

Kompetenzen und Bildungsstandards (Mittlerer Schulabschluss) im Fach Mathematik

Begrifflicher und empirischer Hintergrund

März 2004

Inhaltsübersicht

1	Kompetenzbegriff	2
2	Kompetenzmodelle	2
3	PISA 2000: <i>mathematical literacy</i>	3
4	PISA-E: mathematische Grundbildung	5
5	Nationale Bildungsstandards	7
6	Hamburger Rahmenpläne Mathematik	9
	Anhang: Mathematik-Kompetenzen im Überblick	10

1 Kompetenzbegriff

In kaum einem pädagogischen Lexikon als eigenes Stichwort verzeichnet, seit PISA in aller Munde: *Kompetenzen*. Mit Wurzeln beispielsweise in den Arbeiten von Piaget handelt es sich dabei um ein zentrales Grundkonzept der kognitiven Psychologie, um postulierte mentale Tiefenstrukturen, die den beobachtbaren vielfältigen Äußerungen und anderen Handlungen der Individuen (*Performanz*) als „erzeugende“ zu Grunde liegen. (So wandte sich Chomsky Ende der fünfziger Jahre mit dem Kompetenzbegriff radikal gegen die vorherrschenden behavioristischen Theorien des Spracherwerbs mit ihren Erklärungsmustern von Imitation und Verstärkung. Ausgangspunkt war für ihn der „kreative“ Aspekt der Sprache, nämlich dass sie die Mittel bereithält zum Ausdruck beliebig vieler Gedanken in beliebig vielen neuen Situationen, und die erstaunliche Tatsache, dass schon kleine Kinder, auch ohne besonderen Unterricht, aus aufgeschnappten Fragmenten und abweichenden Ausdrücken verschiedenster Art regelgeleitet völlig neue, nie gehörte Sätze bilden können.)

In den Bildungsdebatten der siebziger Jahre wurde der (subjektbezogene) Begriff der *Kompetenz* als Bildungsziel dem der *Qualifikation* als von anderen (z.B. Schule, Arbeitgeber) vorgegebene Anforderung entgegengesetzt. Mit den Veränderungen der Arbeitswelt – z.B. immer kürzere Halbwertszeiten fachlichen Wissens, flachere Hierarchien mit neuen Anforderungen und Entscheidungsspielräumen auf „unteren“ Ebenen sowie größerer Bedeutung der Teamarbeit – rückten dann so genannte „Schlüsselqualifikationen“ für das lebenslange (berufliche) Lernen in den Mittelpunkt – und mit ihnen die populäre (und in den Bildungsplänen einiger Bundesländer übernommene) Kategorisierung in Sach-, Methoden-, Sozial- und Personalkompetenz(en).¹

Von solchen aus der Berufspädagogik stammenden überfachlichen Konzepten grenzt sich der Kompetenzbegriff von Schulleistungsuntersuchungen wie TIMSS oder PISA und der nationalen Bildungsstandards ausdrücklich ab. Kompetenzen werden hier verstanden als Leistungsdispositionen *in bestimmten Fächern* (oder „Domänen“), nämlich als

die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können.²

2 Kompetenzmodelle

Die Entwicklung von Bildungsstandards und ihre unterrichtliche Umsetzung stützen sich auf *Kompetenzmodelle*, „die in Zusammenarbeit von Pädagogik, Psychologie und Fachdidaktik entwickelt werden müssen.“ Ein solches (für die meisten Fächer und Kompetenzen noch ausstehendes) Kompetenzmodell unterscheidet erstens *Teildimensionen* „innerhalb einer Domäne (also z.B. Rezeption und Produktion von Texten, mündlichen und schriftlichen Sprachgebrauch),“ und es beschreibt zweitens unterschiedliche *Niveaustufen* auf solchen Dimensionen: „Jede Kompetenzstufe ist durch kognitive Prozesse und Handlungen von bestimmter Qualität spezifiziert, die Schüler auf dieser Stufe bewältigen können, nicht aber Schüler auf niedrigeren Stufen“, also darüber, „welche Handlungen und mentalen Operationen mit hoher Wahrscheinlichkeit korrekt ausgeführt werden können.“ Dazu gehört, „dass für einzelne Jahrgänge festgelegt wird, welche Stufen die Schülerinnen und Schüler erreichen sollen.“ Kompetenzmodelle sollten idealerweise drittens auch Aussagen darüber machen, in welchen Kontexten, bei welchen Altersstufen und unter welchen Einflüssen sich die einzelnen Kompetenzbereiche *entwickeln*: „Nur so kann von der Schule erwartet werden, dass sie mit geeigneten Maßnahmen zur systematischen Kompetenzentwicklung, zum kumulativen Lernen beiträgt.“³

Nach der oben in Abschnitt 1 genannten Definition ist Kompetenz eine *Disposition*, „die Personen befähigt, bestimmte Arten von Problemen erfolgreich zu lösen, also konkrete Anforderungssituationen

¹ Hinsichtlich der Singular- oder Pluralform gibt es unterschiedliche Verwendungsweisen und entsprechende Kontroversen. So macht es beispielsweise einen Unterschied, ob unter „Methodenkompetenz“ jeweils aus gegebenem Anlass unterschiedliche fachliche Methoden oder innerhalb fachbezogener Kompetenzen dann auch methodische Aspekte subsumiert werden.

