat bei vier Schüssen mit Nachladen (10 s) genau einmal getroffen und muss daher zwei Strafrunden laufen (60 s). $p = 0{,}1^3 \cdot 0{,}9 + 3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1^3 = 4 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1^3 = B(4\,;\,0{,}9\,;\,1) = 0{,}0036$. Wahrscheinlichkeit für 100 s Zeitverlust: Paula hat bei vier Schüssen mit Nachladen (10 s) nicht einmal getroffen und muss daher drei Strafrunden laufen (90 s). $p = 0{,}1^4 = 0{,}0001$. • Paulas Erwartungswert für den Zeitverlust: $0 \cdot 0{,}729 + 10 \cdot 0{,}2187 + 40 \cdot 0{,}0486 + 70 \cdot 0{,}0036 + 100 \cdot 0{,}0001 = 4{,}393$. Der gesuchte Erwartungswert für den Zeitverlust ist 4,393s.	10	5	
d)	Baumdiagramm:  	5	15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>

kT_1: kein Treffer beim ersten Schuss.

kT_3: kein Treffer beim dritten Schuss.

$$P\left(kT_1 / kT_3\right) = \frac{P(kT_1 \cap kT_3)}{P(kT_3)}$$
$$= \frac{0{,}1 \cdot \left(0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}2\right)}{0{,}1 \cdot \left(0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}2\right) + 0{,}9 \cdot \left(0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}2\right)}$$
$$= \frac{0{,}008 + 0{,}004}{0{,}008 + 0{,}004 + 0{,}081 + 0{,}018}$$
$$= \frac{0{,}012}{0{,}111} \approx 0{,}108\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass auch Susannes erster Schuss daneben ging, beträgt ca. 11 %.

</td><td></td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>

- Der Zeitverlust beträgt 0 Sekunden, Susanne hat also mit drei Schüssen dreimal getroffen.
Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt: $p = 0{,}9^3 = 0{,}729$.
- Susanne trifft erst mit Nachladen (also mit 4 Schüssen) das dritte Mal. Dann beträgt der Zeitverlust 10 s. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt:

$$p = 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8$$
$$= 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9^2$$
$$= 0{,}1944\,.$$

- Wenn Susanne nur zweimal trifft, kommen zu den 10 s für das Nachladen noch einmal 29 s für die Strafrunde hinzu: 10 s + 29 s = 39 s.
- Wenn Susanne (trotz Nachladen) genau einmal trifft, kommen zu den 10 s für das Nachladen noch einmal 58 s für die beiden Strafrunden hinzu:
10 s + 58 s = 68 s.

Die Tabelle ist also wie folgt zu vervollständigen.

<table>
<tr><td>Zeitverlust in s</td><td>0</td><td>10</td><td>39</td><td>68</td><td>97</td></tr>
<tr><td>Wahrscheinlichkeit</td><td>0,729</td><td>0,1944</td><td>0,0658</td><td>0,0100</td><td>0,0008</td></tr>
</table>

</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
g)	Der Erwartungswert von Susannes Zeitverlust beim Schießen wird analog wie in Aufgabenteil c) berechnet: $10 \cdot 0{,}1944 + 39 \cdot 0{,}0658 + 68 \cdot 0{,}01 + 97 \cdot 0{,}0008 = 5{,}2678$. Der erwartete Zeitverlust beträgt also ca. 5,3 s. Der erwartete Zeitverlust von Paula (siehe Aufgabe c)) beträgt ca. 4,4 s. Susanne hat also gute Gewinnchancen, wenn sie auf der Laufstrecke mindestens eine Sekunde schneller als Paula läuft, da der Erwartungswert für den Zeitverlust weniger als 1 Sekunde von Paulas Wert nach oben abweicht. Für den Ausgang des konkreten Rennens lässt sich allerdings keine zuverlässige Aussage machen. *Aus der Antwort muss deutlich werden, dass dem Prüfling der Unterschied zwischen Wahrscheinlichkeiten als Durchschnittswerte und der konkreten Einzelsituation des Rennens deutlich ist.*		5	5
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

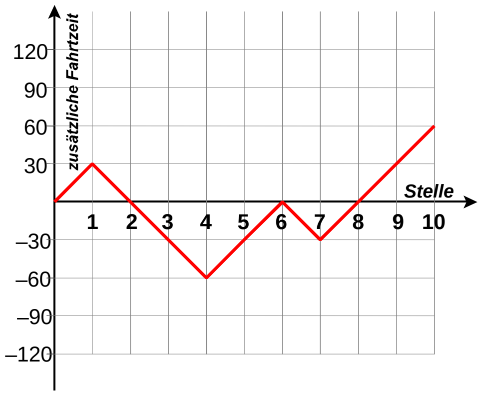
Aufgabe 8 Batterien

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	X beschreibe die Anzahl der Ausschussstücke unter den 4 gekauften Batterien. Da diese der großen Menge zufällig entnommen wurden, ist X binomialverteilt mit $n = 4$ und $p = 0{,}02$. $P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^2 = 2{,}3 \cdot 10^{-3}$ und $P(X=4) = 0{,}02^4 = 1{,}6 \cdot 10^{-7}$ Damit ist Margrets Behauptung falsch, da die Wahrscheinlichkeit beim Lotto $p = \frac{1}{\binom{49}{6}} = 7{,}151 \cdot 10^{-8}$ und damit geringer ist.	10	10	
b)	Y beschreibe die Anzahl der Ausschussstücke in einem Karton. Da die Verpackung der Batterien ungeprüft und zufällig erfolgt, kann man Y als binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0{,}02$ annehmen. Dann entspricht der Erwartungswert genau dem durchschnittlichen Ausschuss von 2 Batterien. Die Wahrscheinlichkeit, dass dieser nicht überschritten wird, lässt sich durch $P(Y \leq 2)$ beschreiben: $P(Y \leq 2) = 0{,}98^{100} + \binom{100}{1} \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^{99} + \binom{100}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{98} = 0{,}6767$. *Ablesen aus einer Tabelle der Binomialverteilung ist ebenso möglich.*			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Nicht geeignet ist hingegen die näherungsweise Berechnung über die Normalverteilung, da das Ereignis selten ist und damit die Varianz nicht größer ist als 9: $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 100 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98 < 2$	10	20	5
c)	Z beschreibe die Lebensdauer einer Batterie in Stunden. Die Aufgabenstellung gibt vor, dass es sich um eine normalverteilte Zufallsvariable handelt. Die Normalverteilung dient hier also nicht als Näherung, sondern beschreibt eine stetige Zufallsvariable. $P(Z \geq 250) = 1 - \Phi\left(\frac{250-300}{15}\right) = 1 - \Phi(-3{,}333) \approx 0{,}9996$ Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 99,96 %. *Abschätzen dieses Wertes ist auch mit der 3σ-Regel denkbar.* Also stellt eine derartige Garantie ein recht geringes Risiko dar.		20	5
d)	*Hier kann mit sehr unterschiedlichen Stückzahlen argumentiert werden.* Man erwartet in einem Karton zu 100 Stück 2 Ausschussstücke. Also muss man 6 € zu den 100 € Produktionskosten addieren, um auf die durchschnittlichen Kosten pro Karton zu kommen. Andererseits ist ein Abgabepreis bis zu 132 € möglich, so dass der durchschnittliche Reingewinn bis zu 26 € betragen kann. Da sich dieser Durchschnittswert bei einer großen Produktion einstellen wird, ist also eine wirtschaftliche Produktion möglich.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 9 Fahrtstrecke

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Nach dem Aufgabentext ist μ = 2,5 und σ = 0,25. Gesucht ist die Zeit t für die Fahrt, die in 95 % der Fälle ausreicht: $P(t \leq X) \geq 0{,}95 \Rightarrow \Phi(1{,}65) = \Phi\left(\frac{t-2{,}5}{0{,}25}\right) \Rightarrow t - 2{,}5 = 1{,}65 \cdot 0{,}25 = 0{,}4125$ also t = 2,9125. Das sind auf Minuten gerundet 2 Stunden und 55 Minuten. Der Fahrer muss also um 5.35 Uhr losfahren. *Lösung auch mit σ-Regeln möglich:* Im Intervall [μ–1,64σ ; μ +1,64σ] liegen 90 % aller Zeiten, aus Symmetriegründen liegen dann 5 % der größten Zeiten oberhalb von μ+1,64σ ⇒ μ+1,64σ = 2,5+0,41 = 2,91. Das ist auf Minuten gerundet dasselbe Ergebnis wie oben.	20		
b)	Beispiel Von den 100 Stellen werden an 30 Stellen jeweils 30 s eingespart, an den restlichen 70 Stellen 30 s zusätzlich benötigt: Einsparung: 900 s, zusätzlich: 2100 s. Insgesamt müssen also 1200 s = 20 min zusätzlich aufgebracht werden, die simulierte Fahrtzeit ist 2 Stunden und 50 Minuten.			

	Lösungsskizze	I	II	III
	Zufallspfad für die ersten 10 Stellen: 1. Stelle: Zeitverlust, $\downarrow$ 2. Stelle: Zeitgewinn, $\uparrow$ 3. Stelle: Zeitgewinn, $\uparrow$ 4. Stelle: Zeitgewinn, $\uparrow$ 5. Stelle: Zeitverlust, $\downarrow$ 6. Stelle: Zeitverlust, $\downarrow$ 7. Stelle: Zeitgewinn, $\uparrow$ 8. Stelle: Zeitverlust, $\downarrow$ 9. Stelle: Zeitverlust, $\downarrow$ 10. Stelle: Zeitverlust, $\downarrow$  also $4\cdot(-30)+6\cdot 30=60$ und damit 60 Sekunden zusätzliche Fahrtzeit. Vergleich der Modelle: Der Random Walk simuliert eine einzelne Fahrt, es ist interessieren dabei nicht allein das Endergebnis, sondern auch die Details (der Pfad). Um „globale“ Aussagen zu erhalten – etwa einen Mittelwert – müssen viele Simulationen durchgeführt werden. Das Modell aus Teilaufgabe a) basiert auf einer Vorstellung über die Gesamtheit der Daten (hier Fahrtzeiten), die mit vielen Random Walks, deren Details z. B. auch auf Erfahrungen beruhen, simuliert worden sein könnten.		15	15
c)	Berechnung der Standardabweichung für diesen Fall: $\mu = 126$ ist gegeben. $P(X \le 137) = 1-0{,}13 = 0{,}87 \Rightarrow \Phi(1{,}13) = \Phi\left(\frac{137-126}{\sigma}\right) \Rightarrow \sigma \approx \frac{11}{1{,}13} \approx 9{,}75$. Berechnung der Prozentzahl der „korrekten“ Autofahrer: $P(X \le 120) = \Phi\left(\frac{120-126}{9{,}75}\right) \approx \Phi(0{,}6154) \approx 0{,}29$. Es halten sich ca. 29 % der Autofahrer an die Vorschriften (und fahren nicht zu schnell).		25	
d)	Kurve: Änderung von μ verschiebt Kurve in x-Richtung: μ vergrößern $\Rightarrow$ Verschiebung nach rechts, μ verkleinern $\Rightarrow$ Verschiebung nach links Änderung von σ verändert Höhe und Weite der Kurve: σ vergrößern $\Rightarrow$ Kurve wird flacher und läuft weiter σ verkleinern $\Rightarrow$ Kurve wird steiler und liegt näher an der y-Achse *(Siehe σ-Regeln, Flächenmaß bleibt unverändert)* Kontext von Aufgabenteil a) Verschiebung des Mittelwertes verändert die nötige Abfahrtszeit: μ verkleinern bedeutet entsprechende kürzere (mittlere) Fahrzeit, also kann der LKW entsprechend später losfahren. μ vergrößern bedeutet analog früheres Losfahren des LKW. σ verkleinern heißt weniger Zeitzugabe, σ vergrößern heißt mehr Zeitzugabe (bezogen auf gegebenes μ)			

Zuordnung, Bewertung (Spalten I, II, III)

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Kontext von Aufgabenteil b) μ verkleinern bedeutet, dass in dem Modell dann weniger Autofahrer 137 km/h überschreiten. μ vergrößern bedeutet analog, dass dann mehr Autofahrer 137 km/h überschreiten (so lange μ nicht wesentlich größer als 137 km/h ist, was der Sachkontext ausschließt). σ verkleinern heißt (bezogen auf gegebenes μ), dass dann weniger Autofahrer 137 km/h überschreiten können, σ vergrößern: umgekehrt. Ändern von μ und σ bedeutete entsprechende Kombinationen.	5	10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 10 Billigflüge

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Es sei *X* die Anzahl der stornierten Flüge (für einen bestimmten Flugtermin). *X ist nach Annahme binomialverteilt mit* $n = 35$ *und* $p = 0{,}2$ $P(X=7)=\binom{35}{7}\cdot 0{,}2^7\cdot 0{,}8^{28}\approx 16{,}6\,\%$ $P(X\le 5)=\sum_{k=0}^{5}\binom{35}{k}\cdot 0{,}2^k\cdot 0{,}8^{(35-k)}\approx 27{,}21\%$ $P(X\ge 6)=1-P(X\le 5)\approx 72{,}79\,\%$	20		
b)	Die Agentur hat von den regulären Buchern feste Einnahmen in Höhe von $35\cdot 300\text{ €}=10\,500\text{ €}$. Die Anzahl der Stornierungen hat den Erwartungswert der entsprechenden Binomialverteilung, also $35\cdot 0{,}2=7$. Für jede solche Person kann nach Voraussetzung ein Last-Minute-Angebot für 250 € verkauft werden. Also entstehen zusätzliche erwartete Einnahmen von 1750 €. *(Hier kann mit der Linearität des Erwartungswertes oder auch „naiv“ argumentiert werden).* Insgesamt kann die Agentur also 12 250 € pro Reisetermin erwarten.		20	
c)	Im ersten Falle hat die Agentur $40\cdot 300\text{ €}=12\,000\text{ €}$ Einnahmen von den regulären Buchern und $5\cdot 250\text{ €}=1\,250\text{ €}$ von den Last-Minute-Buchern, also insgesamt 13 250 €. Im zweiten Falle hat die Agentur 12 000 € Einnahmen von den regulären Buchern, keine Last-Minute-Einnahmen und zusätzliche Kosten wegen der 5 Überbuchungen von $5\cdot 400\text{ €}=2\,000\text{ €}$, also eine Bilanz von nur 10 000 €.	10	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1-0,2)^{40}=0,8^{40}\approx 0,013\%$ kommen alle. Es kommt zu Überbuchungen, wenn entweder 0 oder 1 ... oder 4 Kunden stornieren ($X<5$). Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten entnimmt man der gegebenen Tabelle für die Binomialverteilung für n = 40. Aufsummierung ergibt: $$P\approx 0,07591\approx 7,6\%$$ Mit 7,6 %-iger Wahrscheinlichkeit kommt es zum Überbuchungsfall.		20	5
e)	Es sind folgende Beträge zu berücksichtigen: - Die festen Einnahmen von 40 Buchern zu je 300 € - In den Fällen ohne Überbuchung ($X\geq 5$) zusätzliche Einnahmen von $X-5$ Last-Minute-Kunden zu je 250 €. Da diese Fälle nicht sicher, sondern mit den Wahrscheinlichkeiten der B(40 ; 0,2 ; X)-Binomialverteilung auftreten, ist hier der entsprechende Erwartungswert auszurechnen. - Im Überbuchungsfall ($X < 5$) zusätzliche Ausgaben von 5 – X überzähligen Kunden zu je 400 €. Da auch diese Fälle nicht sicher, sondern mit den Wahrscheinlichkeiten der B(40 ; 0,2 ; X)-Binomialverteilung auftreten, ist auch hier der entsprechende Erwartungswert auszurechnen. Gegenüber dem Wert von b) ist der Wert 12 733 € eine Steigerung der Bilanzerwartung von knapp 500 €, die Überbuchungsmethode lohnt sich also aus der Sicht der Agentur. *Zu Übungszwecken im Unterricht lohnt es, die nachfolgende gesamte Rechnung wirklich durchzuführen, die zu den erwarteten Einnahmen von 12 733 € führt:* *Einnahmen von* $40\cdot 300\,€=12\,000\,€$ *stehen fest.* *Bei X Stornierungen können (X – 5) Last-Minute-Flüge verkauft werden. Da X binomialverteilt ist,* ***<u>hätten</u>*** *diese Verkaufseinnahmen über* ***<u>alle k</u>*** *einen Erwartungswert von* $250\cdot(40\cdot 0,2-5)\,€=750\,€$*), allerdings schlagen in den Überbuchungsfällen (* $X<5$ *also k = 0,...,4) ja keine „negativen Last-Minute-Einnahmen“ zu Buche, diese müssen also gegengerechnet werden mit* $$250\,€\cdot\sum_{k=0}^{4}(5-k)\cdot\binom{40}{k}\cdot 0,2^{k}\cdot 0,8^{40-k}\approx 28,49\,€\,.$$ *Andererseits entstehen bei X Stornierungen in den Überbuchungsfällen (* $X<5$ *also k = 0, ..., 4) Zusatzkosten in Höhe von* $(5-k)\cdot 400\,€$. *Da X binomialverteilt ist, beträgt der Erwartungswert der Zusatzkosten:* $$E(Z)=400\,€\cdot\sum_{k=0}^{4}(5-k)\cdot\binom{40}{k}\cdot 0,2^{k}\cdot 0,8^{55-k}\approx 45,57\,€\,.$$ *Die letzten beiden Terme können auch zusammengefasst werden zu Kosten (negativen Einnahmen) von* $$150\,€\cdot\sum_{k=0}^{4}(5-k)\cdot\binom{40}{k}\cdot 0,2^{k}\cdot 0,8^{55-k}\approx 17,08\,€\,.$$ *Also gilt für den Erwartungswert der Bilanz:*			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	$E \approx 12\,000\text{ €} + 750\text{ €} - 17{,}08\text{ €} \approx 12\,733\text{ €}$. *Im Unterricht kann man – am besten mit Rechnereinsatz – auch noch weiter gehen und danach fragen, für welchen Wert z von zusätzlich zu 35 angebotenen Tickets der Erwartungswert e(z) der Einnahmen maximal ist:* $e(z) = (35+z)\cdot 300 + ((35+z)\cdot 0{,}2 - z)\cdot 250 - \left(\sum_{k=0}^{z-1} B(35+z\,,\ 0{,}2\ ,k)\cdot(z-k)\right)\cdot 150$ *Dies kann über eine Wertetabelle geschehen, hier ein Auszug:* *z / e(z) [€]: 0 / 12 250; ... / ...; 5 / 12 733; ... / ...* *z / e(z) [€]: 11 / 13 016; 12 / 13 020; 13 / 13 015; ... / ...* *Man erkennt, dass das Maximum bei z = 12 liegt, dass die Agentur also stets 47 Buchungen im Erstverkauf zulassen sollte.* *Das ist ein erstaunlich hoher Wert, der nur deshalb zustande kommt, weil die relativ selten auftretenden erhöhten Kosten von nur 400 € pro überbuchter Person den sicheren Einnahmen von 300 € pro zusätzlicher Person gegenüberstehen. Der Sachverhalt ändert sich, wenn die erhöhten Kosten pro Überbuchung drastisch steigen (Europäisches Gerichtsurteil), z.B. auf 2 000 €. Dann etwa liegt das Maximum bei z = 2.*			15
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

z	*e(z)* [€]
0	*12 250*
...	*...*
5	*12 733*
...	*...*

z	*e(z)* [€]
11	*13 016*
12	*13 020*
13	*13 015*
...	*...*

Aufgabe 11 Gefälschter Würfel

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	P(„genau 4 Sechsen bei 12 Würfen“) $= \binom{12}{4}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 8{,}9\%$. P(„mehr als 3 Sechsen bei 12 Würfen“) $= 1-\sum_{k=0}^{3}\binom{12}{k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{12-k} \approx 12{,}5\%$.	20		
b)	p sei die wahre Wahrscheinlichkeit für eine Sechs bei dem suspekten Würfel Es wird die Nullhypothese: $H_0:\ p \le \frac{1}{6}$ einseitig getestet gegen die Alternativhypothese: $H_1:\ p > \frac{1}{6}$ Der Tabelle entnimmt man: $1-\sum_{k=0}^{13}\binom{50}{k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{50-k} \approx 3{,}1\%$,			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

$$\text{aber: } 1-\sum_{k=0}^{12}\binom{50}{k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{50-k}\approx 6{,}2\%$$

Wenn man also H_0 genau dann ablehnt, wenn bei 50 Würfen mehr als 13 Sechsen fallen, dann gilt für die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art:

$\alpha_0 \le 3{,}1\%$.

Anna wird also diesen Test vorschlagen.</td><td>10</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Falls $p = 25\ \%$ gilt:

P(„13 oder weniger Sechsen zu werfen“) = $\sum_{k=0}^{13}\binom{50}{k}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^k\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{50-k}\approx 64\%$.

Dieser Wert ist sehr hoch, er beschreibt die zu $p = 25\ \%$ gehörende Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art. Sie gibt hier an, wie wahrscheinlich es ist, bei Annas Test, den mit $p = 25\ \%$, gefälschten Würfel nicht zu „entdecken“, d.h. kein signifikantes Ergebnis zu bekommen, obwohl der Würfel deutlich gefälscht ist. Je weniger der Würfel gefälscht ist (d.h. je kleiner p), desto größer ist diese Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art.

Durch Vergrößerung der Anzahl der Würfe kann man bei vorgegebener Obergrenze für die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art die Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art senken, der Test wird „trennschärfer“.</td><td>5</td><td>20</td><td>10</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

Da die Anfangsverteilung für die möglichen Werte p_i als Gleichverteilung angenommen wird, vereinfacht sich die Rechnung mit Hilfe des Satzes von Bayes in folgender Weise:

$$P(p=p_i \mid X=13)=\frac{p_i^{13}\cdot(1-p_i)^{37}}{\sum_{j=1}^{4}p_j^{13}\cdot(1-p_j)^{37}}$$

So erhält man die folgende Tabelle:

Mögliche Werte für p_i	$p=\frac{1}{6}$	$p=\frac{1}{4}$	$p=\frac{1}{2}$	$p=\frac{3}{4}$
Anfangsverteilung für die p_i	25 %	25 %	25 %	25 %
Verteilung für die p_i nach Versuchsdurchführung	20 %	80 %	sehr klein	sehr klein

Die Verteilung in der letzten Zeile lässt aus Sicht von Claudia folgende Interpretation zu: Der Würfel ist entweder fair oder nur schwach gefälscht. Es spricht viermal mehr dafür, dass er schwach gefälscht ist als dass er fair ist. Darauf könnte man wetten.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Der Vorversuch aus a) könnte natürlich auch dahingehend interpretiert werden, dass Claudia den Wert für $p=\frac{1}{6}$ in der Anfangsverteilung kleiner hätte wählen können, dann würde sich diese Interpretation noch deutlicher abzeichnen. Claudia kommt zu wesentlich klareren Ergebnissen als Anna und Bernd.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	35	45	20

Aufgabe 12 Mikrochips

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Da bei den Chips nur die Ergebnisse „fehlerhaft" und „fehlerfrei" unterschieden werden, kann die Herstellung eines Chips als Bernoulli-Experiment angesehen werden. Jeder Chip ist nach Aufgabenstellung mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % fehlerhaft. Soll mit einer binomialverteilten Zufallsgröße gerechnet werden, muss von einer Unabhängigkeit im Produktionsprozess ausgegangen werden. Außerdem muss auf die „Massenproduktion" verwiesen werden, bei der auch ein Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit bei jedem Zug nur unwesentlich verändert.		15	
b)	Da die Prüflinge die Tabellen zur Verfügung haben, können sie $P(X=20)$ „direkt" als B(100; 0,2;20) $=\binom{100}{20}\cdot 0{,}2^k\cdot 0{,}8^{n-k}\approx$ 0,099 berechnen oder $P(X=20) = P(X\leq 20) - P(X\leq 19) \approx 0{,}5595 - 0{,}4602 = 0{,}0993$.	5		
c)	Es gilt: $P(14\leq X\leq 26) = P(X\leq 26) - P(X\leq 13) \approx 0{,}9442 - 0{,}0469 = 0{,}8973$, sowie $P(15\leq X\leq 25) = P(X\leq 25) - P(X\leq 14) \approx 0{,}9125 - 0{,}0804 = 0{,}8321$. Damit ist [14;26] das kleinstmögliche Intervall mit der geforderten Eigenschaft.		15	
d)	Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n, für die gilt: $1-0{,}8^n > 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}8^n < 0{,}01 \Leftrightarrow n > \frac{\lg 0{,}01}{\lg 0{,}8}$, also $n = 21$.		15	
e)	Es gilt: $P(F)=0{,}2$, $P(\bar{F})=0{,}8$, $P(\bar{F}\cap A)=0{,}03$, $P(\bar{A}) = 0{,}83$. Zu bestimmen ist zunächst $P(F\cap A)$. Dies kann beispielsweise mithilfe einer Vierfeldertafel geschehen. Trägt man die Voraussetzungen in eine Tabelle ein, so ergibt sich:			

	Ausgesondert	Nicht ausgesondert	
Fehlerhaft	0,14	0,06	0,2
Fehlerfrei	0,03	0,77	0,8
	0,17	0,83	1

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Mithin ist $P(F \cap A) = 0{,}14$. Also ist der Anteil der ausgesonderten Chips in Bezug auf die fehlerhaften Chips $\frac{0{,}14}{0{,}2} = \frac{7}{10} = 0{,}7$. Von den fehlerhaften Chips werden also 70 % ausgesondert.	5	10	
f)	Es gilt immer noch: $p = 0{,}2$. Die Tabelle ergibt: $P(X \leq 11) \approx 0{,}013 = 1{,}3$ %.	5		
g)	Für $p = 0{,}1$ erhält man: $P(X \leq 11) \approx 0{,}703 = 70{,}3$ %. Also wird die Prämie mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 29,7 % zu Unrecht verweigert.		10	
h)	Es gibt verschiedene Möglichkeiten. Z. B.: Die Wahrscheinlichkeit, zu Unrecht die Prämie zahlen zu müssen, ist erfreulich niedrig. Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 30 % erhält das Team jedoch zu Unrecht die Prämie nicht, wenn der Anteil der fehlerhaften Chips auf 10 % gesenkt wurde. Bei Senkung auf 15 % – was ja auch eine deutliche Senkung bedeutete – wäre diese Irrtumswahrscheinlichkeit noch viel größer, nämlich ca. 84 %. Der Konzern würde den Betrag dann zwar sparen, vielleicht aber fähige Mitarbeiter verlieren. Dies gilt es gegeneinander abzuwägen.			20
	Insgesamt 100 BWE	15	65	20

Aufgabe 13 Glasschüsseln

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Es bietet sich an, zunächst die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis $\overline{F}$: „Die Glasschüssel ist fehlerfrei, also I. Wahl.“ zu berechnen. Nach Voraussetzung erfolgen die Arbeitsgänge unabhängig voneinander, daher gilt: $P(\overline{F}) = 0{,}92 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}97 \approx 0{,}80$ $P(F) = 1 - P(\overline{F}) \approx 0{,}20$.		10	
b)	Werden bei den fertigen Schüsseln nur die Ergebnisse „nicht I. Wahl“ und „I. Wahl“ unterschieden, kann die Herstellung einer Glasschüssel als Bernoulli-Experiment angesehen werden. Da die Schüsseln nach Voraussetzung unabhängig voneinander mit der gleichen Wahrscheinlichkeit nicht I. Wahl sind, kann die Produktion einer Serie von Gläsern als Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}2$ modelliert werden. Da die Zufallsvariable X die Anzahl der Treffer in dieser Bernoulli-Kette zählt, ist X n-0,2-binomialverteilt, und es gilt:			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	$P(X=k) = B(n;\,0{,}2;k) = \binom{n}{k}\cdot 0{,}2^k\cdot 0{,}8^{n-k}$ $E(X) = \mu = n{\cdot}p = 0{,}2n,\ V(X) = n{\cdot}p{\cdot}q = 0{,}16n$, $\sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot q} = \sqrt{0{,}16n}\ =\ 0{,}4\sqrt{n}$.	5	10	
c)	$P(X\le 3) = \sum_{k=0}^{3} B(15;0{,}2;k)\ =\ \sum_{k=0}^{3}\binom{15}{k}\cdot 0{,}2^k\cdot 0{,}8^{15-k}$ $=\ 0{,}8^{15}+15\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^{14}+105\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^{13}+455\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^{12}$ $\approx 0{,}648$ Es gilt: *E(X)* = 3. Also liegt in dieser Verteilung die größte Einzelwahrscheinlichkeit bei $k = 3$ vor. Wegen $p = 0{,}2$ ist das zugehörige Histogramm zudem asymmetrisch mit einer größeren Wahrscheinlichkeit für $k = 2$ als für $k = 4$, usw. Also muss $P(X\le 3)$ deutlich größer als 0,5 sein.	10	5	5
d)	Hier gilt: $\mu = 20$, $\sigma = 4 > 3$. Nach Moivre/Laplace lässt sich mit Hilfe des Tafelwerks die gesuchte Wahrscheinlichkeit daher z.B. abschätzen durch: $P(X\ge 30)\ <\ 0{,}5\cdot(1-P(\mu-2{,}2\sigma\ \le X\le \mu+2{,}2\sigma))$ $\approx\ 0{,}5\cdot(\,1-0{,}972\,) = 0{,}014$. Zur Berechnung wählt man den Ansatz $P(X\ge 30) = 1-P(X\le 29) = 1-\sum_{k=0}^{29} B(100;0{,}2;k)$ und erhält mit Hilfe der Anlage: $1-\sum_{k=0}^{29} B(100;0{,}2;k)\approx 1-0{,}989 = 0{,}011 = 1{,}1\ \%$.	5	5	10
e)	Mit den Bezeichnungen *F*: „Die Fehler im Glas rechtfertigen die Qualitätsbezeichnung „I. Wahl“ nicht.“ und *V*: „Die Schüssel durchläuft ohne Beanstandungen die Kontrolle und wird verschickt.“ gilt: $P(F) = 0{,}2$, $P(\bar{F}) = 0{,}8$, $P(V/F) = 0{,}03$, $P(\bar{V}/\bar{F}) = 0{,}01$. Gefragt ist nach *P*(*F*/*V*). Diese Wahrscheinlichkeit kann mit Hilfe des Satzes von Bayes, durch geeignete Umformungen des Ansatzes $P(F/V) = \frac{P(F\cap V)}{P(V)}$, mit Hilfe eines kleinen Baumdiagramms oder einer Vierfeldertafel bestimmt werden. $P(F/V) = \frac{0{,}2\cdot 0{,}03}{0{,}2\cdot 0{,}03\ +0{,}8\cdot 0{,}99}\ \approx 0{,}0075$.		20	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	Die Manufaktur nimmt für eine nicht reklamierte Schüssel $1{,}04 \cdot H$ ein, bei einer gerechtfertigten Reklamation nur $1{,}04 \cdot H \cdot 0{,}75$. Wenn p der mittlere Anteil an von den Geschäften reklamierten Schüsseln ist, nimmt die Manufaktur im Mittel pro Schüssel also $\left[1{,}04 \cdot (1-p) + 1{,}04 \cdot 0{,}75 \cdot p\right] \cdot H$ ein. Der Gewinn ist Null, wenn die eckige Klammer Eins ist. Die Lösung der zugehörigen Gleichung ergibt: $p \approx 15{,}4$ %. Die Manufaktur gerät also erst dann mit der Produktion der Glasschüsseln in die Verlustzone, wenn die Wahrscheinlichkeit p, dass der Kunde eine Schüssel berechtigt als „nur II. Wahl“ reklamiert, größer als 15,4 % ist. Vergleicht man diesen Wert mit dem Ergebnis aus e), so besteht unter den gegebenen Bedingungen keinerlei Gefahr, da $p < 1$ %.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	55	25

Aufgabe 7 Flaschenabfüllautomat

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Das Auffüllen eines 12er-Kastens lässt sich als Bernoulliexperiment *(Treffer = Flaschentyp 0; kein Treffer = Flaschentyp 1)* der Kettenlänge $n = 12$ beschreiben. Wenn man voraussetzt, dass das variierende Füllverhalten der Maschine stochastisch unabhängig erfolgt, so kann man die Zufallsvariable X, die die Anzahl der Ausschussflaschen in einem 12er-Kasten zählt, als binomialverteilt ansehen. Die Wahrscheinlichkeit (Trefferwahrscheinlichkeit) für den Flaschentyp 0 beträgt entsprechend der relativen Häufigkeit $p = 0{,}05$.		10	
b)	Mithilfe der Tabelle oder der entsprechenden Formel erhält man: $$P(X=3) = \binom{12}{3} \cdot 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^9 = 0{,}0173.$$ Die Wahrscheinlichkeit ist mit 1,73 % so gering, dass die Aussage des Kunden durchaus skeptisch bewertet werden darf.	10	5	
c)	$$P(X \le 1) = \binom{12}{1} \cdot 0{,}05^1 \cdot 0{,}95^{11} + \binom{12}{0} \cdot 0{,}95^{12} = 0{,}8817$$ Die Wahrscheinlichkeit beträgt also nur etwa 88 %; ein neuer Abfüllautomat ist also nötig!	15		
d)	Es handelt sich hier um einen einseitigen Hypothesentest mit einer Stichprobenlänge von n=100, einer Nullhypothese H_0 von p=0,02 für Flaschen des *Typs 0* einer binomialverteilten Zufallsgröße X (Anzahl der Ausschussflaschen). Die Gegenhypothese lautet H_1: p>0,05.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Die Entscheidungsregel lautet: Annahmebereich für H_0: A= $\{0;1;...;4\}$; Ablehnungsbereich für H_0: $\overline{A} = \{5;6;...;100\}$ Annahme: H_0 sei wahr, gesucht ist die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art. Aus der Tabelle im Anhang folgt: $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \approx 0{,}0508$, also ca. 5 %. In etwa 5 % aller Fälle wird man irrtümlich einen Preisnachlass gewähren.		10	10
e)	Es wird angenommen, das die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten vom Flaschentyp 0 immer noch bei $p = 0{,}05$ liegt. Wieder aus der Tabelle im Anhang kann man ablesen: $P(X \leq 4) \approx 0{,}4360$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 43 % wird nicht entdeckt, dass sich die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Flaschentyps 0 nicht geändert hat und nach wie vor bei $p = 0{,}05$ liegt.		10	10
f)	Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Flaschentyps 0 in einem 20er-Kasten beträgt: $P(X = 0) = \binom{20}{0} \cdot 0{,}02^0 \cdot 0{,}98^{20} \approx 0{,}66760...$, also ca. 67 %. Gesucht ist die maximale Anzahl der Flaschen n mit $P(X = 0) \geq 0{,}54$: $0{,}98^n \geq 0{,}54$ $n \leq \frac{\ln 0{,}54}{\ln 0{,}98}$ $n \leq 30{,}500..$ Der Kasten darf also maximal eine Größe von 30 Flaschen haben. Kästen mit einer derartigen Größe sind ungewöhnlich. Solche Kisten müssten auch transportiert werden. Hier sollte überlegt werden, ob der Einsatz einer ungewöhnlichen Kiste lohnt, denn es ist nicht geklärt, warum der Umsatz steigt. Vielleicht kann der Umsatz auch gesteigert werden, wenn noch weniger Flaschen von Typ 0 vorkommen.		20	
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Aufgabe 15 Urnentest

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Beim 10-fachen Ziehen mit Zurücklegen aus der Urne 1 ist die Anzahl der schwarzen Kugeln X binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = \frac{1}{6}$. Mithilfe der Formel $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ oder des Tafelwerks erhält man $P(X=4) = B\left(10; \frac{1}{6}; 4\right) = 0{,}0543$ Die Wahrscheinlichkeit, beim 10-maligen Ziehen ohne Zurücklegen aus der Urne 1 genau 4 schwarze Kugeln zu ziehen, beträgt etwa 5,4 %. Entsprechend erhält man: $P(X > 4) = 1 - P(X \le 4) \approx 1 - 0{,}9845 = 0{,}0155$. Die Wahrscheinlichkeit, beim 10-maligen Ziehen ohne Zurücklegen aus der Urne 1 mehr als 4 schwarze Kugeln zu ziehen, beträgt etwa 1,6 %.	20		
b)	Es ist der Ablehnungsbereich entsprechend der Formel $P(X \le K_1) \le \frac{\alpha}{2}$ und $P(X \ge K_2) \le \frac{\alpha}{2}$ zu bestimmen. Als Hilfsmittel wird die Tafel genommen. • Urne 1: $p = \frac{1}{6}$ für das Ziehen einer schwarzen Kugel. Wegen $P(X \le 0) = 0{,}1615$ und $P(X \ge 3) = 1 - 0{,}9298 = 0{,}0702$ und $P(X \ge 4) = 1 - 0{,}9872 = 0{,}0128$ ist der Ablehnungsbereich $\{4; 5; \ldots; 10\}$. • Urne 2: $p = \frac{1}{3}$ für das Ziehen einer schwarzen Kugel. Wegen $P(X \le 0) = 0{,}0173$ und $P(X \le 1) = 0{,}1040$ sowie $P(X \ge 6) = 1 - 0{,}9234 = 0{,}766$ und $P(X \ge 7) = 1 - 0{,}9803 = 0{,}0197$ ist der Ablehnungsbereich $\{0; 7; 8; 9; 10\}$ • Urne 3: $p = \frac{1}{2}$ für das Ziehen einer schwarzen Kugel. Wegen $P(X \le 1) = 0{,}0107$ und $P(X \le 2)=0{,}0547$ sowie $P(X \ge 8) = 1 - 0{,}9453 = 0{,}0547$ und $P(X \ge 9) = 1 - 0{,}9893 = 0{,}0107$ ist der Ablehnungsbereich $\{0; 1; 9; 10\}$		30	
c)	Das Ereignis „3 schwarze Kugeln zu ziehen“ liegt nicht im Ablehnungsbereich aller drei Urnen. Also kann man sich mithilfe dieses Hypothesentests gegen keine der drei Urnen entscheiden. Und auch nicht für eine der drei Urnen.		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Vor dem ersten Zug weiß man nicht, welche Urne gewählt wurde. Am Anfang ordnet man also jeder Urne die a-priori-Wahrscheinlichkeite $\frac{1}{3}$ zu. Nun zieht man eine Kugel und erhält ein Indiz, das meist verschieden stark für eine Alternative (hier Urne) spricht. Daraufhin erhält man geänderte Wahrscheinlichkeiten dafür, welche Alternative (Urne) vorgelegen haben könnte, die a-posteriori Wahrscheinlichkeit. Zieht man ein zweites Mal, so werden die a-posteriori Wahrscheinlichkeiten als neue a-priori Wahrscheinlichkeiten genommen, die durch ein neues Indiz wieder zu neuen a-posteriori Wahrscheinlichkeiten verändert werden, usw. Nun wird der vorliegende Fall betrachtet: Man nimmt an, dass die Urnen zufällig ausgewählt wurden. Die a-priori Wahrscheinlichkeiten sind also jeweils $\frac{1}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu ziehen ist bei der ersten Urne $\frac{5}{6}$, bei der zweiten Urne $\frac{2}{3}$ und bei der dritten Urne $\frac{1}{2}$. Die Pfade zum Indiz rote Kugel haben also die folgenden Wahrscheinlichkeiten: Urne 1: $\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{18}$, Urne 2: $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ Urne 3: $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ Die totale Wahrscheinlichkeit (Summe vom Indiz rote Kugel beim ersten Zug) ist damit $\frac{5}{18}+\frac{2}{9}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$. Als a-posteriori Wahrscheinlichkeiten für die jeweiligen Urnen im ersten Zug erhält man nun nach dem Satz von Bayes die Anteile der Wahrscheinlichkeiten der Alternativen an der der Gesamtwahrscheinlichkeit für das Indiz. Urne 1: $\frac{5}{18}:\frac{2}{3}=\frac{5}{12}\approx 41,7\%$ Urne 2. $\frac{2}{9}:\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\approx 33,3\%$ Urne 3: $\frac{1}{6}:\frac{2}{3}=\frac{1}{4}=25,0\%$ Die a-posteriori Wahrscheinlichkeit werden nun für den zweiten Zug die neuen a priori Wahrscheinlichkeiten und mit den entsprechenden Rechnungen erhält man nun die (neuen) a-priori Wahrscheinlichkeiten für die schwarze Kugel: Urne 1: $41,7\%\cdot\frac{1}{6}\approx 6,95\%$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Urne 2. $33{,}3\% \cdot \frac{1}{3} \approx 11{,}1\%$ Urne 3: $25{,}0\% \cdot \frac{1}{2} = 12{,}5\%$ Als Gesamtwahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel im zweiten Zug erhält man nun 6,95 % + 11,1 % + 12,5 % = 30,55 %. Die neuen a-posteriori Wahrscheinlichkeiten erhält man nun folgendermaßen: Urne 1: 6,95 % : 30,55 % ≈ 22,7 %, Urne 2: 11,1 % : 30,55 % ≈ 36,3 % und Urne 3: 12,5 % : 30,55 % ≈ 40,9%.		30	
e)	Die Indizien sprechen hier für die Urne 2, da die a posteriori Wahrscheinlichkeit für diese Urne mit 48,9 % gegenüber 29, 1 % bzw. 22,0 % deutlich höher sind. Das Verfahren aus den Aufgabenteilen d) und e) berücksichtigt Vorwissen. Das Verfahren aus dem Aufgabenteil c) ist „vorsichtiger“. Es wird sich nur dann gegen eine Hypothese ausgesprochen, wenn das Versuchsergebnis sehr stark vom Erwartungswert der Hypothese abweicht. Zudem ist das vorgegebene Signifikanzniveau ist ziemlich willkürlich.			10
	Insgesamt 100 BWE	20	70	10

Aufgabe 16 Doping

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Ein falsches Urteil wird abgegeben, wenn ein gedopter Sportler nach dem Test als nicht gedopt gilt oder wenn ein nicht gedopter Sportler des Dopings bezichtigt wird. Es bezeichne: • D das Ereignis, dass der betreffende Sportler gedopt ist. • T das Ereignis, dass seine Dopingprobe positiv ausfällt. Gegeben sind: • $P(D) = \frac{55}{2200} = 0{,}025$ (a-priori-Wahrscheinlichkeit) • $p_e = P(T / D) = 0{,}8$ • $p_a = P(\overline{T} / \overline{D}) = 0{,}95$			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
Gefragt ist nach:

$$\begin{aligned} P(\overline{T} \cap D) + P(T \cap \overline{D}) &= P(\overline{T}/D) \cdot P(D) + P(T/\overline{D}) \cdot P(\overline{D}) \\ &= 0,2 \cdot 0,025 + 0,05 \cdot 0,975 \\ &= 0,05375 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 5,4 % wird also über eine zufällig ausgewählte Person ein falsches Urteil abgegeben.
</td><td>20</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
Zu bestimmen ist $P(\overline{D}/T)$.
Mithilfe eines Baumdiagramms, einer Vierfeldertafel oder der Formel von Bayes erhält man

$$P(\overline{D}/T) = \frac{P(T/\overline{D}) \cdot P(\overline{D})}{P(T)} = \frac{P(T/\overline{D}) \cdot P(\overline{D})}{P(T/D) \cdot P(D) + P(T/\overline{D}) \cdot P(\overline{D})}$$

$$= \frac{0,05 \cdot 0,975}{0,8 \cdot 0,025 + 0,05 \cdot 0,975} \approx 0,709$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein des Dopings beschuldigter Sportler nicht gedopt war beträgt also ca. 71 %. An dem Nenner des Bruches ist gut zu erkennen, dass unter den des Dopings Bezichtigten der überwiegende Teil aus Sportlern bestehen wird, die nicht mit diesem Wirkstoff gedopt sind. Wegen des großen Anteils nicht gedopter Sportler ergeben sich aus dem Testfehler von 5 % so viele Fehlurteile.
</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>
Die B-Probe wird nur dann untersucht, wenn ein positiver Befund der A-Probe vorliegt. Damit hat sich für den erneuten Testdurchlauf die a-priori-Wahrscheinlichkeit P(D) auf 0,291 erhöht. Wie in Aufgabenteil b) ergibt sich dann:

$$P(\overline{D}/P_0) = \frac{0,05 \cdot 0,709}{0,8 \cdot 0,291 + 0,05 \cdot 0,709} \approx 0,132 \approx 13\%.$$
</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>
Mit der Bayes-Formel ergeben sich analog zu a) und c) auf 3 Nachkommmastellen gerundet die folgenden Tabellen:

1) Konstant ist $p_a = P(\overline{T}/\overline{D}) = 0,95$

<table>
<tr><td>p_e</td><td>0,80</td><td>0,85</td><td>0,90</td><td>0,95</td><td>1,00</td></tr>
<tr><td>$P(\overline{D}/T)$
nach A-Probe</td><td>0,709</td><td>0,696</td><td>0,684</td><td>0,672</td><td>0,0661</td></tr>
<tr><td>$f(p_e) = P(\overline{D}/T)$
nach B-Probe</td><td>0,132</td><td>0,119</td><td>0,107</td><td>0,097</td><td>0,089</td></tr>
</table>

2) Konstant ist $p_e = P(T/D) = 0,8$
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
	I	II	III

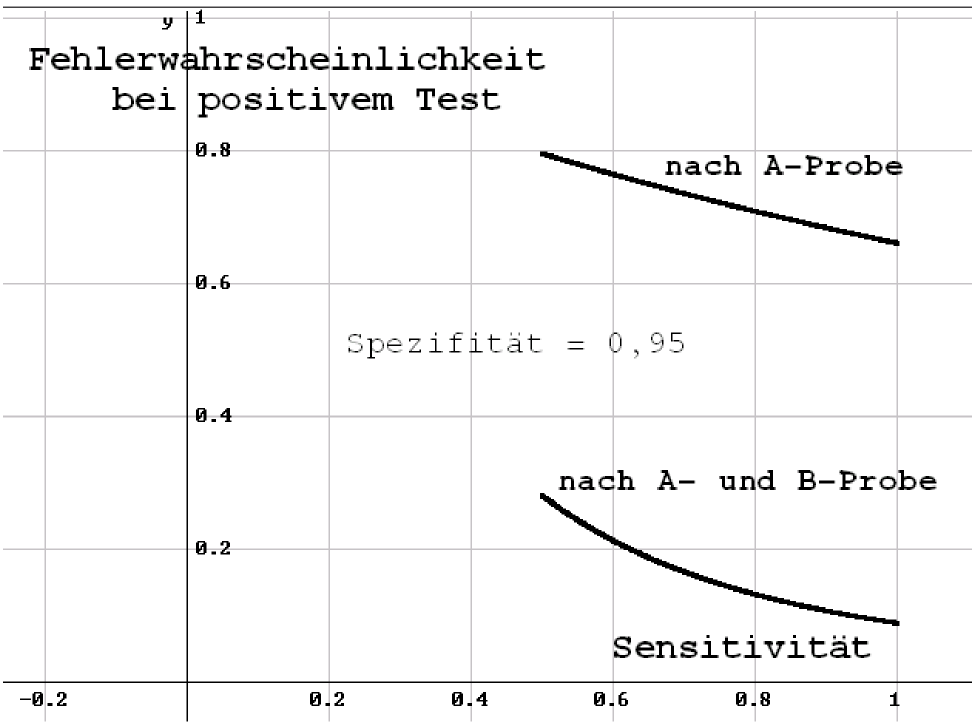
p_a	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	1,00
$P(\bar{D}/T)$ nach A-Probe	0,709	0,661	0,594	0,494	0,328	0
$g(p_a) = P(\bar{D}/T)$ nach B-Probe	0,132	0,089	0,052	0,024	0,006	0

So wünschenswert es auch ist, „schwarze Schafe“ mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit des Dopings zu überführen, so müssen dennoch in erster Linie ungedopte Sportler vor ungerechtfertigten Anschuldigungen geschützt werden. Die Tabellen zweigen, dass dazu die im Vergleich schon große Spezifität p_a von 95 % noch weiter angehoben werden muss. Eine Erhöhung der Spezifität um einen Prozentpunkt bewirkt hier mehr als eine Erhöhung der Sensitivität p_e um fünf Prozentpunkte.