² Weinert, F. E. (2001): Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. E. Weinert (Hrsg.): *Leistungsmessungen in Schulen*. Weinheim und Basel: Beltz Verlag (S. 17–31), S. 27f.

³ Bundesministerium für Bildung und Forschung (Hrsg.) (2003): *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards*: Eine Expertise, S. 22f. (http://www.bmbf.de/pub/zur_entwicklung_nationaler_bildungsstandards.pdf)

eines bestimmten Typs zu bewältigen.“ Zur Logik von Dispositionsbegriffen wie ‚wasserlöslich‘, ‚zerbrechlich‘, ‚schwer entflammbar nach DIN ...‘ gehört es, dass ihr Zutreffen nicht unmittelbar beobachtet werden kann, sondern nur durch mehr oder weniger aufwändige Tests. Analog gilt: „Kompetenz kann nur leistungsbezogen erfasst und gemessen werden. Kompetenz [...] ist als Befähigung zur Bewältigung von Situationen bzw. von Aufgaben zu sehen. Jede Illustration oder Operationalisierung einer Kompetenz muss sich daher auf konkrete Anforderungssituationen beziehen.“⁴

Kompetenzmodelle sind zunächst wissenschaftliche Konstrukte. „Für die Umsetzung im Lehrplan und im Unterricht wie auch für die Bewertung von Schülerleistungen braucht man aber konkrete Beispiele und ‚Operationalisierungen‘, bis hin zu Messvorschriften in Gestalt von Testaufgaben“; andererseits sind empirische Untersuchungen mithilfe von Tests erforderlich, um zu prüfen, ob die Kompetenzmodelle mit den zugehörigen Testaufgaben „tatsächlich die Aspekte der Kompetenzen von Lernenden, ihre Niveaustufung und ggf. ihre Entwicklung angemessen widerspiegeln.“⁵ Untersuchungen wie PISA haben damit eine doppelte Funktion: Aussagen auf der Ebene des Bildungssystems über das Kompetenzniveau von Schülerinnen und Schülern und über Zusammenhänge mit schulischen wie außerschulischen Bedingungen im internationalen und nationalen Vergleich – und die empirische Untersuchung von Kompetenzmodellen.

3 PISA 2000: *mathematical literacy*

PISA (Programme for International Student Assessment) ist eine international (32 teilnehmende Staaten) standardisierte Leistungsmessung an 15-jährigen Schülerinnen und Schülern in den drei Bereichen *reading literacy*, *mathematical literacy* und *scientific literacy*, wobei nicht nur die Beherrschung des im Curriculum vorgesehenen Lehrstoffs abgedeckt wird, sondern – mit Hauptaugenmerk auf die Beherrschung von Prozessen, das Verständnis von Konzepten sowie auf die Fähigkeit, innerhalb eines Bereichs mit unterschiedlichen Situationen umzugehen – auch wichtige Kenntnisse und Fähigkeiten, die man im Erwachsenenleben benötigt (entsprechend liegt der Schwerpunkt für die Aufgaben bei *authentischen* Kontexten, so genannte „eingekleidete Aufgaben“ sollen vermieden werden).

Die erste Erhebung fand im Jahr 2000 statt, die zweite 2003, die dritte folgt 2006. Bei jedem Durchgang wird ein „Hauptbereich“ gründlicher getestet (2000 *reading literacy*, 2003 *mathematical literacy*, 2006 *scientific literacy*), dem dann zwei Drittel der Testzeit zugeteilt werden; in den beiden anderen Bereichen werden jeweils nur zusammenfassende Leistungsprofile erfasst.

Inhaltlich orientiert sich PISA nicht an den traditionellen Inhaltsbereichen der Mathematik wie Algebra oder Geometrie, sondern an „mathematischen Leitideen“. Der Durchgang 2000 umfasst im Bereich Mathematik 31 Items (davon 11 freigegeben). Wegen des relativ geringen Umfangs konzentriert sich die Untersuchung auf die Leitideen *Veränderung und Wachstum* und *Raum und Form* (bei PISA 2003 zusätzlich *quantitatives Denken* und *Ungewissheit*).