Die gewünschten Funktionen findet man entsprechend b) und c) mit der Bayes-Formel entweder iterativ oder wegen der Unabhängigkeit von A- und B-Probe auch direkt:

$$f(p_e) = \frac{39}{400 \cdot p_e^2 + 39} \qquad g(p_a) = \frac{975(p_a - 1)^2}{975 \cdot p_a^2 - 1950 \cdot p_a + 991}$$

<u>*Bemerkung:*</u> *Der hier beschriebene Zusammenhang lässt sich natürlich noch besser verdeutlichen, wenn man die beiden Funktionen f und g grafisch darstellt, das kann in einer Abiturklausur ohne Computereinsatz natürlich nicht geschehen, wohl aber zur Vorbereitung im Unterricht (z .B. mit Hilfe von DERIVE, EXCEL oder irgendeinem geeigneten Funktionenplotter).*



	I	II	III
		25	20
Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 17 Alkoholsünder

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
- P(„genau 2 Alkoholsünder“) $=\binom{20}{2}\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9^{18}\approx 28{,}5\,\%$.
- P(„nicht mehr als 2 Alkoholsünder“) $=\sum_{k=0}^{2}\binom{20}{k}\cdot 0{,}1^k\cdot 0{,}9^{20-k}\approx 67{,}7\,\%$.
- P(„mindestens 3 Alkoholsünder“) $\approx 1-67{,}7\% = 32{,}3\%$.
- P(„der erste Alkoholsünder sitzt im letzten oder vorletzten kontrollierten Auto“) $=(0{,}9^{18}+0{,}9^{19})\cdot 0{,}1\approx 2{,}9\%$
oder auch
P(„der erste Alkoholsünder sitzt im letzten oder vorletzten kontrollierten Auto“) $=0{,}9^{18}\cdot 0{,}1^2+0{,}9^{18}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9+0{,}9^{19}\cdot 0{,}1\approx 2{,}9\%$.
- P(„genau zwei Alkoholsünder aufeinander folgend“) $=19\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9^{18}\approx$ 2,9 %.
</td><td>15</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
Die berechneten Wahrscheinlichkeiten können der Tabelle entnommen werden.
<u>Bestimmung des Ablehnungsbereichs</u>:
Es gilt: $\sum_{k=0}^{4}\binom{100}{k}\cdot 0{,}1^k\cdot 0{,}9^{100-k}\approx 2{,}37\,\%$, aber
$\sum_{k=0}^{5}\binom{100}{k}\cdot 0{,}1^k\cdot 0{,}9^{100-k}\approx 5{,}76\,\%$
Also sollte die Nullhypothese $H_0: p\geq 0{,}1$ verworfen werden, wenn weniger als 5 Alkoholsünder ermittelt werden.
<u>Bestimmung des Fehlers 2. Art:</u>
$\beta = 1-\sum_{k=0}^{4}\binom{100}{k}\cdot(0{,}05)^k\cdot(0{,}95)^{100-k}\approx 56{,}4\%$
Dieser Wert ist sehr hoch. Selbst wenn die Alkoholsünderquote deutlich gesenkt würde, ist die Wahrscheinlichkeit groß, dass der Test dies nicht „entdeckt“.
</td><td>10</td><td>30</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>
Da 3 < 4, spricht das Ergebnis signifikant für eine Senkung der Alkoholsünderquote.
Wenn die Haushaltspolitiker <u>der Maßnahme grundsätzlich negativ</u> gegenüberstehen, könnten sie eine Begründung dafür verlangen, dass die Quote unter 5 % liegt, um der Maßnahme zuzustimmen, also verlangen, dass die Nullhypothese $H_0: p\geq 0{,}05$ mit Signifikanz verworfen werden kann. Dann wäre der Ablehnungsbereich $k\leq 1$. Es gilt nämlich $\sum_{k=0}^{1}\binom{100}{k}\cdot 0{,}05^k\cdot 0{,}95^{100-k}\approx 3{,}71\%$,
aber $\sum_{k=0}^{2}\binom{100}{k}\cdot 0{,}05^k\cdot 0{,}95^{100-k}\approx 11{,}83\%$.
Vor diesem Hintergrund ist das Ergebnis nicht signifikant, sie würden die Maßnahme ablehnen.
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Wenn sie <u>der Maßnahme dagegen grundsätzlich positiv</u> gegenüberstehen, würden sie sich nur absichern und die Maßnahme nur dann ablehnen, wenn die Nullhypothese $H_0 : p \le 0{,}05$ signifikant abgelehnt werden muss. Dann wäre der Ablehnungsbereich $k \ge 10$. Es gilt nämlich $1-\sum_{k=0}^{9}\binom{100}{k}\cdot 0{,}05^k \cdot 0{,}95^{100-k} \approx 1-97{,}18\% \approx 2{,}8\%$, aber $1-\sum_{k=0}^{8}\binom{100}{k}\cdot 0{,}05^k \cdot 0{,}95^{100-k} \approx 1-93{,}69\% \approx 6{,}3\%$. So gesehen liegt keine Signifikanz vor. Sie können damit nicht begründen, dass die Alkoholsünderquote über 5 % liegt und würden die Maßnahme billigen. *Diese ausführliche Lösung wird nicht erwartet .Um die volle Punktzahl dieses Aufgabenteils zu erreichen, wird mindestens einer der beiden Testvorschläge erwartet und die darauf basierende Interpretation des Testergebnisses von drei ermittelten Alkoholsündern.*			15
d)	Es geht um die Frage der stochastischen Unabhängigkeit des „Trinkverhaltens“ der einzelnen Fahrer. Diese ist z.B. dann nicht gegeben, wenn einige die Kontrollstelle entdecken bzw. davon erfahren haben, wenn „Gruppen“ fahren (z.B. eine Hochzeitsgesellschaft) oder wenn z. B. in der Sylvester- oder Rosenmontagnacht gemessen wird. *Es wird von den Schülerinnen und Schülern eine „ergebnisoffene" zusammenhängende Darstellung erwartet.*			10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 18 Krankenhaus

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Wir betrachten die Folge der 50 Leberwertmessungen mit den möglichen Ergebnissen „zufrieden stellend“ oder „nicht zufrieden stellend“ als Bernoullikette. Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der entlassenen Patienten mit guten Leberwerten. - Bei einer Wahrscheinlichkeit von 70 % und einem Stichprobenumfang von 50 erwartet man $n \cdot p = 35$ Patienten, denen es gut geht. - Mithilfe der Formel $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ oder der Tafel berechnet man die Wahrscheinlichkeit $P(X=35) \approx 0{,}1223 \approx 12{,}2\%$. - Aus der Tafel liest man die Wahrscheinlichkeit $P(X>45) \approx 0{,}0002 = 0{,}02\%$ ab.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	- Für diesen einseitigen Test gibt es verschiedene Ansätze: (1) Für die Varianz von X gilt: $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 50 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 10{,}5$. Da *V(X)* größer ist als 9, kann hier mit der 1,64-σ-Umgebung um μ argumentiert werden. $\mu + 1{,}64\sigma = 35 + 1{,}64\sqrt{10{,}5} \approx 40{,}3$ Wenn also mindestens 41 Patienten einen zufrieden stellenden Leberwert haben, so ist das Ergebnis signifikant besser als zu erwarten war. (2) Aus der Tabelle der summierten Binomialverteilung für $n = 50$ in der Formelsammlung entnimmt man, dass die Wahrscheinlichkeit, dass 41 oder mehr Patienten einen guten Leberwert haben, 0,0402 beträgt, für 40 oder mehr Patienten aber schon größer als 0,05 ist. Auch hier erhält man das Ergebnis aus (1). Wie groß die tatsächliche Irrtumswahrscheinlichkeit ist, ergibt sich unmittelbar aus (2), nämlich ca. 4,02 %.	30	10	
b)	Jede der 10 Testreihen liefert mit der Wahrscheinlichkeit 0,04 ein signifikantes Ergebnis, obwohl keine Besonderheit vorliegt. Also weisen 10 Reihen mindestens ein signifikantes Ergebnis mit der Wahrscheinlichkeit $1 - 0{,}96^{10} \approx 34\ \%$ auf. Wenn kein Parameter wirklich besser ist, beträgt bei dieser Vorgehensweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ergebnis signifikant gut ist, dennoch immerhin ca. 34 %.		20	
c)	Der Ansatz ist wie in Teil b). Man erhält die Gleichung $1 - 0{,}96^n > 0{,}6$. Durch Probieren oder Logarithmieren erhält man $n > 22$ bzw. $n > 22{,}45$. Der Chefarzt muss also 23 Parameter testen lassen, um mit 60%iger Wahrscheinlichkeit ebenfalls eine Erfolgsmeldung zu haben.		10	10
d)	Die Irrtumswahrscheinlichkeit wird für den Test eines einzelnen Parameters festgelegt und die Ergebnisse der Parametertests, die keine Abweichung vom Durchschnitt darstellen, werden nicht veröffentlicht. Damit ließe sich bei genügend vielen Parametern immer irgendein ungewöhnlicher Zusammenhang nachweisen oder jede Institution in irgendeiner Beziehung als besonders gut darstellen.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

Aufgabe 19 Thermoschalter

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	*X* beschreibe die Anzahl der fehlerhaften Thermoschalter. Für den <u>Erwartungswert</u> *E(X)* gilt: $E(X) = n \cdot p = 5$. Die <u>Wahrscheinlichkeit für genau 5 fehlerhafte Schalter</u> beträgt $P = \binom{50}{5} \cdot 0{,}1^5 \cdot 0{,}9^{45} \approx 18{,}49\,\%$. *Die Rechnung kann über den entsprechenden Term der Binomialverteilung mit dem Taschenrechner erfolgen.* Aus dem Tafelwerk liest man ab, dass die Wahrscheinlichkeit für <u>höchstens 5 fehlerhafte Schalter</u> $P(X \leq 5)$ ungefähr 61,61 % beträgt.	20	5	
b)	Da es sich um eine Massenproduktion geht, kann man so rechnen, als ob es sich um ein Ziehen mit Zurücklegen handeln würde. Das Auftreten von Fehlern im Produktionsprozess wird wegen regelmäßiger Wartung als zufällig angenommen. Dadurch ist die Annahme der Unabhängigkeit im Produktionsprozess gerechtfertigt.			10
c)	Das Gegenereignis zu dem betrachteten Ereignis ist, dass beide Schalter versagen. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $0{,}1^2 = 0{,}01$. Also ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Stromzufuhr unterbrochen wird, $1 - 0{,}1^2 = 0{,}99 = 99\,\%$. *Alternativer Lösungsweg:* *P(„Die Stromzufuhr wird unterbrochen“) = 0,1·0,9 + 0,9·0,1 +0,9·0,9 = 0,99*	5	10	
d)	Die Wahrscheinlichkeit, dass es bei 100 Maschinen zu mindestens einer Überhitzung kommt, berechnet man durch $1 - 0{,}99^{100} \approx 1 - 0{,}3660 = 63{,}4\,\%$.		15	
e)	Ist keine Qualitätsverbesserung eingetreten, so gilt: $p = 0{,}1$. Man liest wie in Teil b) die Wahrscheinlichkeit für höchstens 3 fehlerhafte Schalter ab: 0,2503. Also erhält das Team die Prämie mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 25 % zu Unrecht. Ist die Qualität so verbessert worden, dass $p = 0{,}05$ gilt, ergibt sich als die Wahrscheinlichkeit für höchstens 3 fehlerhafte Schalter: 0,7604. Wenn mehr als 3 fehlerhafte Schalter in der Stichprobe auftreten, so erhält das Team die Prämie zu Unrecht nicht. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist also $1 - 0{,}7604 \approx 24\,\%$.		20	
f)	Wenn man z.B. mit 100 Maschinen wie in Teil d) rechnet, erhält man $1 - (1 - 0{,}05^2)^{100} = 1 - 0{,}9975^{100} \approx 1 - 0{,}778 \approx 22\,\%$. Dieser Wert ist ziemlich hoch und kann von der Firma „Maschinenfix“ unter den genannten Bedingungen nicht akzeptiert werden. Der Schutz wird deutlich erhöht, wenn die Firma in ihre Maschinen 3 oder sogar 4 Schalter in Reihe einbaut. ($1 - 0{,}1^3 = 0{,}999$; $1 - 0{,}05^3 = 0{,}999875$;...). Bereits für 3 Schalter gilt mit der alten Qualität: $1 - \left(1 - 0{,}1^3\right)^{100} = 1 - 0{,}999^{100} \approx 0{,}0952$,			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	analog für die neue Qualität: 0,0124. Ein Maschinenschaden würde dann im Mittel sehr viel seltener auftreten.			15
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 20 Welche Urne ist das?

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Beim 10-fachen Ziehen mit Zurücklegen aus der Urne 1 ist die Anzahl der schwarzen Kugeln (10-$\frac{6}{10}$) -binomialverteilt. - P(„alle Kugeln schwarz“) = $p^{10} = 0{,}6^{10} \approx 0{,}60\%$ - P(„5 schwarze Kugeln“) = $\binom{10}{5} \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^5 \approx 20{,}07\%$ - P(„höchstens 2 schwarze Kugeln aus U_1“) = $\left(\frac{4}{10}\right)^{10} + 10 \cdot \frac{6}{10} \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^9 + \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{6}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^8 \approx 1{,}23\%$ - P(„mindestens 3 schwarze Kugeln aus U_1“) $\approx 1 - 1{,}23\ \% = 98{,}77\ \%$.	20	5	
b)	Man betrachtet die ganze Situation als Stufenexperiment und wendet die Pfad-regeln an: Auf der ersten Stufe wird eine Urne mit der Münze ausgewürfelt: $P(U_1) = P(U_2) = \frac{1}{2}$ und dann wird aus dieser Urne mit Zurücklegen 10-mal gezogen. Wegen der Gleichverteilung der beiden Möglichkeiten auf der ersten Stufe, muss man die Wahrscheinlichkeiten der betrachteten Ereignisse für beide Urnen berechnen, und dann jeweils arithmetisch mitteln. Für U_1 ist die Rechnung schon in a) erfolgt, für U_2 kann diese analog zu a) oder schneller mit Hilfe des Tafelwerks ($p = 0{,}3$) erfolgen: - P(„5 schwarze Kugeln aus U_2“) $\approx$ 10,29 % - P(„höchstens 2 schwarze Kugeln aus U_2“) $\approx 0{,}0282 + 0{,}1211 + 0{,}2335 \approx 38{,}28\ \%$ - P(„mindestens 3 schwarze Kugeln aus U_2“) $\approx 1 - 38{,}28\ \% = 61{,}72\ \%$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Es ergeben sich daraus folgende Mittelwerte: - P(„5 schwarze Kugeln“) $\approx 15{,}18$ % - P(„höchstens 2 schwarze Kugeln“) $\approx$ 19,76 % P(„mindestens 3 schwarze Kugeln“) $\approx$ 80,24 %	5	20	
c)	- Dem Tafelwerk entnimmt man: $P_1 = \sum_{k=6}^{10} \binom{10}{k} \cdot (0{,}3)^k \cdot (0{,}7)^{10-k} \approx 4{,}73\%$ - Dem Tafelwerk entnimmt man: $P_2 = \sum_{k=0}^{5} \binom{10}{k} \cdot 0{,}6^k \cdot 0{,}4^{(10-k)} \approx 36{,}69\%$ - Hier wird also auf dem 5 %-Signifikanzniveau die Hypothese H_1: Es handelt sich um die Urne U_1 gegen die Nullhypothese H_0: Es handelt sich um die Urne U_2 getestet. P_1 entspricht der Irrtumswahrscheinlichkeit 1.Art , P_2 entspricht der Irrtumswahrscheinlichkeit 2. Art. Die Entscheidungsregel ist sehr „vorsichtig“.		20	5
d)	Da die Anfangsverteilung für die beiden möglichen Urnen als Gleichverteilung (Münzwurf) angenommen wird, vereinfacht sich die Rechnung z.B. mit Hilfe des Satzes von Bayes in folgender Weise: $P(U = U_1 \mid K = 5)$ $= \dfrac{B(10;0{,}6;5)}{B(10;0{,}6;5) + B(10;0{,}3;5)} = \dfrac{0{,}6^5 \cdot 0{,}4^5}{0{,}6^5 \cdot 0{,}4^5 + 0{,}3^5 \cdot 0{,}7^5} \approx 66{,}1\%$		5	10
e)	Wir fassen den „Wert“ der Urne als Zufallsvariable W auf: $W(U_1) = 6 \cdot 15€ = 90€ \qquad W(U_2) = 3 \cdot 15€ = 45€$ Mit $P(U_1) = 0{,}66$ und $P(U_2) = 0{,}34$ erhalten wir: $E(W) = 0{,}66 \cdot 90€ + 0{,}34 \cdot 45€ = 74{,}7€$. Die „Werterwartung“ ist also größer als der Kaufpreis von 70 €. Wenn man die „Werterwartung“ im Vergleich zum Kaufpreis als Entscheidungskriterium wählt, dann sollte man sich nach dem Testergebnis $K = 5$ auf das Spiel einlassen.		5	5
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

5.2 Kurs auf erhöhtem Niveau

Aufgabe 1 Falschparker

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

- Die Anzahl der Falschparker unter den 34 kontrollierten Fahrzeugen ist $B_{34;0,15}$-verteilt: $\binom{34}{3} \cdot 0{,}15^3 \cdot 0{,}85^{31} \approx 13\%$.
- Die Anzahl der Falschparker unter den 82 kontrollierten Fahrzeugen ist $B_{82;0,15}$-verteilt:
P(„mind. 4 Falschparker“) = 1 – P(„höchstens 3 Falschparker“) =
$1 - P(X \le 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) \approx$
$1 - 0{,}0000016 - 0{,}000024 - 0{,}000169 - 0{,}000794 \approx 0{,}999$.
Die Wahrscheinlichkeit, mindestens 4 Falschparker zu ertappen, ist ca. 99,9%.
- $E(X) = 82 \cdot 0{,}15 = 12{,}3$. Die Politessen müssen mit ca. 12 Falschparkern rechnen.
- Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Politessen beim Kudamm-Karree genau fünf und bei Wertheim genau sechs Falschparker finden, beträgt
$\binom{34}{5} \cdot 0{,}15^5 \cdot 0{,}85^{29} \cdot \binom{48}{6} \cdot 0{,}15^6 \cdot 0{,}85^{42} \approx 0{,}1897 \cdot 0{,}1517 \approx 0{,}0288 \approx 2{,}9\%$.

</td><td>15</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

- Y: Anzahl der ertappten Falschparker bei n überprüften Autos;
Y ist $B_{n;0,15}$-verteilt. P(mindestens ein Falschparker) = $P(Y \ge 1)$ =
$1 - P(Y = 0) > 0{,}99$, also $P(Y = 0) < 0{,}01$,
d.h. $\binom{n}{0} \cdot 0{,}15^0 \cdot 0{,}85^n < 0{,}01 \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}85)} \approx 28{,}34$.
Man müsste mindestens 29 Autos kontrollieren.
- Kleinstmöglicher Bereich symmetrisch zum Erwartungswert:
$n = 500$ und $p = 0{,}15 \Rightarrow \mu = 75$ und $\sigma = \sqrt{500 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85} \approx 7{,}984$.
Es gilt: $P(\lvert X - \mu \rvert \le d) = 2 \cdot \Phi(\frac{d}{\sigma}) - 1 \ge 0{,}80 \Leftrightarrow \Phi(\frac{d}{\sigma}) \ge \frac{1{,}8}{2} = 0{,}9$.
Mit Hilfe einer Tabelle für die Normalverteilung folgt:
$\frac{d}{\sigma} \approx 1{,}28 \Rightarrow d \approx 10{,}22 \Rightarrow d \ge 11$.
Somit lautet das kleinstmögliche Intervall: [64; 86].

</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
c)	Es ist G die „Einnahmedifferenz", die ein Falschparker gegenüber einem regelgerechten Verhalten verursacht.			

	Falschparker nicht ertappt	Falschparker verwarnt	Falschparker ertappt
g_i (in €)	–2	0	15–2 = 13
$P(G=g_i)$	0,9	0,05	0,05

Erwartungswert $E(G) = (-2)\cdot 0{,}90 + 13\cdot 0{,}05 = -1{,}15$,

d.h. pro Falschparker macht die Stadt im Durchschnitt einen Verlust von 1,15 €.

Man müsste also eine Erhöhung des Bußgeldes beschließen, um mindestens ohne Verlust für die Stadt zu arbeiten.

Ist B das erhöhte Bußgeld, so gilt:

$E(G) = (-2)\cdot 0{,}90 + (B-2)\cdot 0{,}05 = 0 \;\Leftrightarrow\; B\cdot 0{,}05 = 1{,}9 \;\Rightarrow\; B = 38$.

Damit kein Verlust entsteht, müsste das Bußgeld mindestens auf 38 € erhöht werden

Bewertung c): I: – | II: 10 | III: 5

d)

- Die Medien könnten ihre Behauptung statistisch belegen, wenn die Nullhypothese $H_0: p \le 0{,}15$ verworfen werden könnte, d.h. wenn die Anzahl X der in der Stichprobe auftretenden Falschparker genügend groß ist. Wir bestimmen eine möglichst kleine Schranke K so, dass $P\left(\{X > K\} \mid H_0\right) \le 5\%$.
  Zunächst können wir abschätzen: $P\left(\{X > K\} \mid H_0\right) \le P\left(\{X > K\} \mid p = 0{,}15\right)$.
  Unter der Bedingung $p = 0{,}15$ ist $\frac{X-\mu+0{,}5}{\sigma}$ in guter Näherung standard-normalverteilt mit
  $\mu = 2400\cdot 0{,}15 = 360$ und $\sigma = \sqrt{2400\cdot 0{,}15\cdot 0{,}85} \approx 17{,}49$.
  Der Tabelle entnimmt man für eine standard-normalverteilte Zufallsvariable N: $P\left(N > 1{,}645\right) \approx 5\%$. Also
  $$P\left(\frac{X-\mu+0{,}5}{\sigma} > 1{,}645 \mid p = 0{,}15\right) \le 5\%$$
  $$\Leftrightarrow\; P\left(X > \mu - 0{,}5 + 1{,}645\cdot\sigma \mid p = 0{,}15\right) \le 5\%$$
  $$\Leftrightarrow\; P\left(X > 388{,}3 \mid p = 0{,}15\right) \le 5\%$$
  Die Nullhypothese kann also auf dem 5 %-Niveau verworfen werden, wenn in der Stichprobe mehr als 389 Falschparker angetroffen werden.
  In diesem Falle könnten die Medien sich – statistisch begründet – bestätigt fühlen.

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

• Es gilt $P\left(\{X \le 389\} \mid p = 0{,}17\right)$ zu bestimmen, also die Wahrscheinlichkeit für einen speziellen Fehler 2. Art.
Auch bei p = 0,17 können wir mit der Normalverteilung approximieren:
$\mu = 2400 \cdot 0{,}17 = 408$ und $\sigma = \sqrt{2400 \cdot 0{,}17 \cdot 0{,}83} \approx 18{,}40$.
$P(X \le 389 \mid p = 0{,}17)$
$\approx P\left(\frac{X - \mu + 0{,}5}{\sigma} \le \frac{389 - \mu + 0{,}5}{\sigma} \mid p = 0{,}17\right)$
$= P\left(\frac{X - \mu + 0{,}5}{\sigma} \le -1{,}005 \mid p = 0{,}17\right)$
$\approx \Phi(-1)$
$\approx 16\%$
Das ist ein ziemlich hoher Wert, es kann also leicht passieren, dass der obige Test kein signifikantes Ergebnis liefert, aber dann sind die Testergebnisse für beide Seiten wertlos: Mit solider Argumentation kann der Berliner Senat dann <u>nicht</u> behaupten, dass der Anteil an Falschparkern <u>nicht</u> gestiegen sei.

</td><td></td><td>15</td><td>5</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

<u>Vierfeldertafeln:</u>
B = Auto mit Berliner Kennzeichen
$\overline{B}$ = Auto mit einem Kennzeichen außerhalb Berlins („Tourist“)
F = Falschparker
$\overline{F}$ = Richtigparker
<u>Vierfeldertafel – Frühling:</u>

<table>
<tr><th></th><th>B</th><th>$\overline{B}$</th><th>Summe</th></tr>
<tr><td>F</td><td>0,05</td><td>0,10</td><td>0,15</td></tr>
<tr><td>$\overline{F}$</td><td>0,65</td><td>0,20</td><td>0,85</td></tr>
<tr><td>Summe</td><td>0,70</td><td>0,30</td><td>1</td></tr>
</table>

Von allen Falschparkern sind zwei Drittel „Touristen“, also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $p \approx 67\%$.

</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Vierfeldertafeln: B = Auto mit Berliner Kennzeichen $\overline{B}$ = Auto mit einem Kennzeichen außerhalb Berlins („Tourist“) F = Falschparker $\overline{F}$ = Richtigparker Wenn die Anzahl der Touristen um 20% gestiegen ist, hat man eine größere Gesamtheit und damit geänderte Anteile: Touristen: $\frac{36}{106} \approx 34\%$ Berliner: $\frac{70}{106} \approx 66\%$ Ein Drittel der Touristen parken nach wie vor falsch, das sind gerundet 11,3 %, zwei Drittel parken richtig, also gerundet 22,6 %. Die restlichen Werte ergeben sich durch Subtraktion bzw. Addition, da die rechte Spalte gegeben ist. *Es sind auch andere Begründungen für die Bestimmung der Werte möglich.* Vierfeldertafel – Sommer: (siehe Tabelle unten) Interpretation: Während im Frühjahr jedes 14. Berliner Fahrzeug falsch geparkt hatte (also ein Anteil von $ant = \frac{0{,}05}{0{,}70} \approx 7{,}1\%$), war dieser Anteil in der Sommeruntersuchung auf über 10,1% gestiegen, und das bei gleich bleibenden Verhalten der Touristen. Liegt dies möglicherweise an einer Verknappung des Parkraums im Sommer durch die höhere Zahl der Touristen?			10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Vierfeldertafel – Sommer:

	B	$\overline{B}$	Summe
F	0,067	0,113	0,18
$\overline{F}$	0,594	0,226	0,82
Summe	0,661	0,339	1

Aufgabe 2 Rund um den HSV

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Die zuerst ankommende Person hat 31 Plätze zur Auswahl, die zweite 30, usw. und die letzte noch 3. Aufstellen des Terms liefert: $31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot ... \cdot 3 = \frac{31!}{2!} \approx 4{,}1 \cdot 10^{33}$. (Es gibt ungefähr $4{,}1 \cdot 10^{33}$ Möglichkeiten für die Belegung.) Da man den freien Plätzen nicht verschiedene Personen zuordnen kann, gibt es $\binom{31}{2} = 465$ Möglichkeiten für die freien Plätze.	15		
b)	Wenn man annimmt, dass in fest gewählten Spielzeitintervallen, die erwarteten Anzahlen an Toren proportional zur Läge der Intervalle ist, dann hat man aus der gegebenen Statistik für ein ganzes Spiel von 90 Minuten den Erwartungswert von 3 Toren, also für ein Zeitintervall von 3 Minuten den Erwartungswert von $\mu = 3 \cdot \frac{3}{90} = 0{,}1$ (Toren). Die angenommene Poissonverteilung für $\mu = 0{,}1$ ist teilweise in folgender Tabelle berechnet: K: 0 / 1 / 2 / 3 $P(\{T = k\})$: 0,905 / 0,090 / 0,005 / Praktisch Null Die Wahrscheinlichkeit für „mindestens ein Tor“ beträgt also: $P = 1 - P(\{T = 0\}) \approx 9{,}5\%$. *Mögliche Argumente:* Die Annahmen sind nicht unproblematisch: Handelt es sich um ein „normales“ Bundesligaspiel, für das der erwartete Wert 3 Tore insgesamt beträgt? Sicher ist die erwartete Torzahl in gleichlangen Intervallen auch nicht immer gleich, z.B. nehmen führende Mannschaften schon mal einen Gang heraus. Zum Spielende kann die Kondition nachlassen, andererseits fallen häufig in der letzten Spielminute noch Tore, weil die Konzentration der Verteidigung nachlässt oder weil eine Mannschaft unter Zeitdruck besonders offensiv spielt. Die erwartete Torausbeute kann auch zum Spielende abnehmen, weil eine Mannschaft sich schon mit einem Spielergebnis abgefunden hat oder weil eine Mannschaft unter Zeitdruck besonders offensiv spielt.		10	5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

c) Es erscheinen bei Fahrtantritt mehr als 92 Fahrgäste, wenn zu wenig Personen absagen, genauer, wenn die Anzahl der absagenden Personen kleiner als 9 ist. Die Anzahl der absagenden Personen kann als $B(101\ ;\ 0.1)$ verteilt angenommen werden:

$p = 0{,}1$

k \ n	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
0	0,0001	**0,0001**	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0007	0,0006	**0,0006**	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
2	0,0039	0,0036	0,0033	**0,0030**	0,0028	0,0025	0,0023	0,0021	0,0019	0,0018	0,0016	0,0015
3	0,0145	0,0134	0,0125	0,0115	**0,0107**	0,0099	0,0092	0,0085	0,0078	0,0072	0,0067	0,0062
4	0,0408	0,0382	0,0357	0,0334	0,0312	**0,0291**	0,0272	0,0254	0,0237	0,0221	0,0206	0,0192
5	0,0922	0,0870	0,0821	0,0775	0,0731	0,0689	**0,0649**	0,0612	0,0576	0,0542	0,0510	0,0479
6	0,1750	0,1667	0,1587	0,1511	0,1437	0,1366	0,1299	**0,1234**	0,1172	0,1112	0,1055	0,1000
7	0,2880	0,2767	0,2657	0,2550	0,2446	0,2345	0,2247	0,2152	**0,2061**	0,1972	0,1886	0,1803
8	0,4214	0,4081	0,3949	0,3820	0,3693	0,3568	0,3446	0,3326	0,3209	**0,3094**	0,2982	0,2872
9	0,5598	0,5459	0,5321	0,5184	0,5048	0,4912	0,4778	0,4645	0,4513	0,4382	**0,4254**	0,4126
10	0,6874	0,6746	0,6617	0,6488	0,6358	0,6227	0,6095	0,5963	0,5832	0,5700	0,5568	**0,5437**
11	0,7931	0,7825	0,7717	0,7607	0,7495	0,7381	0,7266	0,7149	0,7030	0,6910	0,6789	0,6667
12	0,8723	0,8644	0,8562	0,8478	0,8391	0,8301	0,8209	0,8115	0,8018	0,7919	0,7819	0,7716
13	0,9265	0,9211	0,9154	0,9095	0,9033	0,8969	0,8902	0,8833	0,8761	0,8687	0,8610	0,8531

Also beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P = \sum_{k=0}^{8} \binom{101}{k} \cdot 0{,}1^k \cdot 0{,}9^{101-k} \approx 31\%\ .$$

Das ist der fette Wert in der Tabelle bei $n = 101$.

Wegen $n \cdot p \cdot (1-p) = 101 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 \approx 9{,}1$ kann das Ergebnis auch näherungsweise mit Hilfe der Normalverteilung bestimmt werden:

$$P(Y \le 8) \approx \Phi\left(\frac{8{,}5-10{,}1}{\sqrt{9{,}09}}\right) \approx 0{,}3\ .$$

Bewertung II: 10

d) Es wird der größte Wert für n gesucht, für den der Ausdruck $\sum_{k=0}^{n-92-1} \binom{n}{k} \cdot 0{,}1^k \cdot 0{,}9^{n-k}$ kleiner als 5% ist. Dazu muss man die fetten Werte in der obigen Tabelle nach rechts durchgehen, bis der Wert gerade noch $\le 5\%$. Das ist für $n = 97$ der Fall.

Will man hier wieder mit normalverteilten Näherungen arbeiten, wählt man am besten als Zufallsvariable Y die möglichen Anzahlen der n Personen, die tatsächlich an der Fahrt teilnehmen wollen. Die Frage ist für welches n der Wert $P(\{Y \le 92\})$ noch ≥ 95 % ist. Die Variable Y ist n-0,9-binomialverteilt.

Die Laplace-Bedingung ist ab $n = 94$ erfüllt. Man wird ein n schätzen, das größer als 93 ist. Somit rechnen wir:

$P(\{Y \le 92\}) \approx \Phi\left(\frac{92{,}5-0{,}9n}{\sqrt{0{,}9\cdot 0{,}1\cdot n}}\right)$. Der rechte Wert muss also noch gerade $\ge$ 95% sein, also muss das Argument $\ge 1{,}645$ sein. Mit der Substitution $m = \sqrt{n}$ und Rundungen auf vier Dezimalen folgt $n \le 97{,}3\ldots$.

Bewertung II: 15

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>Die Frage zielt auf die Bestimmung des Ablehnungsbereichs eines einseitigen Hypothesentests über den Parameter p einer Binomialverteilung mit

$H_0: p \geq 0{,}1$ und $H_1: p < 0{,}1$. p sei dabei die Wahrscheinlichkeit, dass eine Buchung abgesagt wird. Wenige Absagen sprechen gegen H_0.

Die Testvariable T beschreibe die möglichen Anzahlen von Absagen. Wir nehmen auch hier an, dass T binomialverteilt ist.

Es ist also der größte Wert K zu bestimmen für den gilt
$\sum_{k=0}^{K} B(1000; 0{,}1; k) \leq 5\%$.

T sei $B(100\ ;\ 0.1)$ binomialverteilt.

Dann ist $\frac{T-100+0{,}5}{\sqrt{90}}$ annähernd 0-1-normalverteilt.

Mit Hilfe der Tafel erhält man:

$P\left(\frac{X-100+0{,}5}{\sqrt{90}} \leq -1{,}645\right) \approx 0{,}05 \Leftrightarrow P\left(T \leq 83{,}9\right) \approx 0{,}05$.

Wenn also unter 1 000 Buchungen nur 83 oder weniger Absagen auftreten, kann man von einer auf dem 5 %-Niveau signifikanten Senkung der Absagerquote ausgehen.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Wir rechnen den Erwartungswert für die Einnahmen aus, wobei <u>keine Überbuchungen</u> zugelassen werden:
Die Einnahmen setzen sich dann zusammen aus den Anzahlungen und den Restzahlungen.

Wir berechnen die zugehörigen Erwartungswerte:
$E_1 = 92 \cdot 5\,€ = 460\,€$ und $E_2 = 92 \cdot 0{,}94 \cdot 15\,€ = 1297{,}20\,€$.
Die Addition ergibt E = 1757,20 €.</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>g)</td><td>• Wenn genau 5 Personen absagen, sind die Einnahmen von $92 \cdot 20\,€ + 5 \cdot 5\,€ = 1\,865\,€$ offenbar maximal:
Sagen nämlich weniger ab, entfallen für Überbuchungen die betreffenden 5 € und es fallen zusätzlich Kulanzkosten an. Sagt z. B. keiner ab, so ist die Einnahmebilanz $92 \cdot 20\,€ - 5 \cdot 25\,€ = 1\,715\,€$.
Sagen mehr als 5 Personen ab, so werden bei jeder weiteren absagenden Person die Einnahmen von 20 € durch nur 5 € ersetzt.
Der Extremfall, (der auch extrem unwahrscheinlich ist) besteht darin, dass alle absagen, dann gäbe es nur noch Einnahmen in Höhe von $97 \cdot 5\,€ = 485\,€$.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	<u>Bemerkung:</u> *Abgesehen davon, dass dieser Fall praktisch unmöglich ist, wäre es natürlich noch schlimmer für das Busunternehmen, wenn nur eine Person nicht absagt, weil dann ein Bus fahren müsste. Ähnliches gilt, wenn so viele Personen absagen, dass man mit dem größeren Bus nicht auskommt, aber das sind Gewinnfragen, um die es hier nicht geht.* • Die Einnahmen setzen sich dann zusammen aus den Anzahlungen, den Restzahlungen und den negativ gerechneten Kulanzkosten für die abzuweisenden Kunden. Die Rechnung wird dabei einfacher, wenn man sich – wie vorgeschlagen – vorstellt, dass die abzuweisenden Kunden erst die (5+15) € zahlen und dann nicht (25+5) €, sondern 45 € zurückbekommen. $E_1 = 97 \cdot 5€ = 485€$, $E_2 = 97 \cdot 0{,}94 \cdot 15€ = 1367{,}70€$, $K = \left(\sum_{i=0}^{4}(5-i)\ B(97;0{,}06,i)\right) \cdot 45€ = 24{,}60€$. Die 5 Werte der Binomialverteilung können schnell aus der Tabelle für $n = 97$ entnommen werden, also $K = \left(5 \cdot 0025 + 4 \cdot 0{,}0153 + 3 \cdot 0{,}0469 + 2 \cdot 0{,}0949 + 1 \cdot 0{,}1423\right) \cdot 45€ \approx 24{,}60€$. Die Addition ergibt ***E* = 1828,10 €.** Der Vergleich mit f) zeigt, dass es sich für das Unternehmen finanziell lohnt, die 5 Überbuchungen zuzulassen.			20
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 3 Einkommensgruppen

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Aus der prozentualen Verteilung ergibt sich die Anzahl der Familien in den drei Einkommensgruppen als Bestandsvektor $\vec{p}_0$: $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix}$	5		
b)	In der ersten Spalte von *P* steht die Zuordnung der Kinder der Einkommensgruppe *h* in der nächsten Generation: 55 % von ihnen bleiben in Gruppe *h*, 40 % wechseln in Gruppe *m*, 5 % wechseln in Gruppe *n*. In der zweiten Spalte von *P* steht die Zuordnung der Kinder der Einkommensgruppe *m* in der nächsten Generation: 10 % von ihnen wechseln in Gruppe *h*, 70 % bleiben in Gruppe *m*, 20 % wechseln in Gruppe *n*.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

In der dritten Spalte von P steht die Zuordnung der Kinder der Einkommensgruppe n in der nächsten Generation: 5 % von ihnen wechseln in Gruppe h, 15 % wechseln in Gruppe m, 80 % bleiben in Gruppe n.

Die Übergangsmatrix P enthält die angegebenen Prozentsätze:

$$\vec{p}_1 = P \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10} & \frac{3}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 546 \\ 2121 \\ 1533 \end{pmatrix}.$$

</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Möglicher Ansatz:

$$P \cdot \vec{p}_{-1} = \vec{p}_0 \text{ bzw. } \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 8 & 14 & 3 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit 20 ergibt das folgende Lineare Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 2 & 1 & 8400 \\ 8 & 14 & 3 & 50400 \\ 1 & 4 & 16 & 25200 \end{array}\right) \xrightarrow[-III+16\cdot I]{II-3\cdot I} \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 2 & 1 & 8400 \\ -25 & 8 & 0 & 25200 \\ 175 & 28 & 0 & 109200 \end{array}\right) \xrightarrow[III+7\cdot II]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 2 & 1 & 8400 \\ -25 & 8 & 0 & 25200 \\ 0 & 84 & 0 & 285600 \end{array}\right) \quad \begin{array}{r} x_1, x_2 \text{ eingesetzt } \Rightarrow x_3 = 720 \\ x_2 \text{ eingesetzt liefert } x_1 = 80 \\ \text{Division durch } 84 \Rightarrow x_2 = 3400 \end{array}$$

Damit gilt für die Einkommensverteilung der Elterngeneration der ersten Gruppe, vorausgesetzt das obige Modell trifft auch hier noch zu:

$\vec{p}_{-1} = (80|3400|720)$

Ein zweiter Lösungsweg ist über die Inverse der Populationsmatrix möglich.

</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

Die Übergangsfaktoren der Familien aus der Einkommensgruppe h müssen gegenüber der vorherigen Matrix halbiert werden; die Übergangsfaktoren der Familien aus der Einkommensgruppe n müssen gegenüber der vorherigen Matrix mit $\frac{3}{2}$ multipliziert werden. Also wird die erste Spalte der ursprünglichen Übergangsmatrix durch zwei geteilt und die dritte Spalte mit $\frac{3}{2}$ multipliziert.

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>$$P_{Mod} = \begin{pmatrix} \frac{11}{40} & \frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & \frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>$$\vec{p}_{Mod1} = P_{Mod} \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} \frac{11}{40} & \frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & \frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 420 \\ 2520 \\ 1260 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 462 \\ 2131{,}5 \\ 2026{,}5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 462 \\ 2132 \\ 2027 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{p}_{Mod2} = P_{Mod} \cdot \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{11}{40} & \frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & \frac{9}{40} \\ \frac{1}{40} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 462 \\ 2132 \\ 2027 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 492{,}275 \\ 2040{,}875 \\ 2870{,}35 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 492 \\ 2041 \\ 2870 \end{pmatrix}$$

Da in der Realität keine Bruchteile von Familien vorkommen, muss hier im Kontext der Aufgabenstellung gerundet werden. Dabei ist auch konsequentes Abrunden sinnvoll.

Da bei dem ursprünglichen Modell aus jedem Elternpaar wieder ein Kinderpaar, aus jedem Kinderpaar wieder ein Elternpaar entsteht usw., bleibt in diesem Modell die Gesamtzahl der Familien von Generation zu Generation konstant.

Dagegen steigt die Gesamtzahl der Familien in dem modifizierten Modell von Generation zu Generation an, weil die Anzahl der Kinder in der größeren Gruppe n der Familien mit niedrigem Einkommen von zwei auf drei gestiegen ist, während die Anzahl der Kinder in der kleineren Gruppe h der Familien mit hohem Einkommen von zwei auf eins gesunken ist.</td><td>10</td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Ermitteln von A^2 und A^3:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix}$$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Also: $A^3 = E$, wenn gilt: $a \cdot b \cdot c = 1$. Die Matrix A^2 ist in diesem Fall gleich der zu A inversen Matrix.		10	5
g)	Für die Entwicklung der Population bedeutet dieses Phänomen, dass sich in einem Zyklus von drei Jahren stets wieder die Ausgangspopulation einstellt.			5
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 4 „Handygefahren“

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	• $P(A) = p^2 \cdot (1-p)^8$, da die Einzelereignisse unabhängig sind. • Es gibt $\binom{6}{2}$ Möglichkeiten für die telefonierenden Fahrer. Daher gilt: $P(B) = \binom{6}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^8 = 15 \cdot p^2 \cdot (1-p)^8$ bzw. $P(B) = (1-p)^4 \cdot B(6, p, 2)$.	10		
b)	• Es ist die Gleichung $(1-p)^{100} = 0{,}05$ zu lösen, also $p = 1 - 0{,}05^{\frac{1}{100}} \approx 0{,}0295 = 3\,\%$ Der Anteil der telefonierenden Fahrer muss über 3% liegen. Man kann den Lösungsweg auch formaler beschreiben: Ist X die Zufallsgröße „Anzahl der telefonierenden Fahrer“, so ist X binomialverteilt. Daher gilt: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^{100} > 0{,}95 \Leftrightarrow (1-p)^{100} < 0{,}05 \Leftrightarrow$ $(1-p) < \sqrt[100]{0{,}05} \Leftrightarrow p > 1 - \sqrt[100]{0{,}05} \approx 0{,}0295$ Im ersten Fall muss der Anteil der telefonierenden Fahrer über 3% liegen. • Es ist die Gleichung $0{,}97^n = 0{,}2$ (0 < p < 1) zu lösen, also $n = \frac{ln\,0{,}2}{ln\,0{,}97} \approx 52{,}8$ Es müssen also mindestens 53 Autos kontrolliert werden.	5	15	
c)	• $P(\text{"beim sechsten Auto"}) = 0{,}8^5 \cdot 0{,}2 \approx 6{,}55\%$, • $P(\text{"beim zehnten Auto"}) = 0{,}8^9 \cdot 0{,}2 \approx 2{,}68\%$, • $P(\text{"nach dem zehnten Auto"}) = 0{,}8^{10} \approx 10{,}74\%$,			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

- Es ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

k	**P(X = k)**
1	0,2
2	$0{,}2 \cdot 0{,}8$
3	$0{,}2 \cdot 0{,}8^2$
4	$0{,}2 \cdot 0{,}8^3$
⋮	⋮

Die Anzahl *N* der Kontrollen, bis die Polizisten zum ersten Mal einen Telefonierer erwischen, ist eine Zufallsvariable. Die Behauptung des Polizisten kann dann präzisiert werden zu $E(N) = 5$.

Weg (1):

$E(N) =$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^{k-1} = 0{,}2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 0{,}8^{k-1} = 0{,}2 \cdot \frac{1}{(1-0{,}8)^2} = 5$$

Der Erwartungswert für die Anzahl der zu kontrollierenden Autos, bis man erstmals einen Telefonierer erwischt, beträgt also tatsächlich 5.

Weg (2): Es sei $e = E(N)$ der zu berechnende Erwartungswert. Die gemachte Beobachtung kann wie folgt in eine lineare Gleichung übersetzt werden: $e = 1 \cdot 0{,}2 + (1+e) \cdot 0{,}8$ mit der Lösung $e = 5$

	I	II	III
Bewertung	10	10	5

d) Es sei *X* die Anzahl der Telefonierer, die die Kontrolle passieren.

Nullhypothese H_0: „Der Anteil der Telefonierer beträgt höchstens 15%“. Fehler 1. Art: H_0 wird verworfen, obwohl richtig. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler soll höchstens 5% betragen. Ist *k* die Anzahl der telefonierenden Fahrer, die man mindestens beobachten muss, so soll also gelten

$P(X \geq k \mid H_0) \leq 5\%$ und $P(X \geq k-1 \mid H_0) > 5\%$. Dies ist äquivalent zu:

$P(X \leq k-1 \mid H_0) \geq 95\%$ und $P(X \leq k-2 \mid H_0) < 95\%$,

bei Approximation durch die Normalverteilung löst man die Gleichung

$\Phi\left(\frac{k-149{,}5}{\sqrt{127{,}5}}\right) = 0{,}95$. Es folgt: $\frac{k-149{,}5}{\sqrt{127{,}5}} = 1{,}645$

$\Leftrightarrow k \approx 169$.

Die Polizisten müssen im Rahmen der hier entwickelten Logik also mindestens 169 Telefonierer beobachten, um (bei Signifikanzniveau von 5 %) gute Argumente für verstärkte Kontrollen zu haben.

	I	II	III
Bewertung d)		15	5

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>
Es sei
T das Ereignis: „Der Autofahrer telefoniert zum Zeitpunkt der Kontrolle“
W das Ereignis „Der Autofahrer ist Wenigtelefonierer“. $P(W) = 7\%$
N das Ereignis „Der Autofahrer ist Normaltelefonierer“. $P(N) = 10\%$
V das Ereignis „Der Autofahrer ist Vieltelefonierer“. $P(V) = 2\%$
D das Ereignis „Der Autofahrer ist Dauertelefonierer“. $P(D) = 1\%$
H das Ereignis „Der Autofahrer ist Telefonierer“. $P(H) = 20\%$

• Da der Autofahrer als Wenigtelefonierer durchschnittlich 5 Minuten pro Stunde telefoniert, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass er gerade zum Zeitpunkt der Kontrolle telefoniert: $P(T\mid W) = \frac{5}{60} = \frac{1}{12} \approx 8{,}33\%$.

• Mit dem Satz über die totale Wahrscheinlichkeit oder mit Hilfe eines Baumdiagramms erhält man:
$P(T) = P(W)\cdot P(T\mid W) + P(N)\cdot P(T\mid N) + P(V)\cdot P(T\mid V) + P(D)\cdot P(T\mid D)$
$= \frac{7}{100}\cdot\frac{1}{12} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{50}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{100}\cdot\frac{1}{2} = \frac{13}{400} \approx 3{,}3\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Autofahrer gerade telefoniert, beträgt ungefähr 3 %.

• Gesucht ist $P(T|H)$. Es gilt:
$P(T|H) = \frac{P(T\cap H)}{P(H)} = \frac{P(T)}{P(H)} = \frac{\frac{13}{400}}{\frac{1}{5}} = \frac{13}{80} \approx 16\ \%.$
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Telefonierer erwischt wird, beträgt also ca. 16 %.