Bei PISA wird *mathematical literacy* verstanden als „die Fähigkeit einer Person, die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens dieser Person als konstruktivem, engagiertem und reflektierendem Bürger entspricht.“ Der Begriff *literacy* wurde gewählt, „um zu betonen, dass mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten, wie sie im traditionellen Curriculum der Schulmathematik definiert werden, im Rahmen von OECD/PISA nicht im Vordergrund stehen. Stattdessen liegt der Schwerpunkt auf der funktionalen Anwendung von mathematischen Kenntnissen in ganz unterschiedlichen Kontexten und auf ganz unterschiedliche, Reflektion und Einsicht erfordernde Weise.“⁶

Genannt werden die folgenden Kompetenzen:⁷

⁴ A.a.O., S. 72, 73

⁵ A.a.O., S. 23, 82

⁶ Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.). (2000) *Schülerleistungen im internationalen Vergleich: Eine neue Rahmenkonzeption für die Erfassung von Wissen und Fähigkeiten*. Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, S. 47 (<http://www.mpib-berlin.mpg.de/pisa/Rahmenkonzeptiondt.pdf>)

⁷ A.a.O., S. 49

1. *Die Fähigkeit, mathematisch zu denken.* Dazu gehört: Fragen zu stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind („gibt es...?“, „wenn ja, wie viele?“, „wie finden wir...?“); zu wissen, welche Art von Antworten die Mathematik für solche Fragen bereithält; zwischen unterschiedlichen Arten von Aussagen zu unterscheiden (Definitionen, Sätze, Vermutungen, Hypothesen, Beispiele, Bedingungen); Reichweite und Grenzen mathematischer Konzepte zu verstehen und zu berücksichtigen.
2. *Die Fähigkeit, mathematisch zu argumentieren.* Dazu gehört: zu wissen, was mathematische Beweise sind und wie sie sich von anderen Arten der mathematischen Argumentation unterscheiden; verschiedene Arten von mathematischen Argumentationsketten nachzuvollziehen und zu bewerten; heuristisches Gespür („was kann [nicht] passieren und warum?“); Entwicklung von mathematischen Argumenten.
3. *Die Fähigkeit zur mathematischen Modellierung.* Dazu gehört: den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, zu strukturieren; „Mathematisierung“ (Übersetzung der „Realität“ in mathematische Strukturen); „De-Mathematisierung“ (mathematische Modelle im Rahmen der modellierten „Realität“ zu interpretieren); mit einem mathematischen Modell zu arbeiten; das Modell zu validieren; das Modell und seine Ergebnisse zu reflektieren, zu analysieren und kritisch zu beurteilen; über das Modell und seine Ergebnisse (einschließlich der Grenzen dieser Ergebnisse) zu kommunizieren; den Prozess der Modellbildung zu beobachten und zu steuern.
4. *Die Fähigkeit, Probleme zu stellen und zu lösen.* Dazu gehört: verschiedene Arten von mathematischen Problemen zu stellen, mathematische Probleme zu formulieren und zu definieren („reine“, „angewandte“, „offene“ und „geschlossene“); und verschiedene Lösungswege für unterschiedliche Arten von mathematischen Problemen zu finden.
5. *Die Fähigkeit, mathematische Darstellungen zu nutzen.* Dazu gehört: verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten und Situationen sowie die Wechselbeziehungen zwischen diesen Darstellungsformen zu erkennen, zu interpretieren und zu unterscheiden; verschiedene Darstellungsformen je nach Situation und Zweck auszuwählen und zwischen ihnen zu wechseln.
6. *Die Fähigkeit, mit den symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umzugehen.* Dazu gehört: die symbolische und formale Sprache zu dekodieren und zu interpretieren und ihre Beziehung zur natürlichen Sprache zu verstehen; natürliche Sprache in die symbolische/formale Sprache zu übersetzen; mit Aussagen und Ausdrücken umzugehen, die Symbole und Formeln enthalten; Variablen zu benutzen; Gleichungen zu lösen und Berechnungen vorzunehmen.
7. *Die Fähigkeit zu kommunizieren.* Dazu gehört: sich mündlich und schriftlich in verschiedenen Formen zu Sachverhalten mit mathematischem Inhalt zu äußern und entsprechende schriftliche oder mündliche Aussagen von anderen Personen zu verstehen.
8. *Die Fähigkeit, Hilfsmittel einzusetzen und zu gebrauchen.* Dazu gehört: die verschiedenen Hilfsmittel (einschließlich solche aus dem Bereich der Informationstechnologie), die bei mathematischen Aktivitäten hilfreich sein können, zu kennen und anzuwenden sowie die Grenzen dieser Hilfsmittel einzuschätzen.

Im Rahmen von PISA sind keine Items vorgesehen, mit denen diese Fähigkeiten jeweils getrennt erfasst werden, vielmehr werden zur Operationalisierung der mathematischen Kompetenzen durch die Konstruktion von Items die Fähigkeiten zu drei größeren Kompetenzklassen zusammengefasst.⁸

Kompetenzklasse 1: Wiedergabe, Definitionen und Berechnungen

Kompetenzklasse 2: Querverbindungen und Zusammenhänge herstellen, um Probleme zu lösen

Kompetenzklasse 3: Einsichtsvolles mathematisches Denken und Verallgemeinern

Bei der Darstellung der Ergebnisse von PISA werden die Leistungen der Testpersonen (abhängig vom korrekt gelösten Aufgabenanteil) und die Aufgaben (abhängig vom Schwierigkeitsgrad, d.h. von der empirischen Lösungshäufigkeit) auf derselben Skalenmetrik (Mittelwert 500, Standardabweichung 100) angeordnet. Eine Aufgabenschwierigkeit von beispielsweise 534 bedeutet dann, dass Personen mit einer Fähigkeit von 534 diese Aufgabe mit einer hinreichend großen Wahrscheinlichkeit (gewählt wurde hier 62 Prozent; der Wert ist sinnvollerweise auch von der Itemzahl abhängig, bei TIMSS II waren es 65 Prozent) lösen.