• Es ist $P(W|T)$ zu bestimmen. Dies kann entweder mit dem Satz von Bayes geschehen oder unter Verwendung des vorvoriger Ergebnisses (, das gerade der „Bayes-Nenner“ ist):
$P(W\mid T) = \frac{P(W)\cdot P(T\mid W)}{P(T)} = \frac{\frac{7}{100}\cdot\frac{1}{12}}{\frac{13}{400}} = \frac{7}{39} \approx 18\ \%$
Die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei einer erwischten Person um einen Wenigtelefonierer handelt, liegt bei 18 % .
</td><td></td><td>15</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

Aufgabe 5 Qualitätssicherung

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	• Es handelt sich um eine Binomialverteilung (ein Bauteil ist entweder defekt oder nicht defekt). Mit $p = 0{,}14$ und $q = 1 - p = 0{,}86$ ergibt sich nach der Formel von Bernoulli $P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$ $= \binom{6}{0} \cdot 0{,}14^0 \cdot 0{,}86^6 + \binom{6}{1} \cdot 0{,}14^1 \cdot 0{,}86^5 \approx 0{,}7997 \approx 80\,\%$. • Wenn n der Umfang der Stichprobe ist, so gilt $P(X \ge 1) > 0{,}99$. $\Leftrightarrow 1 - P(X = 0) > 0{,}99$ $\Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}14^0 \cdot 0{,}86^n > 0{,}99$ $\Leftrightarrow 1 - 0{,}86^n > 0{,}99$ $\Leftrightarrow 0{,}86^n < 0{,}01$ $\Leftrightarrow n \cdot \log 0{,}86 < \log 0{,}01$ $\Leftrightarrow n > \frac{\log 0{,}01}{\log 0{,}86}$ $\Rightarrow n > 30{,}533...$ Man muss mindestens 31 Bauteile entnehmen.	15		
b)	Es bedeutet A: ein Bauteil ist defekt. Es bedeutet B: das Prüfgerät zeigt einen Defekt an. Die Situation kann in einem Baumdiagramm veranschaulicht werden: $P(\text{"Richtige Entscheidung"}) = P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B} \mid \overline{A})$ $= 0{,}14 \cdot 0{,}95 + 0{,}86 \cdot 0{,}98$ $\approx 0{,}9758$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also größer als 97 %. (q.e.d.). Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B)$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	Nach dem Satz von Bayes gilt: $$P(A\mid B)=\frac{P(A)\cdot P(B\mid A)}{P(A)\cdot P(B\mid A)+P(\overline{A})\cdot P(B\mid\overline{A})}$$ $$=\frac{0{,}14\cdot 0{,}95}{0{,}14\cdot 0{,}95+0{,}86\cdot 0{,}02}\approx 0{,}8855.$$ Das Ergebnis ist nur begrenzt zufriedenstellend, da bei über 11 % der Fälle, in denen das Gerät ein defektes Gerät anzeigt, dies ein „Fehlalarm“ ist.	10	5	
c)	Wenn die Gruppenuntersuchung von 10 Bauteilen keinen Defekt anzeigt, sind diese Bauteile alle in Ordnung, und es bleibt bei dieser einen Untersuchung. Die entsprechende Wahrscheinlichkeit beträgt $P(1)=0{,}86^{10}$. Wenn bei der Gruppenuntersuchung eine Defektanzeige erfolgt, ist jedes Bauteil zu prüfen. In diesem Fall finden 11 Prüfungen statt. Die entsprechende Wahrscheinlichkeit beträgt dann $1-0{,}86^{10}$. Für den Erwartungswert ergibt sich für $n=10$: $E(10)=1\cdot 0{,}86^{10}+11\cdot\left(1-0{,}86^{10}\right)=11-10\cdot 0{,}86^{10}=8{,}7870$.		10	
d)	Für die Erwartungswerte der Anzahl der erforderlichen Prüfungen ergeben sich folgende Werte: $n=7$: $E(7)=1\cdot 0{,}86^{7}+8\cdot\left(1-0{,}86^{7}\right)=8-7\cdot 0{,}86^{7}=5{,}56$ $n=13$: $E(13)=1\cdot 0{,}86^{13}+14\cdot\left(1-0{,}86^{13}\right)=14-13\cdot 0{,}8613^{13}=12{,}13$. Daraus ergeben sich die zu erwartenden relativen Einsparungen *R*(*n*) pro Gerät $n=7$: $R(7)=\frac{7-8+7\cdot 0{,}86^{7}}{7}=\frac{7\cdot 0{,}86^{7}-1}{7}\approx 0{,}2051=20{,}51\%$. $n=13$: $R(13)=\frac{13-14+13\cdot 0{,}8613^{13}}{13}=\frac{13\cdot 0{,}8613^{13}-1}{13}\approx 0{,}0638=6{,}38\%$. Nähert sich *n* dem Wert 1, müssen die Einsparungen gegen Null gehen. Für ein allgemeines *n* gilt für die zu erwartende Anzahl der Prüfungen $E(n)$: $E(n)=0{,}86^{n}+(n+1)\cdot\left(1-0{,}86^{n}\right)$ $=0{,}86^{n}+n+1-(n+1)\cdot 0{,}86^{n}$ $=n+1-n\cdot 0{,}86^{n}$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III

Somit ergibt sich:

$$R(n)=\frac{n-E(n)}{n}=\frac{n-\left(n+1-n\cdot 0{,}86^{n}\right)}{n}=\frac{-1+n\cdot 0{,}86^{n}}{n}=0{,}86^{n}-\frac{1}{n}.$$

Für $n=1$ liegt ein Sonderfall vor: Gesamtprüfung und Einzelprüfung fallen zusammen.

Die Auswertung der Funktion R in einer Tabelle liefert:

n	1	2	3	4	5	6	7
Einsparung [%]	0	24	30,3	29,7	27	24	21

Man erkennt, dass das Optimum bei n = 3 liegt.

Die Nullstellen der Ableitung liegen bei etwa 3,3 und 34,36. Daraus folgt, dass die Funktion rechts von n= 4 nicht streng monoton fällt.

I	II	III
	10	10

e) Bei den verlangten Rechnungen wird mit den folgenden Parametern gearbeitet:

$n=1000;\quad p=0{,}003$

$E(x)=\mu=n\cdot p=3$

$\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}=\sqrt{3\cdot 0{,}997}=1{,}7295.$

Die Näherungsformel von Moivre/Laplace ist erst brauchbar, wenn $\sigma>3$ (Laplace-Bedingung).

Die Näherungsformel von Poisson liefert dagegen:

$$P(X>7)=1-P(X\le 7)=1-0{,}9881=0{,}0119=1{,}19\,\%.$$

Bei der Approximation nach der Näherungsformel von Poisson sind die Voraussetzungen für eine sehr gute Näherung gegeben:

$n=1000$ ist sehr groß und $p=0{,}003$ sehr klein.

I	II	III
	15	5

f) Mit den Parametern $n=1040$, $p=0{,}0118$ und 1000 € Entschädigung pro Lieferung ergibt sich folgender Erwartungswert:

$$E=1040\cdot 0{,}0118\cdot 1000\,€=12272\,€.$$

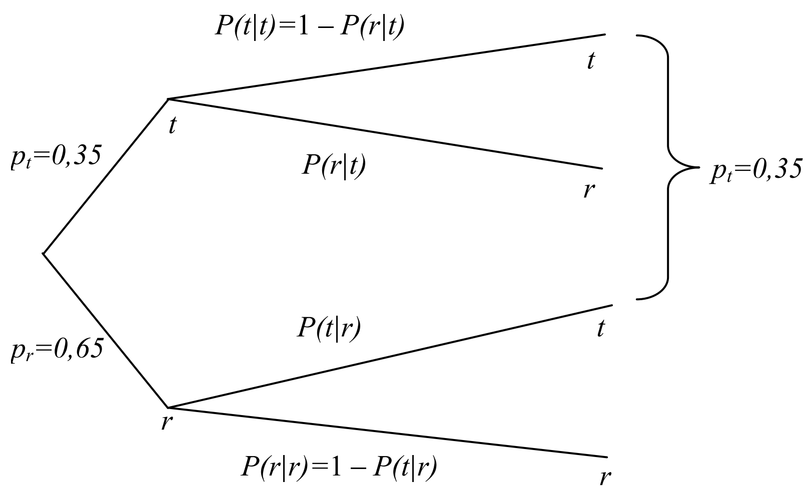
I	II	III
	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
g)	Das Entschädigungsmodell „7+“ weist gegenüber dem Einzel-Entschädigungsverfahren folgende Nachteile auf: 1. Für weniger als 8 beschädigte Bauteile gibt es gar keine Entschädigung. 2. Von einer bestimmten Anzahl beschädigter Bauteile an wird die Pauschalzahlung geringer ausfallen als die Summe möglicher einzelner Entschädigungen. Sei E_1 die erwartete Entschädigungszahlung pro Lieferung. Dann gilt: $E_1 = 0{,}0118 \cdot 1000\ € = 11{,}80€$. Pro Lieferung werden andererseits $n_1 = 1000 \cdot 0{,}003 = 3$ beschädigte Bauteile erwartet. Daraus ergibt sich eine Entschädigung von $\frac{11{,}8}{3}\ € \approx 3{,}93\ €$ pro beschädigtem Bauteil.			10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

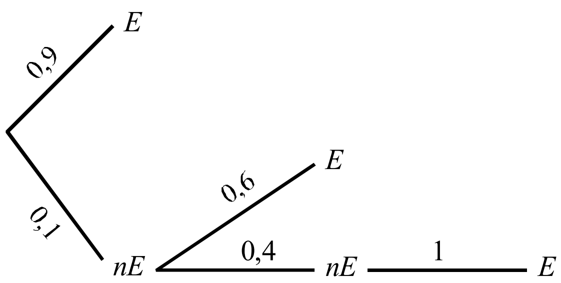
Aufgabe 6 Wetter auf den Färöer-Inseln

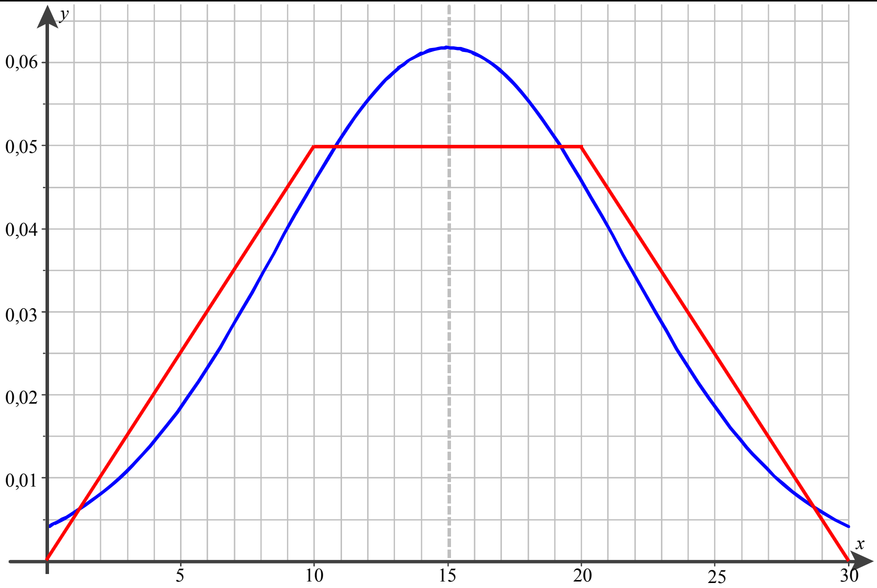
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Da zunächst nur die *Änderungswahrscheinlichkeit* $P_{\text{Änd}}$ bekannt und gegeben ist, kann man (anfangs) davon ausgehen, dass an jeder Periodengrenze ein Wechsel mit eben dieser Wahrscheinlichkeit eintritt. Das Wetter hat zwei Zustände, damit gibt es zwei Möglichkeiten an den Periodengrenzen: Das Wetter ändert sich, oder es ändert sich nicht. Zwei Tage Beobachtung bedeuten Beobachtung über acht Perioden und damit über sieben mögliche Wechsel hinweg.	5		
b)	• „Das Wetter bleibt für einen ganzen Tag gleich“ bedeutet: Das Wetter ändert sich an den drei Übergängen zwischen den vier Perioden jeweils nicht. Also $p_1 = (1-0{,}38)^3 \approx 0{,}2383$. • Die Zusatzinformation „Anfangs war es trocken“ ändert die Wechselwahrscheinlichkeit nicht, deswegen ist $p_2 = (1-0{,}38)^2 \approx 0{,}3844$. • Bei drei Periodenübergängen tritt jeweils ein Wechsel ein, also $p_3 = 0{,}38^3 \approx 0{,}0549$. • Der Text legt die Wetterverteilung „regnerisch – trocken – trocken“ nahe. Damit ist die Wahrscheinlichkeit $p_4 = 0{,}38 \cdot (1-0{,}38) = 0{,}2356$.	15		

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
c)	• Zwischen „Jetzt“ und „18 Stunden später“ liegen drei Übergänge. Dass es gerade „regnerisch“ ist, spielt keine Rolle; da insgesamt kein Wechsel eintreten soll, müssen entweder kein oder zwei Übergänge mit Wechseln verbunden sein. Da diese Ereignisse sich ausschließen, ist $p_{c1} = 0,62^3 + 3\cdot 0,62\cdot 0,38^2 \approx 0,5069$. • Hier ist nach der Gegenwahrscheinlichkeit gefragt – denn wenn es nicht „regnerisch“ ist, ist es „trocken“. Ebenso möglich: Von den drei Übergängen müssen jetzt einer oder drei mit Wechseln verbunden sein. Also ist $p_{c2} = 0,38^3 + 3\cdot 0,38\cdot 0,62^2 \approx 0,4931$. • Analog: Bei gleichem End-Typ und vier Übergängen kann es keinen, zwei oder vier Wechsel geben. Also ergibt sich $p_{c3} = 0,62^4 + 6\cdot 0,62^2\cdot 0,38^2 + 0,38^4 \approx 0,5017$. Der andere End-Typ tritt dann mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_{c4} = 1 - p_{c3} \approx 0,4983$ ein.	5	10	
d)	Um *k(n)* zu bestimmen, muss eine Teil-Summe der Binomial-Wahrscheinlichkeiten gebildet werden: Der gleiche End-Typ tritt dann auf, wenn eine gerade Anzahl von Wetteränderungen eingetreten ist. Daher sind nur die Summanden mit dem Faktor $P_{Änd}{}^{2i}$ zu betrachten, also die Summanden $\binom{n}{2i}\cdot P_{Änd}{}^{2i}\cdot\left(1-P_{Änd}\right)^{(n-2i)}$. Daher kann der Laufindex *i* nur Werte von 0 bis $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ annehmen. Es ergeben sich folgende Werte: $k(1) = 0,62$ $k(2) = 0,62^2 + 0,38^2 = 0,5288$ $k(3) = p_{c1} \approx 0,5069$ $k(4) = p_{c3} \approx 0,5017$ $k(5) \approx 0,5004$ $k(6) \approx 0,5001$ Eine sinnvolle Prognose über mehr als einen halben Tag ist nicht möglich, da bereits bei drei Übergängen die möglichen Zustände jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 50 % eintreten.		15	5
e)	Grundsätzlich ist die Änderungswahrscheinlichkeit die Wahrscheinlichkeit der beiden Wege, die zum Ereignis „Typ ändert sich“ gehören (also die Periodenfolgen TR und RT). Es gibt vier mögliche Periodenfolgen: TT, RR, RT und TR. Ihre Wahrscheinlichkeiten bei Unabhängigkeit wären $p_{TT} = 0,35^2 = 0,1225$, $p_{RR} = 0,65^2 = 0,4225$, $p_{TR} = p_{RT} = 0,35\cdot 0,65 = 0,2275$. Damit ist bei Unabhängigkeit $P_{Änd,unabh.} = 0,455$. Da das gemessene $P_{Änd}$ deutlich geringer ist, folgt, dass die Annahme der Unabhängigkeit des Wetterwechsels vom Wetterzustand nicht erfüllt sein kann.		20	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Die Wettersituation wird durch folgendes Baumdiagramm beschrieben:  Hieraus ergeben sich die beiden Formen der Gleichung (1), z.B. aus dem dargestellten Diagramm: Die Summenwahrscheinlichkeit der beiden Pfade, die auf „*t*“ enden, ist $p_t = 0{,}35$. Sie ergibt sich als Summe der Wahrscheinlichkeiten auf den Wegen, also (1) $0{,}35\cdot\left(1-P(r\mid t)\right)+0{,}65\cdot P(t\mid r)=0{,}35$. Die Gleichung (2) sagt, dass $P_{\text{Änd}}$ das gewichtete Mittel der beiden bedingten Änderungswahrscheinlichkeiten sein muss. Die Lösung dieses Gleichungssystems (1) $0{,}35\cdot\left(1-P(r\mid t)\right)+0{,}65\cdot P(t\mid r)=0{,}35$ (2) $0{,}65\cdot P(t\mid r)+0{,}35\cdot P(r\mid t)=0{,}38$ ist – z.B. nach Einsetzen – $P(t\mid r)\approx 0{,}2923,\ P(r\mid t)\approx 0{,}5486$. Mit der Änderung von (2) ergibt sich $P(t\mid r)=0{,}35,\ P(r\mid t)=0{,}65$. Dieses Ergebnis kann durch Lösung des entsprechenden Gleichungssystems erzielt werden – oder z.B. aus der Überlegung, dass bei vorausgesetzter Unabhängigkeit $P(r\mid t)=p_r$ und $P(t\mid r)=p_t$ gilt. *Das ist die Überlegung aus Aufgabenteil e).*		10	15
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Aufgabe 7 Flughafen

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	 II	 III
a)	Die gegebenen Größen führen auf die Gleichung $1 - p^2 = 0{,}90$ und damit $p = 0{,}3162$. 31,6 % aller Gepäckstücke am Hamburger Flughafen haben den Zielflughafen Frankfurt.	15		
b)	Für die Lösung empfiehlt sich ein Baumdiagramm (*E* bedeute, dass die Kontrolle eindeutig sein, *nE* das Gegenteil): Kontrolle 1 Kontrolle 2 Kontrolle 3  Wahrscheinlichkeit Zeit 0,9 10 s 0,06 50 s 0,04 380 s Hieraus ergibt sich ein Erwartungswert von 27,2 Sekunden, die also durchschnittlich für die Kontrolle eines Handgepäckstückes zu veranschlagen sind.		20	5
c)	Für die Normalverteilung einer stetigen Größe gilt: $P(14 \le X \le 16) = \Phi\left(\frac{16-15}{6{,}45}\right) - \Phi\left(\frac{14-15}{6{,}45}\right) = 2\cdot\Phi(0{,}155) - 1 \approx 12{,}3\%$. Also hat ein zufällig herausgegriffenes Gepäckstück ein Gewicht von mindestens 14 kg und höchstens 16 kg mit einer Wahrscheinlichkeit von 12,3 %.		15	
d)	Die Funktionswerte von f sind alle nichtnegativ. Es bleibt die Normierung zu überprüfen: Eine (umständliche) Möglichkeit wäre hier die Integration. Eine andere Möglichkeit ist die elementargeometrische Berechnung des Flächeninhalts zwischen dem Graphen von f und der x-Achse: Die Trapezfläche hat den Inhalt 1, also handelt es sich um eine Dichte einer Verteilungsfunktion.	5	15	
e)	Aus Symmetriegründen erkennt man sofort, dass der gesuchte Erwartungswert 15 kg ist. *Auch die weniger elegante direkte Berechnung des Erwartungswerts ist erlaubt.*		10	
f)	Das Rechteck, dessen Flächeninhalt der gesuchten Wahrscheinlichkeit entspricht, hat die Breite 2 und die Höhe 0,05. Also hat in diesem Modell ein zufällig herausgegriffenes Gepäckstück ein Gewicht von mindestens 14 kg und höchstens 16 kg mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 %. Diese geringere Wahrscheinlichkeit erklärt sich durch die größeren Werte (größere Dichte) der Normalverteilung in der Nähe des Mittelwertes 15, wie der Vergleich der beiden Wahrscheinlichkeitsfunktionen zeigt:			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
				15
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 8 Fahrtstrecke

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Nach dem Aufgabentext ist $\mu = 2{,}5$ und $\sigma = 0{,}25$. Gesucht ist die Zeit t für die Fahrt, die in 95 % der Fälle ausreicht: $P(t \le X) \ge 0{,}95 \Rightarrow \Phi(1{,}65) = \Phi\left(\frac{t-2{,}5}{0{,}25}\right) \Rightarrow t - 2{,}5 = 1{,}65 \cdot 0{,}25 = 0{,}4125$. also $t = 2{,}9125$. Das sind auf Minuten gerundet 2 Stunden und 55 Minuten. Der Fahrer muss also um 5.35 Uhr losfahren. *Lösung auch mit σ-Regeln möglich:* Im Intervall $[\mu - 1{,}64\sigma\ ;\ \mu + 1{,}64\sigma]$ liegen 90 % aller Zeiten, aus Symmetriegründen liegen dann 5 % der größten Zeiten oberhalb von $\mu + 1{,}64\sigma \Rightarrow$ $\mu + 1{,}64\sigma = 2{,}5 + 0{,}41 = 2{,}91$. Das ist auf Minuten gerundet dasselbe Ergebnis wie oben.	15		

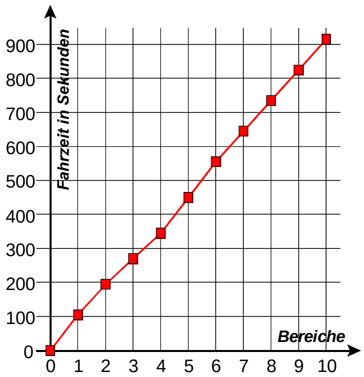
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

b) Zuordnung der Fahrzeit t zur Zufallszahl z:

$t = 75$ für $0 \le z < 0{,}2$, $t = 90$ für $0{,}2 \le z < 0{,}8$ und $t = 105$ für $0{,}8 \le z < 1$.

Es gibt weitere Zuordnungsmöglichkeiten.

Simulation der Fahrt:



Bereich	Zufallszahl	Fahrzeit (Sekunden)	
1	0,83962	**+ 105**	105
2	0,35849	**+ 90**	195
3	0,08903	**+ 75**	270
4	0,05793	**+ 75**	345
5	0,96942	**+ 105**	450
6	0,95658	**+ 105**	555
7	0,46987	**+ 90**	645
8	0,27525	**+ 90**	735
9	0,65613	**+ 90**	825
10	0,52743	**+ 90**	915

Die Fahrzeit für diese Simulation beträgt 915 s.

(Zufallszahlen: Zeile 5 aus Cornelsen, das große Tafelwerk, S. 51)

Die jeweilige Aufsummierung der Zeiten ist nicht zwingend, Grafik wird nicht erwartet.

Beschreibung des Gesamtmodells:
Das Modell basiert auf unabhängigen Zufallsgrößen, die identisch verteilt sind. Sie können in der oben beschriebenen Weise die drei Werte 75, 90 und 105 annehmen. Sie werden zur Ermittlung der Fahrzeit aufaddiert:
Fahrt in ersten 10 Bereichen: $F_1 = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$ (s.o.),
Gesamtfahrt: $F_{gesamt} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$.
Die obige Grafik macht deutlich, dass man dieses Modell als Zufallspfad deuten kann, also als Random Walk.

Bewertung: I: – | II: 15 | III: 10

c) Berechnung der Standardabweichung für diesen Fall:

$\mu = 126$ ist gegeben.

$$P(X \le 137) = 1 - 0{,}13 = 0{,}87 \Rightarrow \Phi(1{,}13) = \Phi\left(\frac{137-126}{\sigma}\right) \Rightarrow \sigma \approx \frac{11}{1{,}13} \approx 9{,}75\,.$$

Berechnung der Prozentzahl der „korrekten“ Autofahrer:

$$P(X \le 120) = \Phi\left(\frac{120-126}{9{,}75}\right) \approx \Phi(0{,}6154) \approx 0{,}29\,.$$

Es halten sich ca. 29 % der Autofahrer an die Vorschriften (und fahren nicht zu schnell).

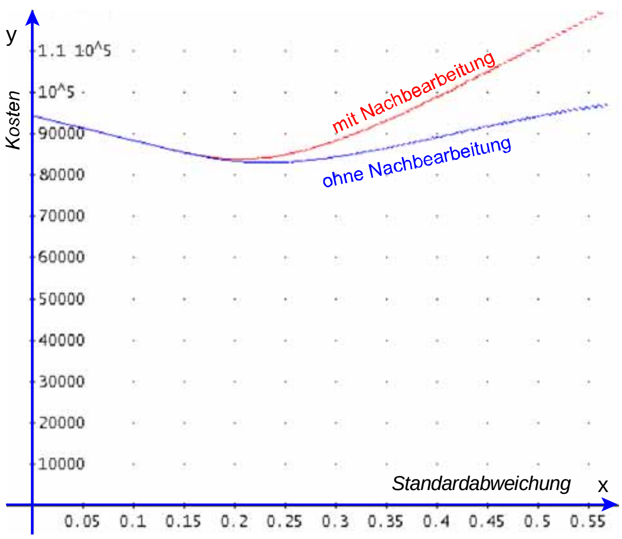
Bewertung: I: – | II: 20 | III: –

d) Kurve:
Änderung von μ verschiebt Kurve in x-Richtung:
μ vergrößern $\Rightarrow$ Verschiebung nach rechts,
μ verkleinern $\Rightarrow$ Verschiebung nach links
Änderung von σ verändert Höhe und Weite der Kurve:
σ vergrößern $\Rightarrow$ Kurve wird flacher und läuft weiter

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	σ verkleinern $\Rightarrow$ Kurve wird steiler und liegt näher an der y-Achse *(Siehe σ-Regeln, Flächenmaß bleibt unverändert)* Kontext von Aufgabenteil a) Verschiebung des Mittelwertes verändert die nötige Abfahrtszeit: μ verkleinern bedeutet entsprechende kürzere (mittlere) Fahrzeit, also kann der LKW entsprechend später losfahren. μ vergrößern bedeutet analog früheres Losfahren des LKW. σ verkleinern heißt weniger Zeitzugabe, σ vergrößern heißt mehr Zeitzugabe (bezogen auf gegebenes μ) Kontext von Aufgabenteil c) μ verkleinern bedeutet, dass in dem Modell dann weniger Autofahrer 137 km/h überschreiten. μ vergrößern bedeutet analog, dass dann mehr Autofahrer 137 km/h überschreiten (so lange μ nicht wesentlich größer als 137 km/h ist, was der Sachkontext ausschließt). σ verkleinern heißt (bezogen auf gegebenes μ), dass dann weniger Autofahrer 137 km/h überschreiten können, σ vergrößern: umgekehrt. Ändern von μ und σ bedeutete entsprechende Kombinationen.	5	10	10
e)	Zentraler Grenzwertsatz X_i seien (identisch verteilte und) unabhängige Zufallsgrößen. Dann nähert sich die Verteilung der Zufallsgröße $X = X_1 + ... + X_n$ für wachsendes n einer Normalverteilung. *Der Zentrale Grenzwertsatz kann salopp auch so formuliert werden:* Eine Variable, die vielen kleinen, voneinander unabhängigen Zufallswirkungen unterliegt, ist normalverteilt *(nach mathe online)*. *Es gibt natürlich noch viele weitere Formulierungsmöglichkeiten.* Bedeutung *Die „saloppe“ Formulierung enthält bereits die Bedeutung.* Der Satz rechtfertigt für viele Untersuchungen die Annahme der Normalverteilung, z.B. bei Teil a). *Siehe dazu auch b): Eine Simulation mit einer Tabellenkalkulation zeigt dann näherungsweise Normalverteilung.*		15	
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 9 Motorenhersteller

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Zufallsgröße Kolbendurchmesser ist normalverteilt mit dem Mittelwert $\mu = 88{,}90$ und der Streuung $\sigma = 0{,}57$. In folgendem Intervall soll der Kolbendurchmesser sich bewegen: $[88{,}4\,;\,89{,}4]$. Die Anzahl der ohne Nacharbeit brauchbaren Kolben beträgt: $n_{oN} = P(88{,}4 \le d_{Kolben} \le 89{,}4) \cdot 1\,000 = P([88{,}4;\,89{,}4]) \cdot 1\,000$ $= \left(\Phi\left(\frac{89{,}4-88{,}9}{0{,}57}\right) - \Phi\left(\frac{88{,}4-88{,}9}{0{,}57}\right)\right) \cdot 1\,000 = 621$ *Werte mit Tafelwerk berechnet.*		15	
b)	Der Anteil der ohne und mit Nacharbeit brauchbaren Kolben ergibt sich zu: $P(88{,}4 \le d_{Kolben} \le (89{,}4+0{,}4)) = P([88{,}4;\,89{,}8])$ $= \left(\Phi\left(\frac{89{,}8-88{,}9}{0{,}57}\right) - \Phi\left(\frac{88{,}4-88{,}9}{0{,}57}\right)\right) = 0{,}7535$ Zwischen der Liefermenge und der ohne und mit Nacharbeit brauchbaren Kolben besteht der Zusammenhang $n_{Liefer} \cdot P([88{,}4;\,89{,}8]) = n_{o/mN}$. Daraus folgt die Liefermenge: $n_{Liefer} = \frac{n_{o/mN}}{P([88{,}4;\,89{,}8])} = \frac{1000}{0{,}7535} = 1\,327$.	15		
c)	Die Gesamtkosten für die Kolben ergeben sich aus dem Preis, den Kosten für die Nacharbeit und den Transportkosten: $K_{ges} = K_P + K_N + K_T$ $= n_{Liefer} \cdot k_P + n_{mN} \cdot k_N + K_T$ <u>1. Fall: ohne Nacharbeit</u> $n_{Liefer} = \frac{1\,000}{P([88{,}4;\,89{,}4])} = 1\,610$ $K_{ges} = 1\,610 \cdot 60 + 0 \cdot 80 + 130 = 96\,730$ <u>2. Fall: mit Nacharbeit</u> Es müssen 1 327 Kolben bestellt bzw. geliefert werden (vgl. b). Davon sind 1000 im langfristigen Mittel brauchbar (ebenfalls nach b)). 62,1 % von den 1 327 Kolben sind im langfristigen Mittel gleich in Ordnung, müssen also nicht nachbearbeitet werden, das sind 824 Kolben. Also müssen 176 Kolben im langfristigen Mittel nachbearbeitet werden. Die erwarteten Kosten betragen also: $K_{ges} = 1327 \cdot 60 + 176 \cdot 80 + 130 = 93830$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Die Nacharbeit lohnt sich also, die Ersparnis beträgt im langfristigen Mittel 2 900 € . *Lösungsalternative (umständlicher): Man verwendet noch einmal die Normalverteilung und berechnet den erwarteten Anteil der nachzubearbeitenden Kolben durch* $P\left(89{,}4 < d_{Kolben} \le 89{,}8\right)$ *und kann daraus die erwarteten Nachbearbeitungskosten ausrechnen.*		30	
d)	$n(\sigma) = \dfrac{1\,000}{\Phi\left(\frac{89{,}8-88{,}9}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{88{,}4-88{,}9}{\sigma}\right)} = \dfrac{1\,000}{\Phi\left(\frac{0{,}9}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-0{,}5}{\sigma}\right)}$ $= \dfrac{1\,000}{\Phi\left(\frac{0{,}9}{\sigma}\right) - \left(1-\Phi\left(\frac{0{,}5}{\sigma}\right)\right)} = \dfrac{1\,000}{\Phi\left(\frac{0{,}9}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{0{,}5}{\sigma}\right) - 1}$ Die gesuchte Wahrscheinlichkeit heiße o. Dann ist analog $o(\sigma) = \Phi\left(\frac{0{,}5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-0{,}5}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{0{,}5}{\sigma}\right) - \left(1-\Phi\left(\frac{0{,}5}{\sigma}\right)\right) = 2\cdot\Phi\left(\frac{0{,}5}{\sigma}\right) - 1$		20	
e)	*Erwartet wird eine verbale oder formelmäßige Beschreibung zur Kostenberechnung in Abhängigkeit von der Standardabweichung σ, und zwar für beide in c) behandelten Fälle.* *Eine Berechnung wird nicht erwartet, wäre aber grundsätzlich mit den Beziehungen aus d) möglich.* Die Gesamtkosten verändern sich in folgender Weise in Abhängigkeit von der Standardabweichung, die im Folgenden als Variable x heißen soll: Kosten mit Nachbearbeitung (bei stetiger Preisentwicklung der Herstellungskosten): $K_1(x) = n(x)\cdot 60\cdot(1+0{,}57-x) + n(x)\cdot(1-o(x))\cdot 80 + 130$, Kosten ohne Nachbearbeitung $K_2(x) = \dfrac{1\,000}{o(x)}\cdot 60\cdot(1+0{,}57-x)+130$. Nun kann z.B. mit Hilfe einer Wertetabelle und der Graphen von K_1 und K_2 geklärt werden, ob die Kosten mit sinkender Standardabweichung ebenfalls sinken  und wie lange diese Tendenz anhält. Und es lässt sich so auch klären, ob die Kosten bei „ohne Nacharbeiten“ günstiger bleiben oder nicht. *Der Graph zeigt jeweils ein Sinken der Kosten bis zu etwa σ = 0,2 und die zu erwartende Gleichheit bei beiden Modellen mit fast 100%iger Qualität.* *Es wäre auch eine stückweise definierte Preisfunktion für die Herstellungskosten möglich.*			20
	Insgesamt 100 BWE	15	65	20

Aufgabe 10 Buchungsrisiken

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Es geht um die Frage der stochastischen Unabhängigkeit der einzelnen Absagen, die z.B. dann nicht gegeben ist, wenn durch Unwetter am Urlaubsort, durch eine ökonomische Krise oder durch eine Katastrophe in der Luftfahrt das Absageverhalten bestimmt wird; sie gilt auch dann nicht, wenn Familien oder Gruppen reisen, weil "menschliche Beziehungen" hier auch stochastische Abhängigkeiten verursachen. *Es wird von den Schülerinnen und Schülern eine „ergebnisoffene", zusammenhängende Darstellung erwartet.*	10	10	
b)	Dieser Aufgabenteil kann mit der oberen Zeile der anliegenden Tabelle leicht gelöst werden. Erwartet wird eine Erläuterung des Vorgehens. Die Ergebnisse: - P(„genau 5 Absagen") = $\binom{100}{5}\cdot 0{,}05^5\cdot 0{,}95^{95} \approx 18$ %. - P(„mindestens 3 Absagen") = $\sum_{k=3}^{100}\binom{100}{k}\cdot 0{,}05^k\cdot 0{,}95^{100-k}\approx 88{,}2$ %. - P(„höchstens 4 Absagen") = $\sum_{k=0}^{4}\binom{100}{k}\cdot 0{,}05^k\cdot 0{,}95^{100-k}\approx 43{,}6$ %. - P(„3 oder 4 Absagen") = $\binom{100}{3}\cdot 0{,}05^3\cdot 0{,}95^{97}+\binom{100}{4}\cdot 0{,}05^4\cdot 0{,}95^{96}\approx 31{,}8$ %.	15	5	
c)	Da in der Hauptsaison – wie dargestellt – die Nachfrage sehr groß ist, kann immer angenommen werden, dass die angebotenen Plätze auch gebucht werden. Die Absagen können wir unter den gleichen Annahmen wie in a) als $B_{n;0,5}$-verteilt ansehen, wobei n die Anzahl der angebotenen und damit auch gebuchten Plätze bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit, dass für $n = 102$ weniger als 2 Kunden absagen, ergibt sich als Summe der ersten 2 Zahlen in der Zeile für $n = 102$ aus der anliegenden Tabelle: $P \approx 3{,}4$ %.		15	
d)	Für den Erwartungswert der Stornokosten gilt: $E(\text{"Verlust"}) = 1200\cdot\sum_{k=101}^{102}(k-100)\cdot\binom{102}{k}\cdot 0{,}95^k\cdot 0{,}05^{(102-k)}$ € $\approx 47{,}25$ €. Für den Erwartungswert der im Sinne des Hinweises fiktiven Einnahmen gilt: $E(\text{"Einnahmen"}) = 200\cdot 102\cdot 0{,}95$ € = 19 380 €. Denn die Anzahl der Buchenden wird als $B_{n;0,95}$-binomialverteilt angenommen. Die Gewinnerwartung beträgt also 19 380 € – 47,25 € $\approx$ 19 333 €. Ohne Überbuchung wäre die Gewinnerwartung $200\cdot 100\cdot 0{,}95$ € = 19 000 €. Das Überbuchen lohnt sich also für das Reisebüro.		10	10

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
e)	Wir betrachten die Rechnung von d) als Funktion der angebotenen Plätze n $E(n) = 200 \cdot n \cdot 0{,}95 - 1200 \cdot \sum_{k=101}^{n} (k-100) \cdot \binom{n}{k} \cdot 0{,}95^k \cdot 0{,}05^{(n-k)}$ [€]. Wir erhalten (mit Hilfe des Anhangs) folgende Wertetabelle: n: 102 – 103 – 104 $E(n)$: 19 333 – 19 397 – 19 316 Aus dieser geht hervor, dass das Optimum bei n = 103 liegt.		15	10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

n	102	103	104
$E(n)$	19 333	19 397	19 316

Aufgabe 11 Bogenschießen

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Die Funktion ist auf dem angegebenen Intervall konstant und verhält sich für größere x wie gefordert. a muss größer als 0 sein, damit g nichtnegativ ist; die Größe von a wird durch die Normierung bestimmt: $\int_0^\infty g(x)dx = [ax]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}ax^{-3}\right]_1^\infty = a + \frac{1}{3}a = \frac{4}{3}a = 1$. Also muss a = 0,75 gelten.	5	15	
b)	Bei gegebener Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion g berechnen sich Erwartungswert und Streuung wie folgt: $E(X) = \int_0^\infty xg(x)dx = \int_0^1 ax\,dx + \int_1^\infty ax^{-3}dx = \left[\frac{1}{2}ax^2\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{2}ax^{-2}\right]_1^\infty = a = 0{,}75$. und $\sigma^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_0^1 ax^2dx + \int_1^\infty ax^{-2}dx - 0{,}75^2 = \left[\frac{1}{3}ax^3\right]_0^1 + \left[-ax^{-1}\right]_1^\infty - 0{,}75^2 = \frac{4}{3}a - 0{,}75^2 = 0{,}4375$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	also $\sigma(X)=\sqrt{0,4375}\approx 0,6614$		30	
c)	Die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet sich ebenfalls als Integral: $\int_2^\infty g(x)dx=\left[-\frac{1}{3}ax^{-3}\right]_2^\infty=\frac{1}{24}a=\frac{1}{32}$ Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schuss zufällig mehr als 2 Längeneinheiten daneben geht, beträgt also gut 3 %.	15		
d)	Aus Aufgabe c) ersieht man, dass Herbert bei jedem Schuss mit der Wahrscheinlichkeit 1 – 0,03125 = 0,96875 nichts zu lachen hat. Bei allen 4 Schüssen hat Herbert mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}96875^4 = 0{,}88$ keinen Anlass zu lachen, wenn man die Schüsse als unabhängig ansieht, was sicherlich berechtigt ist.		15	
e)	Die einzelnen Schüsse werden als Teil eines Bernoulli-Experiments angesehen und die Wahrscheinlichkeit für ein solch extremes Ergebnis berechnet: $\binom{4}{3}\left(\frac{1}{32}\right)^3\left(\frac{31}{32}\right)+\left(\frac{1}{32}\right)^4\approx 0,00012$. Da dieser Wert sehr klein ist, erscheinen Dieters Angaben recht unglaubwürdig. *(Der 2. Summand spielt hier keine Rolle und könnte auch weggelassen werden.)*			20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 12 Blutspenden

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Interessiert man sich nur für eine der Blutgruppen und ob ein Mensch diese Blutgruppe hat oder nicht (z. B. bei einer Bluttransfusion), so liegt ein Bernoulli-Experiment vor. Geht man zudem von einer großen Grundgesamtheit aus und wenig Personen, die zu einem Blutspendetermin erscheinen, kann die Tatsache, dass „nicht zurückgelegt wird“ (dass niemand mehrfach nacheinander Blut spenden darf), vernachlässigt werden. Bestehen zwischen den Blutgruppen der Spender keine Abhängigkeiten, so sind alle Voraussetzungen für eine Bernoulli-Kette erfüllt, X ist binomialverteilt. Die Blutgruppe eines Menschen ist durch die Blutgruppen seiner Vorfahren bestimmt. Kommen Familienangehörige gemeinsam zum Blutspenden, so liegt keine Unabhängigkeit vor, also auch keine Binomialverteilung.		15	
b)	Die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer in einer Bernoulli-Kette der Länge n beträgt: $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ $n = 100,\quad p = 0{,}11$:			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$P(X=11)=\binom{100}{11}\cdot 0{,}11^{11}\cdot 0{,}89^{89}\approx 0{,}127$. $n = 100,\ \ p = 0{,}01$: $P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=0{,}99^{100}+100\cdot 0{,}01\cdot 0{,}99^{99}\approx 0{,}736$. $n = 50,\ \ p=\frac{1}{3}$. Hierfür liegen Tabellen mit den kumulierten Werten vor: $P(X\ge 15)=1-P(X\le 14)\approx 1-0{,}2612\approx 0{,}739$. $n = 2500,\ \ p=\frac{1}{3}$: Da $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}=\sqrt{2500\cdot 0{,}\overline{3}\cdot 0{,}\overline{6}}=\sqrt{555{,}\overline{5}}>3$, kann die Binomialverteilung durch die Normalverteilung approximiert und die integrale Näherungsformel angewendet werden. $P(800\le X\le 900)\approx \Phi\left(\frac{900{,}5-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{799{,}5-\mu}{\sigma}\right)$ $=\Phi\left(\frac{900{,}5-833{,}\overline{3}}{\sqrt{555{,}\overline{5}}}\right)-\Phi\left(\frac{799{,}5-833{,}\overline{3}}{\sqrt{555{,}\overline{5}}}\right)$ $\approx\Phi(2{,}85)-\Phi(-1{,}44)=\Phi(2{,}85)-(1-\Phi(1{,}44))\approx 0{,}9978-0{,}0749\approx 0{,}923$. *In einigen Büchern wie auch in der genehmigten Tafel wird die Formel von Moivre-Laplace ohne die Korrektur mit 0,5 angegeben. Entsprechende Rechnungen sind natürlich auch als richtig anzusehen.*	15	10	
c)	Aus der Überlegung, dass „kein Spender“ das Gegenereignis von „mindestens ein Spender“ ist, ergibt sich der Ansatz: Gesucht ist das kleinste *n*, so dass gilt: $1-0{,}99^{n}>0{,}99$. Aufgelöst nach *n* erhält man: $n>\frac{\lg 0{,}01}{\lg 0{,}99}$ und somit $n = 459$.		10	
d)	Es bezeichne - *K* das Ereignis, dass die betreffende Person infiziert ist, - P_0 das Ereignis, dass der Test bei der betreffenden Person eine Infektion anzeigt. Gegeben sind: - *P(K)* = 0,001 (a-priori-Wahrscheinlichkeit) - $P(P_0/K)=0{,}99$ - $P(P_0/\overline{K})=0{,}02$			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Das Testergebnis ist fehlerhaft, wenn eine vorhandene Infektion nicht angezeigt wird oder wenn eine Infektion angezeigt wird, obwohl das Blut nicht infiziert ist. Mit Hilfe eines Baumdiagramms oder durch folgende Rechnung erhält man:

$P(F) = P(\overline{P_0} \cap K) + P(P_0 \cap \overline{K}) = P(K) \cdot P(\overline{P_0} / K) + P(\overline{K}) \cdot P(P_0 / \overline{K})$

$= 0,001 \cdot 0,01 + 0,999 \cdot 0,02 \approx 0,020$

Nur in ca. 2 % aller Fälle ist das Testergebnis fehlerhaft.</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Gesucht ist $P(\overline{K} / P_0) = \dfrac{P(\overline{K}) \cdot P(P_0 / \overline{K}) \cdot}{P(P_0)}$.

Für den Nenner gilt:

$P(P_0) = P(\overline{K}) \cdot P(P_0 / \overline{K}) + P(K) \cdot P(P_0 / K) = 0,999 \cdot 0,02 + 0,001 \cdot 0,99 = 0,02097$
$P(\overline{K} / P_0) = \dfrac{0,999 \cdot 0,02}{0,02097} \approx 0,953$

Dieses Ergebnis erscheint auf den ersten Blick sehr erstaunlich: trotz eines positiven Testergebnisses ist für eine Person die Wahrscheinlichkeit, dass sie nicht infiziert, ist noch über 95 %. Das liegt daran, dass der Anteil der nicht mit diesen Viren infizierten Personen in der Bevölkerung so groß ist, dass 2 % von dieser Personengruppe der nicht Infizierten bei weitem mehr sind als der Anteil von 99 % der richtig diagnostizierten Kranken.</td><td></td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Für diesen Wert x müsste nach e) gelten:

$\dfrac{0,999 \cdot x}{0,999 \cdot x + 0,001 \cdot 0,99} = 0,5 \quad \Leftrightarrow \quad 0,999x = 0,000495 + 0,4995x$

$\Leftrightarrow \quad 0,4995x = 0,000495$

$\Leftrightarrow \quad x \approx 9,91 \cdot 10^{-4}$

Der Wert müsste noch unter 1 ‰ liegen.</td><td></td><td></td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

Aufgabe 13 HIV-Test

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Wegen der großen Zahl der Grundgesamtheit kann die wiederholte Untersuchung von Blutproben als Bernoulli-Kette angesehen werden mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{5 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^7} = 0{,}125\%$. Die Wahrscheinlichkeit für „keinen Erfolg" beträgt dann $(1-p)^n$. Wir lösen die Gleichung $(1-p)^n = 1\%$ $n = \frac{-2 \cdot \log 10}{\log 0{,}99875} \approx 3681{,}8$. Also müssen mindestens 3682 Blutproben untersucht werden.	10		
b)	*Dies ist die „klassische" Anwendung der Bayes-Formel:* Es bezeichne: - K das Ereignis, dass die betreffende Person infiziert ist, - P_o das Ereignis, dass die betreffende Person ein positives Testergebnis hat. Gegeben sind: - $P(K) = 0{,}125\%$ *(a-priori-Wahrscheinlichkeit)* - $P(P_o \mid K) = 99{,}8\ \%$ - $P(P_o \mid \bar{K}) = 1\ \%$ Gesucht: $P(K \mid P_o)$. $P(K \mid Po) = \frac{P(K) \cdot P(Po \mid K)}{P(K) \cdot P(Po \mid K) + P(\bar{K}) \cdot P(Po \mid \bar{K})}$ *(Bayes-Formel)* $\approx 11{,}1\%$	15		
c)	Ein positives Testergebnis kommt entweder durch einen Infizierten zustande oder durch einen Gesunden. Die 1. Pfadregel ergibt für den ersten Fall: $p_1 = P(K) \cdot P(Po \mid K) = 0{,}125\% \cdot 99{,}8\% \approx 0{,}1248\%$ und für den zweiten Fall: $p_2 = P(\bar{K}) \cdot P(Po \mid \bar{K}) = 99{,}875\% \cdot 1\% \approx 1\%$. Die Wahrscheinlichkeit für ein positives Testergebnis ergibt sich als Summe von p_1 und p_2. $P(Po) =: p_3 = p_1 + p_2 \approx 1{,}12\%$ (Satz über die totale Wahrscheinlichkeit). Wegen des sehr großen Anteils nicht infizierter Personen in der Stichprobe ergeben sich aus dem kleinen Testfehler von 1 % (dass eine nicht infizierte Person positiv getestet wird) viele Fehldiagnosen dieser Art. p_1 entspricht ungefähr dem Wert p aus Aufgabe a), aber p_2 ist ungefähr 8-mal größer als p_1. Man erhält viel mehr „Positive" durch Fehldiagnosen. Mit dem Wert von p_3 rechnen wir nun genauso wie in a): $n = \frac{-2 \cdot \log 10}{\log 0{,}9888} \approx 408{,}9$ Also müssen nur mindestens 409 Blutproben untersucht werden.		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Ausgehend von der a-priori-Wahrscheinlichkeit von nur 0,125 % für einen infizierten Patienten ist diese durch den positiven Test auf die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit von 11,1 % gestiegen, also ungefähr um den Faktor 90. *Aber, wenn vorher keinerlei Verdacht bestand, ist die diagnostische Qualität in der Tat gering, weil – wie in c) beschrieben – wegen der geringen a-priori-Wahrscheinlichkeit für Aids, die Quote der fälschlich Positiven so sehr ins Gewicht fällt.*		10	
e)	Hier sind die Überlegungen anders: Da die Übertragungswege für Aids gut bekannt sind und die betreffende Person ihr Vorleben individuell in der Regel gut einschätzen kann, muss sie hier mit einer individuellen subjektiven a-priori-Wahrscheinlichkeit in die Bayes-Formel gehen. Wenn sie z.B. jahrelang sexuell enthaltsam gelebt hat und keinen Blutaustausch hatte, wird sie diese als Null annehmen und die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit bleibt dann auch Null. Sie braucht nicht beunruhigt zu sein. Wenn die Person aber „riskant“ gelebt hat, kann die a-priori-Wahrscheinlichkeit p, die sie nur schätzen kann, für sie erheblich höher als 0,125 % sein. Zum Beispiel: bei p = 5 % ergibt sich dann schon eine a-posteriori-Wahrscheinlichkeit für eine Infektion von 84 % mit einem hohen traurigen diagnostischen Wert.			10
f)	Mit Y werde die Anzahl der Personen in der Stichprobe bezeichnet, bei denen eine lindernde Wirkung erkennbar sein wird. Wir nehmen an, dass Y 100-p-binomialverteilt ist mit unbekanntem p. Wir betrachten die Nullhypothese $H_0: p < 40\%$ mit der Gegenhypothese $H_1: p \geq 40\%$. Wir werden die Nullhypothese ablehnen bei hinreichend großen Realisierungen von Y. Sagen wir, dass H_0 abgelehnt wird, falls gilt: Y > k. Für den Fehler $\alpha(k)$ 1. Art gilt dann: $\alpha(k) \leq 1 - \sum_{i=0}^{k} B(100; 0,4; i)$. Wegen $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = \sqrt{24} > 3$ können wir die obige Summe approximieren durch $\Phi(\frac{k+0,5-40)}{\sqrt{24}})$. Mit Hilfe einer Tabelle der Gaußschen Integralfunktion oder durch Probieren mit dem Taschenrechner erhalten wir: k: 47 / 48 $\alpha(k) \leq$: 6,3 % / 4,1 % Man sollte also die Nullhypothese ablehnen, falls gilt: $Y > 48$. Für den Fehler $\beta(p)$ gilt dann: $\beta(p) = \sum_{i=0}^{48} B(100; p; i)$. Wie oben nähern wir die Funktionswerte an und erhalten:			