Um nicht nur viele Einzelwerte zu betrachten, werden bei PISA die Fähigkeits- und Aufgabenschwierigkeitsbereiche in fünf so genannte Kompetenzstufen unterteilt. Dazu werden auf der Skala fünf gleich lange Intervalle durch die Festlegung einer Mindestlösungswahrscheinlichkeit (50 Prozent) für

⁸ A.a.O., S. 50

die Aufgaben dieser Stufe bestimmt (bei Mathematik ergeben sich ca. 90 Skalenwerte). Schülerinnen und Schüler, die einer bestimmten Kompetenzstufe zugeordnet werden, haben somit nicht zwangsläufig alle Aufgaben gelöst, die für diese Stufe charakteristisch sind:

Die Kompetenzstufen werden international so konzipiert, dass durchschnittlich fähige Schülerinnen und Schüler einer Stufe eine durchschnittlich schwierige Aufgabe in 62 Prozent der Fälle lösen. Von allen Schülerinnen und Schülern, die sich einer Kompetenzstufe zuordnen lassen, kann weiterhin erwartet werden, dass sie mindestens die Hälfte der Aufgaben dieser Stufe korrekt lösen. Jugendliche am unteren Ende der Kompetenzstufe lösen die leichtesten Aufgaben dieser Stufe in 62 Prozent der Fälle, die schwersten Aufgaben hingegen in 42 Prozent der Fälle. Schülerinnen und Schüler am oberen Ende der Kompetenzstufe lösen die schwersten Aufgaben in 62 Prozent der Fälle und die leichtesten Aufgaben in 78 Prozent der Fälle. [...] Gleichzeitig lösen sie die Aufgaben niedrigerer Stufen mit entsprechend höherer Wahrscheinlichkeit. Umgekehrt werden von einem Jugendliche[n], dessen [K]ompetenz beispielsweise der Kompetenzstufe II zugeordnet ist, die Aufgaben der Kompetenzstufe III in weniger als 50 Prozent der Fälle korrekt gelöst.⁹

Interessant für die Didaktik und Unterrichtsentwicklung ist dann die Frage, ob sich diese quantitativ konstruierten (und letztlich willkürlichen) Kompetenzstufen auch qualitativ, also *inhaltlich* beschreiben lassen.

4 PISA-E: mathematische Grundbildung

Im Hinblick auf die nationalen Curricula, die unterrichtliche Realität an deutschen Schulen, die fachdidaktische Tradition und Diskussion sowie auf die Ergebnisse früherer Untersuchungen wie die TIMS-Studien wurde PISA 2000 von der deutschen Pisa-Expertengruppe Mathematik durch eine nationale Ergänzungsstudie erweitert (86 Items, davon 18 freigegeben; mit der größeren Itemzahl wurde auch eine gleichmäßigere Berücksichtigung der traditionellen Stoffgebiete des Mathematikunterrichts ermöglicht).

Die für PISA grundlegende *mathematical literacy* wird dabei als „ein ausdrücklich einer bestimmten mathematikdidaktischen Lehr-Lern-Tradition verbundenes und daher stark normativ geprägtes Konzept“ charakterisiert. Es fehle der Hinweis darauf, dass Mathematik auch als „eine deduktiv geordnete Welt eigener Art“ (Heinrich Winter) gesehen werden könne und solle; nach vorliegenden empirischen Untersuchungen zeigten sich im deutschen Mathematikunterricht „Probleme beim verständnisvollen Gebrauch und bei der Vernetzung mathematischer Konzepte, sowie eine Überbetonung kalkülorientierter Fertigkeiten“, die begriffliche Orientierung des internationalen PISA-Tests an der *mathematical literacy* treffe also in Deutschland „nicht auf eine entsprechend vorbereitete Unterrichts- und curriculare Realität.“ Entsprechend werden bei den Kompetenzen andere Akzente gesetzt und neben authentischen Kontexten auch weitere einbezogen. Weiter werden die oben im Abschnitt 3 genannten Kompetenzklassen der internationalen Untersuchung aus zwei Gründen für zu grob gehalten, um spezifische Leistungen und Defizite aufgrund des deutschen Mathematikunterrichts erfassen zu können: Einerseits erfordere die „schwerpunktmäßig auf Kalküle, Algorithmen, Prozeduren bezogene und wenig integrative Ausrichtung des deutschen Mathematikunterrichts, die technischen Fertigkeiten separat auszuweisen. Andererseits will der deutsche PISA-Ergänzungstest auch Ansätze erfassen, wo eine gezielte Weiterentwicklung des deutschen Mathematikunterrichts stattfinden kann und notwendig ist. Der Test soll also auch diagnostische Hinweise geben können.“¹⁰

Damit werden im *framework* des nationalen Ergänzungstests PISA-E u.a. folgende Unterscheidungen vorgenommen:¹¹

⁹ Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.) (2001): *Pisa 2000: Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*. Opladen: Leske + Budrich, S. 95.