Inner table in f):

k	47	48
$\alpha(k) \leq$	6,3 %	4,1 %

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	(Tabelle: p = 40 %, 50 %, 60 %; $\beta(p)$ = 96 %, 38 %, 1 %) Wenn es stimmt, dass das Medikament in beschriebener Weise wirkt, aber p nicht deutlich über 50 % liegt, wird es deswegen dennoch mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht zur gewünschten Ablehnung der Nullhypothese kommen. Der Test ist nicht trennscharf. Dies wäre durch eine Erhöhung des Stichprobenumfanges zu verbessern.		20	10
g)	Die Zweifler werden versuchen, ein signifikantes Ergebnis zur Ablehnung der Nullhypothese $H_0: p \geq 40\%$ zu bekommen. Dies wird bei hinreichend kleinen Realisierungen von Y geschehen. Sagen wir, falls $Y \leq m$. Für den Fehler $\alpha(m)$ 1. Art gilt dann: $\alpha(m) \leq \sum_{i=0}^{m} B(100;0,4;i)$. Mit den gleichen Methoden wie in f) erhalten wir: (Tabelle: m = 31, 32; $\alpha(m) \leq$ 4,1 %, 6,3 %) Man sollte also die Nullhypothese ablehnen und der Behauptung der Medikamentenwirksamkeit misstrauen, falls gilt: $Y \leq 31$. (Dieser Test ist übrigens natürlich genau so wenig trennscharf wie der in f), d.h. bei Werten für p zwischen 20 % und 40 % werden die Zweifler mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht zu einem signifikanten Ergebnis kommen.)		5	5
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Tabelle in f):

p	40 %	50 %	60 %
$\beta(p)$	96 %	38 %	1 %

Tabelle in g):

m	31	32
$\alpha(m) \leq$	4,1 %	6,3 %

Aufgabe 14 Kugelschreiberproduktion

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	• <u>Ereignis A: Sowohl die Mechanik als auch die Mine sind defekt.</u> Es bezeichne: K: defekte Mechanik E: defekte Mine. Nach Voraussetzung gilt: $P(K) = 0,03$, $P(E) = 0,02$. Unmittelbar aus der Definition der Unabhängigkeit oder mit Hilfe eines Baumdiagramms folgt: $P(A) = P(K \cap E) = P(K) \cdot P(E) = 0,0006 = 0,06\%$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	• Ereignis B: Der Kugelschreiber ist fehlerfrei. $P(B)=P(\overline{K}\cap\overline{E})=P(\overline{K})\cdot P(\overline{E})=0{,}97\cdot 0{,}98=0{,}9506\approx 95\%$. • Mindestens ein Kugelschreiber ist defekt: Es beschreibe X die Anzahl der fehlerhaften Kugelschreiber. Die Prüfung von n Kugelschreibern kann als Bernoulli-Kette der Länge n angesehen werden. Es handelt sich offensichtlich um eine Massenproduktion, die Fehler treten nach Aufgabenstellung unabhängig voneinander auf, so dass von einer konstanten Trefferwahrscheinlichkeit von $p = 0{,}05$ ausgegangen werden kann. Die Zufallsvariable X ist demnach binomialverteilt. Hier gilt: $n = 10$, $p = 0{,}05$. $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\binom{10}{0}\cdot 0{,}05^{0}\cdot 0{,}95^{10}=1-0{,}5987\approx 0{,}4013\approx 40{,}1\%$. *Das Ergebnis kann auch mithilfe der Tafel bestimmt werden.* Ist $n = 10$, so ist in der Stichprobe mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 40 % mindestens ein fehlerhafter Kugelschreiber enthalten. • Im Folgenden ist n zu bestimmen. Es soll gelten: $P(X\geq 1)\geq 0{,}99$. Aus $P(X\geq 1)\geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1-P(X=0)\geq 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}95^{n}\leq 0{,}01 \Leftrightarrow n\geq \frac{-2}{\lg 0{,}95}$ folgt: $n\geq 90$ Auch mit systematischem Probieren lässt sich n aus der Bedingung $0{,}95^{n}\leq 0{,}01$ ermitteln. Auch mit einem Gegenbeispiel für n mit $90\leq n<100$ ist die Aussage des Qualitätsprüfers widerlegt.	10	20	
b)	• Erwartungswert $n = 50$ und $p = 0{,}05$. Da X binomialverteilt ist, gilt: $E(X)=n\cdot p=2{,}5$ Pro Schachtel sind also im Durchschnitt 2,5 Kugelschreiber defekt. • Bestimmt werden soll $P(Z\leq 2)$: Entweder berechnet man die Einzelwahrscheinlichkeiten mit der Formel $P(X=k)=\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}$ und erhält $P(X\leq 2)=0{,}95^{50}+\binom{50}{1}\cdot 0{,}05^{1}\cdot 0{,}95^{49}+\binom{50}{2}\cdot 0{,}05^{2}\cdot 0{,}95^{48}\approx 0{,}5405\approx 54{,}1\%$ oder man bedient sich der Formelsammlung, die eine Tafel für $n = 50$ und $p = 0{,}05$ enthält, und liest den Wert 0,5405 ab.			

	Lösungsskizze	I	II	III
	• Ereignis G: Sendung enthält genau 50 defekte Kugelschreiber $n = 1000, p = 0{,}05$. Es gilt: $P(G) = P(X = 50) = \binom{1000}{50} 0{,}05^{50} \cdot 0{,}95^{950} \approx 0{,}058$. Mit den meisten Taschenrechnern kann man diesen Wert mit dieser Formel auf diesem Wege nicht berechnen, aber man kann die Binomial- durch die Normal-Verteilung approximieren, da $\sigma > 3$. $P(X = k) \approx \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ und $\sigma = \sqrt{47{,}5}$, $\mu = 50$. $P(G) \approx \frac{1}{\sqrt{47{,}5 \cdot 2\pi}} \cdot e^0 \approx 0{,}058$. • Der Erwartungswert der Anzahl defekter Kugelschreiber in 20 Schachteln mit je 50 Kugelschreibern beträgt zwar $n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}05 = 50$, aber es ist dennoch sehr unwahrscheinlich, diesen **genau** zu treffen. (Andererseits ist es sehr wahrscheinlich, in die „Nähe“ zu kommen, z.B. in eine 2σ-Umgebung.)	5	15	10
c)	Die Zufallsvariable Y beschreibe die Kosten, die pro Kugelschreiber auftreten. Dann gilt: $E(Y) = 0{,}30€ \cdot 0{,}95 + 1{,}30€ \cdot 0{,}05 = 0{,}35€$ Bei einem Preis von 0,40 € ist also ein Gewinn von 0,05 € pro Kugelschreiber zu erwarten. Dieser beträgt dann $\frac{1}{7} \approx 14{,}3\%$ der zu erwartenden Kosten. Der Herstellerbetrieb kann also sein Planungsziel erreichen.	10	5	
d)	In beiden Fällen handelt es sich um einen einseitigen Hypothesentest über eine Binomialverteilung mit $n = 50$. A vertraut dem Angebot des Konkurrenten und verwirft die Nullhypothese $H_A : p \geq 0{,}98$ erst dann, wenn das Ergebnis der Stichprobe so klein ist, dass es im Ablehnungsbereich von H_A liegt. Hierbei ist $\mu = n \cdot p = 49$, $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{0{,}98} < 3$ Hier ist also die Voraussetzung für die Approximation der Binomial- durch die Normalverteilung nicht erfüllt. Es muss mit dem Tafelwerk gearbeitet werden, das sowohl für $p = 0{,}02$ als auch für $p = 0{,}05$ vorliegt. Mit Hilfe der Tafel ergibt sich unter der Annahme $p = 0{,}98$ für die Anzahl Z der fehlerfreien Kugelschreiber: $P(Z \leq 46) \approx 1{,}8\,\%$, $P(Z \leq 47) \approx 7{,}8\,\%$ A wird also erst dann beim alten Hersteller bleiben wollen, wenn weniger als 47 fehlerfreie Kugelschreiber in der Lieferung sind.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	B misstraut dem Konkurrenten und ist erst dann bereit, die Lieferfirma zu wechseln, wenn das Ergebnis der Stichprobe auf eine deutlich bessere Qualität hinweist. Seine Nullhypothese ist, dass die Qualität keineswegs besser als die des alten Lieferanten ist: $H_B : p \leq 0{,}95$. Von dieser Meinung weicht er erst ab, wenn die Stichprobe ungewöhnlich gut ausfällt. Unter der Annahme $p = 0{,}95$ liest man aus der Tafel ab: $P(Z = 50) = 1 - P(Z \leq 49) \approx 7{,}7\ \%$. Das heißt: selbst wenn B H_B erst dann ablehnt, wenn alle Kugelschreiber fehlerfrei sind, ist die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art immer noch über 5 %, d.h. B wird durch kein mögliches Testergebnis davon abzubringen sein, den alten Lieferanten beizubehalten. (Um hier überhaupt zu signifikanten Ergebnissen zu kommen, müsste n erhöht werden, der Fehler 2. Art beträgt so übrigens 100 %).		10	15
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 15 Modegeschäfte

Lösungsskizze — Zuordnung, Bewertung: I | II | III

a)

nach \ von	BlueBlack	Goldie X	JeansHouse
BlueBlack	0,6	0,2	0,15
Goldie X	0,25	0,55	0,15
JeansHouse	0,15	0,25	0,7

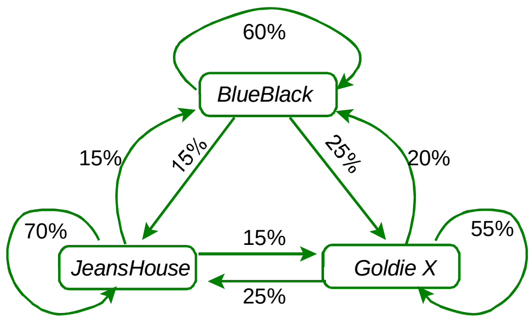


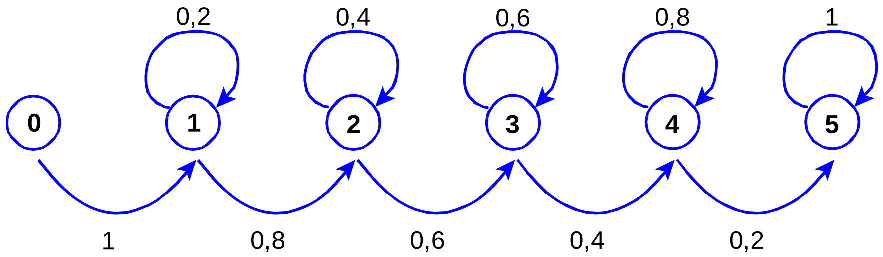
Tabelle oder Graph erwartet. — I: 10

b)

Die Übergangsmatrix ist $M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}15 \\ 0{,}25 & 0{,}55 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ *(aus Tabelle oder Graph).*

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Nach einem Monat ergibt sich: $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,15 \\ 0,25 & 0,55 & 0,15 \\ 0,15 & 0,25 & 0,7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2700 \\ 2000 \\ 3200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2500 \\ 2255 \\ 3145 \end{pmatrix}$. Die Berechnung für den 2. Monat kann erfolgen durch (i) $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,15 \\ 0,25 & 0,55 & 0,15 \\ 0,15 & 0,25 & 0,7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2500 \\ 2255 \\ 3145 \end{pmatrix}$ oder (ii) $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,15 \\ 0,25 & 0,55 & 0,15 \\ 0,15 & 0,25 & 0,7 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} 2700 \\ 2000 \\ 3200 \end{pmatrix}$. Die Annahme, das Modell aus a) gelte in den folgenden 6 Monate weiter, bedeutet, dass in diesen 6 Monaten • die Anzahl der Gesamtkunden in den drei Geschäften unverändert bleibt • die Wanderungsanteile sich ebenfalls nicht ändern.	15	5	
c)	Stillstand der Kundenbewegung würde bedeuten, dass die Gleichung $M \cdot X = X$ lösbar ist, also mindestens ein solcher Vektor X existiert. Ansatz: $\begin{array}{ll} I & 0,6x_1 + 0,2x_2 + 0,15x_3 = x_1 \\ II & 0,25x_1 + 0,55x_2 + 0,15x_3 = x_2 \\ III & 0,15x_1 + 0,25x_2 + 0,7x_3 = x_3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} -40x_1 + 20x_2 + 15x_3 = 0 \\ 25x_1 - 45x_2 + 15x_3 = 0 \\ 15x_1 + 25x_2 - 30x_3 = 0 \end{array}$ Aus $II–I$ und $2 \cdot I + III$ folgt $65x_1 - 65x_2 = 0$ und $-65x_1 + 65x_2 = 0$, also $x_1 = x_2$. Eingesetzt in III folgt $30x_3 = 40x_2 \Leftrightarrow x_3 = \frac{4}{3}x_2$. Wie in b) erwähnt, ist die Gesamtkundenzahl von Anfang noch gültig, d.h. es muss auch gelten $x_1 + x_2 + x_3 = 7\,900$. x_1 und x_3 eingesetzt ergeben $10\,x_2 = 5900 \cdot 3 = 23\,700 \Rightarrow x_2 = 2\,370 = x_1$ und damit $x_3 = 3\,160$. Die Kundenbewegung stabilisiert sich im Modell bei diesen absoluten Zahlen: *BlueBlack* und *Goldie X* je 2 370 Kunden, *JeansHouse* 3 160 Kunden. Diese Werte sind nach 6 Monaten fast erreicht. *BlueBlack* schneidet am schlechtesten ab, da es über 12 % der Kunden verliert, *JeansHouse* bleibt fast stabil und *Goldie X* gewinnt über 18 % an Kunden hinzu. Die Geschäftsführerin muss also dringend eine erfolgreiche Werbekampagne starten.		25	10
d)	*Es ist zunächst ein Modell zu erstellen, mit dem die Frage beantwortet werden kann:* Wir betrachten das Sammeln der Puzzleteile als einen zufälligen Prozess mit 6 Zuständen. Zustand ***i*** bedeutet, dass man unter den bereits gesammelten Puzzleteilen <u>***i*** verschiedene</u> hat. Der Zustand 0 ist die Anfangssituation, der Zustand 5 ist der gewünschte Endzustand. Jedes Mal, wenn man einen neuen Umschlag bekommt findet ein „Übergang“ statt, und die Übergangswahrscheinlichkeiten sind in folgendem Diagramm dargestellt.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III



Angenommen wurde dabei die Gleichverteilung der verschiedenen Puzzleteile (*„große, gutgefüllte Schale“*). Zustand 5 kann nicht mehr verlassen werden (*absorbierend*).
Ausgehend vom Zustand 0 soll die erwartete Anzahl der Übergänge bestimmt werden, bis man im erstmals im Zustand 5 ist.
Die Lösungsidee besteht darin, nicht nur diesen Erwartungswert *e* zu betrachten, sondern simultan für jeden Zustand ***i*** die erwartete Anzahl ***E(i)*** der Übergänge unter der Bedingung, dass man sich im Zustand ***i*** befindet. Die Beziehungen zwischen diesen Werten erlauben es letztlich den gesuchten Wert ***E****(0)* zu bestimmen:

Es gilt trivialerweise: $E(5) = 0$

Nun können wir $E(4)$ bestimmen, es gilt nämlich nach Definition des Erwartungswertes:

$$E(4)=\frac{4}{5}\cdot\left(1+E(4)\right)+\frac{1}{5}\cdot\left(1+E(5)\right)=1+\frac{4}{5}\cdot E(4)+\frac{1}{5}\cdot 0$$

$$E(4)=1+\frac{4}{5}\cdot E(4)$$

Diesen Zusammenhang können wir als lineare Bestimmungsgleichung für $E(4)$ auffassen mit der eindeutigen Lösung: $E(4) = 5$.

Man sieht, wie es weiter geht:

$$E(3)=1+\frac{3}{5}\cdot E(3)+\frac{2}{5}\cdot E(4)\Leftrightarrow E(3)=\frac{15}{2}\text{ oder}\qquad E(3)=7{,}5.$$

$$E(2)=1+\frac{2}{5}\cdot E(2)+\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{2}\Leftrightarrow E(2)=\frac{55}{6}\text{, gerundet}\qquad E(2)\approx 9{,}2$$

$$E(1)=1+\frac{1}{5}\cdot E(1)+\frac{4}{5}\cdot\frac{55}{6}\Leftrightarrow E(1)=\frac{125}{12}\text{, gerundet}\qquad E(1)\approx 10{,}4$$

$$E(0)=1\cdot\left(1+E(1)\right)=1+\frac{125}{12}\Leftrightarrow E(0)=\frac{137}{12}\text{, gerundet}\qquad E(0)\approx 11{,}4.$$

Im Mittel muss man also 11 bis 12 Umschläge sammeln, um in den „Genuss“ des ausgefallenen Kleidungsstücks von *Carotti* zu kommen, also im Mittel einen Umsatz von 550 bis 600 € machen.

Wenn das Modegeschäft ansonsten angemessene Preise hat, und man dort auch ohne die Werbeaktion gerne kauft, geht das in Ordnung. Wenn aber wegen des Sonderangebots z.B. alle Kleidungsstücke doppelt so teuer wie in vergleichbaren Geschäften sind, dann „kostet“ *Carotti* fast 300 €.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<u>Bemerkung:</u> Diese Überlegungen lassen sich leicht auf Situationen verallgemeinern, bei denen die vollständige Sammlung aus n Objekten besteht, z.B. zur Weltmeisterschaft Fußballerbilder. Es gibt auch Würfelspiele, bei denen derjenige gewinnt der zuerst alle Augenzahlen mindestens einmal geworfen hat. *Weitere Verallgemeinerungen bestehen darin, dass man absorbierende endliche Markoff-Ketten betrachtet, denn unser Beispiel lässt sich als eine solche auffassen. Dann kann man prinzipiell immer zwei Fragen stellen und beantworten:* – *Mit welchen Wahrscheinlichkeiten landet man in den einzelnen absorbierenden Endzuständen? (Hier sinnlos, da nur ein absorbierender Zustand vorhanden ist)* – *Wie groß ist der Erwartungswert der Anzahl der Übergänge bis zum Erreichen eines absorbierenden Endzustandes?* *In beiden Fällen geht man genau so vor wie hier, beantwortet die gestellten Fragen also nicht nur für den speziellen Startzustand sondern für alle Zustände als Startzustände. Die Beziehungen zwischen diesen Größen liefern für beide Fragestellungen je ein lineares Gleichungssystem, das es zu lösen gilt.*		20	15
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 16 Gepäckaufgabe

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Es werden nur zwei Ergebnisse unterschieden: Ein Gepäckstück wird der richtigen Maschine zugewiesen oder nicht. Der Anhänger kann zum Beispiel gleich beim Anbringen versehentlich verknickt werden. Fällt das Gepäckstück ungünstig auf das Förderband oder ist dieses an einer Stelle verschmutzt, kann die Lesbarkeit des Anhängers ebenfalls beeinträchtigt werden. Auf eine Abhängigkeit kann hieraus wohl nicht geschlossen werden, so dass man den Transport von n Gepäckstücken vom Einchecken bis zum richtigen Flugzeug als Bernoulli-Kette der Länge n ansehen kann.		15	
b)	Die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer in einer Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p beträgt $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$. Sieht man fehlgeleitete Gepäckstücke als „Treffer“ an, so berechnet man die gesuchten Wahrscheinlichkeiten mit $p = 0{,}035$. <u>Kein Gepäckstück fehlt: $k = 0$</u> $n=45,\ k=0:\quad P(X=0)=0{,}965^{45}\approx 0{,}201$. <u>Genau zwei Gepäckstücke sind fehlgeleitet: $k = 2$</u> $n=45,\ k=2:\quad P(X=2)=\binom{45}{2}0{,}035^2\cdot 0{,}965^{43}\approx 0{,}262$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

Höchstens vier Gepäckstücke sind fehlgeleitet: $k = 0, 1, .., 4$

Zwei der fünf Summanden sind bereits bestimmt.

$P(X=1) = 45 \cdot 0{,}035 \cdot 0{,}965^{44} \approx 0{,}328$,

$P(X=3) = \binom{45}{3} \cdot 0{,}035^{3} \cdot 0{,}965^{42} \approx 0{,}136$

$P(X=4) = \binom{45}{4} \cdot 0{,}035^{4} \cdot 0{,}965^{41} \approx 0{,}052$.

Insgesamt erhält man also $P(X \le 4) \approx 0{,}979$.

Dieser Wert ergibt sich als Summe der oben genannten gerundeten Werte, wenn man den exakten Wert auf 3 Nachkommastellen rundet, erhält man 0,980.

Mehr als vier Gepäckstücke sind fehlgeleitet:

Dies ist ersichtlich das Gegenereignis zum gerade betrachteten Ereignis.

$P(X > 4) = 1 - P(X \le 4) \approx 1 - 0{,}979 = 0{,}021$

(Analog erhält man dieselben Ergebnisse, wenn man ein richtig transportiertes Gepäckstück als „Treffer“ interpretiert.)

I	II	III
20		

c) Die Fluggesellschaften rechnen zunächst mit $E(Y_1) = 70\text{ €} \cdot 0{,}035 = 2{,}45\text{ €}$ Kosten pro aufgegebenem Gepäckstück.

Nach der Verbesserung ihrer Lesegeräte gilt:

Y_2	0	10	70	110
Wahrscheinlichkeit	0,965	0,024	0,005	0,006

und man erhält: $E(Y_2) = 1{,}25$ €. Die zu erwartende Kostenminderung beträgt mithin 1,20 € pro Gepäckstück.

I	II	III
5	15	

d) Nimmt man die Anzahl Z der Verlustkoffer innerhalb eines Jahres als binomialverteilt an, so ist, da $n > 100$ und $p < 0{,}01$, die Poisson-Verteilung eine gute Näherung. Für ein Jahr ergibt sich:

$\mu = E(Z) = 12 \cdot 0{,}0002 \cdot 12000 = 28{,}8$.

$k = 29$

Mit Hilfe der Näherungsformel von Poisson $P(Z = k) \approx \frac{1}{e^{\mu}} \cdot \frac{\mu^k}{k!}$ direkt oder durch Differenzbildung zweier kumulierter Werte aus der Tabelle erhält man:

$P(Z = 29) \approx (0{,}5639 - 0{,}4901) = 0{,}0738 \approx 0{,}074$.