Vgl. für die mathematischen Details der Konstruktion der Kompetenzstufen: Knoche, N., Lind, D., Blum, W., Cohors-Fresenborg, E., Flade, L., Löding, W., Möller, G., Neubrand, M., Wynands A., (Deutsche PISA-Expertengruppe Mathematik) (2002): Die PISA-2000-Studie: Einige Ergebnisse und Analysen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 23, Heft 3/4 (S. 159–202), S. 171ff.

¹⁰ Neubrand, M., Biehler, R., Blum, W., Cohors-Fresenborg, E., Flade, L., Knoche, N., Lind, D., Löding, W., Möller, G., Wynands A., (Deutsche PISA-Expertengruppe Mathematik) (2001): Grundlagen der Ergänzung des internationalen PISA-Mathematik-Tests in der deutschen Zusatzerhebung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Vol. 33 (2) (S. 45–59), S. 47, 48, 50 (<http://www.fiz-karlsruhe.de/fiz/publications/zdm/zdm012i1.pdf>)

¹¹ A.a.O., S. 56f.

Mathematische Tätigkeit:

Begründung/Beweis
spezielle mathematische Tätigkeit

Modellierung:

präzisieren / mathematisieren
interpretieren / validieren

Kompetenzklasse:

Klasse 1A: Technische Fertigkeiten
Klasse 1B: Einschrittige Standardmodellierungen
Klasse 2A: Einschrittige begriffliche Modellierung
Klasse 2B: Mehrschrittige Modellierungen (ggf. integrativ / repetitiv)
Klasse 3: Strukturelle Verallgemeinerung

Stoffgebiet:

Arithmetik
Proportionalität (insbes. Prozentrechnung)
Algebra (insbes. lineare Funktionen)
Geometrie
Stochastik und Umgehen mit Daten

Kontext:

authentisch
realitätsbezogen
Rechnen mit Größen
innermathematisch
ohne

Mit diesen Ergänzungen wird von der deutschen PISA-Expertengruppe Mathematik der Anspruch formuliert, (in Anlehnung, Ergänzung und Abgrenzung zur *mathematical literacy* der internationalen Studie) die *mathematische Grundbildung* der deutschen Schülerinnen und Schüler adäquater zu erfassen als es durch den internationalen Test allein möglich wäre. Nach der Auswertung der Ergebnisse und Verankerung der nationalen Ergänzungsaufgaben auf der PISA-Skala – mit nur geringen Unterschieden zwischen dem internationalen und dem nationalen Test¹² – werden die fünf Kompetenzstufen inhaltlich als unterschiedliche Ausprägungen der mathematischen Grundbildung von Schülerinnen und Schülern interpretiert (wobei Stufe III als der „Standard mathematischer Grundbildung“ betrachtet wird, „der von 15-Jährigen erreicht werden sollte“).¹³

Stufe I: Rechnen auf Grundschulniveau (Skalenwerte 329–420)

Personen, die dieser Stufe zugeordnet werden, verfügen lediglich über arithmetisches und geometrisches Wissen auf Grundschulniveau. Sie können dieses Wissen abrufen und unmittelbar anwenden, wenn die Aufgabenstellung von vornherein eine bestimmte Standard-Mathematisierung nahe legt. Begriffliche Modellierungen sind nicht leistbar.

Stufe II: Elementare Modellierungen (Skalenwerte 421–511)

Auf dieser Stufe werden auch einfachste begriffliche Modellierungen vorgenommen, die in einen außermathematischen Kontext eingebettet sind. Personen auf dieser Kompetenzstufe können unter mehreren möglichen Lösungsansätzen den passenden finden, wenn durch Graphiken, Tabellen, Zeichnungen usw. eine Struktur vorgegeben ist, die das Modellieren erleichtert. Auch auf dieser Stufe sind allerdings nur die Wissensinhalte der Grundschulmathematik sicher verfügbar.

¹² Überraschenderweise zeigte sich, „dass der internationale Test für die deutsche Schülerpopulation etwas *leichter* (!) als der nationale Test war“ (Knoche et. al. (2002) (s. Anm. 9), S. 181).

In einer Zusatzstudie wurden die Ergebnisse des internationalen Tests bundesländerweise mit den Ergebnissen einer Teilmenge der Items verglichen, die von Experten der jeweiligen Bundesländer als „lehrplanvalide“ (in dem Sinne, dass die Lösung der Aufgabe vor der 9. Klassenstufe erwartet werden kann) eingestuft wurden. Dabei gab es kleinere Unterschiede, aber *in beide Richtungen* (z.B. eine leichte „Verbesserung“ in Bayern, eine kleine „Verschlechterung“ in Rheinland-Pfalz), insgesamt jedoch „eine statistisch nicht nachweisbare Differenz“ (Baumert, Artelt, Klieme, Neubrand, Prenzel, Schiefele, Schneider, Schümer, Stanat, Tillmann, Weiß (Hrsg.) (2003): *PISA 2000: Ein differenzierter Blick auf die Länder der Bundesrepublik Deutschland*, Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, S. 9–15 http://www.mpib-berlin.mpg.de/pisa/PISA-E_Vertief_Zusammenfassung.pdf).

¹³ Klieme, E., Neubrand, M., Lüdtke, O., (2001): Mathematische Grundbildung: Testkonzeption und Ergebnisse. In: Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.): *Pisa 2000: Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*. Opladen: Leske + Budrich (S. 139–190), S. 160f.

Stufe III: *Modellieren und begriffliches Verknüpfen auf dem Niveau der Sekundarstufe I* (512–603)

Mit dieser Stufe findet im Vergleich zu Stufe II in mehrfacher Hinsicht ein qualitativer Sprung statt. Schülerinnen und Schüler auf dieser Kompetenzstufe verfügen auch über einfache Wissensinhalte der Sekundarstufe I, also über den Standardstoff der Lehrpläne aller Schulformen. Sie können Konzepte aus unterschiedlichen mathematischen Bereichen verknüpfen und zur Lösung von Problemstellungen nutzen, wenn visuelle Darstellungen den Lösungsprozess unterstützen.

Stufe IV: *Umfangreiche Modellierungen auf der Basis anspruchsvoller Begriffe* (Skalenwerte 604–695)

Schülerinnen und Schüler auf dieser Kompetenzstufe bewältigen im technischen Bereich umfangreichere Verarbeitungsprozesse, können also eine Lösung über mehrere Zwischenergebnisse hinweg aufbauen. Auch offene Modellierungsaufgaben werden bewältigt, bei denen man unter vielfältigen Lösungswegen einen eigenen finden muss. Verstärkt können auch innermathematische begriffliche Zusammenhänge modelliert werden.

Stufe V: *Komplexe Modellierung und innermathematisches Argumentieren* (Skalenwerte über 696)

Auf dieser letzten Stufe ist auch anspruchsvolles curriculares Wissen verfügbar. Die Schülerinnen und Schüler, die dieser Kompetenzstufe zugeordnet werden, können auch sehr offen formulierte Aufgaben bewältigen, bei denen ein Modell frei gewählt bzw. selbst konstruiert werden muss. Begriffliche Modellierungsleistungen auf dieser höchsten Stufe umschließen häufig Begründungen und Beweise sowie das Reflektieren über den Modellierungsprozess selbst.

Im Ergebnis der Untersuchung ist die mathematische Grundbildung der 15-Jährigen in Deutschland nach didaktischen und curricularen Maßstäben wenig befriedigend:¹⁴

- Die Spitzengruppe, die selbstständig mathematisch argumentieren und reflektieren kann (Kompetenzstufe V), ist äußerst klein (1,3%).
- Weniger als die Hälfte der Schülerinnen und Schüler kann Aufgaben, die zum curricularen Standard gehören, mit ausreichender Sicherheit lösen (Kompetenzstufen III–V).
- Ein Viertel der 15-Jährigen muss als Risikogruppe eingestuft werden, deren mathematische Grundbildung nur bedingt für die erfolgreiche Bewältigung einer Berufsausbildung ausreicht (unter und auf Kompetenzstufe I).

5 Nationale Bildungsstandards

Mit dem Ziel, die Qualität schulischer Bildung, die Vergleichbarkeit schulischer Abschlüsse sowie die Durchlässigkeit des Bildungssystems zu sichern und dabei Hinweise für notwendige Förderungs- und Unterstützungsmaßnahmen zu gewinnen, hat die KMK am 04.12.2003 Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss (Jgst. 10) in Deutsch, Mathematik und 1. Fremdsprache beschlossen, die von den Ländern zu Beginn des Schuljahres 2004/05 als Grundlagen der fachspezifischen Anforderungen für diesen Abschluss übernommen werden. Im Laufe des Jahres 2004 werden Standards für die Grundschule (Jgst. 4) in Deutsch und Mathematik, für die Hauptschule (Jgst. 9) in Deutsch, Mathematik und 1. Fremdsprache und für den Mittleren Schulabschluss in Biologie, Physik und Chemie folgen.

Diese Bildungsstandards „greifen allgemeine Bildungsziele auf und benennen Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe an zentralen Inhalten erworben haben sollen.“ Sie „basieren auf fachspezifisch definierten Kompetenzmodellen, die aus der Erfahrung der Schulpraxis heraus entwickelt wurden“, „beziehen international anerkannte Standardmodelle – u.a. theoretische Grundlagen der PISA-Studie und den Gemeinsamen europäischen Referenzrahmen für Sprachen – ein“ und¹⁵

- greifen die Grundprinzipien des jeweiligen Unterrichtsfaches auf;
- beschreiben die fachbezogenen Kompetenzen einschließlich zugrunde liegender Wissensbestände, die Schülerinnen und Schüler bis zu einem bestimmten Zeitpunkt ihres Bildungsganges erreicht haben sollen;

¹⁴ Vgl. a.a.O., S. 167–170

¹⁵ *Vereinbarung über Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss (Jahrgangsstufe 10) und Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss* (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 04.12.2003), S. 3 (http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Mathematik_MSA_BS_04-12-2003.pdf)

- zielen auf systematisches und vernetztes Lernen und folgen so dem Prinzip des kumulativen Kompetenzerwerbs;
- beschreiben erwartete Leistungen im Rahmen von Anforderungsbereichen;
- beziehen sich auf den Kernbereich des jeweiligen Faches und geben den Schulen Gestaltungsräume für ihre pädagogische Arbeit;
- weisen ein mittleres Anforderungsniveau aus;
- werden durch Aufgabenbeispiele veranschaulicht.