Bei 30 Verlustkoffern ist die Entschädigungssumme von 12 000 € zu zahlen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $P(Z > 30)$.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Mit Hilfe der Tabelle erhält man $P(Z>30)=1-P(Z\le 30)\approx 1-0{,}6348\approx 0{,}365$ Der Erwartungswert für die Schadenzahlung beträgt: $400\cdot\frac{1}{e^{\mu}}\cdot\sum_{i=31}^{\infty}(i-30)\cdot\frac{\mu^i}{i!} = 400\cdot\left(\frac{1}{e^{\mu}}\cdot\sum_{i=31}^{\infty}i\cdot\frac{\mu^i}{i!}-30\cdot\frac{1}{e^{\mu}}\cdot\sum_{i=31}^{\infty}\frac{\mu^i}{i!}\right)$ $\approx 400\cdot\left[(28{,}8-16{,}2415)-30\cdot(1-0{,}6348)\right]=\left[12{,}5585-10{,}956\right]\cdot 400=641$.		20	25
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 17 Wahlen

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Die prozentualen Anteile unter allen Wahlberechtigten betragen 30 % für Gruppe I, 45 % für Gruppe II und 25 % für Gruppe III. Daraus ergibt sich mit $0{,}3\cdot 0{,}87+0{,}45\cdot 0{,}82+0{,}25\cdot 0{,}65=0{,}7925$ eine Wahlbeteiligung von insgesamt 79,25 % .	10		
b)	$n = 100$, $p = 0{,}35$. X bezeichne die Anzahl der Nichtwähler in dieser Stichprobe. Gesucht ist $P(31\le X\le 39)$. Es ist mühsam, aber durchaus möglich, diese Wahrscheinlichkeit schrittweise mit Hilfe der Formel $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ auszurechnen. Da für $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$ hier gilt: $\sigma=\sqrt{100\cdot 0{,}35\cdot 0{,}65}=\sqrt{22{,}75}>3$, kann jedoch die Binomial- durch die Normalverteilung approximiert werden. Mit Hilfe der Integralen Näherungsformel von Moivre und Laplace folgt mit Interpolieren: $P(31\le X\le 39)\approx\Phi\left(\frac{39{,}5-35}{\sqrt{22{,}75}}\right)-\Phi\left(\frac{30{,}5-35}{\sqrt{22{,}75}}\right)=2\cdot\Phi\left(\frac{4{,}5}{\sqrt{22{,}75}}\right)-1$ $\approx 2\cdot\Phi(0{,}943)-1\approx 2\cdot 0{,}8272-1=0{,}6544\approx 65{,}4\%$. *In einigen Büchern wird die Formel von Moivre-Laplace ohne die Korrektur mit 0,5 angegeben. Entsprechende Rechnungen sind natürlich auch als richtig anzusehen.*		20	
c)	Es handelt sich um das einseitige Testen einer Hypothese. Getestet wird H_0: $p\le 0{,}55$. Die Hypothese H_0 wird abgelehnt und der Wahlkampf nicht intensiviert, wenn, die Anzahl Y der Wähler unter den 200 Befragten hinreichend groß ist.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Genauer: Es wird eine möglichst kleine natürliche Zahl N bestimmt, so dass unter der Annahme, dass H_0 richtig ist, die Wahrscheinlichkeit $P(Y > N)$ kleiner oder gleich 5 % ist. Da H_0 eine zusammengesetzte Hypothese ist, müssen wir abschätzen und nehmen an, dass $p = 0,55$. Außerdem approximieren wir die jetzt angenommene Verteilung von Y durch eine Normalverteilung mit $\mu = 110$ und $\sigma = \sqrt{200 \cdot 0,55 \cdot 0,45} \approx 7,036$. Dem Tafelwerk entnimmt man: $P(Y \leq \mu + 1,64 \cdot \sigma) \approx 95\,\%$ Also $P(Y \leq 121.5) \approx 95\,\%$ bzw. $P(Y > 121.5) \approx 5\,\%$. Also muss N = 122 gewählt werden, d.h. H_0 wird abgelehnt, wenn sich mindestens 123 Personen für die Partei G entscheiden. <u>Fehler 2. Art:</u> Die Partei G führt unnötig einen aufwendigen Wahlkampf, begeht also einen Fehler 2. Art, wenn unter der Annahme, dass $p = 0,6$ das Ergebnis der Umfrage nicht im Ablehnungsbereich von H_0 liegt, wenn also $Y \leq 122$. Zu berechnen ist deshalb $P(Y \leq 122)$. Mit $\mu = 120$, $\sigma = \sqrt{48} > 3$ und der Integralen Näherungsformel folgt: $P(Y \leq 122) \approx \Phi\left(\frac{122 - 120 + 0,5}{\sqrt{48}}\right) \approx \Phi(0,3608) \approx 64,1\,\%$. <u>Interpretation:</u> Dass dieser Fehler 2. Art so groß ist, verwundert nicht, da p nur geringfügig größer als 55 % ist. Der Annahmebereich von H_0, also das Intervall [0 ; 122], endet erst mehr als eine Viertel Streuung rechts vom Erwartungswert 120 für $p = 0,6$. Wächst p, so „wandert" der Erwartungswert nach rechts aus diesem Intervall heraus, der Fehler 2. Art wird kleiner. Auf die Situation der Partei G bezogen bedeutet dies sehr nachvollziehbar: Je mehr Wähler sie unter allen Wahlberechtigten hat, desto unwahrscheinlicher wird ein Umfrageergebnis, dass sie unnötig in einen aufwändigen Wahlkampf zwingt.	10	25	10
d)	Wie dieses Konfidenzintervall bestimmt wird, ob als so genanntes *grobes, echtes* oder *Näherungs-Konfidenzintervall* , hängt vom vorangegangenen Unterricht und entscheidend vom verwendeten Lernbuch ab. In der Darstellung muss das Verständnis für die gewählte Vorgehensweise deutlich werden. Die Korrektoren sollten auch tolerant sein gegenüber Formulierungen, die den Unterschied zwischen den Begriffen „Sicherheit" und „Wahrscheinlichkeit" verwischen. Wir geben hier die drei genannten Varianten an. Zunächst bestimmen wir ein zur zufällig gefundenen empirischen relativen Häufigkeit $R = 0,054$ symmetrisches Intervall, das den gesuchte Wert p nur mit ungefähr 90 % Wahrscheinlichkeit einschließt, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Intervall rechts von p liegt, ungefähr 5 %. Nur in diesem letzten Fall, würde das Institut die gestellte Frage fälschlich bejahen.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Es muss dann gelten: $\lvert 0{,}054-p\rvert = 1{,}64\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{n}}$ Grobes Konfidenzintervall: Man schätzt $\sqrt{p\cdot(1-p)}$ nach oben durch $\frac{1}{2}$ ab und setzt $n=1100$. Dann gilt: $P(\lvert R-p\rvert \le 0{,}025) \ge 90\,\%$. Bei dieser Abschätzung kann die Partei also mit mindestens 95 % Wahrscheinlichkeit nur damit rechnen, mindestens 2,9 % der wahlberechtigten Stimmen zu bekommen. Die gestellte Frage ist so zu verneinen. Näherungs-Konfidenzintervall: Man schätzt $\sqrt{p\cdot(1-p)}$ durch $\sqrt{0{,}054\cdot(1-0{,}054)} \approx 0{,}227$ ab und setzt $n = 1100$. Dann gilt $P(\lvert R-p\rvert \le 0{,}011) \approx 90\,\%$ Dann kann bei dieser Abschätzung die Partei also mit mindestens 95 % Wahrscheinlichkeit damit rechnen, mindestens 4,3 % der wahlberechtigten Stimmen zu bekommen. Die gestellte Frage ist zu bejahen. Echtes Konfidenzintervall: Man löst die quadratische Gleichung: $\lvert p-0{,}054\rvert = 1{,}64\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{1100}}$ nach p auf und erhält als Lösungen zwei extreme Möglichkeiten für p also das Intervall [0,044 , 0,066] Nach dieser Rechnung kann die Partei mit ungefähr 95 % Wahrscheinlichkeit damit rechnen, mindestens 4,4 % der wahlberechtigten Stimmen zu bekommen. Die gestellte Frage ist zu bejahen.		10	15
	Insgesamt 100 BWE	20	55	25

Aufgabe 18 Qualitätskontrolle

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Der Sachverhalt wird wie folgt modelliert: Den beiden Ereignissen A: „Die kritische Kiste stammt von Maschine A“ B: „Die kritische Kiste stammt von Maschine B“ geben wir wegen der unterschiedlichen Produktionskapazitäten die a-priori-Wahrscheinlichkeiten $P(A)=\frac{4}{5}$ und $P(B)=\frac{1}{5}$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Die erwarteten zusätzlichen Kosten betragen also bei Strategie (1): $E(K)=\frac{1}{5}\cdot 9000\text{ €} = 1800\text{ €}$ und bei Strategie (2): $E(K)=\frac{4}{5}\cdot 1000\text{ €} = 800\text{ €}$. Strategie (2) ist also vorzuziehen.	20		
b)	X sei die Anzahl der defekten Artikel bei der Stichprobe. Wir nehmen an, dass X B(20,p)-binomialverteilt ist. $P(A \mid X=5)=\dfrac{P(A)\cdot B(20,\frac{1}{4},5)}{P(A)\cdot B(20,\frac{1}{4},5)+P(B)\cdot B(20,\frac{1}{2},5)}$ $\approx 98{,}2\ \%$ Verkauft man die Kiste mit der Aufschrift „von Anlage A“, betragen die erwarteten Zusatzkosten also $(1-0{,}982...)\cdot 9000\text{ €}\approx 162\text{ €}$. Im anderen Fall erhält man 0,982...·1000 € ≈ 982 € , also sollte man die Kiste mit der Aufschrift „von Anlage A“ verkaufen.		20	
c)	In diesem Falle wären die Erwartungswerte $\frac{1}{10}\cdot 9000=900$ und $\frac{9}{10}\cdot 1000=900$ zu vergleichen. Der Statistiker könnte zumindest nach dem Verfahren von b) nicht entscheiden, wie die Kiste zu kennzeichnen wäre.		10	
d)	Die Entscheidungssituation „kippt“ also, wenn $P(B\mid X{=}k)=\frac{1}{10}$. Darum lösen wir $P(B\mid X=k)=\dfrac{P(B)\cdot B(20,\frac{1}{2},k)}{P(A)\cdot B(20,\frac{1}{4},k)+P(B)\cdot B(20,\frac{1}{2},k)}=\dfrac{1}{10}$ nach k auf. Wir erhalten die Gleichung: $\dfrac{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{(20-k)}+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}=\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow\dfrac{\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{(20-k)}+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}=10$ $\Rightarrow\dfrac{\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{(20-k)}}{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}=9$ also $\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{(20-k)}=\dfrac{9}{4\cdot 2^{20}}$. Weiteres Sortieren: $\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\right)^{k}=\dfrac{9\cdot 4^{20}}{4\cdot 6^{20}}$ zusammengefasst $\left(\frac{1}{3}\right)^{k}=2{,}25\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$ mit der Lösung $k = 6{,}64...$ Also wird der Statistiker falls $X \le 6$ für die Aufschrift „von Anlage A“, ansonsten für „von Anlage B“ plädieren.		15	10

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Das Ereignis B wird als Nullhypothese über den unbekannten Parameter p einer Bernoulli-Urne gewählt: $H_0: p_0 = 0{,}5$, und es wird die Alternativhypothese $H_1:\ p < 0{,}5$ bei 20 Ziehungen getestet. Dies ergibt folgenden Ablehnungsbereich: $X \leq 4$ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art von $\alpha = 0{,}6$ %.		15	
f)	Das Verfahren aus e) berücksichtigt das Vorwissen über die unterschiedlichen Produktionskapazitäten nicht, das eher für eine Kiste erster Wahl spricht. Es ist „vorsichtiger“ im Hinblick auf den gravierenden Schaden von 9000 €. Der vorgegebene Wert $\alpha \leq 1$ % ist sehr willkürlich. Diese Willkür ist aber Teil der Testlogik bei Signifikanztests.			10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 19 Amoral

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Es werden nur zwei Ergebnisse unterschieden; geht man davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Nebenwirkungen auftreten, im Prinzip bei jedem Patienten $p = 0{,}06$ beträgt, so muss noch darauf geachtet werden, dass die Unabhängigkeit der Ereignisse gewährleistet ist. Jammert jemand z.B. den anderen vor, wie schlecht es ihm geht, horchen u.U. diese sehr aufmerksam in sich hinein, bis auch sie sich unwohl fühlen. Umgekehrt kann eine Frohnatur die anderen von ihren Beschwerden ablenken. Doch auch Wechselwirkungen mit anderen Medikamenten und „gemeinsame“ Gebrechen können stochastische Abhängigkeiten verursachen. Es wird eine „ergebnisoffene“ zusammenhängende Darstellung erwartet.		15	
b)	$P(X\leq 1) = 0{,}94^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}94^{49} \approx 0{,}190.$ Die Wahrscheinlichkeit, dass von 50 Patienten höchstens bei einem Nebenwirkungen auftreten, beträgt etwa 19 %.	10		
c)	Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n, für die gilt: $0{,}94^n < 0{,}01$. Aufgelöst nach n ergibt sich $n > \frac{\lg 0{,}01}{\lg 0{,}94}$, also $n = 75$. Ab einer Gruppengröße von 75 Patienten sinkt die Wahrscheinlichkeit unter 1 %, dass wirklich keiner unter Nebenwirkungen leidet.	15		
d)	Aus $n = 200$ und $p = 0{,}06$ folgt: $\sigma = \sqrt{200 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}94} = \sqrt{11{,}28} > 3$. Also kann die Binomial- durch die Normalverteilung approximiert und die integrale Näherungsformel angewendet werden. Mit Hilfe der Tafel für die Gaußsche Integralfunktion erhält man			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9)$ $\approx 1-\Phi\left(\frac{9{,}5-\mu}{\sigma}\right) = 1-\Phi\left(\frac{9{,}5-12}{\sqrt{11{,}28}}\right) \approx 1-\Phi(-0{,}744) = \Phi(0{,}744) \approx 0{,}77$ Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von 200 Patienten bei mindestens 10 Nebenwirkungen auftreten, ist größer als 77 %.		25	
e)	Diese Aufgabenstellung ist sehr offen gestellt, daher sind unterschiedliche Antworten denkbar und sinnvoll: Zu überlegen ist zunächst, welchen Stellenwert die Kostenersparnis haben soll. Steht diese im Vordergrund und wird die bessere Verträglichkeit nicht so wichtig genommen, könnte man das neue Medikament empfehlen, sofern das Stichprobenergebnis nicht nach oben signifikant von $p = 0{,}06$ abweicht. Hier müsste auch über das Signifikanzniveau nachgedacht werden. Wir wählen hier einen „üblichen“ Wert von 5 %: Man wird sich dann bei der genannten Interessenlage nur dagegen absichern, dass das neue Medikament nicht schlechter als das alte ist und würde H_1: $p > 6$ % gegen $H_0 : p \leq 6\,\%$ testen und käme zu dem Ergebnis, das neue Medikament abzulehnen, wenn mehr als 39 Patienten mit Nebenwirkungen auftreten. Möchte man in erster Linie sicher sein, dass das neue Medikament wirklich besser verträglich ist, so wird man anders vorgehen und die Frage, ob das neue Medikament die Nebenwirkungsquote tatsächlich gesenkt hat, durch einen einseitigen Hypothesentest untersuchen: H_1: $p < 6$ % gegen $H_0 : p \geq 6\,\%$. Das führt bei 5 % Signifikanzniveau auf einen Ablehnungsbereich: $X \leq 21$. Erst bei weniger als 22 Patienten mit Nebenwirkungen würde man dann das neue Medikament empfehlen. Man könnte auch noch strenger sein und H_1 ersetzen durch H_1: $p < 4$ %. Das würde dazu führen, dass man das Medikament erst empfiehlt bei weniger als 13 Patienten mit Nebenwirkungen. Mit dieser strengen Entscheidungsregel für das neue Medikament kann man ziemlich sicher sein, dass das neue Medikament nur eingeführt wird, wenn es wirklich deutlich besser ist. Ein methodisch ganz anderes Vorgehen verwendet die Möglichkeit der Approximation der Verteilung von X durch die passende Normalverteilung und zieht das um den Erwartungswert symmetrische 95 % Intervall heran: $\mu = n \cdot p = 30,\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{28{,}2},\ \mu + 1{,}96\sigma \approx 40{,}4$. Bei bis zu 40 Fällen von Nebenwirkungen wird danach das neue Medikament empfohlen. Wenn die behauptete Senkung der Nebenwirkungen auf 4 % ausschlaggebend sein soll, so wird man $p = 0{,}04$ zugrunde legen: $\mu = n \cdot p = 20,\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{19{,}2},\ \mu + 1{,}96\sigma \approx 28{,}6$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Nur bis zu 28 Fällen von Nebenwirkungen wird dann das neue Medikament empfohlen. Zu bedenken ist auch, dass mit dieser Entscheidungsregel die Wahrscheinlichkeit verringert wird, dass das neue Medikament zu Unrecht eingeführt wird. Je nachdem, wie hoch die Kosten für die Behandlung der Nebenwirkungen sind, kann durchaus die zweite Vorgehensweise auf lange Sicht günstiger sein.		15	20
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

6 Tabellen zur Binomialverteilung

Binomialverteilung *n* = 35 bis 40

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

n	k \ p	0,1	0,2	0,3
35	0	0,0250	0,0004	0,0000
	1	0,0973	0,0035	0,0001
	2	0,1839	0,0151	0,0004
	3	0,2247	0,0415	0,0020
	4	0,1998	0,0830	0,0067
	5	0,1376	0,1286	0,0178
	6	0,0765	0,1607	0,0381

n	k \ p	0,1	0,2	0,3
38	0	0,0182	0,0002	0,0000
	1	0,0770	0,0020	0,0000
	2	0,1584	0,0091	0,0002
	3	0,2112	0,0274	0,0009
	4	0,2053	0,0599	0,0032
	5	0,1551	0,1018	0,0094
	6	0,0948	0,1400	0,0222

n	k \ p	0,1	0,2	0,3
36	0	0,0225	0,0003	0,0000
	1	0,0901	0,0029	0,0000
	2	0,1752	0,0128	0,0003
	3	0,2206	0,0362	0,0015
	4	0,2023	0,0747	0,0053
	5	0,1438	0,1195	0,0145
	6	0,0826	0,1543	0,0320

n	k \ p	0,1	0,2	0,3
39	0	0,0164	0,0002	0,0000
	1	0,0712	0,0016	0,0000
	2	0,1502	0,0077	0,0001
	3	0,2059	0,0237	0,0007
	4	0,2059	0,0534	0,0025
	5	0,1601	0,0934	0,0076
	6	0,1008	0,1323	0,0184

n	k \ p	0,1	0,2	0,3
37	0	0,0203	0,0003	0,0000
	1	0,0834	0,0024	0,0000
	2	0,1667	0,0108	0,0002
	3	0,2161	0,0315	0,0011
	4	0,2041	0,0670	0,0041
	5	0,1497	0,1105	0,0117
	6	0,0887	0,1474	0,0267

n	k \ p	0,1	0,2	0,3
40	0	0,0148	0,0001	0,0000
	1	0,0657	0,0013	0,0000
	2	0,1423	0,0065	0,0001
	3	0,2003	0,0205	0,0005
	4	0,2059	0,0475	0,0020
	5	0,1647	0,0854	0,0061
	6	0,1068	0,1246	0,0151

Binomialverteilung für *p* = 0,05: *n* = 100 bis 104 und *k* = 0 bis 5

n \ k	0	1	2	3	4	5
100	0,0059	0,0312	0,0812	0,1396	0,1781	0,1800
101	0,0056	0,0299	0,0787	0,1367	0,1762	0,1799
102	0,0053	0,0287	0,0762	0,1338	0,1742	0,1797
103	0,0051	0,0275	0,0739	0,1309	0,1722	0,1795
104	0,0048	0,0264	0,0715	0,1280	0,1701	0,1791
105	0,0046	0,0253	0,0693	0,1252	0,1680	0,1787

Summierte Binomialverteilung *n* = 20

$$P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

k \ p	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
0	0,1216	0,0115	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,3917	0,0692	0,0076	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,6769	0,2061	0,0355	0,0036	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,8670	0,4114	0,1071	0,0160	0,0013	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,9568	0,6296	0,2375	0,0510	0,0059	0,0003	0,0000	0,0000
5	0,9887	0,8042	0,4164	0,1256	0,0207	0,0016	0,0000	0,0000
6	0,9976	0,9133	0,6080	0,2500	0,0577	0,0065	0,0003	0,0000
7	0,9996	0,9679	0,7723	0,4159	0,1316	0,0210	0,0013	0,0000
8	0,9999	0,9900	0,8867	0,5956	0,2517	0,0565	0,0051	0,0001
9	1,0000	0,9974	0,9520	0,7553	0,4119	0,1275	0,0171	0,0006
10	1,0000	0,9994	0,9829	0,8725	0,5881	0,2447	0,0480	0,0026
11	1,0000	0,9999	0,9949	0,9435	0,7483	0,4044	0,1133	0,0100
12	1,0000	1,0000	0,9987	0,9790	0,8684	0,5841	0,2277	0,0321
13	1,0000	1,0000	0,9997	0,9935	0,9423	0,7500	0,3920	0,0867
14	1,0000	1,0000	1,0000	0,9984	0,9793	0,8744	0,5836	0,1958
15	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9941	0,9490	0,7625	0,3704
16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9987	0,9840	0,8929	0,5886
17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9964	0,9645	0,7939
18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9924	0,9308
19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9992	0,9885
20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Summierte Binomialverteilung *n* = 100

$$P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

p / k	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5
0	0,1326	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,4033	0,0371	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,6767	0,1183	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,8590	0,2578	0,0078	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,9492	0,4360	0,0237	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,9845	0,6160	0,0576	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,9959	0,7660	0,1172	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
7	0,9991	0,8720	0,2061	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
8	0,9998	0,9369	0,3209	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
9	1,0000	0,9718	0,4513	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	1,0000	0,9885	0,5832	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
11	1,0000	0,9957	0,7030	0,0126	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000
12	1,0000	0,9985	0,8018	0,0253	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000
13	1,0000	0,9995	0,8761	0,0469	0,0025	0,0001	0,0000	0,0000
14	1,0000	0,9999	0,9274	0,0804	0,0054	0,0002	0,0000	0,0000
15	1,0000	1,0000	0,9601	0,1285	0,0111	0,0004	0,0000	0,0000
16	1,0000	1,0000	0,9794	0,1923	0,0211	0,0010	0,0000	0,0000
17	1,0000	1,0000	0,9900	0,2712	0,0376	0,0022	0,0000	0,0000
18	1,0000	1,0000	0,9954	0,3621	0,0630	0,0045	0,0000	0,0000
19	1,0000	1,0000	0,9980	0,4602	0,0995	0,0089	0,0000	0,0000
20	1,0000	1,0000	0,9992	0,5595	0,1488	0,0165	0,0000	0,0000
21	1,0000	1,0000	0,9997	0,6540	0,2114	0,0288	0,0000	0,0000
22	1,0000	1,0000	0,9999	0,7389	0,2864	0,0479	0,0001	0,0000
23	1,0000	1,0000	1,0000	0,8109	0,3711	0,0755	0,0003	0,0000
24	1,0000	1,0000	1,0000	0,8686	0,4617	0,1136	0,0006	0,0000
25	1,0000	1,0000	1,0000	0,9125	0,5535	0,1631	0,0012	0,0000
26	1,0000	1,0000	1,0000	0,9442	0,6417	0,2244	0,0024	0,0000
27	1,0000	1,0000	1,0000	0,9658	0,7224	0,2964	0,0046	0,0000
28	1,0000	1,0000	1,0000	0,9800	0,7925	0,3768	0,0084	0,0000
29	1,0000	1,0000	1,0000	0,9888	0,8505	0,4623	0,0148	0,0000
30	1,0000	1,0000	1,0000	0,9939	0,8962	0,5491	0,0248	0,0000
31	1,0000	1,0000	1,0000	0,9969	0,9307	0,6331	0,0398	0,0001
32	1,0000	1,0000	1,0000	0,9984	0,9554	0,7107	0,0615	0,0002
33	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9724	0,7793	0,0913	0,0004
34	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9836	0,8371	0,1303	0,0009
35	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9906	0,8839	0,1795	0,0018
36	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9948	0,9201	0,2386	0,0033
37	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9973	0,9470	0,3068	0,0060
38	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9986	0,9660	0,3822	0,0105
39	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9790	0,4621	0,0176
40	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9875	0,5433	0,0284