Mit dem Beschluss über die Bildungsstandards verpflichten sich die Länder,

die Standards zu implementieren und anzuwenden. Dies betrifft insbesondere die Lehrplanarbeit, die Schulentwicklung und die Lehreraus- und -fortbildung. Die Länder kommen überein, weitere Aufgabenbeispiele zu entwickeln und in landesweiten bzw. länderübergreifenden Orientierungs- und Vergleichsarbeiten oder in zentralen oder dezentralen Prüfungen festzustellen, in welchem Umfang die Standards erreicht werden. Diese Feststellung kann zum Abschluss der Jahrgangsstufe 10 erfolgen oder auch schon zu einem früheren Zeitpunkt getroffen werden, um Interventionen zu ermöglichen.¹⁶

Die *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss* nennen (mit jeweils drei bis vier Unterpunkten) sechs – recht anspruchsvolle – allgemeine mathematische Kompetenzen (vgl. oben S. 4 die Kompetenzen 2–7 der Rahmenkonzeption der internationalen PISA-Studie)

- (K 1) Mathematisch argumentieren
- (K 2) Probleme mathematisch lösen
- (K 3) Mathematisch modellieren
- (K 4) Mathematische Darstellungen verwenden
- (K 5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
- (K 6) Kommunizieren

und inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen, geordnet nach fünf mathematischen Leitideen (mit jeweils sieben bis zwölf Unterpunkten, insgesamt aber relativ geringen „stofflichen“ Vorgaben)

- (L 1) Leitidee Zahl
- (L 2) Leitidee Messen
- (L 3) Leitidee Raum und Form
- (L 4) Leitidee Funktionaler Zusammenhang
- (L 5) Leitidee Daten und Zufall

und unterscheiden (angelehnt an die *Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung*) drei Anforderungsbereiche der allgemeinen mathematischen Kompetenzen:

- I Reproduzieren
- II Zusammenhänge herstellen
- III Verallgemeinern und Reflektieren

Den Abschluss bilden 14 kommentierte Aufgabenbeispiele mit Zuordnung der Aufgabenteile zu den Leitideen und den allgemeinen mathematischen Kompetenzen mit ihren Ausprägungen in den Anforderungsbereichen (wobei eine Reihe von Aufgaben nicht nur unterschiedliche allgemeine Kompetenzen, sondern auch Leitideen miteinander verbinden).

Zur Überprüfung und Normierung der Standards Mathematik für den Mittleren Abschluss im Bundesdurchschnitt im Zusammenhang mit PISA 2006 (also in Jgst. 9) wird im Auftrag der KMK ein Aufgabenpool entwickelt, der Anfang 2005 den Feldtest für PISA durchlaufen soll. Dazu werden im Hinblick auf die gemäß den Bildungsstandards bei den Schülerinnen und Schülern anzustrebenden Kompetenzen für vier Inhaltsbereiche unter Einbeziehung der Leitideen (1: Arithmetik / Zahl und Messen, 2: Geometrie / Messen, Raum und Form, 3: Algebra / Funktionaler Zusammenhang, 4: Stochastik / Daten und Zufall) je etwa 200 Aufgaben mit angemessener Berücksichtigung von Einzelthemen der gesamten Sekundarstufe I (Spiralcurriculum, kumulativer Kompetenzaufbau) erarbeitet. Die Anforderungsbereiche I, II und III sollen dabei im Verhältnis 1 : 2 : 1, die Aufgabenformate *multiple choice*,

¹⁶ Vereinbarung über Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss (Jahrgangsstufe 10), S. 4

geschlossen, offen im Verhältnis 1 : 1 : 1 berücksichtigt werden, und es soll auf eine ausgeglichene Balance zwischen inner- und außermathematischen Kontexten geachtet werden.

6 Hamburger Rahmenpläne Mathematik

Für Bildungspläne gibt es idealtypisch zwei grundsätzlich unterschiedene Konzepte: Es werden entweder für die einzelnen Klassenstufen oder für kürzere Einheiten die verbindlich zu unterrichtenden Inhalte (sog. *Input*-Orientierung) oder die Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bzw. Kompetenzen, über die die Schülerinnen und Schüler am Ende eines Bildungsgangs verfügen sollen (sog. *Output*-Orientierung), vorgegeben. Die neuen Hamburger Bildungspläne¹⁷ nehmen hier eine Zwischenstellung ein: In den Rahmenplänen der Fächer werden nach den Zielen (Abschnitt 1), didaktischen Grundsätzen (2) und verbindlichen Inhalten (3) im Abschnitt 4.1 auch die Anforderungen für die Schülerinnen und Schüler jeweils am Ende der Klassenstufen 2, 4, 6, 8 und 9 bzw. 10 genannt.

In den Rahmenplänen Mathematik der Sekundarstufe I (Hauptschule und Realschule, Gesamtschule, Gymnasium) werden dazu allgemeine (mathematische) Anforderungen unterteilt nach den Fähigkeiten (vgl. oben S. 4 die Kompetenzen 1–8 der Rahmenkonzeption der internationalen PISA-Studie und die Kompetenzen (K 1)–(K 6) der Bildungsstandards)

- mathematisch zu denken,
- mathematisch zu argumentieren und kommunizieren,
- zur mathematischen Modellierung,
- Probleme zu stellen und zu lösen,
- mathematische Darstellungen zu nutzen,
- mit den symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umzugehen,
- Hilfsmittel einzusetzen und zu gebrauchen,

und Anforderungen bezogen auf die zentralen Ideen genannt, und zwar (vgl. (L 1)–(L 5) der Bildungsstandards) für die Idee

- der Zahl,
- des Messens,
- des räumlichen Strukturierens,
- des funktionalen Zusammenhangs,
- der Statistik und der Wahrscheinlichkeit.

Inhalt und Struktur der in den Hamburger Rahmenplänen Mathematik der Sekundarstufe I genannten Anforderungen (Abschnitt 4.1 der Pläne) bieten damit – verbunden mit der Implementierung der Bildungspläne und ggf. mit dem Ausweis eines *Kernbereiches* von Kompetenzen – sehr gute Voraussetzungen für die Implementierung der Bildungsstandards in Hamburg.

¹⁷ <http://fhh.hamburg.de/stadt/Aktuell/behoerden/bildung-sport/daten-und-fakten/hh-bildungsplaene>

Anhang: Mathematik-Kompetenzen im Überblick

	PISA 2000	PISA-E	Bildungsstandard MA	Aufgabenpool 2006	RPL Mathematik Hamburg
Allgemeine mathematische Kompetenzen	<ol style="list-style-type: none"> 1. Mathematisch denken 2. Mathematisch argumentieren 3. Mathematische Modellierung 4. Probleme stellen und lösen 5. Mathematische Darstellungen nutzen 6. Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen 7. Kommunizieren 8. Hilfsmittel einsetzen und gebrauchen 	<ul style="list-style-type: none"> • Mathematische Tätigkeit (Begründung, Beweis, spezielle mathematische Tätigkeit) • Modellierung (präzisieren / mathematisieren, interpretieren / validieren) • Präsentation 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Mathematisch argumentieren 2. Probleme mathematisch lösen 3. Mathematisch modellieren 4. Mathematische Darstellungen verwenden 5. Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen 6. Kommunizieren 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Mathematisch argumentieren 2. Probleme mathematisch lösen 3. Mathematisch modellieren 4. Mathematische Darstellungen verwenden 5. Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen 6. Kommunizieren 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Mathematisch denken 2. Mathematisch argumentieren und kommunizieren 3. Mathematische Modellierung 4. Probleme stellen und lösen 5. Mathematische Darstellungen nutzen 6. Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen 7. Hilfsmittel einsetzen und gebrauchen
Leitideen / Inhaltsbereiche	<ul style="list-style-type: none"> • Veränderung und Wachstum • Raum und Form <p>PISA 2003 zusätzlich</p> <ul style="list-style-type: none"> • quantitatives Denken • Ungewissheit 	<ul style="list-style-type: none"> • Arithmetik • Proportionalität (insbes. Prozentrechnung) • Algebra (insbes. lineare Funktionen) • Geometrie • Stochastik und Umgehen mit Daten 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Zahl 2. Messen 3. Raum und Form 4. Funktionaler Zusammenhang 5. Daten und Zufall 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Arithmetik / Zahl und Messen 2. Geometrie / Messen, Raum und Form 3. Algebra / Funktionaler Zusammenhang 4. Stochastik / Daten und Zufall 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Zahl 2. Messen 3. Räumliches Strukturieren 4. Funktionaler Zusammenhang 5. Statistik und Wahrscheinlichkeit
Kompetenzklassen / Anforderungsbereiche	<p>Kompetenzklassen</p> <ol style="list-style-type: none"> 1 Wiedergabe, Definitionen und Berechnungen 2 Querverbindungen und Zusammenhänge herstellen, um Probleme zu lösen 3 Einsichtsvolles mathematisches Denken und Verallgemeinern 	<p>Kompetenzklassen</p> <p>1A Technische Fertigkeiten</p> <p>1B Einschrittige Standardmodellierungen</p> <p>2A Einschrittige begriffliche Modellierung</p> <p>2B Mehrschrittige Modellierungen (ggf. integrativ / repetitiv)</p> <p>3 Strukturelle Verallgemeinerung</p>	<p>Anforderungsbereiche</p> <p>I Reproduzieren</p> <p>II Zusammenhänge herstellen</p> <p>III Verallgemeinern und Reflektieren</p>	<p>Anforderungsbereiche</p> <p>I Reproduzieren</p> <p>II Zusammenhänge herstellen</p> <p>III Verallgemeinern und Reflektieren</p>	